

## O DIFERENCIÁLNÍCH ROVNICÍCH SE ZPOŽDĚNÍM – APLIKACE V ROBOTICE

PETR TOMÁŠEK

ABSTRAKT. V tomto článku jsou prezentovány některé zajímavé kvalitativní vlastnosti řešení diferenciálních rovnic se zpožděným argumentem. Naším cílem je demonstrovat skutečnost, že tyto vlastnosti se mohou dramaticky lišit v případě diferenciální rovnice se zpožděním a v jistém smyslu „odpovídající“ klasické obyčejné diferenciální rovnice. Využití diferenciálních rovnic se zpožděním je ilustrováno aplikací z oblasti robotiky.

### 1. ÚVOD

Modelování řady problémů v technické praxi i v jiných odvětvích často vede na řešení systému obyčejných diferenciálních rovnic (ODE), který lze zapsat jako

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad (1.1)$$

kde  $x \in C(\langle t_0, t_f \rangle, \mathbb{R}^n)$  a  $f \in C(\langle t_0, t_f \rangle \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ . Často je nezbytné zahrnout do systému diferenciálních rovnic také členy, které obsahují hodnotu neznámé funkce v čase minulém, což vede na systém diferenciálních rovnic se zpožděním (DDE)

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t))), \quad \tau(t) \geq 0, \quad (1.2)$$

kde  $y \in C(\langle t_0 - \gamma, t_f \rangle, \mathbb{R}^n)$ ,  $\gamma = \max\{\tau(t), t_0 \leq t \leq t_f\}$ ,  $f \in C(\langle t_0, t_f \rangle \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ,  $\tau \in C(\langle t_0, t_f \rangle, \mathbb{R}_0^+)$ . Výraz  $\tau(t)$  nazýváme *zpožděním* a člen  $t - \tau(t)$  *zpožděným argumentem*. Podle tvaru  $\tau(t)$  pak rozlišujeme např. zpoždění ohraničené či neohraničené. Více k úvodu do dané problematiky lze nalézt např. v [1], [5], [6].

Ukazuje se, že tyto systémy vykazují kvalitativní vlastnosti diametrálně odlišné od řešení „odpovídajících“ systémů obyčejných diferenciálních rovnic. V části 2 tohoto článku si zavedeme počáteční úlohu pro zpožděnou diferenciální rovnici a některé rozdíly ve vlastnostech ODE a DDE si budeme ilustrovat na jednoduchém skalárním případě. V části 3 si uvedeme aplikaci z oblasti robotiky včetně diskuse asymptotické stability řešení systému.

---

2010 MSC. Primární 34K06, 34K25.

*Klíčová slova.* diferenciální rovnice se zpožděním, asymptotické vlastnosti, oscilatorické vlastnosti.

Práce byla podporována projektem A-Math-Net - Síť pro transfer znalostí v aplikované matematice (CZ.1.07/2.4.00/17.0100).

## 2. SPECIFIKA ZPOŽDĚNÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

**Definice 2.1** (Počáteční problém). Uvažujme funkci  $\phi \in C(\langle t_0 - \gamma, t_0 \rangle, \mathbb{R}^n)$ . Úlohu určit takové řešení rovnice (1.2), které vyhovuje podmínce

$$y(t) = \phi(t), \quad t \in \langle t_0 - \gamma, t_0 \rangle, \quad (2.1)$$

nazveme **počátečním problémem**.

Povšimněme si, že počáteční podmínka v případě ODE (1.1)  $x(t_0) = x_0$  je dimenze jedna, zatímco počáteční podmínka (2.1) je obecně nekonečně-dimenzionální! V důsledku toho je přístup k řešení DDE zcela odlišný. Základní metodou je metoda kroků, jejíž princip spočívá v posloupnosti řešení počátečních problémů ODE na sekvenci navazujících intervalů. Délka těchto intervalů vychází ze zpoždění, které se v rovnici vyskytuje. Ilustrujme si tento postup na skalárním případě DDE s konstantním zpožděním.

