

TRIAL – SYSTÉM PRO PODPORU VÝUKY MATEMATIKY

JAN ČEPIČKA A PETR NEČESAL

ABSTRAKT. Cílem příspěvku je seznámit účastníky semináře se systémem *Trial*, který je již několik let používán ve výuce matematiky na Západočeské univerzitě v Plzni. *Trial* dokáže generovat zajímavé zápočtové i zkouškové písemné práce, kdy počet různých písemných prací odpovídá počtu studentů. *Trial* se stává zároveň průvodcem či pomocníkem studenta ve světě matematiky, a to zejména v náročných prvních semestrech jeho studia.

1. ÚVOD

Systém s názvem *Trial* vznikl na katedře matematiky (KMA) na Fakultě aplikovaných věd na Západočeské univerzitě v Plzni (ZČU) a byl určen zejména pro studenty prvních ročníků technických fakult. Původní myšlenka byla dát studentům k dispozici on-line databázi příkladů z matematiky, pomocí které si budou moci procvičovat příklady do zápočtových a zkouškových písemných prací. Tedy studenti si budou moci nanečisto sami vyzkoušet (odtud název z angl. trial) a vyřešit např. celý zápočtový test. Od té doby se *Trial* rozrostl na řádově stovky typových příkladů (každý příklad je k dispozici v mnoha náhodných mutacích), které se používají ve výuce a pro písemné práce v přibližně deseti velkých předmětech vyučovaných katedrou matematiky na pěti fakultách ZČU každoročně pro přibližně 3500 studentů. Veřejná část *Trialu* je k dispozici na webové adrese

<http://trial.kma.zcu.cz>.

Svým rozsahem a použitím je *Trial* webovým serverem s jednou z největších návštěvností na ZČU. Počet přístupů je (a to zejména v době před zápočtovými písemnými pracemi) srovnatelný s přístupem k předzápisu do studijní agendy univerzity. Celoroční návštěvnost (přesahující 1,2 miliónu přístupů) zvyšují také nezanedbatelné počty přístupů z doménových rozsahů dalších vysokých škol v ČR, zejména z VŠB TU v Ostravě, z ČVUT v Praze, z VUT v Brně, z JČU v Českých Budějovicích a také z několika středních škol Plzeňského kraje. Dá se říci, že pojem *Trial* se stal určitým symbolem a zažitou součástí výuky matematiky na ZČU. Po krátkém seznámení se s *Trialem* na výše uvedené webové adrese sami dokážete definovat, co je *Trial*:

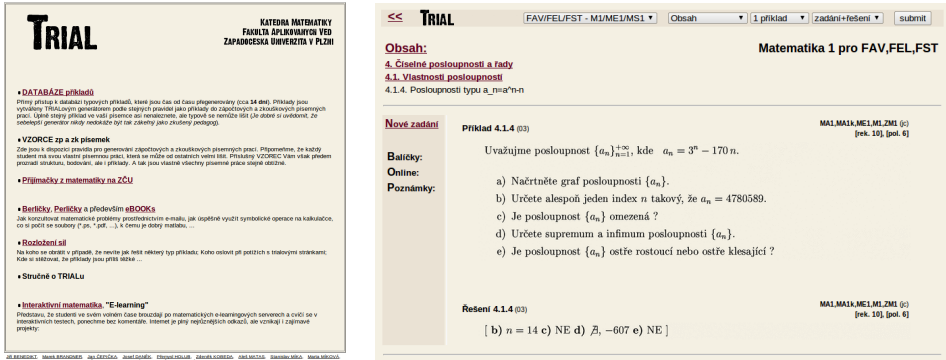
- i) publikační systém,

2010 MSC. Primární 97U50; Sekundární 97U30, 97U40.

Klíčová slova. publikační systém, generátor písemných prací, multiple-choice testy.

Práce byla podporována projektem A-Math-Net Síť pro transfer znalostí v aplikované matematice (CZ.1.07/2.4.00/17.0100) a projektem Modernizace obsahu a formy výuky matematiky pro přírodní a technické vědy (CZ.1.07/2.2.00/15.0377).

