



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Předmluva k prvnímu číslu časopisu Kvaternion

Vážení čtenáři, dostává se vám do rukou první číslo nového časopisu Kvaternion, který je orientován na aplikace matematiky v nejrůznějších oborech především technické praxe. O založení časopisu tohoto zaměření jsme na ústavu již delší dobu uvažovali, neboť jej považujeme za užitečný, ne-li dokonce potřebný, vzhledem k charakteru našeho výzkumu i charakteru studijního oboru Matematické inženýrství, který zajišťujeme. Posledním impulsem ke vzniku časopisu bylo získání podpory EU na projekt AMathNet v rámci operačního programu Vzdělávání pro konkurenceschopnost, jednoho z programů Evropského sociálního fondu. Hlavním řešitelem projektu je náš Ústav matematiky Fakulty strojínského inženýrství Vysokého učení technického v Brně a dále se na řešení projektu jako partneři podílejí matematická pracoviště Masarykovy univerzity v Brně, Ostravské univerzity, Univerzity Palackého v Olomouci, Západočeské univerzity v Plzni a Akademie věd ČR (pobočka Brno). Projekt AMathNet si klade za cíl vybudovat novou síť pro přenos znalostí v aplikované matematice mezi institucemi vysokoškolského vzdělávání a výzkumu a podnikatelským a veřejným sektorem. Působením této sítě by mělo dojít k prohloubení vzájemné koordinace činností mezi partnery, k vytvoření nových vazeb pro přenos informací ze vzdělávacích a vědecko-výzkumných institucí do praxe a k efektivnímu aplikování matematických metod. A jedním z nástrojů pro podporu realizace uvedených úkolů bude právě časopis Kvaternion. Bude publikovat příspěvky pracovníků a studentů zmíněných spolupracujících institucí, a to jak příspěvky odborného matematického zaměření, tak články didaktické povahy týkající se vzdělávání v matematice se zaměřením na její aplikace v praxi. Příspěvky autorů z jiných pracovišť budou samozřejmě také vítány. Nejedná se o časopis ryze vědecký, jeho hlavním cílem je seznámit čtenáře se zajímavými oblastmi aplikované matematiky. Přesto by práce vědeckého charakteru neměly být mezi publikovaných články výjimkou. Časopis bude vycházet dvakrát ročně a samozřejmě není určen jen zájemcům z partnerských pracovišť, nýbrž širokému okruhu čtenářů z řad odborníků i studentů zajímajících se o matematiku v souvislosti s jejími aplikacemi v jiných oborech.

První číslo časopisu se skládá, až na jednu výjimku, z příspěvků, které byly předneseny na workshopu *Aplikovaná matematika* sítě AMathNet konaném v Pavlově ve dnech 6.-8.6.2011. Kromě odborných přednášek o aplikacích moderních matematických metod na něm byly prezentovány i úvahy a podněty k matematickému vzdělávání orientovanému na technickou praxi.

Věřím, že v časopise najdou čtenáři užitečné informace, díky kterým získají hlubší přehled o moderních matematických metodách pro řešení problémů technické praxe i o zajímavých konkrétních aplikacích matematiky, což přispěje k obohacení jejich vědomostí i k rozvoji jejich odborné činnosti.

Brno, 9. ledna 2012

Josef Šlapal
t.č. ředitel Ústavu matematiky
FSI VUT v Brně

O DIFERENCIÁLNÍCH ROVNICÍCH SE ZPOŽDĚNÍM – APLIKACE V ROBOTICE

PETR TOMÁŠEK

ABSTRAKT. V tomto článku jsou prezentovány některé zajímavé kvalitativní vlastnosti řešení diferenciálních rovnic se zpožděným argumentem. Naším cílem je demonstrovat skutečnost, že tyto vlastnosti se mohou dramaticky lišit v případě diferenciální rovnice se zpožděním a v jistém smyslu „odpovídající“ klasické obyčejné diferenciální rovnice. Využití diferenciálních rovnic se zpožděním je ilustrováno aplikací z oblasti robotiky.

1. ÚVOD

Modelování řady problémů v technické praxi i v jiných odvětvích často vede na řešení systému obyčejných diferenciálních rovnic (ODE), který lze zapsat jako

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad (1.1)$$

kde $x \in C(\langle t_0, t_f \rangle, \mathbb{R}^n)$ a $f \in C(\langle t_0, t_f \rangle \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Často je nezbytné zahrnout do systému diferenciálních rovnic také členy, které obsahují hodnotu neznámé funkce v čase minulém, což vede na systém diferenciálních rovnic se zpožděním (DDE)

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t))), \quad \tau(t) \geq 0, \quad (1.2)$$

kde $y \in C(\langle t_0 - \gamma, t_f \rangle, \mathbb{R}^n)$, $\gamma = \max\{\tau(t), t_0 \leq t \leq t_f\}$, $f \in C(\langle t_0, t_f \rangle \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $\tau \in C(\langle t_0, t_f \rangle, \mathbb{R}_0^+)$. Výraz $\tau(t)$ nazýváme *zpožděním* a člen $t - \tau(t)$ *zpožděným argumentem*. Podle tvaru $\tau(t)$ pak rozlišujeme např. zpoždění ohraničené či neohraničené. Více k úvodu do dané problematiky lze nalézt např. v [1], [5], [6].

Ukazuje se, že tyto systémy vykazují kvalitativní vlastnosti diametrálně odlišné od řešení „odpovídajících“ systémů obyčejných diferenciálních rovnic. V části 2 tohoto článku si zavedeme počáteční úlohu pro zpožděnou diferenciální rovnici a některé rozdíly ve vlastnostech ODE a DDE si budeme ilustrovat na jednoduchém skalárním případě. V části 3 si uvedeme aplikaci z oblasti robotiky včetně diskuse asymptotické stability řešení systému.

2010 MSC. Primární 34K06, 34K25.

Klíčová slova. diferenciální rovnice se zpožděním, asymptotické vlastnosti, oscilatorické vlastnosti.

Práce byla podporována projektem A-Math-Net - Síť pro transfer znalostí v aplikované matematice (CZ.1.07/2.4.00/17.0100).

2. SPECIFIKA ZPOŽDĚNÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

Definice 2.1 (Počáteční problém). Uvažujme funkci $\phi \in C(\langle t_0 - \gamma, t_0 \rangle, \mathbb{R}^n)$. Úlohu určit takové řešení rovnice (1.2), které vyhovuje podmínce

$$y(t) = \phi(t), \quad t \in \langle t_0 - \gamma, t_0 \rangle, \quad (2.1)$$

nazveme **počátečním problémem**.

Povšimněme si, že počáteční podmínka v případě ODE (1.1) $x(t_0) = x_0$ je dimenze jedna, zatímco počáteční podmínka (2.1) je obecně nekonečně-dimenzionální! V důsledku toho je přístup k řešení DDE zcela odlišný. Základní metodou je metoda kroků, jejíž princip spočívá v posloupnosti řešení počátečních problémů ODE na sekvenci navazujících intervalů. Délka těchto intervalů vychází ze zpoždění, které se v rovnici vyskytuje. Ilustrujme si tento postup na skalárním případě DDE s konstantním zpožděním.

Příklad 2.2. Uvažujme diferenciální rovnici s konstantním zpožděním

$$\dot{y}(t) = -y(t-1) \quad (2.2)$$

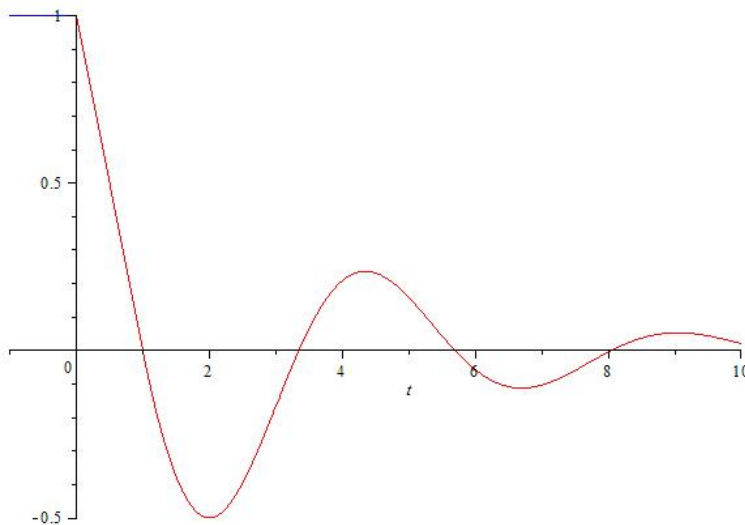
a počáteční podmínkou

$$y(t) = \phi_0(t) = 1, \quad t \in \langle -1, 0 \rangle. \quad (2.3)$$

Protože uvažujeme konstantní zpoždění $\tau(t) = 1$, metodou kroků budeme řešit posloupnost počátečních problémů pro ODE na intervalech délky jedna, a sice následovně:

$$\begin{aligned} t \in \langle 0, 1 \rangle : \quad & \dot{y}(t) = -\phi_0(t-1) = -1, \quad y(0) = 1, \\ & y(t) = -t + 1. \text{ Označme } \phi_1(t) := y(t). \\ t \in \langle 1, 2 \rangle : \quad & \dot{y}(t) = -\phi_1(t-1) = t-2, \quad y(1) = 0, \\ & y(t) = t^2/2 - 2t + 3/2. \text{ Označme } \phi_2(t) := y(t). \\ t \in \langle 2, 3 \rangle : \quad & \dot{y}(t) = -\phi_2(t-1) = -((t-1)^2/2 - 2(t-1) + 3/2), \quad y(2) = -\frac{1}{2}, \\ & y(t) = -t^3/6 + 3t^2/2 - 4t + 17/6. \text{ Označme } \phi_3(t) := y(t). \\ & \vdots \end{aligned}$$

Na obrázku 1 je vykresleno řešení $y(t)$ na intervalu $\langle -1, 10 \rangle$.



Obr 1. Řešení počátečního problému (2.2), (2.3)

Dále si na příkladě proporcionálního zpoždění budeme ilustrovat odlišnosti v oscilatorických a asymptotických vlastnostech řešení DDE a ODE.

Příklad 2.3. Uvažujme diferenciální rovnici s proporcionálním zpožděním (případ neohraničeného zpoždění)

$$\dot{y}(t) = -y(qt), \quad y(0) = 1, \quad q \in (0, 1), \quad t \geq 0. \quad (2.4)$$

Řešení počátečního problému (2.4) lze vyjádřit pomocí mocninného rozvoje jako

$$y_q(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{\binom{k}{2}}}{k!} t^k.$$

Uvažujme „odpovídající“ obyčejnou diferenciální rovnici, kterou formálně získáme z rovnice (2.4) limitním přechodem $q \rightarrow 1^-$:

$$\dot{x}(t) = -x(t), \quad x(0) = 1. \quad (2.5)$$

Řešením počátečního problému (2.5) je $x(t) = e^{-t}$.

Nejdříve porovnáme oscilatorické vlastnosti řešení. Je zřejmé, že řešením (2.5) je kladná klesající funkce. V případě zpožděné rovnice využijeme následující věty uvedené v [3]:

Věta 2.4. Uvažujme rovnici

$$\dot{y}(t) + p(t)y(qt) = 0, \quad p \in C([0, \infty), \mathbb{R}^+), \quad 0 < q < 1. \quad (2.6)$$

Nechť $m = \liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{qt}^t p(s) ds$. Jestliže $m > 1/e$, pak jsou všechna řešení rovnice (2.6) oscilující.

V našem případě uvažujeme $p(t) \equiv 1$, a tedy $m = \infty > 1/e$. Řešení rovnice (2.4) tedy osciluje, zatímco řešení rovnice (2.5) neosciluje.

Nyní se zaměříme na chování řešení (2.4) pro $t \rightarrow \infty$. Využijeme výsledku publikovaného v [2], který lze pro náš případ formulovat takto: společně s rovnicí (2.4) zavedeme pomocné funkce

$$\varphi_q(t) := t^k (\text{Log} t)^h \exp\left(-\frac{1}{2c} (\text{Log} t - \text{Log} \text{Log} t)^2\right),$$

kde $c = \text{Log} q$, $k = 1/2 - (1 + \text{Log} c)/c$, $h = -1 + \frac{1}{c} \text{Log} c$. Pomocí asymptotických výsledků uvedených v [2] lze ukázat, že $y_q(t) = O(\varphi_q(t))$, $t \rightarrow \infty$, pro všechna řešení y_q rovnice (2.4) a $y_q(t) = o(\varphi_q(t))$, $t \rightarrow \infty$, pouze pro nulové řešení rovnice (2.4). To znamená, že funkce $\frac{|y_q(t)|}{|\varphi_q(t)|}$ je ohraničená pro $t \rightarrow \infty$ a navíc tato funkce nemá nulovou limitu. Tedy existuje horní odhad $M|\varphi_q(t)|$, $M \in \mathbb{R}^+$, řešení $y(t)$ a tento odhad není nikterak nadsazený (obě funkce $|y(t)|$ a $|\varphi_q(t)|$ jsou řádově "srovnatelné").

Navíc platí: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_r(t)}{\varphi_s(t)} = 0$ pro $r, s \in (0, 1)$, $r < s$. Z toho plyne, že čím více se hodnota q blíží k jedné zleva (formálně se (2.4) blíží k (2.5)), tím větší budou amplitudy řešení (2.4) pro $t \rightarrow \infty$ (namísto předpokládané konvergence k nule: $x(t) = e^{-t}$)! Dochází tedy k nečekanému kvalitativnímu rozdílu mezi asymptotickým chováním řešení problémů (2.4) a (2.5).

3. APLIKACE ZPOŽDĚNÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

Nejčastěji v praxi narazíme na příklady modelů s ohraničeným (především konstantním) zpožděním. Uvedme např. model obráběcího nástroje, kde je zahrnuto chvění vznikající při obráběcím procesu, transportní zpoždění, které je způsobeno konečnou rychlostí paliva proudícího dlouhým potrubím, procesní zpoždění před spuštěním chemické reakce, komunikační zpoždění v souvislosti s konečnou rychlostí šíření rádiového signálu v prostoru při komunikaci (řízení) na velkou vzdálenost. Dále v počítačově řízených systémech často existuje nezanedbatelné výpočetní zpoždění, způsobené množstvím operací a složitostí řídicích algoritmů. Pro ilustraci použití diferenciálních rovnic se zpožděním lze řadu modelů nalézt např. v [4], [5], [7].

Nyní se zaměříme na model z oblasti robotiky. V robotice je celá řada problémů týkajících se stability, kde zpoždění v robotickém systému hraje důležitou roli. Toto zpoždění může vzniknout v řídicím systému robota, při přenosu informací či v mechanické části robota. Systém master-slave je typickým případem, kde dochází k časové prodlevě při řízení. Např. v systému člověk–stroj se promítá reflex lidského operátora do zpoždění v řízení systému (zpravidla více než 0.1 sekund). Analogicky této situaci se generuje zpoždění např. u manipulátoru řízeného počítačem. Vzorový čas digitálního řízení slouží jako základ pro hodnotu zpoždění, která je řádově v setinách až tisícinách sekundy. Další významnou skupinou problémů je zpoždění vznikající při přenosu informací. Toto zpoždění má rozhodující vliv při operacích ve vesmíru či ve velkých hloubkách pod hladinou moře. Prodleva je rovna času potřebnému k tomu, aby ultrasonická či elektromagnetická vlna urazila vzdálenost mezi řídicím centrem a konečným efektozem.

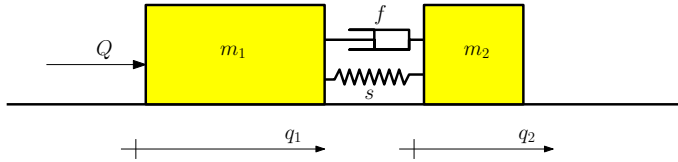
Motivační příklad. Jestliže robot pracuje při obráběcím procesu, jako je frézování, soustružení apod., může rovněž vzniknout zpoždění ve zpětné vazbě čistě

mechanické části robota. Toto zpoždění bývá nepřímo úměrné relativní rychlosti nástroje a materiálu. Tato situace bude ilustrována na matematickém modelu mechanického robota (viz [8]), kdy budeme diskutovat závislost asymptotické stability systému na jeho parametrech.

Uvažujme robotický systém znázorněný na obrázku 2. Řízení robota vychází z principu kinematického sebeovládání. To znamená, že regulátor působící na první těleso v tomto modelu způsobuje rychlost $\dot{q}_1$, která je určována polohou q_2 konečného efektoru:

$$\dot{q}_1(t) = -Kq_2(t - \tau), \quad (3.1)$$

kde $K > 0$ a $\tau = konst.$ reprezentuje zpoždění v řízení.



Obr 2. Elastický robot s jedním stupněm volnosti

Zavedením nové proměnné $v = \dot{q}_2$ lze tento systém popsat soustavou lineárních diferenciálních rovnic s konstantním zpožděním

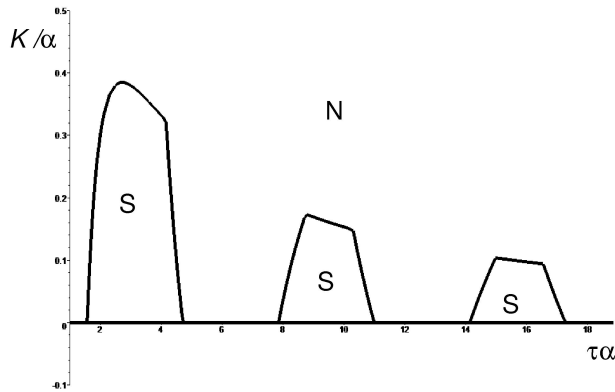
$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha^2 & -\alpha^2 & -2\kappa\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -K & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2K\kappa\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1(t - \tau) \\ q_2(t - \tau) \\ v(t - \tau) \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

kde $\alpha = \sqrt{s/m_2}$ je přirozená frekvence neřízeného netlumeného systému a $\kappa = \frac{f}{2m_2\alpha}$ je tzv. relativní tlumicí faktor. Následující věta (viz [8]) udává podmínky pro nastavení parametrů modelu tak, aby byla zajištěna asymptotická stabilita netlumeného systému.