**Příklad 2.2.** Uvažujme diferenciální rovnici s konstantním zpožděním

$$\dot{y}(t) = -y(t-1) \quad (2.2)$$

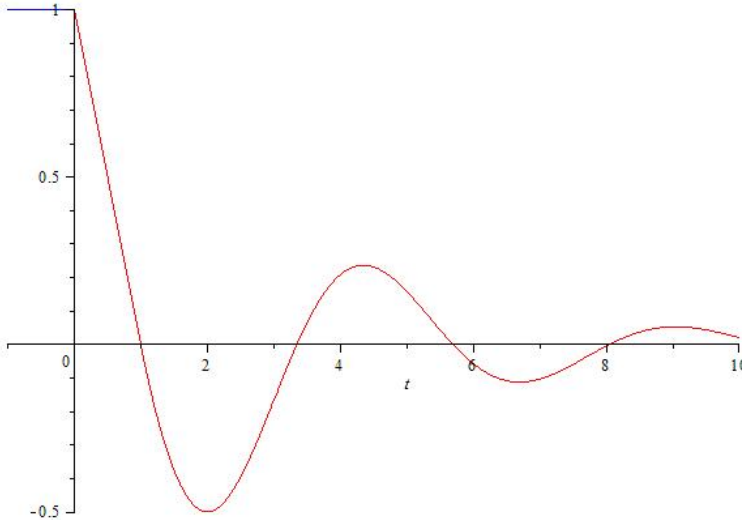
a počáteční podmínkou

$$y(t) = \phi_0(t) = 1, \quad t \in \langle -1, 0 \rangle. \quad (2.3)$$

Protože uvažujeme konstantní zpoždění  $\tau(t) = 1$ , metodou kroků budeme řešit posloupnost počátečních problémů pro ODE na intervalech délky jedna, a sice následovně:

$$\begin{aligned} t \in \langle 0, 1 \rangle : \quad & \dot{y}(t) = -\phi_0(t-1) = -1, \quad y(0) = 1, \\ & y(t) = -t + 1. \text{ Označme } \phi_1(t) := y(t). \\ t \in \langle 1, 2 \rangle : \quad & \dot{y}(t) = -\phi_1(t-1) = t-2, \quad y(1) = 0, \\ & y(t) = t^2/2 - 2t + 3/2. \text{ Označme } \phi_2(t) := y(t). \\ t \in \langle 2, 3 \rangle : \quad & \dot{y}(t) = -\phi_2(t-1) = -((t-1)^2/2 - 2(t-1) + 3/2), \quad y(2) = -\frac{1}{2}, \\ & y(t) = -t^3/6 + 3t^2/2 - 4t + 17/6. \text{ Označme } \phi_3(t) := y(t). \\ & \vdots \end{aligned}$$

Na obrázku 1 je vykresleno řešení  $y(t)$  na intervalu  $\langle -1, 10 \rangle$ .



Obr 1. Řešení počátečního problému (2.2), (2.3)

Dále si na příkladě proporcionalního zpoždění budeme ilustrovat odlišnosti v oscilatorických a asymptotických vlastnostech řešení DDE a ODE.

**Příklad 2.3.** Uvažujme diferenciální rovnici s proporcionalním zpožděním (případ neohraničeného zpoždění)

$$\dot{y}(t) = -y(qt), \quad y(0) = 1, \quad q \in (0, 1), \quad t \geq 0. \quad (2.4)$$

Řešení počátečního problému (2.4) lze vyjádřit pomocí mocninného rozvoje jako

$$y_q(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{\binom{k}{2}}}{k!} t^k.$$

Uvažujme „odpovídající“ obyčejnou diferenciální rovnici, kterou formálně získáme z rovnice (2.4) limitním přechodem  $q \rightarrow 1^-$ :

$$\dot{x}(t) = -x(t), \quad x(0) = 1. \quad (2.5)$$

Řešením počátečního problému (2.5) je  $x(t) = e^{-t}$ .

Nejdříve porovnáme oscilatorické vlastnosti řešení. Je zřejmé, že řešením (2.5) je kladná klesající funkce. V případě zpožděné rovnice využijeme následující věty uvedené v [3]:

**Věta 2.4.** Uvažujme rovnici

$$\dot{y}(t) + p(t)y(qt) = 0, \quad p \in C([0, \infty), \mathbb{R}^+), \quad 0 < q < 1. \quad (2.6)$$

Nechť  $m = \liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{qt}^t p(s) ds$ . Jestliže  $m > 1/e$ , pak jsou všechna řešení rovnice (2.6) oscilující.

V našem případě uvažujeme  $p(t) \equiv 1$ , a tedy  $m = \infty > 1/e$ . Řešení rovnice (2.4) tedy osciluje, zatímco řešení rovnice (2.5) neosciluje.