- ii) rozsáhlejší sbírka (ne)řešených příkladů,
- iii) elektronická skripta,
- iv) úložiště materiálů pro podporu výuky matematiky.



Obrázek 1. Webové rozhraní první generace Trialu.

2. NÁVRAT DO HISTORIE TRIALU

Než se podrobněji seznámíme s tím, co systém Trial nabízí studentům a pedagogům v roce 2011, podívejme se krátce do minulosti na vývoj systému během devíti let.

- i) Zrod myšlenky vytvořit na ZČU generátor písemek je datován do období od 9. do 13. září **2002**, kdy se konala 27. konference o matematice na školách VŠTEZ v Hejnicích. Počátky Trialu jsou tak spjaty s následujícími výroky, které byly na této konferenci prezentovány (viz [1]):
 - (a) Úroveň matematických znalostí u průměrného absolventa střední školy a uchazeče o studium na Fakultě elektrotechnické (FEL) a Fakultě strojní (FST) je na **historickém minimu**.
 - (b) Nepřípravenost uchazečů k samostatnému studiu určené problematiky je v tomto případě na **historickém maximu**.
- ii) 31. října **2002** proběhla první zápočtová písemná práce, která byla vygenerována počítačem. Generování proběhlo v rámci předmětu Matematika 1 (KMA/ME1) na FEL.
- iii) 1. listopadu **2002** byl generátor nazván Trial (viz [3]): trial = soud, soudní proces, přelíčení, líčení, zkouška, zkušební, pokus, experiment, strast, utrpení, soužení, trápení.
- iv) 7. ledna **2003** proběhla první zkouška v rámci předmětu KMA/ME1, kdy část písemné práce byla generována systémem Trial.
- v) 20. února **2003** byla zřízena doména trial.kma.zcu.cz (viz obr. 1).
- vi) Během března **2003** byl rozšířen Trial o generátory příkladů pro předměty Základy matematiky 2 (KMA/ZM2) a Numerické metody (KMA/NM).
- vii) 20. května **2003** byla poprvé zkoušková písemná práce svěřena zcela do režie generátoru (viz obr. 2), a to v rámci předmětu Matematika 1 (KMA/M1) na FST.

Jméno PŘÍJMENÍ (kroužek)

ZKOUŠEJÍCÍ

Zkoušková písemná práce M1 / 2003**Příklad 1.1.**

Určete Taylorův polynom 2. stupně $T_2(x)$ funkce $\varphi(x) = 2x^2 + 9x + 8$ v bodě $x_0 = -5$.
[3 body]

Příklad 1.2.

Uvažujme nekonečnou číselnou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_n = \ln\left(\frac{n+1}{2+n}\right)$.

- Určete předpis pro n -tý člen posloupnosti částečných součtů $\{s_n\}$.
- Sečtěte prvních 5, 15 a 19 členů posloupnosti $\{a_n\}$.
- Vypočtěte součet nekonečné číselné řady.

[3 body]

Příklad 1.3.

Rozhodněte, kolik řešení má v oboru reálných čísel nelineární rovnice:

$$x \ln 9x = -\frac{1}{9e}$$

Své rozhodnutí pečlivě zdůvodněte a definujte intervaly $I_k \subset \mathbb{R}$, tak aby každý x nich obsahoval právě jedno řešení.

(Využijte tvrzení věty o řešitelnosti rovnice $f(x) = y_0$. Vytězte D_f , limity v krajních bodech D_f , lokální extrém a spojitost funkce f .)

[3 body]

Příklad 1.4.

Vypočtěte následující určitý integrál:

$$\int_0^{2\pi} e^{2x} \cos(x) dx.$$

[3 body]

Příklad 1.5.

Vypočtěte neurčitý integrál z racionální lomené funkce:

$$\int \frac{2y^2 + 42 + 8y}{(y^2 + 25)(y - 1)} dy.$$

[3 body]

Obrázek 2. Ukázka generované zkouškové písemné práce pro předmět Matematika 1 na Fakultě strojní v letním semestru 2003.