Věta 3.1. *Uvažujme zpožděnou diferenciální rovnici (3.2), kde $\kappa = 0$. Její triviální řešení je asymptoticky stabilní, právě když existuje takové $k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, vyhovující relacím*

$$\begin{aligned} \frac{K}{\alpha} &< \frac{\pi}{2\alpha\tau} - \left(\frac{\pi}{2\alpha\tau}\right)^3, \\ \frac{K}{\alpha} &< \frac{1}{\alpha\tau} \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{(\alpha\tau)^3} \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)^3, \\ \frac{K}{\alpha} &< -\frac{1}{\alpha\tau} \left(2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right) + \frac{1}{(\alpha\tau)^3} \left(2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right)^3. \end{aligned}$$

Relace ve výše uvedené větě určují graf asymptotické stability pro netlumený systém (3.2) v souřadnicích bezrozměrných parametrů $(\tau\alpha)$ a (K/α) , který je znázorněn na obrázku 3.



Obr 3. Graf asymptotické stability netlumeného systému (3.2);
N - as. nestabilní, S - as. stabilní

4. ZÁVĚR

V článku byla na lineárních diferenciálních rovnicích prvního řádu s konstantním a proporcionálním zpožděním ilustrována některá jejich specifika, především pak v souvislosti s "odpovídajícím" případem obyčejné diferenciální rovnice. Použití zpožděných rovnic bylo ilustrováno na jednoduchém modelu z oblasti robotiky.

REFERENCE

- [1] C.T.H. Baker: *Retarded differential equations*, J. Comput. Appl. Math. **125** (2000), 309–335.
- [2] J. Čermák: *On the differential and difference equation with a power delayed argument*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. **5** (2008), 1–8.
- [3] L. H. Erbe, Q. Kong, B.G. Zhang: *Oscillation Theory for Functional Differential Equations*, Marcel Dekker, New York, 1995.
- [4] T. Erneux: *Applied Delay Differential Equations*, Springer, 2009.
- [5] V. Kolmanovskii, A. Myshkis: *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*, Kluwer Academic, Dordrecht, 1999.
- [6] P. Marušiač, R. Olach: *Funkcionálne diferenciálne rovnice*, Žilinská univerzita, 2000.
- [7] H. Smith: *An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences*, Springer, 2011.
- [8] G. Stépán: *Retarded Dynamical Systems: Stability and Characteristic Functions*, Longman Scientific & Technical, Burnt Mill, 1989.

Petr Tomášek, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: tomasek@fme.vutbr.cz

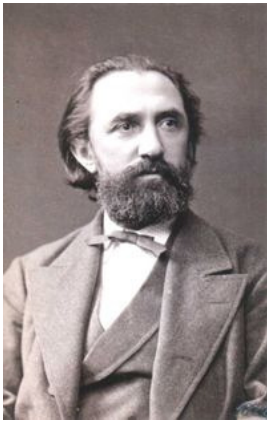
NĚKTERÉ KINEMATICKÉ DVOJICE

JAROSLAV HRDINA

ABSTRAKT. Tento text představuje jednu z mnoha aplikací lineární algebry, Lieovy teorie a diferenciální geometrie v matematické robotice. Naším cílem je připomenout klasifikaci kinematických dvojic vyššího řádu, která odpovídá klasifikaci souvislých Lieových podgrup afinní euklidovské grupy $SE(3)$, a tuto klasifikaci následně provést.

1. ÚVOD

Teorie kinematických dvojic je důležitou partií kinematiky a tento text se jí věnuje jen částečně. Čtenáře s hlubším zájmem o kinematické dvojice můžeme odkázat na první kapitulu knihy [2]. Neformálně řečeno, kinematickou dvojici rozumíme dvojici objektů (souvislých podvariet $\mathbb{R}^3$), které se vzájemně dotýkají a současně mají volnost při vzájemném pohybu, přičemž pohybem rozumíme spojitou transformaci zachovávající vzdálenosti mezi libovolnými dvěma body objektů a příslušnou orientací.



Nás zajímají vyšší kinematické dvojice, tedy případ, kdy jsou obě dvojice povrchového typu, a body kontaktu tedy tvoří plochu. Naším cílem je klasifikovat tyto kinematické dvojice aparátem Lieových grup. Po definování afinní euklidovské grupy $SE(3)$ jako polopřímého součinu speciální ortogonální grupy $SO(3)$ a translační grupy $\mathbb{R}^3$ najdeme všechny její Lieovy podgrupy (na tento polopřímý součin se můžeme dívat i jako na afinní rozšíření speciální ortogonální grupy $SO(3)$). Začneme tím, že najdeme všechny Lieovy podgrupy $SO(3)$ a $\mathbb{R}^3$, přičemž u podgrupy $SO(3)$ se omezíme jen na souvislé. Po klasifikaci příslušných podgrup prodiskutujeme, které dvojice tvoří Lieovu podgrupu

$SE(3)$ a případně, jaká souvislá plocha je vůči akci této grupy invariantní. Poznamenejme, že historie této klasifikace je spojena se jménem otce kinematiky Franzem Reuleauxem (na obrázku), 30.9.1829 - 20.8.1905, strojním inženýrem,

2010 MSC. Primární 70B10, 22E70, 53A17.

Klíčová slova. Lineární algebra, Lieova teorie, diferenciální geometrie, matematická robotika. Práce byla podporována projektem OPVK číslo CZ.1.07/2.4.00/17.0100.

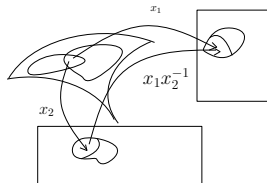
učitelem a pozdějším rektorem Berlin Royal Technical Academy. Jím zavedený pojem Reuleauxovy plochy odpovídá právě plochám ve třírozměrném euklidovském prostoru, které jsou invariantní vůči akci některé z podgrup afinní euklidovské grupy $SE(3)$, jejichž prvky působí jako afinní euklidovské transformace. Tyto plochy odpovídají právě vyšším kinematickým dvojicím.

2. MATEMATICKÝ ZÁKLAD

Pojmy lineární algebry a diferenciální geometrie potřebné pro odvození klasifikace budou v textu na příslušném místě připomenuty. Text vychází převážně z knihy [3], ve které je možné nalézt mnoho dalších podrobností a její studium je možné doporučit i čtenářům s hlubším zájmem o problematiku. Poznamenejme, že existuje i výborná česká monografie [4].

2.1. Lieova grupa

Připomeňme, že topologická varieta je separovaný (každé dva jeho různé body mají disjunktní okolí) topologický prostor M se spočetnou bází, který je lokálně homeomorfní $\mathbb{R}^n$, tj. pro každé $y \in M$ existuje jeho okolí U , otevřená množina $V \subset \mathbb{R}^n$ a homeomorfismus $x : U \rightarrow V$. Příslušnou dvojici (U, x) nazýváme lokální mapa. Dvě lokální mapy jsou C^r -relované, pokud přechodové zobrazení na obrazech průniku při zobrazeních x_1 a x_2 , tj. $x_1 x_2^{-1} : x_2(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow x_1(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^n$, je funkce třídy C^r . Atlasem třídy C^r rozumíme soustavu C^r -relovaných map takových, že jejich definiční obory pokrývají celé M a jsou po dvou C^r -relované. Hladkou varietou pak rozumíme topologickou varietu s atlasem třídy C^∞ . Podrobný popis je možné najít v libovolném textu diferenciální geometrie, např. ve skriptech [5].



Lieova grupa je hladká varieta vybavena strukturou grupy taková, že příslušné grupové operace jsou hladké, tj.

- Existuje význačný prvek $e \in G$
- Existují dvě hladké funkce $\text{mult} : G \times G \rightarrow G$, $\text{inv} : G \rightarrow G$, takové, že

$$\text{mult}(a, \text{mult}(b, c)) = \text{mult}(\text{mult}(a, b), c),$$

$$\text{mult}(a, e) = \text{mult}(e, a) = a,$$

$$\text{mult}(a, \text{inv}(a)) = \text{mult}(\text{inv}(a), a) = e,$$

pro každé $a, b, c \in G$.

Příklad. 2.2. *Nejjednodušším příkladem Lieovy grupy je prostor $\mathbb{R}^n$, kde příslušný atlas obsahuje právě jednu mapu, kterou je identita. Příslušné operace jsou definovány po složkách, tj.*

$$\text{mult}(u, v) = u + v = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n),$$

$$\text{inv}(u) = -u = (-u_1, \dots, -u_n),$$

pro $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ a jsou jistě hladké. Podobně může být Lieovou grupou grupa matic $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$ spolu s operací sčítání, která je izomorfní grupě $(\mathbb{R}^{n^2}, +)$. Dalším příkladem jsou obecně vektorové prostory dimenze n , kde volba báze znamená volbu izomorfního zobrazení $\alpha: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$, a tedy volbu mapy pokrývající celý vektorový prostor. Příslušný atlas je pak tvořený jen touto jedinou mapou.

2.3. Ortogonální grupa $O(n)$

Dalším příkladem Lieovy grupy je grupa všech invertibilních matic $n \times n$ spolu s operací násobení. Tuto grupu označujeme $GL(n, \mathbb{R})$. Jedná se vlastně o grupu lineárních endomorfismů vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$. Diskutujme některé její podgrupy. Ortogonální grupou $O(n, \mathbb{R})$ se myslí podgrupa grupy $GL(n, \mathbb{R})$ obsahující prvky zachovávající nedegenerovanou pozitivně definitní bilineární symetrickou formu na $\mathbb{R}^n$ (skalární součin)

$$x \cdot y = x^T y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n,$$

kde $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, nebo maticově

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Pokud $M \in O(n)$, musí pro libovolné dva body $x, y \in \mathbb{R}^n$ platit $\bar{x}^T \bar{y} = x^T y$, kde $\bar{x} = Mx$ a $\bar{y} = My$, a přímočarým výpočtem

$$\bar{x}^T \bar{y} = (Mx)^T My = x^T M^T My$$

ověříme, že grupu $O(n)$ můžeme definovat předpisem

$$O(n) = \{M \in GL(n, \mathbb{R}) | M^T M = E\},$$

kde E je jednotková matice.

2.4. Speciální ortogonální grupa $SO(n)$

Protože $\det(M^T) = \det(M)$, platí pro každé $M \in O(n)$, že $\det(M)^2 = 1$, a tedy $\det(M) = \pm 1$. Není těžké si rozmyslet, že funkce determinantu je hladké (polynomiální) zobrazení $\det: \text{Mat}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, a varieta $O(n)$ tedy obsahuje právě dvě souvislé komponenty, vzory čísel ± 1 pro funkci determinantu.

$$O_+(n) = \{M \in GL(n, \mathbb{R}) | M^T M = E, \det(M) = 1\},$$

$$O_-(n) = \{M \in GL(n, \mathbb{R}) | M^T M = E, \det(M) = -1\}.$$

Pro naše úvahy je důležité, že pouze množina $O_+(n)$ obsahuje identitu, a tedy tvoří Lieovu podgrupu grupy $O(n)$, označovanou jako $SO(n)$.

Příklad. 2.5. Nejjednodušším příkladem je grupa $O(2)$, která obsahuje dvě souvislé, jednodimenzionální komponenty reprezentované maticemi

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix},$$

kde $\varphi \in (0, 2\pi)$. Není těžké si uvědomit, že podgrupa tvořená maticemi vlevo obsahuje jednotkovou matici, a je tedy podgrupou $SO(2)$. Všimněme si, že příslušné transformace odpovídají právě otočením kolem středu o úhel φ v kladném směru (proti směru hodinových ručiček).

2.6. Homomorfismus Lieových grup

Hladké zobrazení $f : G \rightarrow H$ takové, že

$$f(\text{mult}_G(g_1, g_2)) = \text{mult}_H(f(g_1), f(g_2)), \text{ pro všechna } g_1, g_2 \in G$$

nazýváme homomorfismem Lieových grup (G, mult_G) a (H, mult_H) .

Příklad. 2.7. Na definovaných Lieových grupách můžeme ukázat dva důležité homomorfismy Lieových grup. Protože jsme speciální ortogonální grupu zadefinovali jako podmnožinu ortogonální grupy, můžeme následně definovat příslušné vložení

$$SO(n) \hookrightarrow O(n).$$

Při maticové reprezentaci Lieových grup, můžeme speciální ortogonální grupu řádu n vložit do speciální ortogonální grupy řádu $n + 1$,

$$SO(n) \hookrightarrow SO(n + 1)$$

následovně:

$$M \in SO(n) \mapsto \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO(n + 1).$$

Stačí ověřit, že pro každé $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, kde $M \in SO(n)$, je splněna identita

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M^T M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

a hodnota determinantu je jedna, tj.

$$\det \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det(M) \cdot (-1)^{(n+1)+(n+1)} = 1 \cdot (-1)^{2n+2} = 1.$$

2.8. Akce Lieovy grupy G na hladké varietě X

Nechť X je hladká varieta a (G, mult) je Lieova grupa. Pak hladké zobrazení

$$a : G \times X \rightarrow X$$

takové, že

- $a(e, x) = x$ pro $\forall x \in X$, kde $e \in G$ je jednotkový prvek
- $a(g_1, a(g_2, x)) = a(\text{mult}(g_1, g_2), x)$ pro $\forall x \in X, \forall g_1, g_2 \in G$,

se nazývá akcí Lieovy grupy G na hladké varietě X .

Příklad. 2.9. Vynásobení vektoru $x \in \mathbb{R}^n$ maticí $M \in SO(n)$ (obecně maticí z $GL(n, \mathbb{R})$) zleva má vlastnosti akce, protože se jedná o hladké (polynomiální) zobrazení, jednotková matice působí jako identita a poslední podmínka plyne z asociativity násobení matic. V naší terminologii to znamená, že grupa $SO(n)$ působí na $\mathbb{R}^n$ jako vynásobení maticí, kde

$$a_1(M, v) = Mv$$

je příslušná akce $M \in SO(n)$, $v \in \mathbb{R}^n$. Obdobně grupa $\mathbb{R}^n$ působí na $\mathbb{R}^n$ jako přičítání (pro přehlednost píšeme zprava), tj.

$$a_2(k, v) = v + k$$

je opět akce, kde $k \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$. Poznamenejme, že složení $a_2 \circ a_1$ těchto akcí působí na $\mathbb{R}^n$ jako afinní endomorfismus

$$a_2(t, a_1(M, v)) = Mv + t,$$

kde $M \in SO(n)$, $t \in \mathbb{R}^n$ jsou prvky grup a vektor $v \in \mathbb{R}^n$ je prvek hladké variety. Současně každý afinní endomorfismus připouštějící jen rotace z $SO(3)$ je možné realizovat vhodnou volbou $M \in SO(n)$ a $t \in \mathbb{R}^n$.

2.10. Přímý součin $SO(n) \times \mathbb{R}^n$

Definujeme přímý součin grup $SO(n) \times \mathbb{R}^n$ jako množinu uspořádaných dvojic s výsledným násobením po složkách (ve druhé složce jde v případě $\mathbb{R}^n$ o sčítání) a definujeme hladké zobrazení $a : (SO(n) \times \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ předpisem

$$a((M, t), v) = Mv + t,$$

kde $M \in SO(n)$, $t \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$. Toto hladké zobrazení přiřazuje každé dvojici $M \in SO(n)$, $t \in \mathbb{R}^n$ příslušný afinní epimorfismus a prvek $(E, 0)$ (kde E je jednotková matice) působí jako identita. V tomto případě se ale nejedná o akci, protože druhá podmínka akce není splněna. Stačí zvolit $t_2 \in \mathbb{R}^n$ a $M_1 \in SO(n)$ tak, že t_2 není osou rotace (vlastním vektorem) M_1 , a dostaneme

$$a((M_1, t_1), a((M_2, t_2), v)) = M_1 M_2 v + M_1 t_2 + t_1 \neq$$

$$M_1 M_2 v + t_1 + t_2 = a((M_1 M_2, t_1 + t_2), v) = a(\text{mult}((M_1, t_1), (M_2, t_2)), v).$$

Afinní transformace jsou kombinace lineárních transformací a posunutí. Jsou to tedy kombinace akcí a_1 a a_2 z příkladu 2.9. Vidíme ale, že se nemůže jednat o přímý součin těchto dvou akcí. Naším cílem je popsat afinní izomorfismy jako akci nějaké vhodné grupy, a grupa $SO(n) \times \mathbb{R}^n$ to tedy být nemůže.

2.11. Euklidovská grupa $SE(n)$

Pohyb v euklidovském prostoru je popsán souřadnicemi bodu v závislosti na čase. Pro modelování pohybu v robotice je nutné, aby vzdálenost každých dvou bodů pohybujícího se objektu (např. robotické paže) zůstala v čase konstantní. Současně je nutné zachovat orientaci pohybujícího se objektu. Zaujímají nás tedy afinní endomorfismy $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ splňující následující dvě podmínky:

- $\|g(p) - g(q)\| = \|p - q\|$ pro všechny body $p, q \in \mathbb{R}^n$
- $g_*(v \times w) = g_*(v) \times g_*(w)$, pro všechny vektory $v, w \in \mathbb{R}^n$, kde $g_*(p - q) := g(p) - g(q)$.

Důsledkem této definice je, že tato transformace musí zachovávat skalární součin vzniklý polarizací

$$v^T w = \frac{1}{4}(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2),$$

a tedy akci a_1 musíme zúžit k podgrupě $O(n)$. Pro euklidovskou normu v $\mathbb{R}^2$ můžeme korektnost polarizace ověřit. Konkrétně pro

$$\| (x, y) \| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

dostaneme

$$\begin{aligned} (x_1, y_1)^T (x_2, y_2) &= \frac{1}{4} (\| (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \|^2 - \| (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \|^2) = \\ &= \frac{1}{4} ((x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2) = \\ &= \frac{1}{4} (2x_1x_2 + 2y_1y_2 + 2x_1x_2 + 2y_1y_2) = x_1x_2 + y_1y_2. \end{aligned}$$

Z druhé podmínky pro pohyb je jasné, že příslušný afinní endomorfismus musí zachovávat i orientaci, a jeho část reprezentující rotaci musí být tedy prvkem speciální ortogonální grupy $SO(n)$.