Nyní se zaměříme na chování řešení (2.4) pro  $t \rightarrow \infty$ . Využijeme výsledku publikovaného v [2], který lze pro náš případ formulovat takto: společně s rovnicí (2.4) zavedeme pomocné funkce

$$\varphi_q(t) := t^k (\text{Log}t)^h \exp\left(-\frac{1}{2c} (\text{Log}t - \text{LogLog}t)^2\right),$$

kde  $c = \text{Log}q$ ,  $k = 1/2 - (1 + \text{Log}c)/c$ ,  $h = -1 + \frac{1}{c}\text{Log}c$ . Pomocí asymptotických výsledků uvedených v [2] lze ukázat, že  $y_q(t) = O(\varphi_q(t))$ ,  $t \rightarrow \infty$ , pro všechna řešení  $y_q$  rovnice (2.4) a  $y_q(t) = o(\varphi_q(t))$ ,  $t \rightarrow \infty$ , pouze pro nulové řešení rovnice (2.4). To znamená, že funkce  $\frac{|y_q(t)|}{|\varphi_q(t)|}$  je ohraničená pro  $t \rightarrow \infty$  a navíc tato funkce nemá nulovou limitu. Tedy existuje horní odhad  $M|\varphi_q(t)|$ ,  $M \in \mathbb{R}^+$ , řešení  $y(t)$  a tento odhad není nikterak nadsazený (obě funkce  $|y(t)|$  a  $|\varphi_q(t)|$  jsou řádově "srovnatelné").

Navíc platí:  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_r(t)}{\varphi_s(t)} = 0$  pro  $r, s \in (0, 1)$ ,  $r < s$ . Z toho plyme, že čím více se hodnota  $q$  blíží k jedné zleva (formálně se (2.4) blíží k (2.5)), tím větší budou amplitudy řešení (2.4) pro  $t \rightarrow \infty$  (namísto předpokládané konvergence k nule:  $x(t) = e^{-t}$ )! Dochází tedy k nečekanému kvalitativnímu rozdílu mezi asymptotickým chováním řešení problémů (2.4) a (2.5).

### 3. APLIKACE ZPOŽDĚNÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

Nejčastěji v praxi narazíme na příklady modelů s ohraničeným (především konstantním) zpožděním. Uvedme např. model obráběcího nástroje, kde je zahrnuto chvění vznikající při obráběcím procesu, transportní zpoždění, které je způsobeno konečnou rychlostí paliva proudícího dlouhým potrubím, procesní zpoždění před spuštěním chemické reakce, komunikační zpoždění v souvislosti s konečnou rychlostí šíření rádiového signálu v prostoru při komunikaci (řízení) na velkou vzdálenost. Dále v počítačově řízených systémech často existuje nezanedbatelné výpočetní zpoždění, způsobené množstvím operací a složitostí řídicích algoritmů. Pro ilustraci použití diferenciálních rovnic se zpožděním lze řadu modelů nalézt např. v [4], [5], [7].

Nyní se zaměříme na model z oblasti robotiky. V robotice je celá řada problémů týkajících se stability, kde zpoždění v robotickém systému hraje důležitou roli. Toto zpoždění může vzniknout v řídicím systému robota, při přenosu informací či v mechanické části robota. Systém master-slave je typickým případem, kde dochází k časové prodlevě při řízení. Např. v systému člověk–stroj se promítá reflex lidského operátora do zpoždění v řízení systému (zpravidla více než 0.1 sekund). Analogicky této situaci se generuje zpoždění např. u manipulátoru řízeného počítačem. Vzorový čas digitálního řízení slouží jako základ pro hodnotu zpoždění, která je řádově v setinách až tisícinách sekundy. Další významnou skupinou problémů je zpoždění vznikající při přenosu informací. Toto zpoždění má rozhodující vliv při operacích ve vesmíru či ve velkých hloubkách pod hladinou moře. Prodleva je rovna času potřebnému k tomu, aby ultrasonická či elektromagnetická vlna urazila vzdálenost mezi řídicím centrem a konečným efektem.

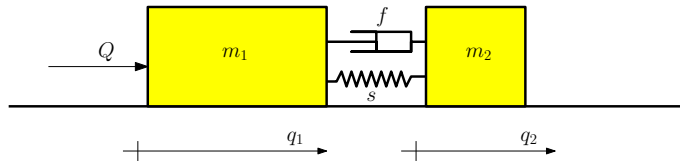
**Motivační příklad.** Jestliže robot pracuje při obráběcím procesu, jako je frézování, soustružení apod., může rovněž vzniknout zpoždění ve zpětné vazbě čistě

mechanické části robota. Toto zpoždění bývá nepřímo úměrné relativní rychlosti nástroje a materiálu. Tato situace bude ilustrována na matematickém modelu mechanického robota (viz [8]), kdy budeme diskutovat závislost asymptotické stability systému na jeho parametrech.