3. června **2003** byl zabaven první trialový tahák (KMA/M1) na FST.
- V září **2003** byly prezentovány zkušenosti se systémem **Trial** na 3. konferenci o matematice a fyzice na vysokých školách s mezinárodní účastí (viz [2]).
- V roce **2004** byl tým pracovníků kolem **Trialu** posílen o nové členy, systém **Trial** byl rozšířen o nové příklady. K 16. 2. **2004** **Trial** nabízel 4587 zadání příkladů, 4345 řešení příkladů a 40 balíčků příkladů, registrováno bylo 308 871 přístupů.
- Současní doktorandi na KMA v letech **2004** a **2005** úspěšně absolvovali písemné práce generované výhradně **Trialem**. Součástí těchto písemných prací byly i důkazové příklady (v rámci předmětu KMA/MA1), na ukázkou uveďme jeden z nich:

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost nenulových reálných čísel.

Které z následujících implikací platí?

$$\sum_{n=16}^{+\infty} a_n^2 \text{ konverguje} \quad \begin{matrix} \Longleftarrow \\ \Longrightarrow \end{matrix} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} na_n = 0$$

Své závěry zdůvodněte a dokažte.

Pro prokázání případné neplatnosti některé z implikací uveďte vhodný protipříklad.

15. prosince **2008** byla založena druhá generace **Trialu**, webový server již nabízí dva režimy práce: uživatel / správce. Je umožněna přímá správa serveru přes webové rozhraní. Neveřejná část systému je napsaná v Matlabu a pomocí ní jsou spouštěny tzv. generátory (každý typový příklad má svůj nezávislý generátor), které vytvářejí zdrojové texty pro L^AT_EX (viz obr. 3). Z těchto textů jsou pak následně vytvářeny podklady buď pro tisk (zadání zápočtových a zkouškových písemných prací, vzorová řešení, balíčky příkladů) nebo pro web – veřejnou prezentační část **Trialu**.