Podíváme-li se podrobněji na příslušné matice, není těžké dokázat, že každý prvek z $O(n)_-$ lze dostat jako součin vhodného prvku z $SO(n)$ a nějakého pevně zvoleného prvku $P \in O_-(n)$. Připomeňme, že takové P splňuje identitu $P^T P = E$ a jeho determinant je mínus jedna. Příklady takových matic můžou odpovídat různým reflexím, konkrétně

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde například matice P_2 odpovídá reflexi kolem osy x , a tedy určitě nezachovává orientaci. V $\mathbb{R}^2$ matice P_2 směr rotace přímo otáčí

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & \sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & -\cos(-\varphi) \end{pmatrix}.$$

Celkově je tedy jasné, že příslušné pohyby tělesa musí být afinní endomorfismy $Mv + t$ takové, že $M \in SO(n)$ a $t \in \mathbb{R}^n$.

Definujeme tedy zobrazení a přiřazující dvojici prvků $(R, t) \in SO(n) \times \mathbb{R}^n$ zobrazení $a((R, u), x) = Rx + t$. Nejedná se o přímý součin akcí a_1 a a_2 definovaných dříve, protože při složení zobrazení pro dva různé prvky platí

$$a((R_2, t_2), a((R_1, t_1), x)) = a((R_2, t_2), R_1x + t_1) = R_2R_1x + R_2t_1 + t_2$$

a zatím co prvky reprezentující otočení se skládají přímo, prvky reprezentující posunutí jsou ovlivněné předchozím otočením.

Abychom hladkou akci mohli korektně definovat, zavedeme euklidovskou grupu $SE(3)$ jako polopřímý součin

$$SE(n) = SO(n) \ltimes \mathbb{R}^n,$$

kde polopřímost je určená na druhé složce funkcí $\varphi : t \mapsto Rt$, a tedy obecně píšeme

$$(R_2, t_2)(R_1, t_1) = (R_2R_1, \varphi(t_1) + t_2).$$

Pro počítání s polopřímým součinem zavedeme afinní rozšíření grupy $SO(n)$ jako maticovou reprezentaci grupy $SE(n)$ tak, že použijeme vložení

$$SE(n) \hookrightarrow GL(n+1, \mathbb{R}),$$

maticově zapsané

$$(R, t) \mapsto \begin{pmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Smyslem této reprezentace je, že násobení v polopřímém součinu $SE(n)$ je v afinním rozšíření reprezentováno jako násobení příslušných matic

$$\begin{pmatrix} R_2 & t_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 & t_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_2 R_1 & R_2 t_1 + t_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inverzní transformace se pak maticově zapíše jako

$$\begin{pmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} R^T & -R^T t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Akce grupy $SE(n)$ na $\mathbb{R}^n$ je definována pomocí injekce

$$\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \tilde{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix},$$

jako maticové násobení

$$\begin{pmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Rv + t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Znovu připomeňme, že geometrický význam této akce je pootočení dané maticí $R \in SO(n)$ a posunutí o vektor $t \in \mathbb{R}^n$.

2.12. Lieovy podgrupy a homomorfismy

Lieovou podgrupou rozumíme podvarietu Lieovy grupy uzavřenou vzhledem ke grupovým operacím. Elementárním příkladem je triviální podgrupa $0 = \{E\} \subset GL(n, \mathbb{R})$, kde E je jednotkový prvek. Připomeňme stručně některé pojmy a hlavně výsledky obecné algebry, pro podrobnější informace je možné nahlédnout do knihy [1].

Prvky jádra grupového homomorfismu $f : (G, t) \rightarrow (H, t)$ jsou uzavřené vzhledem ke grupové operaci

$$\forall a, b \in \text{Ker } f \Rightarrow (f(a) = f(b) = 0) \Rightarrow (f(a + b) = 0) \Rightarrow (a + b) \in \text{Ker } f,$$

a tedy

$$\begin{aligned} f(-x) &= -f(x), \\ f(0) &= f(x - x) = f(x) + f(-x) = 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

tvoří podgrupu v G . Prvky obrazu jsou také uzavřeny na grupovou operaci

$$\forall a, b \in \text{Im } f \Rightarrow (\exists u, v \in G : f(u) = a, f(v) = b) \Rightarrow (f(u + v) = a + b) \Rightarrow (a + b) \in \text{Im } f$$

a tvoří tedy podgrupu v H . V případě, že jde o homomorfismus Lieových grup, f musí být hladké a tyto podgrupy jsou Lieovy podgrupy. Připomeňme také, že každá podgrupa je jádrem vhodného homomorfismu.

Každá podgrupa $H \subset G$ určuje ekvivalenci na G předpisem

$$g_1 \equiv g_2 \iff g_1 = h g_2 \text{ pro nějaké } h \in H.$$

Stručně připomeňme pojmy, které jsou s relací ekvivalence spojené. Třídami ekvivalence rozumíme množiny $[g] = \{gh | h \in H\}$. Množinu všech tříd ekvivalence nazýváme faktor G/H . Připomeňme, že příslušná surjekce $G \rightarrow G/H$ je v případě Lieových grup hladké zobrazení, které se nazývá projekce na faktor.

2.13. Normální podgrupy

Příslušný faktor G/H nemusí obecně zdědit příslušné grupové operace, klíčem je následující definice:

$$N \subseteq G \text{ normální} \iff gng^{-1} \in N, \forall g \in G, \forall n \in N.$$

Pokud zvolíme normální podgrupu, je příslušný faktor G/N opět grupou (faktor-grupou), protože operace na třídách je dobře definovaná, tj. platí

$$[g_1][g_2] = [g_1g_2].$$

3. KLASIFIKACE

Abychom popsali příslušné podgrupy, všimněme si nejprve, že grupa translací $\mathbb{R}^3$ reprezentovaná maticemi

$$\begin{pmatrix} E & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ kde } t \in \mathbb{R}^3,$$

je normální podgrupa $SE(3)$, kde E je jednotková matice, protože pro každé $R \in SO(3)$ a $u, t \in \mathbb{R}^3$ platí

$$\begin{pmatrix} R & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^T & -R^T u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & Rt \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Výsledná faktorgrupa $SE(3)/\mathbb{R}^3$ je izomorfní s grupou $SO(3)$ a $SE(3) \rightarrow SO(3)$ je příslušná projekce. Protože jde o Lieovy grupy, příslušná projekce je hladké zobrazení. Tedy každá Lieova podgrupa $SE(3)$ zúžena k $\mathbb{R}^3$ (jádro projekce) je také Lieova podgrupa $\mathbb{R}^3$ a každá Lieova podgrupa $SE(3)$ zúžena k $SO(3)$ (její obraz v projekci) je také Lieova podgrupa $SO(3)$. Postupujeme tedy obráceně, hledáme podgrupy $SO(3)$ a $\mathbb{R}^3$ a ověřujeme, jestli jejich polopřímý součin je souvislou Lieovou podgrupou $E(3)$.

3.1. Podgrupy $\mathbb{R}^3$ a $SO(3)$

Příslušné podgrupy si uvedeme formou seznamu a čtenáře se zájmem o podrobnější diskuze odkazujeme opět na knihu [3]. Je celkem jednoduché ověřit, že souvislé Lieovy podgrupy $SO(3)$ jsou, až na izomorfismus, právě tři, a to 0, $SO(2)$ a $SO(3)$. Nesouvislé Lieovy podgrupy $SO(3)$ zde nezkoumáme. Lieovy podgrupy $\mathbb{R}^3$ spolu se sčítáním mají strukturu bohatší, jsou to, až na izomorfismus, podgrupy

- $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}, 0$,
- $p\mathbb{Z}, p\mathbb{Z} \times \mathbb{R}, p\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2, p \in \mathbb{R}$,
- $p\mathbb{Z} \times q\mathbb{Z}, p\mathbb{Z} \times q\mathbb{Z} \times \mathbb{R}, p, q \in \mathbb{R}$,
- $p\mathbb{Z} \times q\mathbb{Z} \times r\mathbb{Z}, p, q, r \in \mathbb{R}$.

Opět je lehké ověřit, že tyto podmnožiny jsou Lieovy podgrupy, ale pro opačný směr je nutné nahlédnout do zmíněné literatury.

3.2. Podgrupy $SE(3)$

Seřadíme výsledné podgrupy podle dimenze (dimenze je tu počet parametrů), popíšeme případné invariantní plochy, pokud existují, a uvedeme příslušné matice ve vhodné bázi.

Hledáme dvojice podgrup $A \subset \mathbb{R}^3$, $H \subset SO(3)$ takových, že $H \ltimes A \subset SE(3)$ je podgrupa. Uvědomme si, že pokud je G podgrupa $SE(3)$, pak její zúžení k $\mathbb{R}^3$ musí být normální podgrupou v G a musí platit, že příslušný faktor je izomorfní s jejím zúžením k $SO(3)$, tj. $G/A \cong H$ musí být podgrupa $SO(3)$. Znamená to, že hledáme takové dvojice (H, A) , kde A je uzavřena na konjugování prvky H , tj. maticově

$$\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_3 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_3 & Rt \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in A, \quad \text{kde } R \in H.$$

Je vidět, že hledáme takové dvojice (H, A) , kde akce maticového násobení prvky z H zachovává množinu A .

Pokud vezmeme za A celý prostor $\mathbb{R}^3$, je jasné, že za H můžeme použít všechny tři podgrupy $SO(3)$. Dostaneme tak podgrupy $SE(3)$ dimenze 6, 4 a 3 (viz tabulky). Poznamenejme, že v dimenzi 5 nám žádná podgrupa nevyjde, a tedy neexistuje kinematická dvojice s pěti stupni volnosti. Příslušná invariantní plocha však v žádném z těchto případů existovat nemůže, protože akce grupy A generuje všechna posunutí, a zobrazí tedy libovolný bod na libovolný bod v $\mathbb{R}^3$. Invariantní podprostor je pouze celé $\mathbb{R}^3$ bez ohledu na to, jaké rotace přidáme.

dimenze	podgrupa
6	$SO(3) \ltimes \mathbb{R}^3 = SE(3)$
5	–

dimenze	podgrupa
4	$SO(2) \ltimes \mathbb{R}^3 = SE(2) \times \mathbb{R}$

Pokud vezmeme za A podprostor $\mathbb{R}^2$, je možností více. Za H nemůžeme zvolit grupu všech rotací $SO(3)$, protože ta A nezachovává. Volbou podgrupy $SO(2)$ tak, že příslušné rotace jsou v ose normály, dostaneme $SE(2)$ a příslušná invariantní podplocha bude izomorfní $\mathbb{R}^2$. Stejnou plochu bychom dostali i volbou triviální podgrupy, ale plocha, která by byla invariantní vůči posunutí ve dvou nezávislých směrech a jejich lineárních kombinacích, by byla izomorfní s $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Taková plocha by ale byla také invariantní vůči rotacím ve směru normály.

Zbývající možnost v dimenzi 3 je volba $A = p\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2$ a $H = SO(2)$. V tomto případě je nutné, aby první složka grupy A byla osou rotace H . Příslušným invariantním podprostorem pak mohou být disjunktní rovnoběžné roviny vzdálené o p , nebo celé $\mathbb{R}^3$. V prvním případě není plocha souvislá a v druhém případě se nejedná o plochu. Shrňme si tedy dimenzi tři v tabulce.

dimenze	podgrupa
3	$SO(3) \ltimes \mathbb{R}^2 = SE(2), \mathbb{R}^3, H_p \ltimes \mathbb{R}^2$

Jediné invariantní podplochy vzhledem k Lieově podgrupě euklidovské grupy pro volbu $A = \mathbb{R}^2$ jsou tedy roviny v $\mathbb{R}^3$. Příslušná matice rotací pak vypadá ve vhodné

bázi následovně

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & t_1 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & t_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

kde $t_1, t_2, \theta \in (0, 2\pi)$.

Pokud vezmeme za A podgrupu $\mathbb{R}$, dostáváme v dimenzi 2 jednu plochu a v dimenzi 1 dvě plochy. Grupa všech rotací přímku nezachovává, tedy $SO(3)$ zvolit nelze. Volba rotací $SO(2)$ s osou rotace ve směru přímky funguje, a dostáváme tak jedinou kinematickou dvojici dimenze dva.

Poznamenejme, že v dimenzi 2 máme ještě už prodiskutovanou volbu $A = \mathbb{R}^2, H = 0$ a volbu $A = 0, H = SO(3)$, která odpovídá poslední volbě $A = 0$

dimenze	podgrupa
2	$SO(2) \ltimes \mathbb{R}, SO(3), \mathbb{R}^2$

$SO(2) \times \mathbb{R}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$SO(3)$	$\begin{pmatrix} 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

V dimenzi 1 nám zbývá pouze volba $A = \mathbb{R}, H = 0$ a $A = 0, H = SO(2)$ a volba šroubovice H_p . K těmto oběma podgrupám příslušné invariantní plochy, a tedy i kinematické dvojice existují.

dimenze	podgrupa
1	$SO(2), \mathbb{R}, H_p$
$SO(2)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$SO(2) \ltimes H_p$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p\theta/2\pi x \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\mathbb{R}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Na závěr uvedeme tabulku všech Lieových podgrup grupy $SE(3)$ a tabulku těch, kterým odpovídají kinematické dvojice.

dimenze	podgrupa
6	$SO(3) \ltimes \mathbb{R}^3 = SE(3)$
5	–
4	$SO(2) \ltimes \mathbb{R}^3 = SE(2) \times \mathbb{R}$
3	$SO(3) \ltimes \mathbb{R}^2 = SE(2), \mathbb{R}^3, H_p \ltimes \mathbb{R}^2$
2	$SO(2) \ltimes \mathbb{R}, SO(3), \mathbb{R}^2$
1	$SO(2), \mathbb{R}, H_p$

dimenze	podgrupa
3	$SE(2), \mathbb{R}^3$
2	$SO(2) \ltimes \mathbb{R}, SO(3)$
1	$SO(2), \mathbb{R}, H_p$

REFERENCE

- [1] G. Birkhoff, S. MacLane: *Aplikovaná algebra*, Alfa, Bratislava, 1981.
- [2] K.H. Hunt: *Kinematic Geometry of Mechanisms*, Oxford Engineering Science Series, Oxford University Press, USA, 1990.
- [3] J.M. Selig: *Geometric Fundamentals of Robotics*, Monographs in Computer Science, Springer, 2004.
- [4] A. Karger, J. Novák: *Prostorová kinematika a Lieovy grupy*, Státní nakladatelství technické literatury, 1978.
- [5] I. Kolář: *Úvod do globální analýzy*, skripta PřF MU, 2003.

Jaroslav Hrdina, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69, Brno, Česká republika,
e-mail: `hrdina@fme.vutbr.cz`

ZEMĚPISNÁ VÝŠKOVNICE – VLASTIVĚDA V ZAJÍMAVÝCH SOUVISLOSTECH

JAN PAVLÍK

ABSTRAKT. Populárně pojatý článek se zabývá pojednáním o užití obecného principu významnosti v geografii. Bez nutnosti předešlé znalosti jakýchkoliv odborných pojmů či faktů jsou vysvětleny pojmy výškovnice a inverzní výškovnice. Jsou uvedeny hlavní příklady jejich uplatnění v geografii fyzické a socioekonomické.

1. ÚVOD

Svět se nám zmenšuje. Žijeme v době internetu, kdy okamžité spojení s druhým koncem světa je již samozřejmostí, v době snímkovacích družic, které nám prostřednictvím internetu umožní pohled na jakékoliv místo na světě, a v době letecké dopravy, která nás na tato místa během jednoho až dvou dnů dopraví. Nemíním teď psát o nezanedbatelných záporných dopadech tohoto technického pokroku, které rovněž výrazně přispívají k „zmenšování světa“ – vyčerpání přírodních zdrojů, populační explozi, zmenšování souše v důsledku tání pevninských ledovců, apod. Člověk, který žije v tomto světě zmenšeném v důsledku technického pokroku, má skoro pocit, že na něm už není co objevovat. A rozhodně ne v srdci nejprozkoumanějšího světa dílu – Evropy. Nebo snad ano? Už přece víme, že voda z Čech teče do Severního moře, že nejvyšší horou Karpat je Gerlachovský štít a že propast Macocha je vytvořena řekou Punkvou. Tohle vše už naši předci postupem času zjistili. Jsou snad ještě skutečnosti týkající se naší krajiny, které stále čekají na objevení? Pokusím se ukázat, že ano.

2. VÝZNAM VRCHOLU URČENÝ POLOHOU A VÝŠKOU

2.1. Výškovnice

Uvědomme si, že po staletí, kdy se na našem území budovala civilizace, se tato krajina v podstatě nezměnila. Nemám na mysli oblasti poddolovaných území, odlesnění za účelem zemědělství, vodní díla apod. Mám na mysli polohy jednotlivých kopců a hor a jejich výšku. Ta je stále téměř stejná. A protože s nadmořskou výškou roste určitá významnost místa, ať už je to kvůli možnostem výhledu, čistotě

2010 MSC. Primární 00A09, 00A69, 68U05.

Klíčová slova. významnost, výškovnice, spádová oblast.

Práce byla podpořena projektem A-Math-Net Síť pro transfer znalostí v aplikované matematice (CZ.1.07/2.4.00/17.0100).

