

## VÝUKA MATEMATICKÉ ANALÝZY NA ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITĚ V PLZNI

GABRIELA HOLUBOVÁ A JAN POSPÍŠIL

ABSTRAKT. Cílem příspěvku je představit výuku matematické analýzy na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni. Předměty Matematická analýza 1 a Matematická analýza 2 jsou povinné pro všechny studenty bakalářských matematických oborů, svým charakterem, obsahem a náročností tak tvoří kvalitní matematický základ nutný pro další studium. Moderně pojatá výuka matematické analýzy nabízí studentům kvalitní matematický základ a trénink analytického myšlení tolik potřebný pro další studium a uplatnění v praxi.

### 1. FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD A KATEDRA MATEMATIKY

Fakulta aplikovaných věd (FAV<sup>1</sup>) je jednou z osmi fakult Západočeské univerzity v Plzni (ZČU<sup>2</sup>) a svým zaměřením se řadí mezi přírodovědné fakulty. Vedle vzdělávacích programů, které studentům nabízejí širokou škálu oborů a specializací z oblastí matematiky, fyziky, výpočetní techniky a informatiky, kybernetiky, mechaniky a geomatiky, se fakulta orientuje též na vědecko-výzkumnou činnost s úspěchy na světové úrovni.

Katedra matematiky (KMA<sup>3</sup>) je jednou z pěti kateder Fakulty aplikovaných věd a řadí se mezi největší matematické katedry v České republice. Tvoří ji šest oddělení: oddělení diskrétní matematiky, oddělení finanční matematiky a aplikované statistiky, oddělení geometrie, oddělení geomatiky, oddělení matematické analýzy a oddělení numerické matematiky. Díky své velikosti a šíři odborného záběru je katedra schopna zabezpečovat téměř veškerou výuku matematických předmětů na všech fakultách Západočeské univerzity v Plzni. V současné době katedra garantuje celkem osm bakalářských oborů, šest navazujících magisterských oborů a tři doktorské obory. Konkrétně jde o následující obory v bakalářském stupni studia:

---

2010 MSC. Primární 97B40, 97B70, 97B10, 97A80, 97I99; Sekundární 00A05.

*Klíčová slova.* Matematická analýza, modernizace výuky matematiky, vysokoškolské studium, vzdělání pro konkurenceschopnost.

Práce byla částečně podpořena z projektu OP VK *A-Math-Net – síť pro transfer znalostí v aplikované matematice CZ.1.07/2.4.00/17.0100* a částečně z projektu OP VK *Modernizace obsahu a formy výuky matematiky pro přírodní a technické vědy CZ.1.07/2.2.00/15.0377*.

<sup>1</sup>[www.fav.zcu.cz](http://www.fav.zcu.cz)

<sup>2</sup>[www.zcu.cz](http://www.zcu.cz)

<sup>3</sup>[www.kma.zcu.cz](http://www.kma.zcu.cz)

- ▶ **Aplikované vědy a informatika** (3-letý studijní program, titul Bc.)
  - Finanční informatika a statistika
- ▶ **Geomatika** (3-letý studijní program, titul Bc.)
  - Geomatika
- ▶ **Matematika** (3-letý studijní program, titul Bc.)
  - Matematika a finanční studia
  - Matematika a management
  - Matematika pro přírodní vědy
  - Matematické výpočty a modelování
  - Obecná matematika
- ▶ **Stavitelství** (4-letý studijní program, titul Bc.)
  - Územní plánování

Dále jsou to následující obory v navazujícím magisterském studiu:

- ▶ **Aplikované vědy a informatika** (2-3 letý studijní program, titul Ing.)
  - Finanční informatika a statistika
  - Matematické inženýrství
- ▶ **Geomatika** (2-3 letý studijní program, titul Ing.)
  - Geomatika
- ▶ **Matematika** (2-3 letý studijní program, titul Mgr.)
  - Matematika
  - Matematika a management
  - Učitelství matematiky pro střední školy

V neposlední řadě KMA nabízí tyto studijní obory v doktorském stupni studia:

- ▶ **Aplikovaná matematika** (3-letý studijní program, titul Ph.D.)
  - Aplikovaná matematika
- ▶ **Geomatika** (3-letý studijní program, titul Ph.D.)
  - Geomatika
- ▶ **Matematika** (4-letý studijní program, titul Ph.D.)
  - Obecné otázky matematiky