xiii) Od října 2010 je Trial podporován prostřednictvím projektu **Moder-
nizace obsahu a formy výuky matematiky pro přírodní a technické
vědy**¹ (viz <http://mmm.zcu.cz>).

```
function [sZADANI,sRESENI,sVYSLEDKY]=jadro5;
definit_CALL;

Vprikklady=[1,2,3,4,5,6];
ot=round(WithMemory('rndDATA5.mat',Vprikklady,1);
genINF0(['J5/ot',num2str(ot(1))]);

a=rand([-9;-2,2,9]);
b=rand([-5;-3,3,8]); if abs(a)==abs(b), b=b+1; end;
d=rand([-9;-2,2,9]);

k=ot(1);
switch k,
case 1,
    ss0=['\frac{',ltx(a),'e^{',ltx(b),' x}\}',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\}'];
    ss1=['\frac{e^{',ltx(b),' x}\}',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\}'];
    ss2=['t=',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\}'];
    ss3=['dt=',ltx(b),'e^{',ltx(b),' x}\,dx'];
    ss4='\frac{1}{t}';
    ss5='\ln |t|';
    ss6=['\ln\left|',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\right|'];
    c=1;
case 2, b=abs(b);
    ss0=['\frac{',ltx(a),'cos{',ltx(b),' x}\}',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\}'];
    ss1=['\frac{cos{',ltx(b),' x}\}',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\}'];
    ss2=['t=',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\}'];
    ss3=['dt=',ltx(b),'cos{',ltx(b),' x}\,dx'];
    ss4='\frac{1}{t}';
    ss5='\ln |t|';
    ss6=['\ln\left|',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\right|'];
    c=1;
case 3, b=abs(b);
    ss0=['\frac{',ltx(a),'sin{',ltx(b),' x}\}',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\}'];
    ss1=['\frac{sin{',ltx(b),' x}\}',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\}'];
    ss2=['t=',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\}'];
    ss3=['dt=',ltx(b),'sin{',ltx(b),' x}\,dx'];
    ss4='\frac{1}{t}';
    ss5='\ln |t|';
    ss6=['\ln\left|',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\right|'];
    c=1;
case 4, b=abs(b);
    ss0=['\frac{',ltx(a),'cosh{',ltx(b),' x}\}',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\}'];
    ss1=['\frac{cosh{',ltx(b),' x}\}',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\}'];
    ss2=['t=',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\}'];
    ss3=['dt=',ltx(b),'cosh{',ltx(b),' x}\,dx'];
    ss4='\frac{1}{t}';
    ss5='\ln |t|';
    ss6=['\ln\left|',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\right|'];
    c=1;
case 5, b=abs(b);
    ss0=['\frac{',ltx(a),'sinh{',ltx(b),' x}\}',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\}'];
    ss1=['\frac{sinh{',ltx(b),' x}\}',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\}'];
    ss2=['t=',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\}'];
    ss3=['dt=',ltx(b),'sinh{',ltx(b),' x}\,dx'];
    ss4='\frac{1}{t}';
    ss5='\ln |t|';
    ss6=['\ln\left|',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\right|'];
    c=1;
case 6, b=abs(b);
    if round(1,2)==1, ss0=['\frac{',ltx(a),'x\}',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\}'];
    else ss0=['\frac{',ltx(a),'x\}',ltx(d),'x\,dx'];
    end;
    ss1=['\frac{1}{x}\}',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\}'];
    ss2=['t=',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\}'];
    ss3=['dt=',ltx(b),'x\,dx'];
    ss4='\frac{1}{x}';
    ss5='\ln |x|';
    ss6=['\ln\left|',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\right|'];
    c=1;
end;
sZADANI=['\int ',ss0,'\, d(x)'];
f01=fopen([workPATH,BSL,'jadrol.tmp'],'w');
fprintf(f01,'\n',[S]);
fprintf(f01,'\n','\begin{array}{rcl}[rcl]');
fprintf(f01,'\n','\int ',ss0,'\, d(x) 6=6d ');
fprintf(f01,'\n','[ltx(a),\int ',ss1,'\, d(x) = ');
fprintf(f01,'\n','\left|');
fprintf(f01,'\n','\begin{array}{l}');
fprintf(f01,'\n','[ss2,\\ ');
fprintf(f01,'\n','[ss3,\\ ');
fprintf(f01,'\n','\end{array}\right|');
fprintf(f01,'\n','[ltx(a/b/c),\int ',ss4,'\, d(t) =\left[3ex] ');
fprintf(f01,'\n','[6=6d ',ltx(a/b/c),',',ss5,'\, +C = ');
fprintf(f01,'\n','[ltx(a/b/c),',',ss6,'\, +C = ');
fprintf(f01,'\n','\end{array}');
fprintf(f01,'\n','[S]);
sRESENI=fileZstr([workPATH,BSL,'jadrol.tmp']);
f01=fopen([workPATH,BSL,'jadrol.tmp'],'w');
fprintf(f01,'\n',[S]);
fprintf(f01,'\n','\int ',ss0,'\, d(x) = ');
fprintf(f01,'\n','[ltx(a/b/c),ss6,'\, +C = ');
fprintf(f01,'\n','[S]);
sVYSLEDKY=fileZstr([workPATH,BSL,'jadrol.tmp']);
```

Obrázek 3. Ukázka zdrojového kódu jednoho jádra vybraného generátoru v Matlabu. Jádro
vrací zadání, řešení a výsledky příkladu pro LaTeX .

3. CO TRIAL NABÍZÍ

V současné době Trial poskytuje následující služby:

- i) generování písemných prací (zadání / řešení / výsledky),
počet studentů = počet písemných prací,
- ii) zobrazení výsledků písemných prací,
- iii) generování studijních materiálů (definice / věta / důkaz),
- iv) příprava výukových materiálů pro učitele,
- v) diskuzní fórum.

Systém Trial je rozdělen na čtyři hlavní části, a to na **calculus**, **theory**, **addons** a **fórum**. Část **calculus** obsahující příklady je dále dělena na Trial 1 až 4.