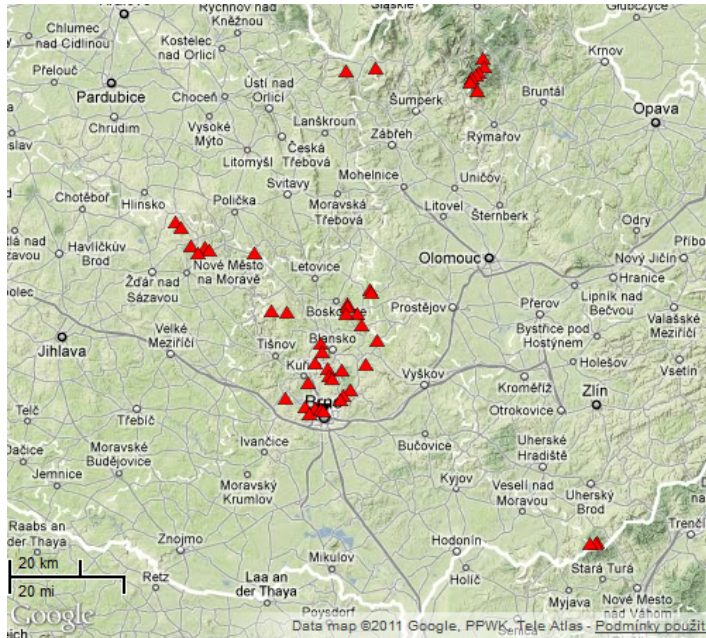
prostředí, časové délce sněhové pokrývky nebo dosahu třeba vysílačů, hraje rozmístění kopců a jejich nadmořská výška důležitou roli v životě člověka, aniž si to možná uvědomujeme.

Na tuto roli můžeme nahlížet dvojím způsobem. První je prostřednictvím pojmu „výškovnice“. Uvažme nějaké místo A v krajině, např. místo, kde žijeme, a jeho nadmořskou výšku, dejme tomu 250 m. Pak „zajímavé“ vrcholy (kopce, hory) jsou pro nás zejména ty, které jsou vyšší než oněch 250 m, ovšem čím vyšší a blíží, tím jsou zajímavější. Za vrchol můžeme obecně považovat libovolné lokální maximum výškové funkce, z praktických důvodů si však vystačíme s těmi, které jsou od ostatních vyšších odděleny dostatečně hlubokým sedlem. Jedná se tedy o body, pro které platí, že každá geodetická křivka, tj. křivka vedoucí po povrchu země, spojující daný bod s bodem vyšším, prochází bodem (např. sedlem) o aspoň 10 m nižším než daný bod. Za této situace by sice neměly vrchol ideální stolové hory a sopky s okrajem kráteru v konstantní výšce, ty však v přírodě obecně neočekáváme. Hloubku 10 m je možno změnit na jinou konstantu či zavést proměnlivě dle výšky (např. $\frac{1}{100}$ výšky uvažovaného bodu).

Podle výšky a vzdálenosti od vztažného místa můžeme vybrat množinu všech pro nás zajímavých vrcholů – jsou to ty, které nemůže jiný vrchol přebít tím, že byl k nám blíže a vyšší. Proto tato množina, kterou nazveme (vrcholová) *výškovnice* vzhledem k bodu A , odpovídá přesně principu „jdu dál – jdu vyšší“. Nyní si tedy každý může položit otázku: „Jaká je výškovnice vzhledem k místu, kde se právě nacházím?“ Zajímavá je určitě představa, že podobnou otázku si mohli klást i lidé před dávnými věky, když například hledali vhodné místo pro umístění pozorovatelny, pro loviště zvěře (které mohlo být díky horské nedostupnosti závislé na nadmořské výšce) a podobně. Odpověď si každý může najít sám pomocí kružnicového algoritmu na internetových stránkách [3] (hledej vždy nejvyšší vrchol v kruhu). Za ty z Brna si už dali práci členové tábornického klubu Korýši České tábornické unie – brněnskou výškovnici najdete popsanou na [1]. Na obrázku 1 je znázorněna její část v České republice.

2.2. Oblast významu

Jak bylo řečeno, jsou dva možné přístupy, jak nahlížet na významnost rozmístění kopců v krajině. Ten druhý je obráceným přístupem k výše uvedenému. Představme si, že se člověk vydal z místa A na vrchol V jeho výškovnice, třeba proto, aby tam postavil pozorovatelnu. Ovšem tam se mohl setkat s člověkem, který vyrazil za stejným cílem, ale z bodu B , taktéž podle výškovnice. Tahle situace jej nemůže překvapit, vždyť takových bodů jako je A nebo B je skoro ve všech případech nekonečně mnoho! Tato místa totiž vyplní celou oblast v okolí vrcholu V – nazveme ji *inverzní výškovnice vrcholu V* . Uvážíme-li, co mají tato místa společného, dojdeme k poznání, že tuto oblast můžeme dobře vymežit do tvaru mnohoúhelníku, jehož strany vzniknou jako osy oddělující vrchol V od dalších vrcholů stejné nebo větší výšky. Na rozdíl od hledání výškovnice je tedy nalezení inverzní výškovnice poměrně jednoduchou záležitostí. Pokud bychom ji našli ke každému vrcholu, pak zpětným pochodem dostaneme ke zvolenému bodu A výškovnici jako množinu všech vrcholů, v jejichž inverzní výškovnici bod A leží.



Obrázek 1. Vrcholová výškovnice pro Brno.

Princip výškovnice a její inverze jsou v tomto případě konkrétními příklady obecného matematického principu. Ve vlastivědě jej můžeme uplatnit jiným, a možná ještě překvapivějším způsobem. Nejprve se vraťme k našemu příkladu inverzní výškovnice. Víme už, jak taková množina (část krajiny) vypadá pro daný vrchol V . Uvědomme si, co tato oblast určuje. Vzhledem k tomu, že je vyplněna body, pro něž je vrchol V ve výškovnici, tedy pro něž je V významný vrchol, určuje tato oblast význam vrcholu V . Inverzní výškovnicí tedy můžeme měřit význam vrcholu vzhledem k jeho výšce a poloze v krajině. Ovšem člověk je zvyklý měřit veličiny v číslech, proto můžeme tento význam vyhodnotit například jako plošný obsah příslušné oblasti. Takto definovaná veličina pak dává větší význam vrcholu s rozsáhlejší inverzní výškovnicí. Neznamená to však nutně, že významnější vrchol musí být vyšší. Uvažme například nejvyšší vrchol naší republiky Sněžku (1602 m n. m.) a nejvyšší vrchol Dolního Rakouska Klosterwappen (2076 m n. m.) v masívu Schneeberg. Velikosti inverzních výškovnic (odvozeno dle [2]) jsou:

Sněžka: 535 985 km²

Klosterwappen: 87 381 km²

Na obrázku 2 je názorně vidět rozdíl ve velikostech jejich inverzních výškovnic (uzavřených mnohoúhelníků). Čtenář může sám posoudit, zda takto určený význam odpovídá skutečnosti.



Obrázek 2. Oblast významu (modrý polygon) pro Sněžku a Klosterwappen.

3. VÝZNAM URČENÝ POLOHOU A POPULACÍ

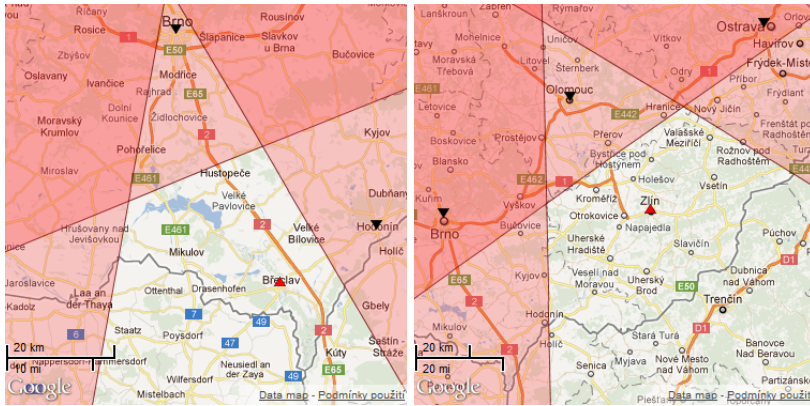
3.1. Populační význam

Změření plošného obsahu oblasti není jediný způsob, jak tuto množinu ohodnotit. Vzhledem k tomu, že vše, nakonec i to, jak je který vrchol významný, ovlivňují lidé, vyšší výpovědní hodnotu by mohlo mít spočítání zalidnění dané oblasti. Tímto způsobem pak například můžeme zjistit případný dopad cestovního ruchu na daném vrcholu – ten s větším *populačním významem* může očekávat větší množství turistů, lyžařů apod. Ovšem člověk je tvor přizpůsobivý a významnost některých vrcholů rád využije ve svůj prospěch. Ohodnotíme-li vrcholy podle jejich populačního významu, můžeme opět určit jejich inverzní výškovnici – ovšem porovnávanou veličinou nyní nebude výška, nýbrž právě hodnota populačního významu. Takto získaná oblast může vypadat kupodivu i docela odlišně od oblasti původní, i když ve většině případů dojde pouze k malým odchylkám. Tyto množiny můžeme chápat jako oblasti významu daného vrcholu v jakémsi druhém kroku. Takto můžeme pokračovat dál do dalších kroků, až dostaneme vyvážený, dále neměnný stav. Důkaz konvergence tohoto postupu je uveden v [4].

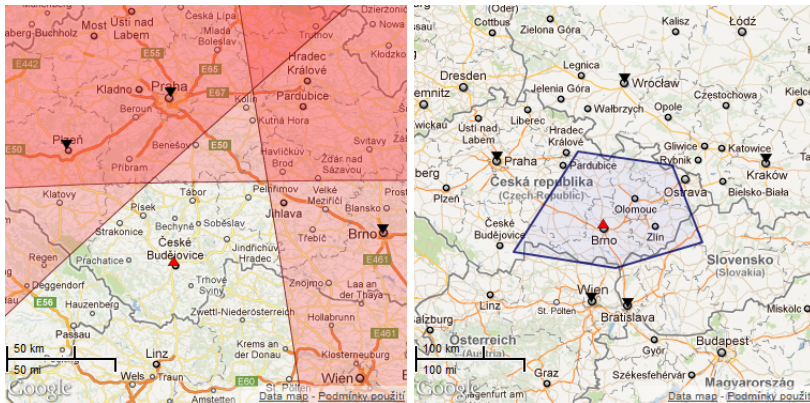
V praxi můžeme tento postup vnímat tak, že v horách s velkým populačním významem se lidé připraví na návštěvníky turistickou vybaveností (u střediska s větším významem můžeme čekat větší vybavenost). V druhém kroku pak populační význam může udávat oblast, kterou může daný vrchol nalákat svou turistickou vybaveností, tedy získá více návštěvníků, což opět vede ke větší vybavenosti. Každý další krok tedy určuje další hypotetický stav vývoje – například stav (po jednotlivých sezónách) rekreačních středisek závislých na návštěvnosti s prvotními podmínkami určenými krajinnými hodnotami (polohou a nadmořskou výškou).

3.2. Populační výškovnice

Jiný způsob využití výškovnice a její inverze spočívá přímo v lidské populaci. Řekněme, že každá obec má určenou velikost (počet obyvatel) a polohu (vztaženou



Obrázek 3. Spádová oblast (oblast uvnitř ČR nepřekrytá červenou vrstvou) pro Brno a Zlín.



Obrázek 4. Spádová oblast pro České Budějovice (nepřekrytá oblast v ČR) a mezinárodní spádová oblast Brno (modrý polygon).

např. k obecnímu úřadu). Nyní můžeme hledat tzv. *populační výškovnici* – k danému bodu v krajině to bude opět množina, tentokrát obcí, které budou „blízké a velké“. Zhruba řečeno, dostanou se tak do ní všechny obce od nejbližší vsi, přes blízké město, okresní, krajské až po Prahu, zajímáme-li se pouze o obce v ČR. Tento seznam je pro většinu z nás dobře známý – např. potřebujeme-li nějakou věc a řešíme, kam ji nejspíš jet opatřit. Nepojedeme zbytečně do města *B*, když je město *A* blíže a větší. V reálném životě ovšem hrají roli i skutečnosti, jako je dostupnost a jejich vybavenost. To však můžeme vyřešit predefinováním „vzdálenosti“ a „velikosti“ obce.

3.3. Spádová oblast

Ovšem také inverzní populační výškovnice má v reálném světě uplatnění. Co vlastně tato množina k dané obci určuje? Jedná se přesně o oblast, pro niž je daná oblast významná. Jde tedy o spádovou oblast, neboli oblast působnosti, ač

se v ní nemusí zrovna nacházet příslušný úřad. Jako příklad uveďme inverzní populační výškovnice pro Břeclav, Zlín, České Budějovice a v mezinárodním měřítku pro Brno.

Jak je vidět z obrázků 3 a 4, Břeclav určuje v podstatě svůj okres, Zlín svůj kraj a Č. Budějovice bývalý Jihočeský kraj. Brno má - i na mezinárodní úrovni, kdy uvažujeme porovnání i se zahraničními městy - za svoji spádovou oblast Moravu a blízké okolí. Inverzní populační výškovnice nám tedy dává přirozený způsob, jak rozdělit území na správní jednotky.

REFERENCE

- [1] *Brněnská výškovnice*, <http://www.vyskovnice.cz>.
- [2] *Konstrukce inverzní výškovnice*, <http://www.vyskovnice.cz/mapa-kon.php>.
- [3] *Kružnicová konstrukce výškovnice*, <http://www.vyskovnice.cz/mapavysk.php>.
- [4] J. Pavlík: *Significance Theory*, arXiv:1112.6321v1 [math.CO].

Jan Pavlík, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně,
Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: pavlik@fme.vutbr.cz

MATEMATIKA NA POZADÍ GEOGRAFICKÝCH INFORMAČNÍCH SYSTÉMŮ

VÍT PÁSZTO A LUKÁŠ MAREK

ABSTRAKT. V posledních letech se stává geoinformatika a její nástroje (zejména GIS – geografický informační systém, materiály DPZ – dálkový průzkum Země, GPS – Global positioning system, mapové servery, aj.) samozřejmou součástí života lidí na celém světě. Mnohdy si ani uživatel neuvedomí, že právě geoinformatika v daný moment slouží k jeho lepšímu rozhodování. Příkladem může být navigace řidiče vozidla po silniční síti pro dosažení svého cíle. Anž by to bylo zřejmé, tak onen řidič používá dohromady hned několik (geo)informačních technologií – samotný přístroj s GPS čipem, mapové podklady, vektorové vrstvy silniční sítě, letecký či družicový snímek, či 3D modely budov. Avšak na pozadí všeho je správná síťová analýza pro nalezení nejkratší/nejrychlejší cesty, jež využívá matematických algoritmů, jelikož se jedná o optimalizační úlohy v orientovaném a ohodnoceném grafu. A obdobně každá GIS analýza využívá matematického aparátu, ať jednoduchého nebo složitějšího. Účelem tohoto příspěvku není představení nových matematických formulí pro řešení prostorových analýz, ale ukázat použití základních matematických principů v nejrůznějších aplikacích. Autoři chtějí přiblížit čtenářům geoinformatiku jakožto aplikační vědní disciplínu, a podnítit tak jejich zájem o interdisciplinární spolupráci.

1. ÚVOD

Ve 20. století byla v geografických vědách hlavním rysem jejich kvantifikace [14, 16]. Později po 2. světové válce byly dostupné prostředky počítačů, jež umožnily vznik geoinformatiky či geomatiky. Nasazení matematiky v geografických disciplínách nově mohlo využít výpočetních kapacit počítačů. Již zavedené matematické metody mohly být rychleji implementovány, testovány a dále rozšiřovány tak, aby výsledné analýzy byly přesnější a spolehlivější. Geografie se dostávala do počítačového prostředí, a tak mohly vznikat první geografické informační systémy (GIS). Vznikl tím i nový vědní obor – geoinformatika (v zahraničí často termín geomatika či „geographical information science“).

Matematické úlohy a metody jsou dnes již plně vnořeny do nástrojů GIS pro analýzy geodat, jež reprezentují geografické jevy a procesy. Specialisté GIS dnes nepotřebují znát všechny matematické metody, rovnice a vztahy do detailu, nicméně je důležité rozumět jejich funkci, významu a použití. Následující příspěvek ukazuje fundamentální matematické vztahy a jejich použití. Autoři si nekladou za cíl dokazovat či rozvíjet jejich formule ani vyvozovat závěry z jejich (ne)správného použití. Důraz je kladen na to, aby si čtenář uvědomil, že matematika se skrývá ve

Klíčová slova. geoinformatika, GIS, aplikace matematiky, prostorová data, GIS analýza.

Práce byla podpořena projektem A-Math-Net Síť pro transfer znalostí v aplikované matematice (CZ.1.07/2.4.00/17.0100).

všech přírodních vědách, geoinformatiku nevyjímaje. Příspěvek má za cíl seznámit čtenáře s aplikacemi GIS, inspirovat je pro zlepšení použití matematických metod v daných aplikacích a nabídnout možnost interdisciplinární spolupráce.

2. CO JE GEOINFORMATIKA A GIS

Existuje mnoho definic, co je to geoinformatika, avšak během svého vývoje lze použít následující tvrzení, že geoinformatika je souhrn vědeckých poznatků a moderních technologií, které se zabývají strukturou a charakterem prostorové informace, jejím reálným zachycením, uložením, klasifikací, analyzováním, zobrazováním a předáváním uživatelům formou geovizualizací, včetně zajištění správného pochopení zobrazované skutečnosti (upraveno podle [21]). Geografický informační systém (GIS) je podmnožinou geoinformatiky a zahrnuje součinnost hardware, software, prostorových dat a lidí, kteří jej používají [22, 25, 27]. Někdy jsou tyto čtyři komponenty podrobněji rozepsány (zejména segment lidí) a přidávají se k nim také uživatelé, programátoři, instituce, poskytovatelé dat, klienti, techničtí pracovníci a další [3].

Geografický informační systém se liší od klasických informačních systému podstatnou věcí – dokáže efektivně pracovat s prostorovými daty. Daty, které mimo své ostatní atributy obsahují také polohopisnou informaci (určení polohy pomocí souřadnic). A celý systém pak pracuje s prostorovými databázemi, nad kterými lze provádět velké množství prostorových operací a analýz.

Výsledky GIS operací a analýz je potřeba také přenášet dále na uživatele a informaci zobrazovat. Společně s poznatky z kartografie a počítačové grafiky disponuje GIS silným nástrojem pro vizualizaci prostorových dat, a to pomocí statické (analogové nebo digitální) či dynamické mapy, mapovou aplikací, animacemi, videi, ale v poslední době také virtuální a tzv. augmented realitou. Geografické informační systémy tak umožňují, resp. geoinformatika umožňuje vysoce efektivně prostorová data sbírat, ukládat, spravovat, analyzovat, modelovat a v neposlední řadě zobrazovat.