## 2. MATEMATICKÉ PŘEDMĚTY NA KMA

V bakalářském stupni studia mají studenti všech matematických oborů následující společné povinné předměty:

<b>KMA/MA1</b>	<b>Matematická analýza 1</b> (6 kr., rozsah 4+2, 1. ZS),
KMA/LA	Lineární algebra (4 kr., rozsah 3+1, 1. ZS),
<b>KMA/MA2</b>	<b>Matematická analýza 2</b> (6 kr., rozsah 4+2, 1. LS),
KMA/DMA	Diskrétní matematika (4 kr., rozsah 3+1, 1. LS),
KMA/G1	Geometrie 1 (4 kr., rozsah 2+1, 2. ZS),
KMA/PSA	Pravděpodobnost a statistika (5 kr., rozsah 3+2, 2. ZS),
KMA/NM	Numerické metody (5 kr., rozsah 3+2, 2. LS).

Všechny tyto předměty jsou na KMA nabízeny i v anglické verzi, která se po obsahové stránce od české verze neliší, je však ohodnocena jedním kreditem navíc.

Studenti si tak mohou rozšířit své znalosti o odborné termíny v angličtině a současně zvýšit svoje šance ve výběrových řízeních na zahraniční studentské pobyty.

Mezi další povinně volitelné a volitelné matematické předměty bakalářského stupně studia patří:

KMA/DG	Diferenciální geometrie (5 kr., rozsah 2+2),
KMA/GM1	Geometrické a počítačové modelování (6 kr., rozsah 3+2),
<b>KMA/MA3</b>	<b>Matematická analýza 3</b> (5 kr., rozsah 3+2),
<b>KMA/MA4</b>	<b>Matematická analýza 4</b> (5 kr., rozsah 3+2),
KMA/MM	Matematické modelování (5 kr., rozsah 2+2),
KMA/ODR	Obyčejné diferenciální rovnice (6 kr., rozsah 3+2),
KMA/STAV	Výpočtová statistika (5 kr., rozsah 2+2),
KMA/TSI	Teorie sítí (4 kr., rozsah 2+1),
KMA/UFA	Úvod do funkcionální analýzy (5 kr., rozsah 3+1).

V navazujícím magisterském stupni studia mají studenti matematických oborů následující povinné a povinně volitelné předměty:

KMA/DRB1,2	Diferenciální rovnice v biologii 1,2 (3kreditů, rozsah 2+0),
KMA/FA	Funkcionální analýza (5 kr., rozsah 4+0),
<b>KMA/MA5</b>	<b>Matematická analýza 5</b> (6 kr., rozsah 3+2),
KMA/MDO	Metody dynamické optimalizace (4 kr., rozsah 2+1),
KMA/MNO	Metody numerické optimalizace (4 kr., rozsah 2+1),
KMA/NA	Numerická analýza (5 kr., rozsah 2+2),
KMA/PDR	Parciální diferenciální rovnice (6 kr., rozsah 3+1),
KMA/PVM	Paralelní výpočtové metody (5 kr., rozsah 2+2),
KMA/SNM1,2	Speciální numerické metody 1,2 (4 kr., rozsah 3+0),
KMA/SOF	Software a algoritmy numerické matematiky (5 kr., 3+1),
KMA/TGD1,2	Teorie grafů a diskrétní optimalizace 1,2 (5 kr., 3+1),
KMA/USA	Úvod do stochastické analýzy (5 kr., rozsah 2+2)

a řadu dalších volitelných matematických předmětů.

V závěrečných ročnících si studenti vybírají zadání a témata kvalifikačních prací, čímž si současně určují užší specializaci svého studia. Zpracování bakalářské práce se týká předměty KMA/PRJ5 (5 kreditů) a KMA/BPMA (12 kreditů), diplomových prací se týká předměty KMA/OSMA (4 kredity) a KMA/DPMA (18 kreditů).

### 3. MATEMATICKÁ ANALÝZA

Po přijetí na vysokou školu považují studenti prvních ročníků za nejnáročnější předměty Matematická analýza 1 a 2. Absolvování těchto předmětů je pro studenty naprosto fundamentální, a proto se podívejme na jejich charakter a obsah podrobněji.