Uvažujme robotický systém znázorněný na obrázku 2. Řízení robota vychází z principu kinematického sebeovládání. To znamená, že regulátor působící na první těleso v tomto modelu způsobuje rychlost  $\dot{q}_1$ , která je určována polohou  $q_2$  konečného efektoru:

$$\dot{q}_1(t) = -Kq_2(t - \tau), \quad (3.1)$$

kde  $K > 0$  a  $\tau = konst.$  reprezentuje zpoždění v řízení.



Obr 2. Elastický robot s jedním stupněm volnosti

Zavedením nové proměnné  $v = \dot{q}_2$  lze tento systém popsat soustavou lineárních diferenciálních rovnic s konstantním zpožděním

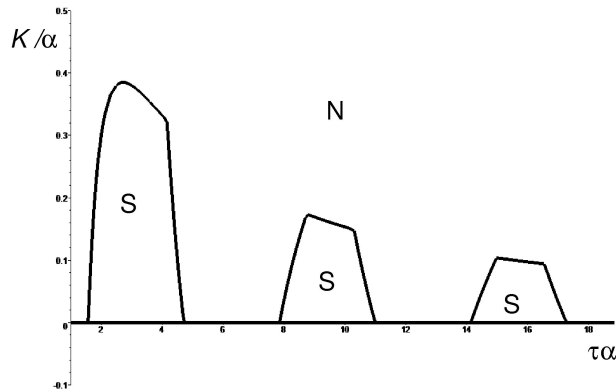
$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha^2 & -\alpha^2 & -2\kappa\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -K & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2K\kappa\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1(t - \tau) \\ q_2(t - \tau) \\ v(t - \tau) \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

kde  $\alpha = \sqrt{s/m_2}$  je přirozená frekvence neřízeného netlumeného systému a  $\kappa = \frac{f}{2m_2\alpha}$  je tzv. relativní tlumicí faktor. Následující věta (viz [8]) udává podmínky pro nastavení parametrů modelu tak, aby byla zajištěna asymptotická stabilita netlumeného systému.

**Věta 3.1.** *Uvažujme zpožděnou diferenciální rovnici (3.2), kde  $\kappa = 0$ . Její triviální řešení je asymptoticky stabilní, právě když existuje takové  $k > 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , vyhovující relacím*

$$\begin{aligned} \frac{K}{\alpha} &< \frac{\pi}{2\alpha\tau} - \left(\frac{\pi}{2\alpha\tau}\right)^3, \\ \frac{K}{\alpha} &< \frac{1}{\alpha\tau} \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{(\alpha\tau)^3} \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)^3, \\ \frac{K}{\alpha} &< -\frac{1}{\alpha\tau} \left(2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right) + \frac{1}{(\alpha\tau)^3} \left(2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right)^3. \end{aligned}$$

Relace ve výše uvedené větě určují graf asymptotické stability pro netlumený systém (3.2) v souřadnicích bezrozměrných parametrů  $(\tau\alpha)$  a  $(K/\alpha)$ , který je znázorněn na obrázku 3.



Obr 3. Graf asymptotické stability netlumeného systému (3.2);  
N - as. nestabilní, S - as. stabilní

#### 4. ZÁVĚR

V článku byla na lineárních diferenciálních rovnicích prvního řádu s konstantním a proporcionálním zpožděním ilustrována některá jejich specifika, především pak v souvislosti s "odpovídajícím" případem obyčejné diferenciální rovnice. Použití zpožděných rovnic bylo ilustrováno na jednoduchém modelu z oblasti robotiky.

#### REFERENCE

- [1] C.T.H. Baker: *Retarded differential equations*, J. Comput. Appl. Math. **125** (2000), 309–335.
- [2] J. Čermák: *On the differential and difference equation with a power delayed argument*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. **5** (2008), 1–8.
- [3] L. H. Erbe, Q. Kong, B.G. Zhang: *Oscillation Theory for Functional Differential Equations*, Marcel Dekker, New York, 1995.
- [4] T. Erneux: *Applied Delay Differential Equations*, Springer, 2009.
- [5] V. Kolmanovskii, A. Myshkis: *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*, Kluwer Academic, Dordrecht, 1999.
- [6] P. Marušiak, R. Olach: *Funkcionálne diferenciálne rovnice*, Žilinská univerzita, 2000.
- [7] H. Smith: *An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences*, Springer, 2011.
- [8] G. Stépán: *Retarded Dynamical Systems: Stability and Characteristic Functions*, Longman Scientific & Technical, Burnt Mill, 1989.

Petr Tomášek, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,  
e-mail: tomasek@fme.vutbr.cz