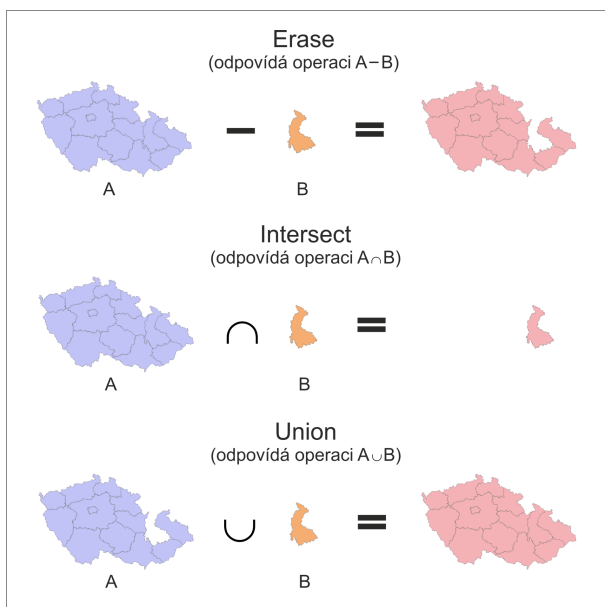
3. APLIKACE MATEMATIKY V GEOINFORMATICE A GIS

Ke zcela nejzákladnějším a nejběžnějším účelům v rámci GIS analýz je použita algebra (v GIS označení jako tzv. mapová algebra) a teorie množin. Velmi významným prvkem v rámci GIS je práce s topologií, jež je i vzhledem k práci s prostorovými daty zcela klíčová v pojetí GIS. Široké uplatnění nachází aplikace matematiky při řešení úloh se souřadnicovými systémy (transformace, projekce, apod.).

Komplikované jsou také úlohy, které vyžadují liniová data, tzv. síťové analýzy. Nejrůznější optimalizační a jiné úlohy se v GIS neobejdou bez teorie grafů a algoritmů nad nimi. Převratnou záležitostí v přírodních vědách bylo použití teorie fuzzy množin a fuzzy logiky, jež je dnes implementována v mnohých GIS softwarech. V poslední době také stále častěji proniká do oblasti geoinformatiky koncept fraktální geometrie a teorie chaosu. Následující text krátce seznamuje s těmito aplikacemi matematiky ve spojení s GIS a geoinformatikou.

3.1. Teorie množin, mapová algebra, logické operátory

Základní poznatky z teorie množin, algebry či výrokové logiky naleznou své uplatnění i v rámci geoinformatiky. Tím nejelementárnějším příkladem využití teorie množin v prostředí GIS jsou, z pohledu geoinformatiky, tzv. overlay operace jako je Erase, Intersect, Union a další (Clip, Update, Identity). První tři jmenované odpovídají postupně operacím rozdílu, průniku a sjednocení dvou množin. Operace odpovídající doplňku množiny v GIS nemá své pojmenování.

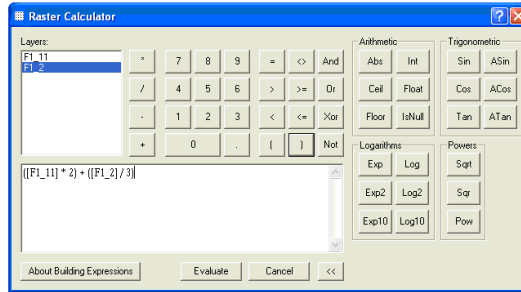


Obrázek 1. Základní množinové operace v GIS.

Principy komutativnosti a asociativnosti množin, stejně tak jako distributivnost a dalších lze samozřejmě použít také při GIS operacích. Tyto operace jsou v praxi využity např. k přípravě dat do dalších analýz, při výběrech vrstev, spojování vrstev, při modelování, aj.

Mapová algebra zahrnuje další zcela základní operace s GIS vrstvami a dá se uplatnit pouze na rastrová data (gridy, letecké či družicové snímky, obrazové formáty). Jednotlivé vrstvy jsou pak jednoduše podle daného předpisu kombinovány, kdy každý pixel rastru získá novou hodnotu. Těchto operací je využíváno při práci s materiály dálkového průzkumu Země (DPZ), např. při hodnocení multispektrálních družicových snímků pomocí různých indexů (Normalized Difference Vegetation Index – NDVI, aj.).

Logické operátory a jejich pravidla se používají v rámci GIS jako v programovacích jazycích. V rámci GIS byly dříve vyvíjeny nativní programovací jazyky jednotlivých softwarů, od čehož se postupně ustupovalo a dnes je již pro vývoj GIS použito běžných programovacích jazyků (Visual Basic, C++, Python). Práce



Obrázek 2. Ukázka mapové algebry v Raster Calculatoru v prostředí ArcGIS 9.x.

v GIS neprobíhá pouze pomocí dialogových oken, lze samozřejmě vstoupit do prostředí pro psaní skriptů. Stejně tak je použito i jazyka SQL při dotazování. Logické operátory jako je konjunkce (And), disjunkce (Or), negace (Not), implikace (If...then...), ekvivalence (If and only if...). Jejich implementaci lze vidět i na předešlém obrázku.

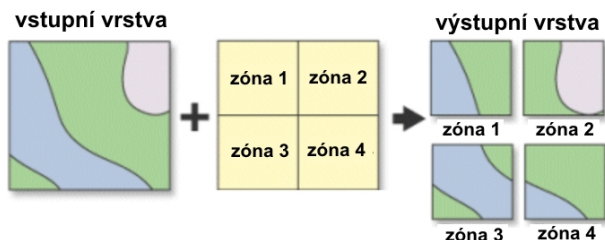
3.2. Topologie

Důležitým konceptem v rámci struktury geografických informačních systémů a manipulace či dotazování s prostorovými daty uvnitř nich je topologie. Kromě informace o své poloze dokážou prostorová data uchovávat také informace o topologii (zejména o sousedství), na jejichž základě je s nimi možné pracovat obdobně jako s množinami. Topologie v pojetí GIS je tedy sada pravidel a chování, která modelují, jak mezi sebou body, linie nebo polygony sdílejí geometrii [5]. Aby byla data topologicky čistá, využívá se zejména topologických konceptů – konektivity (dvě linie se na sebe napojují v uzlech), definice plochy (linie, které uzavírají nějakou plochu, definují polygon) a také sousednosti (princip okřídlené hrany – linie mají směr a nesou informaci o objektech napravo a nalevo od nich)[1].

Právě topologie geografických objektů umožňuje jednu ze základních analytických funkcí GIS – topologické překrytí [10]. Topologickým překrytím je myšlena skupina operací s množinami, kde množinou je myšlena informační vrstva obsahující jeden nebo více prvků. Základními operacemi jsou myšleny průnik (intersect), sjednocení (union) a prostorové přiřazení (identity). Speciálními případy topologických operací jsou potom clip, erase, update, split a dále také merge (spojení dvou vrstev do jedné a odstranění hranic mezi objekty se stejnými atributy) a dissolve (rozpuštění hranic objektů na základě stejné vlastnosti)[1].

3.3. Projekce a transformace

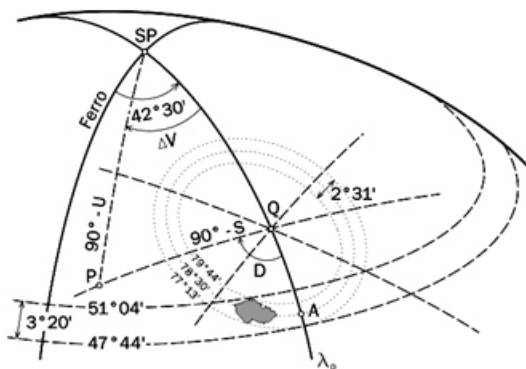
Země má ve skutečnosti velmi nepravidelný tvar, jehož nejbližší aproximací je geoid. Geoid je těleso tvořené ekvipotenciální plochou, která se co nejvíce přimyká střední klidové hladině moří a oceánů a zároveň prochází daným nulovým bodem [17]. Geoid je ovšem stále velmi složité a matematicky nedefinovatelné těleso, a je tedy pro svůj složitý tvar nevhodný ke zpracování v kartografii a GIS. Nahrazuje se proto matematicky jednoduššími tělesy nebo plochami, které jsou nazývány jako



Obrázek 3. Topologické operace split [4].

referenční. Jednotlivé referenční plochy či tělesa se od sebe liší (elipsoid, koule, rovina) svými parametry a také přesností nahrazení zemského tělesa [23]. Nejčastěji používanými přesnými referenčními plochami jsou elipsoidy, z nichž v ČR jsou využívány zejm. Besselův elipsoid (zeměměřičská praxe), Krasovského elipsoid (vojenská mapování) a elipsoid WGS 1984, jehož střed je totožný s těžištěm Země a je využíván jako základní pro satelitní měření polohy v systému NAVSTAR GPS [26].

Při mapování je nutné znát kvůli přesné lokalizaci mapovaného objektu nejen použitý referenční elipsoid, ale také kartografické zobrazení, tedy způsob, jakým má být převedeno zobrazení povrchu Země z referenčního povrchu do roviny (mapy). Kartografické zobrazení je dáno matematicky vyjádřenou závislostí mezi zeměpisnými souřadnicemi na referenční ploše a souřadnicemi v zobrazovací rovině [24]. Pro státní mapová díla ČR je typické využití Souřadnicového systému jednotné trigonometrické sítě katastrální (S-JTSK), který je definován Besselovým elipsoidem a Křovákovým zobrazením (dvojitě konformní kuželové zobrazení v obecné poloze) [2].



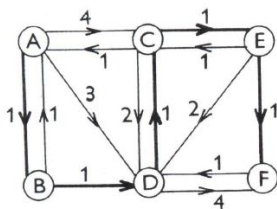
Obrázek 4. Křovákovo zobrazení [6].

V různých částech světa (nebo i na území jednoho státu) se pro různé účely používají odlišné souřadnicové systémy a pro práci s prostorovými daty vzniká

nutnost transformací mezi nimi. Tyto transformace zajišťují transformační rovnice a právě zde je matematika nepostradatelným prvkem k úspěšnému fungování GIS.

3.4. Síťové analýzy

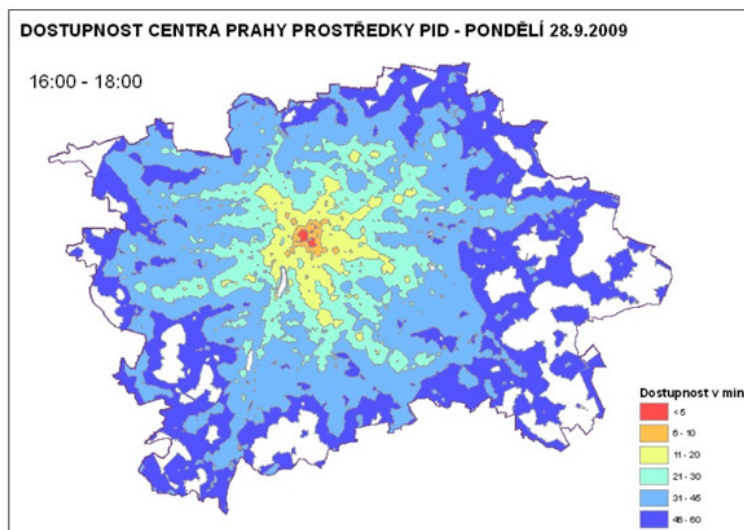
Typickým příkladem skloubení matematického aparátu a geografických informačních systémů jsou síťové analýzy. V tomto případě jde o analýzy nad hranami a uzly orientovaných či neorientovaných grafů. Jde tedy o otázky, jimiž se zabývá teorie grafů a algoritmy, které jsou aplikovány na prostorová data. Typickými řešenými úlohami jsou zde optimalizace grafů, hledání kostry grafu apod. V prostředí GIS jde zejména o sítě, které mají svůj nezanedbatelný prostorový rozměr a jsou nějakým způsobem lokalizovány – produktovody, silniční síť nebo také síť hydrologická. Problémy, které jsou na těchto sítích řešeny, jsou tedy analogicky hledání nejkratší, nejrychlejší nebo optimální cesty, logistický problém obchodního cestujícího nebo také dostupnost či obslužnost uzlů v síti (např. dostupnost škol, zóny obslužnosti obchodních domů, dopravní dostupnost a spádovost)[7].



Obrázek 5. Příklad vyhledání nejlevnější cesty v grafu [12].

V geografickém prostoru algoritmy pracují zejména s euklidovskou metrikou, ale možné je také další ohodnocení hran či uzlů pomocí vlastností terénu, dopravních omezení nebo socioekonomických ukazatelů. Pro popis grafů a optimalizaci v grafech se používají maticové nebo relační struktury. Především to jsou matice incidence, matice sousednosti, matice dosažitelnosti a dále potom distanční matice nebo matice impedance [12, 13]. Nejvyžívanějšími algoritmy v prostředí GIS jsou např. Dijkstrův, Floydův či Dantzigův [12]. GIS kromě statického modelování optimální dopravní trasy přes zadané body umožňuje také interaktivní volbu trasy a tímto způsobem může ve svých analýzách zhodnotit také znalosti operátora.

Za všechny stručně popíšeme Dijkstrův algoritmus, který je často používán pro vyhledávání nejkratší nebo nejlevnější cesty či zařízení. Cesta je vyhledávána na základě váženého grafu a množiny obsahující počáteční a cílovou pozici. Pokud chceme nalézt nejvhodnější cestu z výchozího umístění s do cílové destinace d , pak Dijkstrův algoritmus udržuje množinu uzlů S , pro kterou již byla nalezena nejkratší cesta z počátečního bodu. Algoritmus dále opakovaně prochází zbývajících uzlů množiny a vyhledává ty, které mají cesty minimální váhy. Po každém průchodu dojde k aktualizaci nejvhodnější cesty. Algoritmus pokračuje až do doby, než je do S přidána pozice cíle. Algoritmus zároveň splňuje tyto podmínky [12]. Je konečný, protože v každém průchodu jeho cyklem se do množiny navštívených uzlů přidá právě jeden uzel. Průchodů cyklem je nejvýše tolik, kolik má graf vrcholů. V grafu se nesmějí vyskytnout záporné hodnoty.



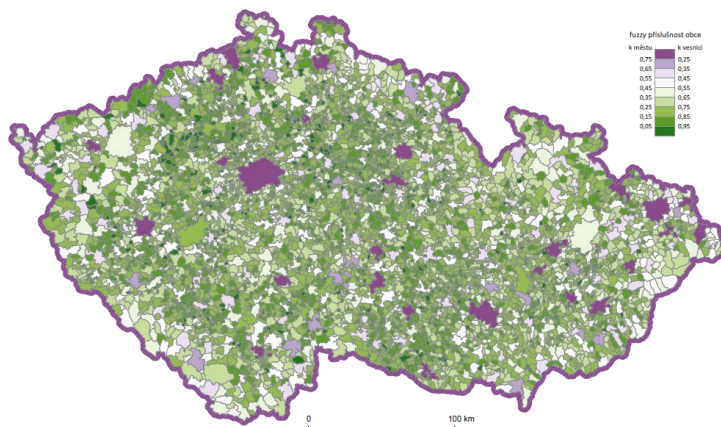
Obrázek 6. Časová dostupnost centra Prahy prostředky PID [9].

3.5. Fuzzy množiny a fuzzy logika

Teorie fuzzy množin a fuzzy logiky přinesla způsob, jak se vypořádat s neurčitostí, i do geoinformatiky. Reálné geografické procesy a jevy nejsou již samy ze své podstaty diskrétní či jasně ohraničené. Nicméně jejich abstrakce v GIS musí být jasně dána geometrií. V posledních letech však metody fuzzy množin a logiky umožňují, aby reprezentace těchto geografických jevů a procesů mohla být reprezentována také vágnějšími strukturami. Fuzzy škála, funkce příslušnosti, alfa řez, princip rozšíření, algebraické operace s fuzzy množinami a další principy lze velice efektivně využít i v rámci GIS. Konkrétní aplikace lze nalézt například při hodnocení sesuvů půdy, typické použití je při řešení ekotonů (přechodné zóny mezi dvěma a více biotopy [11]), dále například při hodnocení rizik sněhových lavin, při prostorových rozhodovacích procesech, ale i například při vymezování venkovských a městských typů obcí [18]. Na obrázku 6 je ukázka určení míry příslušnosti obce k venkovskému či městskému typu pomocí 8 indikátorů, na které byla uplatněna funkce příslušnosti.

3.6. Fraktální geometrie

Ke konci 60. let lze datovat vznik odvětví matematiky zabývající se teorií chaosu a fraktály. Přelomová práce Benoita Mandelbrota [15] shrnula myšlenky a představy o fraktální geometrii, jež se stala široce akceptovaným odvětvím matematiky. Základní principy soběpodobnosti, soběpříbuznosti, měřítkové invariance, mocninových zákonů, fraktální dimenze a další je možné aplikovat i na geografické jevy a procesy, které jsou v GIS reprezentovány jednotlivými vrstvami. Již prostě



Obrázek 7. Míra příslušnosti obcí ČR k venkovskému či městskému typu.