Cílem předmětu **Matematická analýza 1** (MA1) je seznámení a aktivní osvojení si základních pojmů matematické analýzy, jako jsou:

- ▶ posloupnosti a řady reálných čísel,
- ▶ reálné funkce jedné reálné proměnné,

- ▶ diferenciální a integrální počet v  $\mathbb{R}$ .

V předmětu **Matematická analýza 2** (MA2) se studenti seznamují a učí se pracovat s následujícími pojmy vyšší matematiky:

- ▶ funkční posloupnosti a řady,
- ▶ vektorové funkce jedné reálné proměnné,
- ▶ reálné funkce více proměnných,
- ▶ diferenciální a integrální počet v  $\mathbb{R}^n$ .

Úspěšný absolvent předmětu MA1 je schopen především:

- ▶ číst matematický text a aktivně používat logické výroky;
- ▶ používat korektní postupy při řešení matematických úloh v rozsahu sylabu tohoto předmětu;
- ▶ prokázat znalost definic a základních tvrzení týkajících se posloupností, řad a spojitých a diferencovatelných funkcí jedné reálné proměnné;
- ▶ vypočítat první i vyšší derivace funkce nejen za použití základních pravidel pro jejich výpočet, ale také z definice;
- ▶ nakreslit graf funkce s použitím asymptot, kritických bodů a derivací pro určení intervalů monotonie a konvexity, resp. konkavity;
- ▶ formulovat základní úlohy na maximum, resp. minimum a tyto úlohy vyřešit použitím diferenciálního počtu;
- ▶ vypočítat limitu použitím l'Hospitalova pravidla;
- ▶ používat základní techniky výpočtu integrálů, např. substituce, úprava na parciální zlomky a integrace per partes;
- ▶ použitím integrálního počtu vypočítat obsahy ploch v rovině a objemy jednoduchých těles pomocí řezů;
- ▶ najít Taylorův rozvoj dané funkce v blízkosti nějakého bodu a formulovat důsledky plynoucí z prvních několika členů tohoto rozvoje;
- ▶ ilustrovat použití probraných pojmů pro řešení konkrétních fyzikálních úloh.

Úspěšný absolvent předmětu MA2 pak je schopen:

- ▶ prokázat znalost definic a základních tvrzení týkajících se funkčních posloupností, funkčních řad, vektorových funkcí jedné reálné proměnné a reálných funkcí více proměnných;
- ▶ pracovat s funkčními posloupnostmi a řadami;
- ▶ rozvinout danou funkci v mocninnou nebo Fourierovu řadu;
- ▶ popsat křivky v  $\mathbb{R}^n$  a pracovat s nimi;
- ▶ určit vlastnosti reálných funkcí více proměnných (spojitost, hladkost apod.);
- ▶ počítat derivace ve směru a parciální derivace funkcí více proměnných;
- ▶ formulovat základní úlohy na maximum, resp. minimum a tyto úlohy vyřešit použitím diferenciálního počtu;
- ▶ počítat dvojné a trojné integrály;
- ▶ pracovat s integrály závislými na parametru;
- ▶ ilustrovat použití probraných pojmů pro řešení konkrétních fyzikálních úloh.

Oba předměty jsou svým charakterem věrné svému jménu, tj. náplní předmětů není jen matematický kalkulus reálných funkcí jedné a více proměnných, nýbrž postupné budování teorie, analýza všech vysvětlovaných pojmů a v neposlední řadě

důkazy všech tvrzení, jejichž demonstrace je následně po studentovi vyžadována u zkoušky.

Na předměty Matematická analýza 1 a 2 ve vyšších ročnících bezprostředně navazují předměty Matematická analýza 3, 4 a 5 s následující náplní.

**Matematická analýza 3 (MA3):**

- ▶ křivkové a plošné integrály,
- ▶ vektorová a tenzorová analýza.

**Matematická analýza 4 (MA4):**

- ▶ posloupnosti a řady komplexních čísel,
- ▶ komplexní funkce komplexní proměnné,
- ▶ diferenciální a integrální počet v  $\mathbb{C}^n$ .

**Matematická analýza 5 (MA5):**

- ▶ teorie míry a integrálu,
- ▶ teorie Fourierových řad.

V dalších specializovaných předmětech pak studenti mají možnost nahlédnout i do dalších oblastí matematické analýzy, jako je funkcionální analýza, teorie obyčejných a parciálních diferenciálních rovnic, stochastická analýza, stochastické diferenciální rovnice apod.