- i) Trial 1 nabízí celou řadu příkladů a jejich řešení v klasickém pojetí (viz
obr. 4) pro oblasti: matematická analýza², geometrie³, lineární algebra⁴,

¹číslo projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0377

²KMA/M1, KMA/M2, KMA/MS1, KMA/MS2, KMA/M2E, KMA/MA1, KMA/MA2, KMA/MA4, KMA/SKA, KMA/ST

³KMA/G1, KMA/GS1, KMA/GS2, KMA/SG

⁴KMA/M1E

Příklad 18.5.2.1 (1,20) GS2 (6l, n)

Rovnici kvadriky upravte na kanonický tvar, určete typ kvadriky a její charakteristické prvky (střed, polohu osy, zda je rotační apod.)

$$72x^2 - 288x + 72y^2 - 50z^2 - 500z - 2762 = 0.$$

Řešení 18.5.2.1 (1,20) GS2 (6l, n)

Nejdříve seskupíme jednotlivé proměnné a vytkneme koeficienty u kvadratických členů

$$72(x^2 - 4x) + 72y^2 - 50(z^2 + 10z) - 2762 = 0.$$

Nyní jednotlivé výrazy doplníme na čtverce

$$72(x^2 - 4x + 4 - 4) + 72y^2 - 50(z^2 + 10z + 25 - 25) - 2762 = 0,$$

$$72(x^2 - 4x + 4) + 72y^2 - 50(z^2 + 10z + 25) - 1800 = 0.$$

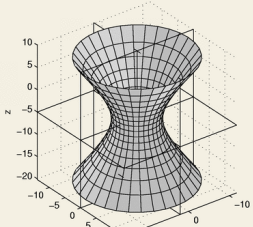
Absolutní člen převedeme na pravou stranu,

$$72(x - 2)^2 + 72y^2 - 50(z + 5)^2 = 1800.$$

Na závěr celou rovnici vydělíme absolutním členem

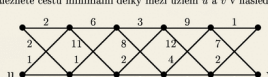
$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{y^2}{25} - \frac{(z+5)^2}{36} = 1.$$

Zadaná kvadrika je jednoduší rotační hyperboloid, který má střed v bodě $S(2; 0; -5)$, velikosti polosů jsou $a = 5$, $b = 5$, $c = 6$ a hlavní osa je rovnoběžná s osou z .



Příklad 21.5.1 (10) DMA (ph)

Nalezte cestu minimální délky mezi uzlem u a v v následujícím grafu.



Řešení 21.5.1 (10) DMA (ph)

Označíme všechny vrcholy v grafu kromě u a v písmeny a až j , jak je naznačeno na následujícím obrázku.



Pro nalezení cesty minimální délky použijeme Dijkstrův algoritmus. Řešení použitím tohoto algoritmu je naznačeno v následující tabulce. Tučné vyznačené hodnoty jsou trvalé, ostatní jsou dočasné. Podtržená hodnota je ta, která se v daném kroku algoritmu stala nově trvalou.

u	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	v
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0	∞	1	∞	∞	∞	∞	7	∞	∞	∞	∞
0	3	1	7	∞	∞	∞	7	12	∞	∞	∞
0	3	1	7	∞	∞	∞	5	12	∞	∞	∞
0	3	1	6	∞	∞	∞	5	12	∞	∞	∞
0	3	1	6	9	∞	∞	5	12	14	∞	∞
0	3	1	6	9	18	∞	5	11	14	21	∞
0	3	1	6	9	18	∞	5	11	13	21	∞
0	3	1	6	9	17	∞	5	11	13	21	∞
0	3	1	6	9	17	18	5	11	13	21	24
0	3	1	6	9	17	18	5	11	13	20	23
0	3	1	6	9	17	18	5	11	13	20	23

Cesta minimální délky mezi uzly u a v má délku 23 a vede přes uzly $u, b, a, g, c, d, h, i, e, f, j, v$.

Obrázek 4. Ukázka dvou příkladů z Trial 1.

- obyčejné diferenciální rovnice⁵, pravděpodobnost a statistika⁶, metody dynamické optimalizace⁷.
- ii) **Trial 2** představuje soubor testových otázek typu **multiple-choice** (viz obr. 5). Student označí křížkem správné odpovědi. V každém příkladu je alespoň jedna odpověď správná a zároveň nejsou všechny odpovědi správné.
 - iii) **Trial 3** je souborem testových otázek libovolného typu, které nespádají pod **Trial 2**. Obrázek 6 obsahuje dva příklady z **Trial 3**, student je nucen v příkladu doplnit správný výsledek nebo výsledek graficky znázornit.
 - iv) **Trial 4** obsahuje vše pro zadávání a hodnocení seminárních či semestrálních prací.