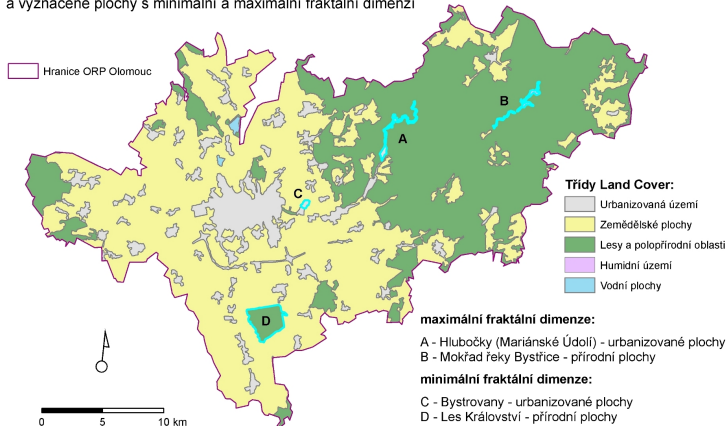
zobrazení zemského povrchu na leteckém snímku, tzv. krajinná matrix [8] – mozaika jednotlivých bodových, liniových a plošných prvků krajiny, vykazuje fraktální charakter. Všude, kde má význam hodnotit komplexnost tvarů krajiny, se fraktální geometrie dá použít. Snad nejčastější použití fraktální geometrie je v oblasti urbání geografie při analýzách měst, silniční sítě v nich, struktury města, aj. Fraktální geometrii lze aplikovat také na hodnocení krajinných ploch, pro analýzu říční sítě, pro klasifikaci objektů na základě fraktální dimenze, pro analýzu tzv. landscape pattern a hlavně také na hodnocení využití země (land-use) či pokryvu povrchu (land-cover). Na obrázku 7 je znázorněna analýza land-cover v rámci území ORP Olomouc s vyznačením ploch s největší a nejmenší fraktální dimenzí ([19, 20]).

4. ZÁVĚR

Geoinformatika jako mladý obor silně orientovaný na aplikační rovinu čerpá z poznatků tradičních věd, mezi které patří právě matematika, a snaží se jejich teorii nejen využít, ale zároveň i rozšířit o prostorový aspekt. Matematika je tedy obsažena ve velké části veškerých úkonů, ke kterým GIS slouží. Při sběru dat a jeho zpracování jsou využity transformace a souřadnicové systémy, v případě rastrových dat je možné se zmínit o kompresních algoritmech pro jejich skladování. Analýza prostorových dat je doslova protkána funkcemi. Ať už jde o topologické překrytí, síťové analýzy, interpolační metody nebo o modelování a simulaci přírodních či demografických jevů, vždy jde o aplikaci matematických vztahů na prostorová data. Jak je možné vidět na příkladě použití fraktálů a fuzzy logiky, tak GIS jako věda se snaží držet krok s nejnovějšími trendy v matematice a snaží se je uchopit tak, aby přinesly užitek i do světa prostorových analýz. V tomto příspěvku tak byly zmíněny pouze ty nejzákladnější příklady použití matematického aparátu v geoinformatice. Téměř ve všech oblastech geoinformatiky, kde hraje matematika zásadní aplikační roli, je prostor pro vylepšování a inovování těchto matematických metod.

LAND COVER ORP OLOMOUC V ROCE 2000

a vyznačené plochy s minimální a maximální fraktální dimenzí



Obrázek 8. Land-cover ORP Olomouc v roce 2000 a vyznačené plochy s minimální a maximální fraktální dimenzí.

Nabízí se tak jedinečná možnost spolupráce napříč těmito dvěma vědními obory, která by byla pro všechny strany prospěšná.

REFERENCE

- [1] M. Břehovský, K. Jedlička: *Úvod do geografických informačních systémů*, el. skripta, dostupné z: <http://gis.zcu.cz/studium/ugi/e-skripta/ugi.pdf>, 2007.
- [2] V. Čada: *Geografické informační systémy v informační společnosti. Sborník příspěvků z konference EurOpen*, dostupné z: <http://www.europen.cz/Anot/29/HLAVNI.pdf#page=95>, 2005.
- [3] M.N. DeMers: *GIS for Dummies*, Wiley Publishing, Indianapolis, 2008.
- [4] Environmental Systems Research Institute: *ArcGIS Desktop 9.3 Help*, dostupné z: [http://webhelp.esri.com/arcgisDESKTOP/9.3/index.cfm?TopicName=Split_\(Analysis\)](http://webhelp.esri.com/arcgisDESKTOP/9.3/index.cfm?TopicName=Split_(Analysis)), 2010.
- [5] Environmental Systems Research Institute: *GIS Topology: An ESRI White Paper*, dostupné z: http://www.esri.com/library/whitepapers/pdfs/gis_topology.pdf, 2005.
- [6] Fakulta dopravní: *Přesná transformace souřadnic ze systému WGS-84 do systému S-JTSK*, dostupné z: <http://transformace.webst.fd.cvut.cz/Iframe/Krovak.jpg>, 2009.
- [7] M.M. Fischer: *GIS and network analysis*, v D. Hensher, K. Button, K. Haynes, P. Stopher (editoři): *Handbook of transport geography and spatial systems*, Amsterdam, Oxford, Pergamon Press, 2004.
- [8] R.T.T. Forman: *Land Mosaics: the ecology of landscape and region*, CUP, Cambridge, 1995.
- [9] Geoportál: *Geografická data Prahy na jednom místě: Co je GIS?*, dostupné z: <http://geoportal.praha.eu/cs/clanek/11/co-je-gis>, 2011.
- [10] M. F. Goodchild: *Towards an Enumeration and Classification of GIS Functions*, Proceedings, International Geographic Information Systems Symposium: The Research Agenda II, National Aeronautics and Space Administration, Washington, D.C., 1987, 67–77.
- [11] A.J. Hansen, F. DiCasteri: *Landscape boundaries. Consequences for biotic diversity and ecological flows*, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [12] J. Horák: *Prostorová analýza dat*, Ostrava: Vysoká škola báňská Technická univerzita Ostrava, dostupné z: http://gislinb.vsb.cz/hor10/PAD/Skripta/PAD_skriptaF.pdf, 2002.

- [13] M.J. Kuby a kol.: *International encyclopedia of human geography*, v R. Kitchin, N. Thrift (editoři), Elsevier, Amsterdam, 2009, 391–398.
- [14] A.M. MacEachren: *An evolving cognitive-semiotic approach to geographic visualization and knowledge construction*, Information Design Journal **10** (1) (2000), 26–36.
- [15] B.B. Mandelbrot: *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman, San Francisco, 1983.
- [16] D.R. Montello: *Cognitive map-design research in the twentieth century: Theoretical and empirical approaches*, Cartography and Geographic Information Science **29** (2002), 283–304.
- [17] National Oceanic and Atmospheric Administration: *The NGS Geoid Page*, dostupné z: <http://www.ngs.noaa.gov/GEOID/>, 2011.
- [18] V. Pászto, L. Marek, P. Tuček: *Modeling of rural and urban areas delimitation in GIS using fuzzy sets: A case study*, Neural Network World, spec. č., AI and GIS, Praha (2011), v tisku.
- [19] V. Pászto, L. Marek, P. Tuček: *Perspectives of fractal geometry in GIS analyses*, Sborník symposia GIS Ostrava 2011, Ostrava, 2011.
- [20] V. Pászto, L. Marek, P. Tuček: *Fractal Dimension Calculation for CORINE LandCover Evaluation in GIS – A Case Study*, Proceedings of Databases, Texts, Specifications and Objects Conference, Písek, 2011.
- [21] P.L.N. Raju: *Fundamentals of geographical information system*, Satellite Remote Sensing and GIS Applications in Agricultural Meteorology, Proceedings of the Training Workshop, Dehra Dun, India, 2003, 103–120.
- [22] P. Rapant: *Geoinformatika a geoinformační technologie*, VŠB-TU Ostrava, 2006.
- [23] J.P. Snyder: *Map projections a map working manual*, U.S: geological survey professional paper 1395, United states government printing office, Washington, 1987.
- [24] E. Srnka: *Matematická kartografie*, Vojenská akademie Antonína Zápotockého, 1. vydání, Brno, 1986.
- [25] J. Tuček: *Geografické informační systémy, principy a praxe*, Computer Press, Praha, 1998.
- [26] B. Veverka, M. Čechurová: *Kartografické metody výzkumu a jejich uplatnění v geografii*, kapitola v Metody geografického výzkumu. Miscellanea geographica, 13, Plzeň, 2007.
- [27] V. Voženilek: *Geografické informační systémy I*, Univerzita Palackého v Olomouci, skriptum, 2000.

Vít Pászto, Katedra geoinformatiky, Přírodovědecká fakulta, Univerzita Palackého v Olomouci, Tr. Svobody 26, 771 46 Olomouc, Česká republika,
e-mail: vit.paszto@gmail.com

Lukáš Marek, Katedra geoinformatiky, Přírodovědecká fakulta, Univerzita Palackého v Olomouci, Tr. Svobody 26, 771 46 Olomouc, Česká republika,
e-mail: lukas.marek@upol.cz

TRIAL – SYSTÉM PRO PODPORU VÝUKY MATEMATIKY

JAN ČEPIČKA A PETR NEČESAL

ABSTRAKT. Cílem příspěvku je seznámit účastníky semináře se systémem *Trial*, který je již několik let používán ve výuce matematiky na Západočeské univerzitě v Plzni. *Trial* dokáže generovat zajímavé zápočtové i zkouškové písemné práce, kdy počet různých písemných prací odpovídá počtu studentů. *Trial* se stává zároveň průvodcem či pomocníkem studenta ve světě matematiky, a to zejména v náročných prvních semestrech jeho studia.

1. ÚVOD

Systém s názvem *Trial* vznikl na katedře matematiky (KMA) na Fakultě aplikovaných věd na Západočeské univerzitě v Plzni (ZČU) a byl určen zejména pro studenty prvních ročníků technických fakult. Původní myšlenka byla dát studentům k dispozici on-line databázi příkladů z matematiky, pomocí které si budou moci procvičovat příklady do zápočtových a zkouškových písemných prací. Tedy studenti si budou moci nanečisto sami vyzkoušet (odtud název z angl. trial) a vyřešit např. celý zápočtový test. Od té doby se *Trial* rozrostl na řádově stovky typových příkladů (každý příklad je k dispozici v mnoha náhodných mutacích), které se používají ve výuce a pro písemné práce v přibližně deseti velkých předmětech vyučovaných katedrou matematiky na pěti fakultách ZČU každoročně pro přibližně 3500 studentů. Veřejná část *Trialu* je k dispozici na webové adrese

<http://trial.kma.zcu.cz>.

Svým rozsahem a použitím je *Trial* webovým serverem s jednou z největších návštěvností na ZČU. Počet přístupů je (a to zejména v době před zápočtovými písemnými pracemi) srovnatelný s přístupem k předzápisu do studijní agendy univerzity. Celoroční návštěvnost (přesahující 1,2 miliónu přístupů) zvyšují také nezanedbatelné počty přístupů z doménových rozsahů dalších vysokých škol v ČR, zejména z VŠB TU v Ostravě, z ČVUT v Praze, z VUT v Brně, z JČU v Českých Budějovicích a také z několika středních škol Plzeňského kraje. Dá se říci, že pojem *Trial* se stal určitým symbolem a zažitou součástí výuky matematiky na ZČU. Po krátkém seznámení se s *Trialem* na výše uvedené webové adrese sami dokážete definovat, co je *Trial*:

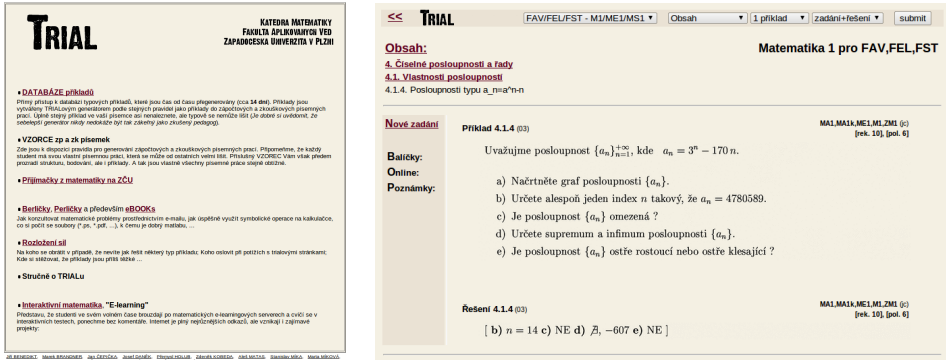
- i) publikační systém,

2010 MSC. Primární 97U50; Sekundární 97U30, 97U40.

Klíčová slova. publikační systém, generátor písemných prací, multiple-choice testy.

Práce byla podporována projektem A-Math-Net Síť pro transfer znalostí v aplikované matematice (CZ.1.07/2.4.00/17.0100) a projektem Modernizace obsahu a formy výuky matematiky pro přírodní a technické vědy (CZ.1.07/2.2.00/15.0377).

- ii) rozsáhlejší sbírka (ne)řešených příkladů,
- iii) elektronická skripta,
- iv) úložiště materiálů pro podporu výuky matematiky.



Obrázek 1. Webové rozhraní první generace Trialu.

2. NÁVRAT DO HISTORIE TRIALU

Než se podrobněji seznámíme s tím, co systém Trial nabízí studentům a pedagogům v roce 2011, podívejme se krátce do minulosti na vývoj systému během devíti let.

- i) Zrod myšlenky vytvořit na ZČU generátor písemek je datován do období od 9. do 13. září **2002**, kdy se konala 27. konference o matematice na školách VŠTEZ v Hejnicích. Počátky Trialu jsou tak spjaty s následujícími výroky, které byly na této konferenci prezentovány (viz [1]):
 - (a) Úroveň matematických znalostí u průměrného absolventa střední školy a uchazeče o studium na Fakultě elektrotechnické (FEL) a Fakultě strojní (FST) je na **historickém minimu**.
 - (b) Nepřípravenost uchazečů k samostatnému studiu určené problematiky je v tomto případě na **historickém maximu**.
- ii) 31. října **2002** proběhla první zápočtová písemná práce, která byla vygenerována počítačem. Generování proběhlo v rámci předmětu Matematika 1 (KMA/ME1) na FEL.
- iii) 1. listopadu **2002** byl generátor nazván Trial (viz [3]): trial = soud, soudní proces, přelíčení, líčení, zkouška, zkušební, pokus, experiment, strast, utrpení, soužení, trápení.
- iv) 7. ledna **2003** proběhla první zkouška v rámci předmětu KMA/ME1, kdy část písemné práce byla generována systémem Trial.
- v) 20. února **2003** byla zřízena doména trial.kma.zcu.cz (viz obr. 1).
- vi) Během března **2003** byl rozšířen Trial o generátory příkladů pro předměty Základy matematiky 2 (KMA/ZM2) a Numerické metody (KMA/NM).
- vii) 20. května **2003** byla poprvé zkoušková písemná práce svěřena zcela do režie generátoru (viz obr. 2), a to v rámci předmětu Matematika 1 (KMA/M1) na FST.

Jméno PŘÍJMENÍ (kroužek)

ZKOUŠEJÍCÍ

Zkoušková písemná práce M1 / 2003**Příklad 1.1.**

Určete Taylorův polynom 2. stupně $T_2(x)$ funkce $\varphi(x) = 2x^2 + 9x + 8$ v bodě $x_0 = -5$.
[3 body]

Příklad 1.2.

Uvažujme nekonečnou číselnou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_n = \ln\left(\frac{n+1}{2+n}\right)$.

- Určete předpis pro n -tý člen posloupnosti částečných součtů $\{s_n\}$.
- Sečtěte prvních 5, 15 a 19 členů posloupnosti $\{a_n\}$.
- Vypočtěte součet nekonečné číselné řady.

[3 body]

Příklad 1.3.

Rozhodněte, kolik řešení má v oboru reálných čísel nelineární rovnice:

$$x \ln 9x = -\frac{1}{9e}$$

Své rozhodnutí pečlivě zdůvodněte a definujte intervaly $I_k \subset \mathbb{R}$, tak aby každý x nich obsahoval právě jedno řešení.

(Využijte tvrzení věty o řešitelnosti rovnice $f(x) = y_0$. Vytězte D_f , limity v krajních bodech D_f , lokální extrém a spojitost funkce f .)

[3 body]

Příklad 1.4.

Vypočtěte následující určitý integrál:

$$\int_0^{2\pi} e^{2x} \cos(x) dx.$$

[3 body]

Příklad 1.5.

Vypočtěte neurčitý integrál z racionální lomené funkce:

$$\int \frac{2y^2 + 42 + 8y}{(y^2 + 25)(y - 1)} dy.$$

[3 body]

Obrázek 2. Ukázka generované zkouškové písemné práce pro předmět Matematika 1 na Fakultě strojní v letním semestru 2003.

3. června **2003** byl zabaven první trialový tahák (KMA/M1) na FST.
- V září **2003** byly prezentovány zkušenosti se systémem **Trial** na 3. konferenci o matematice a fyzice na vysokých školách s mezinárodní účastí (viz [2]).
- V roce **2004** byl tým pracovníků kolem **Trialu** posílen o nové členy, systém **Trial** byl rozšířen o nové příklady. K 16. 2. **2004** **Trial** nabízel 4587 zadání příkladů, 4345 řešení příkladů a 40 balíčků příkladů, registrováno bylo 308 871 přístupů.
- Současní doktorandi na KMA v letech **2004** a **2005** úspěšně absolvovali písemné práce generované výhradně **Trialem**. Součástí těchto písemných prací byly i důkazové příklady (v rámci předmětu KMA/MA1), na ukázkou uveďme jeden z nich:

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost nenulových reálných čísel.

Které z následujících implikací platí?

$$\sum_{n=16}^{+\infty} a_n^2 \text{ konverguje} \quad \begin{matrix} \Longleftarrow \\ \Longrightarrow \end{matrix} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} na_n = 0$$

Své závěry zdůvodněte a dokažte.

Pro prokázání případné neplatnosti některé z implikací uveďte vhodný protipříklad.