Kvalitní matematický základ je naprosto nezbytný pro další studium, a to nejen v případě studia matematicky zaměřených oborů, ale i pro studium na jakékoli vysoké škole technického zaměření. Moderně pojatá výuka matematické analýzy nabízí studentům kvalitní matematický základ a trénink analytického myšlení, tolik potřebný pro další studium a uplatnění v praxi. Zvládnutím základů vysokoškolské matematiky v podobě matematické analýzy studenti získají analytické schopnosti, dovednost řešit abstraktní i reálné úlohy a schopnost analyzovat řešení kvalitativně (z pohledu vlastností řešení) i kvantitativně (z pohledu počtu řešení).

#### 4. MATEMATIKA MODERNĚ

Katedra matematiky FAV garantuje výuku cca 180 matematických předmětů celkem na šesti fakultách univerzity pro zhruba šestnáct tisíc studentů ročně. V současné době se zaměstnanci FAV podílejí na řešení několika projektů z Operačního programu MŠMT: Vzdělání pro konkurenceschopnost. Jedním z nich je i projekt *Modernizace obsahu a formy výuky matematiky pro přírodní a technické vědy*<sup>4</sup>. V rámci řešení projektu dochází k inovaci databáze studijních podpor, příkladů a testů k matematickým předmětům, známé pod názvem TRIAL<sup>5</sup>. Tento systém existuje na ZČU od roku 2002 a dlouhodobě patří k nejnavštěvovanějším webům univerzity. V příloženém seznamu literatury je uvedeno několik příspěvků z konferencí o matematice na vysokých školách technických, ekonomických a zemědělských, kde byl moderní přístup k výuce matematiky prezentován.

V současné době na webovém portálu mají (resp. budou mít) studenti k dispozici úlohy i teorii od středoškolské matematiky po vysokoškolskou, viz též ukázky

<sup>4</sup>číslo projektu CZ.1.07/2.2.00/15.0377, [mmm.zcu.cz](http://mmm.zcu.cz)

<sup>5</sup>[trial.zcu.cz](http://trial.zcu.cz), [trial.kma.zcu.cz](http://trial.kma.zcu.cz)

na obr. 1 a 2. Vyučující pak mohou systém využít např. ke generování a vystavení materiálů k přednáškám, k zápočtovým a zkuškovým písemným pracím a ke zveřejnění jejich výsledků, a v neposlední řadě k vystavení důležitých informací k jednotlivým předmětům. Všichni pak mohou využívat fórum, kde studenti mezi sebou nebo s vyučujícími diskutují např. řešení některých příkladů. Studenti mají tedy pro studium k dispozici na jednu stranu veškeré výtobytky moderních technologií a na druhou stranu jsou nuceni pochopit principy „klasických“ teoretických důkazů.

The screenshot shows the TRIALu web application interface. The browser address bar displays `trial.kma.zcu.cz/main.php?v=10`. The page header includes "KMA (1) / STUDENTI (24)", "calculus", "MA1", and "cesky\_english | login | bibiny OFF | about". The main navigation bar contains "THEORY | ADDONS | FORUM" and "aktuality".

The left sidebar, titled "Obsah", lists the course structure:

- X. Základní matematické pojmy
  - 1. Množiny
  - 2. Posloupnosti
  - 3. Řady
  - 4. Funkce
  - 5. Limity
  - 6. Spojitost
- 7. Derivace
  - 7.1. Výpočet derivace funkce
  - 7.2. Průběh první derivace funkce
    - 7.2.1. Grafy spojitě diferencovatelných funkcí
    - 7.2.2. Tečny a normály funkcí
  - 7.3. Aplikace diferenciálního počtu
  - 7.6. Dokažte...
- 8. Integrované
- 9. Taylorův polynom
- A. Nelineární rovnice

The main content area is titled "Kapitola 7: Derivace" and "7.2. Průběh první derivace funkce". It contains the following text:

7.2.1. Grafy spojitě diferencovatelných funkcí

**Příklad 7.2.1. (10)**

Mějme k dispozici grafy funkcí  $f(x)$  a  $g'(x)$ . Načrtněte grafy funkcí  $f'(x)$  a  $g(x)$ .

Below the text are two graphs. The left graph shows a blue curve labeled  $f(x)$  with a local maximum and a local minimum. The right graph shows a green curve labeled  $g'(x)$  with a local minimum and a local maximum.