Vlastní webové rozhraní **Trialu** je postaveno na PHP s minimálními požadavky na databáze, všechna zadání příkladů a vzorová řešení jsou umístěna v adresářové struktuře serveru. Webové řešení má charakter portálu, umožňující komunikaci vyučujících se studenty; vyučující zveřejňují všechny důležité informace k jednotlivým předmětům, a to včetně písemkových vzorců (šablona typových příkladů, které budou v testu), výsledků zápočtových prací či podrobných informací ke zkoušce. Klíčovou součástí celého serveru je **fórum**, kde studenti mohou mezi sebou nebo s vyučujícími diskutovat např. nad řešením některých příkladů.

⁵KMA/ODR, KMA/SDR⁶KMA/PSE, KMA/ZNP⁷KMA/MDO

Příklad 1: Na kterém z obrázků je zobrazena množina

$$M = \left(A \cap B \cap C \right) \cup \left(A \setminus (B \cup C) \right) \cup \left(B \setminus (A \cup C) \right) \cup \left(C \setminus (A \cup B) \right)?$$



Příklad 6: Vyznačte všechny funkce, které mají na celém svém definičním oboru uvedené vlastnosti:

	e^x	$\sin x$	$\arcsin x$	$\sinh x$	$4x$
shora omezená	☐	☐	☐	☐	☐
ostře konvexní	☐	☐	☐	☐	☐
periodická	☐	☐	☐	☐	☐

Obrázek 5. Ukázka dvou příkladů z Trial 2.

Příklad 13.8.

Vypočtete neurčitý integrál:

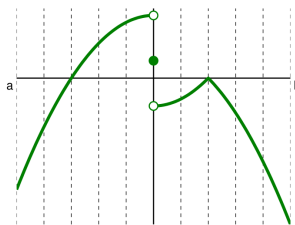
$$\int \sin t \, dt = \underline{\hspace{4cm}}$$

[1 bod]

Příklad 13.9.

Mějme funkci $y = f(x)$ na $\langle a, b \rangle$.

V grafu je naznačeno dělení intervalu $\langle a, b \rangle$.
Graficky zde znázorněte dolní integrální součet.



[1 bod]

Obrázek 6. Ukázka dvou příkladů z Trial 3.

V roce 2011 začaly služby Trialu využívat některé střední školy, Trial tak zajišťuje hostování pro

- i) Střední průmyslovou školou stavební v Plzni (<http://www.spsstav.cz>),
- ii) Gymnázium Jírovce v Českých Budějovicích (<http://www.gymji.cz>),
- iii) Gymnázium Plzeň, Mikulášské náměstí.

REFERENCE

- [1] J. Čepička, M. Míková: *Nové pojetí matematiky na technických fakultách ZČU*, Sborník 27. konference VŠTEZ, Hejnice, JČMF Praha, 2002, 149–151.
- [2] J. Čepička, M. Míková a L. Tesková: *Výuka matematiky na technických fakultách ZČU*, Sborník 3. konference o matematice a fyzice na vysokých školách s mezinárodní účastí, Brno, Vojenská akademie v Brně, 2003, 43–47.

- [3] J. Kraus a kol.: *Nový akademický slovník cizích slov A-Ž*, Academia Praha, 2005.

Jan Čepička, Katedra matematiky, Fakulta aplikovaných věd, Západočeská univerzita v Plzni,
Univerzitní 22, 306 14 Plzeň, Česká republika,
e-mail: cepicka@kma.zcu.cz, <http://www.kma.zcu.cz/cepicka>

Petr Nečesal, Katedra matematiky, Fakulta aplikovaných věd, Západočeská univerzita v Plzni,
Univerzitní 22, 306 14 Plzeň, Česká republika,
e-mail: pnecesal@kma.zcu.cz, <http://www.kma.zcu.cz/pnecesal>