15. prosince **2008** byla založena druhá generace **Trialu**, webový server již nabízí dva režimy práce: uživatel / správce. Je umožněna přímá správa serveru přes webové rozhraní. Neveřejná část systému je napsaná v Matlabu a pomocí ní jsou spouštěny tzv. generátory (každý typový příklad má svůj nezávislý generátor), které vytvářejí zdrojové texty pro L^AT_EX (viz obr. 3). Z těchto textů jsou pak následně vytvářeny podklady buď pro tisk (zadání zápočtových a zkouškových písemných prací, vzorová řešení, balíčky příkladů) nebo pro web – veřejnou prezentační část **Trialu**.

xiii) Od října 2010 je Trial podporován prostřednictvím projektu **Moder-
nizace obsahu a formy výuky matematiky pro přírodní a technické
vědy**¹ (viz <http://mmm.zcu.cz>).

```
function [sZADANI,sRESENI,sVYSLEDKY]=jadro5;
definit_CALL;

Vprikklady=[1,2,3,4,5,6];
ot=round(WithMemory('rndDATA5.mat',Vprikklady,1);
genINFO(['J5/ot',num2str(ot(1))]);

a=rand([-9;-2,2,9]);
b=rand([-5;-3,3,8]); if abs(a)==abs(b), b=b+1; end;
d=rand([-9;-2,2,9]);

k=ot(1);
switch k,
case 1,
    ss0=['\frac{',ltx(a),'e^{',ltx(b),' x}\}',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\}'];
    ss1=['\frac{e^{',ltx(b),' x}\}',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\}'];
    ss2=['t=',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\}'];
    ss3=['dt=',ltx(b),'e^{',ltx(b),' x}\,dx'];
    ss4='\frac{1}{t}';
    ss5='\ln |t|';
    ss6=['\ln\left|',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\right|'];
    c=1;
case 2, b=abs(b);
    ss0=['\frac{',ltx(a),'cos{',ltx(b),' x}\}',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\}'];
    ss1=['\frac{cos{',ltx(b),' x}\}',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\}'];
    ss2=['t=',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\}'];
    ss3=['dt=',ltx(b),'cos{',ltx(b),' x}\,dx'];
    ss4='\frac{1}{t}';
    ss5='\ln |t|';
    ss6=['\ln\left|',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\right|'];
    c=1;
case 3, b=abs(b);
    ss0=['\frac{',ltx(a),'sin{',ltx(b),' x}\}',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\}'];
    ss1=['\frac{sin{',ltx(b),' x}\}',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\}'];
    ss2=['t=',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\}'];
    ss3=['dt=',ltx(b),'sin{',ltx(b),' x}\,dx'];
    ss4='\frac{1}{t}';
    ss5='\ln |t|';
    ss6=['\ln\left|',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\right|'];
    c=1;
case 4, b=abs(b);
    ss0=['\frac{',ltx(a),'cosh{',ltx(b),' x}\}',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\}'];
    ss1=['\frac{cosh{',ltx(b),' x}\}',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\}'];
    ss2=['t=',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\}'];
    ss3=['dt=',ltx(b),'cosh{',ltx(b),' x}\,dx'];
    ss4='\frac{1}{t}';
    ss5='\ln |t|';
    ss6=['\ln\left|',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\right|'];
    c=1;
case 5, b=abs(b);
    ss0=['\frac{',ltx(a),'sinh{',ltx(b),' x}\}',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\}'];
    ss1=['\frac{sinh{',ltx(b),' x}\}',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\}'];
    ss2=['t=',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\}'];
    ss3=['dt=',ltx(b),'sinh{',ltx(b),' x}\,dx'];
    ss4='\frac{1}{t}';
    ss5='\ln |t|';
    ss6=['\ln\left|',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\right|'];
    c=1;
case 6, b=abs(b);
    if round(1,2)==1, ss0=['\frac{',ltx(a),'x\}',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\}'];
    else ss0=['\frac{',ltx(a),'x\}',ltx(d),'x\,dx'];
    end;
    ss1=['\frac{1}{x}\}',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\}'];
    ss2=['t=',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\}'];
    ss3=['dt=',ltx(b),'x\,dx'];
    ss4='\frac{1}{x}';
    ss5='\ln |x|';
    ss6=['\ln\left|',ltx(d),'e^{',ltx(b),' x}\right|'];
    c=1;
end;
sZADANI=['\int ',ss0,'\, d(x)'];
f01=fopen([workPATH,BSL,'jadrol.tmp'],'w');
fprintf(f01,'\n',[S]);
fprintf(f01,'\n','\begin{array}{rcl}[rcl]');
fprintf(f01,'\n','\int ',ss0,'\, d(x) 6=6d ');
fprintf(f01,'\n','[ltx(a),\int ',ss1,'\, d(x) = ']);
fprintf(f01,'\n','\left|');
fprintf(f01,'\n','\begin{array}{l}');
fprintf(f01,'\n','[ss2, '\ ');
fprintf(f01,'\n','[ss3, '\ ');
fprintf(f01,'\n','\end{array} \right| = ');
fprintf(f01,'\n','[ltx(a/b/c), '\int ',ss4,'\, d(t) =\{3ex\} ');
fprintf(f01,'\n','[6=6d ',ltx(a/b/c), '\, ',ss5,'\, +C = ']);
fprintf(f01,'\n','[ltx(a/b/c), '\, ',ss6,'\, +C = ']);
fprintf(f01,'\n','\end{array}');
fprintf(f01,'\n','[S]);
sRESENI=fileZstr([workPATH,BSL,'jadrol.tmp']);
f01=fopen([workPATH,BSL,'jadrol.tmp'],'w');
fprintf(f01,'\n',[S]);
fprintf(f01,'\n','\int ',ss0,'\, d(x) = ');
fprintf(f01,'\n','[ltx(a/b/c), ss6,'\, +C = ']);
fprintf(f01,'\n','[S]);
sVYSLEDKY=fileZstr([workPATH,BSL,'jadrol.tmp']);
```

Obrázek 3. Ukázka zdrojového kódu jednoho jádra vybraného generátoru v Matlabu. Jádro
vrací zadání, řešení a výsledky příkladu pro LaTeX .

3. CO TRIAL NABÍZÍ

V současné době Trial poskytuje následující služby:

- i) generování písemných prací (zadání / řešení / výsledky),
počet studentů = počet písemných prací,
- ii) zobrazení výsledků písemných prací,
- iii) generování studijních materiálů (definice / věta / důkaz),
- iv) příprava výukových materiálů pro učitele,
- v) diskuzní fórum.

Systém Trial je rozdělen na čtyři hlavní části, a to na **calculus**, **theory**, **addons** a **fórum**. Část **calculus** obsahující příklady je dále dělena na Trial 1 až 4.

- i) Trial 1 nabízí celou řadu příkladů a jejich řešení v klasickém pojetí (viz
obr. 4) pro oblasti: matematická analýza², geometrie³, lineární algebra⁴,

¹číslo projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0377

²KMA/M1, KMA/M2, KMA/MS1, KMA/MS2, KMA/M2E, KMA/MA1, KMA/MA2, KMA/MA4, KMA/SKA, KMA/ST

³KMA/G1, KMA/GS1, KMA/GS2, KMA/SG

⁴KMA/M1E

Příklad 18.5.2.1 (1,20) GS2 (6l, n)

Rovnici kvadriky upravte na kanonický tvar, určete typ kvadriky a její charakteristické prvky (střed, polohu osy, zda je rotační apod.)

$$72x^2 - 288x + 72y^2 - 50z^2 - 500z - 2762 = 0.$$

Řešení 18.5.2.1 (1,20) GS2 (6l, n)

Nejprve seskupíme jednotlivé proměnné a vytkneme koeficienty u kvadratických členů

$$72(x^2 - 4x) + 72y^2 - 50(z^2 + 10z) - 2762 = 0.$$

Nyní jednotlivé výrazy doplníme na čtverce

$$72(x^2 - 4x + 4 - 4) + 72y^2 - 50(z^2 + 10z + 25 - 25) - 2762 = 0,$$

$$72(x^2 - 4x + 4) + 72y^2 - 50(z^2 + 10z + 25) - 1800 = 0.$$

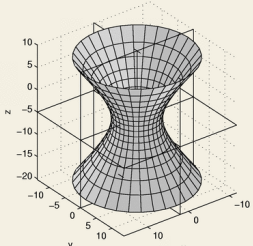
Absolutní člen převedeme na pravou stranu,

$$72(x - 2)^2 + 72y^2 - 50(z + 5)^2 = 1800.$$

Na závěr celou rovnici vydělíme absolutním členem

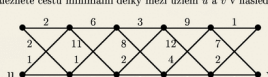
$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{y^2}{25} - \frac{(z+5)^2}{36} = 1.$$

Zadaná kvadrika je jednoduší rotační hyperboloid, který má střed v bodě $S(2; 0; -5)$, velikosti polosů jsou $a = 5$, $b = 5$, $c = 6$ a hlavní osa je rovnoběžná s osou z .



Příklad 21.5.1 (10) DMA (ph)

Nalezte cestu minimální délky mezi uzlem u a v v následujícím grafu.



Řešení 21.5.1 (10) DMA (ph)

Označme všechny vrcholy v grafu kromě u a v písmeny a až j , jak je naznačeno na následujícím obrázku.



Pro nalezení cesty minimální délky použijeme Dijkstrův algoritmus. Řešení použitím tohoto algoritmu je naznačeno v následující tabulce. Tučné vyznačené hodnoty jsou trvalé, ostatní jsou dočasné. Podtržená hodnota je ta, která se v daném kroku algoritmu stala nově trvalou.

u	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	v
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0	∞	1	∞	∞	∞	∞	7	∞	∞	∞	∞
0	3	1	7	∞	∞	∞	7	12	∞	∞	∞
0	3	1	7	∞	∞	∞	5	12	∞	∞	∞
0	3	1	6	∞	∞	∞	5	12	∞	∞	∞
0	3	1	6	9	∞	∞	5	12	14	∞	∞
0	3	1	6	9	18	∞	5	11	14	21	∞
0	3	1	6	9	18	∞	5	11	13	21	∞
0	3	1	6	9	17	∞	5	11	13	21	∞
0	3	1	6	9	17	18	5	11	13	21	24
0	3	1	6	9	17	18	5	11	13	20	23
0	3	1	6	9	17	18	5	11	13	20	23

Cesta minimální délky mezi uzly u a v má délku 23 a vede přes uzly $u, b, a, g, c, d, h, i, e, f, j, v$.

Obrázek 4. Ukázka dvou příkladů z Trial 1.

- obyčejné diferenciální rovnice⁵, pravděpodobnost a statistika⁶, metody dynamické optimalizace⁷.
- ii) **Trial 2** představuje soubor testových otázek typu **multiple-choice** (viz obr. 5). Student označí křížkem správné odpovědi. V každém příkladu je alespoň jedna odpověď správná a zároveň nejsou všechny odpovědi správné.
 - iii) **Trial 3** je souborem testových otázek libovolného typu, které nespádají pod **Trial 2**. Obrázek 6 obsahuje dva příklady z **Trial 3**, student je nucen v příkladu doplnit správný výsledek nebo výsledek graficky znázornit.
 - iv) **Trial 4** obsahuje vše pro zadávání a hodnocení seminárních či semestrálních prací.

Vlastní webové rozhraní **Trialu** je postaveno na PHP s minimálními požadavky na databáze, všechna zadání příkladů a vzorová řešení jsou umístěna v adresářové struktuře serveru. Webové řešení má charakter portálu, umožňující komunikaci vyučujících se studenty; vyučující zveřejňují všechny důležité informace k jednotlivým předmětům, a to včetně písemkových vzorců (šablona typových příkladů, které budou v testu), výsledků zápočtových prací či podrobných informací ke zkoušce. Klíčovou součástí celého serveru je **fórum**, kde studenti mohou mezi sebou nebo s vyučujícími diskutovat např. nad řešením některých příkladů.

⁵KMA/ODR, KMA/SDR⁶KMA/PSE, KMA/ZNP⁷KMA/MDO

Příklad 1: Na kterém z obrázků je zobrazena množina

$$M = \left(A \cap B \cap C \right) \cup \left(A \setminus (B \cup C) \right) \cup \left(B \setminus (A \cup C) \right) \cup \left(C \setminus (A \cup B) \right)?$$



Příklad 6: Vyznačte všechny funkce, které mají na celém svém definičním oboru uvedené vlastnosti:

	e^x	$\sin x$	$\arcsin x$	$\sinh x$	$4x$
shora omezená	☐	☐	☐	☐	☐
ostře konvexní	☐	☐	☐	☐	☐
periodická	☐	☐	☐	☐	☐

Obrázek 5. Ukázka dvou příkladů z Trial 2.

Příklad 13.8.

Vypočtete neurčitý integrál:

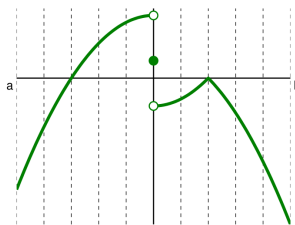
$$\int \sin t \, dt = \underline{\hspace{2cm}}$$

[1 bod]

Příklad 13.9.

Mějme funkci $y = f(x)$ na $\langle a, b \rangle$.

V grafu je naznačeno dělení intervalu $\langle a, b \rangle$.
Graficky zde znázorněte dolní integrální součet.



[1 bod]

Obrázek 6. Ukázka dvou příkladů z Trial 3.

V roce 2011 začaly služby Trialu využívat některé střední školy, Trial tak zajišťuje hostování pro

- i) Střední průmyslovou školou stavební v Plzni (<http://www.spsstav.cz>),
- ii) Gymnázium Jírovce v Českých Budějovicích (<http://www.gymji.cz>),
- iii) Gymnázium Plzeň, Mikulášské náměstí.

REFERENCE

- [1] J. Čepička, M. Míková: *Nové pojetí matematiky na technických fakultách ZČU*, Sborník 27. konference VŠTEZ, Hejnice, JČMF Praha, 2002, 149–151.
- [2] J. Čepička, M. Míková a L. Tesková: *Výuka matematiky na technických fakultách ZČU*, Sborník 3. konference o matematice a fyzice na vysokých školách s mezinárodní účastí, Brno, Vojenská akademie v Brně, 2003, 43–47.

- [3] J. Kraus a kol.: *Nový akademický slovník cizích slov A-Ž*, Academia Praha, 2005.

Jan Čepička, Katedra matematiky, Fakulta aplikovaných věd, Západočeská univerzita v Plzni,
Univerzitní 22, 306 14 Plzeň, Česká republika,
e-mail: cepicka@kma.zcu.cz, <http://www.kma.zcu.cz/cepicka>

Petr Nečesal, Katedra matematiky, Fakulta aplikovaných věd, Západočeská univerzita v Plzni,
Univerzitní 22, 306 14 Plzeň, Česká republika,
e-mail: pnecesal@kma.zcu.cz, <http://www.kma.zcu.cz/pnecesal>

VÝUKA MATEMATICKÉ ANALÝZY NA ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITĚ V PLZNI

GABRIELA HOLUBOVÁ A JAN POSPÍŠIL

ABSTRAKT. Cílem příspěvku je představit výuku matematické analýzy na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni. Předměty Matematická analýza 1 a Matematická analýza 2 jsou povinné pro všechny studenty bakalářských matematických oborů, svým charakterem, obsahem a náročností tak tvoří kvalitní matematický základ nutný pro další studium. Moderně pojatá výuka matematické analýzy nabízí studentům kvalitní matematický základ a trénink analytického myšlení tolik potřebný pro další studium a uplatnění v praxi.

1. FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD A KATEDRA MATEMATIKY

Fakulta aplikovaných věd (FAV¹) je jednou z osmi fakult Západočeské univerzity v Plzni (ZČU²) a svým zaměřením se řadí mezi přírodovědné fakulty. Vedle vzdělávacích programů, které studentům nabízejí širokou škálu oborů a specializací z oblastí matematiky, fyziky, výpočetní techniky a informatiky, kybernetiky, mechaniky a geomatiky, se fakulta orientuje též na vědecko-výzkumnou činnost s úspěchy na světové úrovni.

Katedra matematiky (KMA³) je jednou z pěti kateder Fakulty aplikovaných věd a řadí se mezi největší matematické katedry v České republice. Tvoří ji šest oddělení: oddělení diskrétní matematiky, oddělení finanční matematiky a aplikované statistiky, oddělení geometrie, oddělení geomatiky, oddělení matematické analýzy a oddělení numerické matematiky. Díky své velikosti a šíři odborného záběru je katedra schopna zabezpečovat téměř veškerou výuku matematických předmětů na všech fakultách Západočeské univerzity v Plzni. V současné době katedra garantuje celkem osm bakalářských oborů, šest navazujících magisterských oborů a tři doktorské obory. Konkrétně jde o následující obory v bakalářském stupni studia:

2010 MSC. Primární 97B40, 97B70, 97B10, 97A80, 97I99; Sekundární 00A05.

Klíčová slova. Matematická analýza, modernizace výuky matematiky, vysokoškolské studium, vzdělání pro konkurenceschopnost.

Práce byla částečně podpořena z projektu OP VK *A-Math-Net – síť pro transfer znalostí v aplikované matematice* CZ.1.07/2.4.00/17.0100 a částečně z projektu OP VK *Modernizace obsahu a formy výuky matematiky pro přírodní a technické vědy* CZ.1.07/2.2.00/15.0377.

¹www.fav.zcu.cz

²www.zcu.cz

³www.kma.zcu.cz

- ▶ **Aplikované vědy a informatika** (3-letý studijní program, titul Bc.)
 - Finanční informatika a statistika
- ▶ **Geomatika** (3-letý studijní program, titul Bc.)
 - Geomatika
- ▶ **Matematika** (3-letý studijní program, titul Bc.)
 - Matematika a finanční studia
 - Matematika a management
 - Matematika pro přírodní vědy
 - Matematické výpočty a modelování
 - Obecná matematika
- ▶ **Stavitelství** (4-letý studijní program, titul Bc.)
 - Územní plánování

Dále jsou to následující obory v navazujícím magisterském studiu:

- ▶ **Aplikované vědy a informatika** (2-3 letý studijní program, titul Ing.)
 - Finanční informatika a statistika
 - Matematické inženýrství
- ▶ **Geomatika** (2-3 letý studijní program, titul Ing.)
 - Geomatika
- ▶ **Matematika** (2-3 letý studijní program, titul Mgr.)
 - Matematika
 - Matematika a management
 - Učitelství matematiky pro střední školy

V neposlední řadě KMA nabízí tyto studijní obory v doktorském stupni studia:

- ▶ **Aplikovaná matematika** (3-letý studijní program, titul Ph.D.)
 - Aplikovaná matematika
- ▶ **Geomatika** (3-letý studijní program, titul Ph.D.)
 - Geomatika
- ▶ **Matematika** (4-letý studijní program, titul Ph.D.)
 - Obecné otázky matematiky

2. MATEMATICKÉ PŘEDMĚTY NA KMA

V bakalářském stupni studia mají studenti všech matematických oborů následující společné povinné předměty:

KMA/MA1	Matematická analýza 1 (6 kr., rozsah 4+2, 1. ZS),
KMA/LA	Lineární algebra (4 kr., rozsah 3+1, 1. ZS),
KMA/MA2	Matematická analýza 2 (6 kr., rozsah 4+2, 1. LS),
KMA/DMA	Diskrétní matematika (4 kr., rozsah 3+1, 1. LS),
KMA/G1	Geometrie 1 (4 kr., rozsah 2+1, 2. ZS),
KMA/PSA	Pravděpodobnost a statistika (5 kr., rozsah 3+2, 2. ZS),
KMA/NM	Numerické metody (5 kr., rozsah 3+2, 2. LS).