At the bottom of the page, there is a navigation bar with "NOVÉ ZADÁNÍ | ŘEŠENÍ" and a "MAXIMA" button. A list of numbers (1-50) is visible below the navigation bar.

Obrázek 1. Ukázka z TRIALu – příklady z diferenciálního počtu.

16:9 14:9 4:3

MA2

THEORY ADDONS FORUM

Kapitola 1: HERBÁŘE ...

1.3. FUNKCE ...

1.3.5. Užitečné funkce v  $\mathbb{R}^2$

1.3.5.20. funkce ve 3D

$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$ 


picture high-res anim  
-3 D- picture high-res anim  
JPS: picture high-res

$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ 


picture high-res anim  
-3 D- picture high-res anim  
JPS: picture high-res

$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x + y)^2}$ 


picture high-res anim  
-3 D- picture high-res anim  
JPS: picture high-res

$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ 


picture high-res anim  
-3 D- picture high-res anim  
JPS: picture high-res

$f(x, y) = |xy|$ 


picture high-res anim  
-3 D- picture high-res anim  
JPS: picture high-res

$f(x, y) = |xy|^2$ 


picture high-res anim  
-3 D- picture high-res anim  
JPS: picture high-res

$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ 


picture high-res anim  
-3 D- picture high-res anim  
JPS: picture high-res

$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 


picture high-res anim  
-3 D- picture high-res anim  
JPS: picture high-res

$f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$ 


picture high-res anim  
-3 D- picture high-res anim  
JPS: picture high-res

$f(x, y) = \sin x + \sin y$ 


picture high-res anim  
-3 D- picture high-res anim  
JPS: picture high-res

$f(x, y) = \sin(x + y)$ 


picture high-res anim  
-3 D- picture high-res anim  
JPS: picture high-res

$f(x, y) = \sin(xy)$ 


picture high-res anim  
-3 D- picture high-res anim  
JPS: picture high-res

$f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$ 


picture high-res anim  
-3 D- picture high-res anim  
JPS: picture high-res

$f(x, y) = x^2 + 6xy + y^2$ 


picture high-res anim  
-3 D- picture high-res anim  
JPS: picture high-res

$f(x, y) = x^4 + 2y^4 - 14x^2 - 16y^2 + 24x$ 


picture high-res anim  
-3 D- picture high-res anim  
JPS: picture high-res

$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x - 2y$ 


picture high-res anim  
-3 D- picture high-res anim  
JPS: picture high-res

$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^2 + y^2 - z^2$ 


picture high-res anim  
-3 D- picture high-res anim  
JPS: picture high-res

$(2 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 = 1 - z^2$ 


picture high-res anim  
-3 D- picture high-res anim  
JPS: picture high-res

Obrázek 2. Ukázka z TRIALu - 3D grafy funkcí dvou proměnných.

## REFERENCE

- [1] J. Čepička, M. Míková, L. Tesková: *Výuka matematiky na technických fakultách ZČU*, v 3. konferenci o matematice a fyzice na vysokých školách s mezinárodní účastí, Brno, Vojenská akademie, 2003, 43–47.
- [2] J. Daněk: *Výuka numerické matematiky s užitím počítačové učebny*, v 5th International Conference Proceedings of Aplimat 2006, STU Bratislava, 2006, 309–314.
- [3] M. Míková, J. Čepička: *Nové pojetí matematiky na technických fakultách ZČU*, v Sborník 27. konference VŠTEZ, Hejnice, JČMF Praha, 2002, 149–151.
- [4] M. Míková, V. Vacek: *Kombinovaná forma studia na ZČU v Plzni*, v Zborník 28. konference VŠTEP, Rožňava, JSMF Žilina, 2004, 245–248.
- [5] J. Pospíšil: *Matematická analýza na Západočeské univerzitě v Plzni*, v Workshop matematicko-fyzikální vědy ve výuce geodézie a kartografie, VUT Brno, 2011.

Gabriela Holubová, Katedra matematiky, Fakulta aplikovaných věd, Západočeská univerzita v Plzni, Univerzitní 8, 306 14 Plzeň, Česká republika,  
*e-mail*: gabriela@kma.zcu.cz

Jan Pospíšil, Katedra matematiky, Fakulta aplikovaných věd, Západočeská univerzita v Plzni, Univerzitní 8, 306 14 Plzeň, Česká republika,  
*e-mail*: honik@kma.zcu.cz