Všechny tyto předměty jsou na KMA nabízeny i v anglické verzi, která se po obsahové stránce od české verze neliší, je však ohodnocena jedním kreditem navíc.

Studenti si tak mohou rozšířit své znalosti o odborné termíny v angličtině a současně zvýšit svoje šance ve výběrových řízeních na zahraniční studentské pobyty.

Mezi další povinné volitelné a volitelné matematické předměty bakalářského stupně studia patří:

KMA/DG	Diferenciální geometrie (5 kr., rozsah 2+2),
KMA/GM1	Geometrické a počítačové modelování (6 kr., rozsah 3+2),
KMA/MA3	Matematická analýza 3 (5 kr., rozsah 3+2),
KMA/MA4	Matematická analýza 4 (5 kr., rozsah 3+2),
KMA/MM	Matematické modelování (5 kr., rozsah 2+2),
KMA/ODR	Obyčejné diferenciální rovnice (6 kr., rozsah 3+2),
KMA/STAV	Výpočtová statistika (5 kr., rozsah 2+2),
KMA/TSI	Teorie sítí (4 kr., rozsah 2+1),
KMA/UFA	Úvod do funkcionální analýzy (5 kr., rozsah 3+1).

V navazujícím magisterském stupni studia mají studenti matematických oborů následující povinné a povinně volitelné předměty:

KMA/DRB1,2	Diferenciální rovnice v biologii 1,2 (3kreditů, rozsah 2+0),
KMA/FA	Funkcionální analýza (5 kr., rozsah 4+0),
KMA/MA5	Matematická analýza 5 (6 kr., rozsah 3+2),
KMA/MDO	Metody dynamické optimalizace (4 kr., rozsah 2+1),
KMA/MNO	Metody numerické optimalizace (4 kr., rozsah 2+1),
KMA/NA	Numerická analýza (5 kr., rozsah 2+2),
KMA/PDR	Parciální diferenciální rovnice (6 kr., rozsah 3+1),
KMA/PVM	Paralelní výpočtové metody (5 kr., rozsah 2+2),
KMA/SNM1,2	Speciální numerické metody 1,2 (4 kr., rozsah 3+0),
KMA/SOF	Software a algoritmy numerické matematiky (5 kr., 3+1),
KMA/TGD1,2	Teorie grafů a diskrétní optimalizace 1,2 (5 kr., 3+1),
KMA/USA	Úvod do stochastické analýzy (5 kr., rozsah 2+2)

a řadu dalších volitelných matematických předmětů.

V závěrečných ročnících si studenti vybírají zadání a témata kvalifikačních prací, čímž si současně určují užší specializaci svého studia. Zpracování bakalářské práce se týká předměty KMA/PRJ5 (5 kreditů) a KMA/BPMA (12 kreditů), diplomových prací se týká předměty KMA/OSMA (4 kredity) a KMA/DPMA (18 kreditů).

3. MATEMATICKÁ ANALÝZA

Po přijetí na vysokou školu považují studenti prvních ročníků za nejnáročnější předměty Matematická analýza 1 a 2. Absolvování těchto předmětů je pro studenty naprosto fundamentální, a proto se podívejme na jejich charakter a obsah podrobněji.

Cílem předmětu **Matematická analýza 1** (MA1) je seznámení a aktivní osvojení si základních pojmů matematické analýzy, jako jsou:

- ▶ posloupnosti a řady reálných čísel,
- ▶ reálné funkce jedné reálné proměnné,

- ▶ diferenciální a integrální počet v $\mathbb{R}$.

V předmětu **Matematická analýza 2** (MA2) se studenti seznamují a učí se pracovat s následujícími pojmy vyšší matematiky:

- ▶ funkční posloupnosti a řady,
- ▶ vektorové funkce jedné reálné proměnné,
- ▶ reálné funkce více proměnných,
- ▶ diferenciální a integrální počet v $\mathbb{R}^n$.

Úspěšný absolvent předmětu MA1 je schopen především:

- ▶ číst matematický text a aktivně používat logické výroky;
- ▶ používat korektní postupy při řešení matematických úloh v rozsahu syllabu tohoto předmětu;
- ▶ prokázat znalost definic a základních tvrzení týkajících se posloupností, řad a spojitých a diferencovatelných funkcí jedné reálné proměnné;
- ▶ vypočítat první i vyšší derivace funkce nejen za použití základních pravidel pro jejich výpočet, ale také z definice;
- ▶ nakreslit graf funkce s použitím asymptot, kritických bodů a derivací pro určení intervalů monotonie a konvexity, resp. konkavity;
- ▶ formulovat základní úlohy na maximum, resp. minimum a tyto úlohy vyřešit použitím diferenciálního počtu;
- ▶ vypočítat limitu použitím l'Hospitalova pravidla;
- ▶ používat základní techniky výpočtu integrálů, např. substituce, úprava na parciální zlomky a integrace per partes;
- ▶ použitím integrálního počtu vypočítat obsahy ploch v rovině a objemy jednoduchých těles pomocí řezů;
- ▶ najít Taylorův rozvoj dané funkce v blízkosti nějakého bodu a formulovat důsledky plynoucí z prvních několika členů tohoto rozvoje;
- ▶ ilustrovat použití probraných pojmů pro řešení konkrétních fyzikálních úloh.

Úspěšný absolvent předmětu MA2 pak je schopen:

- ▶ prokázat znalost definic a základních tvrzení týkajících se funkčních posloupností, funkčních řad, vektorových funkcí jedné reálné proměnné a reálných funkcí více proměnných;
- ▶ pracovat s funkčními posloupnostmi a řadami;
- ▶ rozvinout danou funkci v mocninnou nebo Fourierovu řadu;
- ▶ popsat křivky v $\mathbb{R}^n$ a pracovat s nimi;
- ▶ určit vlastnosti reálných funkcí více proměnných (spojitost, hladkost apod.);
- ▶ počítat derivace ve směru a parciální derivace funkcí více proměnných;
- ▶ formulovat základní úlohy na maximum, resp. minimum a tyto úlohy vyřešit použitím diferenciálního počtu;
- ▶ počítat dvojné a trojné integrály;
- ▶ pracovat s integrály závislými na parametru;
- ▶ ilustrovat použití probraných pojmů pro řešení konkrétních fyzikálních úloh.

Oba předměty jsou svým charakterem věrné svému jménu, tj. náplní předmětů není jen matematický kalkulus reálných funkcí jedné a více proměnných, nýbrž postupné budování teorie, analýza všech vysvětlovaných pojmů a v neposlední řadě

důkazy všech tvrzení, jejichž demonstrace je následně po studentovi vyžadována u zkoušky.

Na předměty Matematická analýza 1 a 2 ve vyšších ročnících bezprostředně navazují předměty Matematická analýza 3, 4 a 5 s následující náplní.

Matematická analýza 3 (MA3):

- ▶ křivkové a plošné integrály,
- ▶ vektorová a tenzorová analýza.

Matematická analýza 4 (MA4):

- ▶ posloupnosti a řady komplexních čísel,
- ▶ komplexní funkce komplexní proměnné,
- ▶ diferenciální a integrální počet v $\mathbb{C}^n$.

Matematická analýza 5 (MA5):

- ▶ teorie míry a integrálu,
- ▶ teorie Fourierových řad.

V dalších specializovaných předmětech pak studenti mají možnost nahlédnout i do dalších oblastí matematické analýzy, jako je funkcionální analýza, teorie obyčejných a parciálních diferenciálních rovnic, stochastická analýza, stochastické diferenciální rovnice apod.

Kvalitní matematický základ je naprosto nezbytný pro další studium, a to nejen v případě studia matematicky zaměřených oborů, ale i pro studium na jakékoli vysoké škole technického zaměření. Moderně pojatá výuka matematické analýzy nabízí studentům kvalitní matematický základ a trénink analytického myšlení, tolik potřebný pro další studium a uplatnění v praxi. Zvládnutím základů vysokoškolské matematiky v podobě matematické analýzy studenti získají analytické schopnosti, dovednost řešit abstraktní i reálné úlohy a schopnost analyzovat řešení kvalitativně (z pohledu vlastností řešení) i kvantitativně (z pohledu počtu řešení).

4. MATEMATIKA MODERNĚ

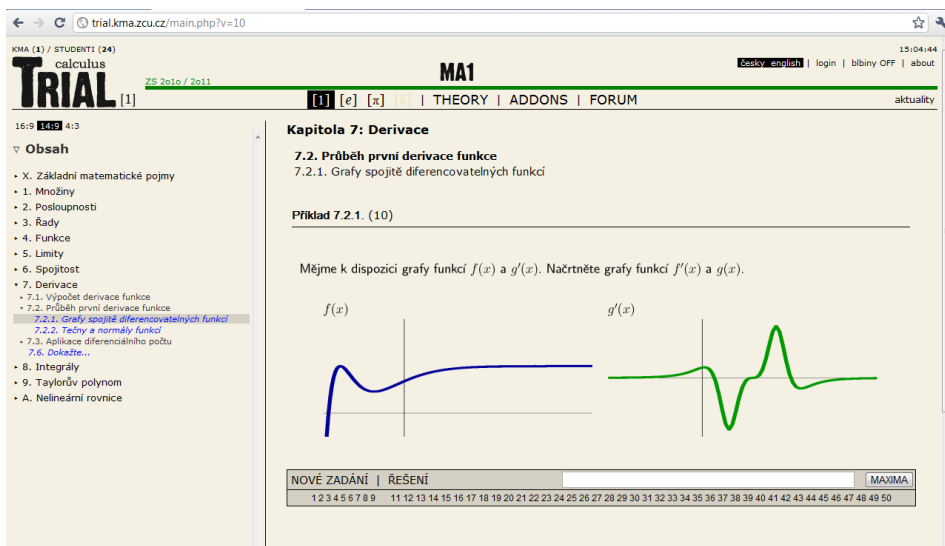
Katedra matematiky FAV garantuje výuku cca 180 matematických předmětů celkem na šesti fakultách univerzity pro zhruba šestnáct tisíc studentů ročně. V současné době se zaměstnanci FAV podílejí na řešení několika projektů z Operačního programu MŠMT: Vzdělání pro konkurenceschopnost. Jedním z nich je i projekt *Modernizace obsahu a formy výuky matematiky pro přírodní a technické vědy*⁴. V rámci řešení projektu dochází k inovaci databáze studijních podpor, příkladů a testů k matematickým předmětům, známé pod názvem TRIAL⁵. Tento systém existuje na ZČU od roku 2002 a dlouhodobě patří k nejnavštěvovanějším webům univerzity. V příloženém seznamu literatury je uvedeno několik příspěvků z konferencí o matematice na vysokých školách technických, ekonomických a zemědělských, kde byl moderní přístup k výuce matematiky prezentován.

V současné době na webovém portálu mají (resp. budou mít) studenti k dispozici úlohy i teorii od středoškolské matematiky po vysokoškolskou, viz též ukázky

⁴číslo projektu CZ.1.07/2.2.00/15.0377, mmm.zcu.cz

⁵trial.zcu.cz, trial.kma.zcu.cz

na obr. 1 a 2. Vyučující pak mohou systém využít např. ke generování a vystavení materiálů k přednáškám, k zápočtovým a zkuškovým písemným pracím a ke zveřejnění jejich výsledků, a v neposlední řadě k vystavení důležitých informací k jednotlivým předmětům. Všichni pak mohou využívat fórum, kde studenti mezi sebou nebo s vyučujícími diskutují např. řešení některých příkladů. Studenti mají tedy pro studium k dispozici na jednu stranu veškeré výtobytky moderních technologií a na druhou stranu jsou nuceni pochopit principy „klasických“ teoretických důkazů.



Obrázek 1. Ukázka z TRIALu – příklady z diferenciálního počtu.

http://trial.kma.zcu.cz/main.php?podObsah=1.3.5.20.&Link=1/3/5/20&v=0

KMA (2) / STUDENTI (23)

addons

TRIAL

ZS 2010 / 2011

MA2

český english | login | bibliny OFF | about

14:38:47

[1] [x] | THEORY | ADDONS | FORUM

aktuality

16:9 14:9 4:3

▼ Obsah

- 1. HERBÁŘE ...
 - 1.1. MNOŽINY ...
 - 1.2. ČÍSLA ...
 - 1.3. FUNKCE ...
 - 1.3.0. PŘEHLEDOVÉ KARTY
 - 1.3.1. Základní funkce v $\mathbb{R}$
 - 1.3.2. Užitečné funkce v $\mathbb{R}$
 - 1.3.3. Zajímavé funkce v $\mathbb{R}$
 - 1.3.4. Užitečné funkce v $\mathbb{R}^2$
 - 1.3.5.1. přehled + online plot
 - 1.3.5.2. $x^2 + y^2$
 - 1.3.5.3. $|x| + |y|$
 - 1.3.5.4. $\cos x + \sin y$
 - 1.3.5.5. $\sin(x+y)$
 - 1.3.5.6. $\sin(x/y)$
 - 1.3.5.7. $\sin(\sqrt{x^2 + y^2}) / (\sqrt{x^2 + y^2})$
 - 1.3.5.8. $xy \exp(-x^2 - y^2)$
 - 1.3.5.10. různé hezké funkce
 - 1.3.5.20. funkce ve 3D
- 1.3.11. Základní funkce v $\mathbb{C}$
- 1.4. ROVNICE ...
- 1.5. BIFURKACE ...
- 4. Facebook ...
- 5. Užitečné tabulky ...
- 6. Užitečné dovednosti ...
- 7. Perličky ...
- X. WWW, software atd.
- Y. Vše o TRIALu :)
- Z. Literatura, kterou by si měl někdo přečíst

Kapitola 1: HERBÁŘE ...

1.3. FUNKCE ...

1.3.5. Užitečné funkce v $\mathbb{R}^2$

1.3.5.20. funkce ve 3D

$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$ picture, high-res anim -3 D- picture high-res anim JPS: picture high-res	$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ picture, high-res anim -3 D- picture high-res anim JPS: picture high-res	$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x + y)^2}$ picture, high-res anim -3 D- picture high-res anim JPS: picture high-res
$f(x, y) = \sqrt{ xy }$ picture, high-res anim -3 D- picture high-res anim JPS: picture high-res	$f(x, y) = xy $ picture, high-res anim -3 D- picture high-res anim JPS: picture high-res	$f(x, y) = xy ^2$ picture, high-res anim -3 D- picture high-res anim JPS: picture high-res
$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ picture, high-res anim -3 D- picture high-res anim JPS: picture high-res	$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ picture, high-res anim -3 D- picture high-res anim JPS: picture high-res	$f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$ picture, high-res anim -3 D- picture high-res anim JPS: picture high-res
$f(x, y) = \sin x + \sin y$ picture, high-res anim -3 D- picture high-res anim JPS: picture high-res	$f(x, y) = \sin(x + y)$ picture, high-res anim -3 D- picture high-res anim JPS: picture high-res	$f(x, y) = \sin(xy)$ picture, high-res anim -3 D- picture high-res anim JPS: picture high-res
$f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$ picture, high-res anim -3 D- picture high-res anim JPS: picture high-res	$f(x, y) = x^2 + 6xy + y^2$ picture, high-res anim -3 D- picture high-res anim JPS: picture high-res	$f(x, y) = x^4 + 2y^4 - 14x^2 - 16y^2 + 24x$ picture, high-res anim -3 D- picture high-res anim JPS: picture high-res
$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x - 2y$ picture, high-res anim -3 D- picture high-res anim JPS: picture high-res	$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^2 + y^2 - z^2$ picture, high-res anim -3 D- picture high-res anim JPS: picture high-res	$(2 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 = 1 - z^2$ picture, high-res anim -3 D- picture high-res anim JPS: picture high-res

- 3D, pn -

Obrázek 2. Ukázka z TRIALu - 3D grafy funkcí dvou proměnných.

REFERENCE

- [1] J. Čepička, M. Míková, L. Tesková: *Výuka matematiky na technických fakultách ZČU*, v 3. konference o matematice a fyzice na vysokých školách s mezinárodní účastí, Brno, Vojenská akademie, 2003, 43–47.
- [2] J. Daněk: *Výuka numerické matematiky s užitím počítačové učebny*, v 5th International Conference Proceedings of Aplimat 2006, STU Bratislava, 2006, 309–314.
- [3] M. Míková, J. Čepička: *Nové pojetí matematiky na technických fakultách ZČU*, v Sborník 27. konference VŠTEZ, Hejnice, JČMF Praha, 2002, 149–151.
- [4] M. Míková, V. Vacek: *Kombinovaná forma studia na ZČU v Plzni*, v Zborník 28. konference VŠTEP, Rožňava, JSMF Žilina, 2004, 245–248.
- [5] J. Pospíšil: *Matematická analýza na Západočeské univerzitě v Plzni*, v Workshop matematicko-fyzikální vědy ve výuce geodézie a kartografie, VUT Brno, 2011.

Gabriela Holubová, Katedra matematiky, Fakulta aplikovaných věd, Západočeská univerzita v Plzni, Univerzitní 8, 306 14 Plzeň, Česká republika,
e-mail: gabriela@kma.zcu.cz

Jan Pospíšil, Katedra matematiky, Fakulta aplikovaných věd, Západočeská univerzita v Plzni, Univerzitní 8, 306 14 Plzeň, Česká republika,
e-mail: honik@kma.zcu.cz

MODERNIZACE OBSAHU A FORMY VÝUKY MATEMATIKY PRO PŘÍRODNÍ A TECHNICKÉ VĚDY

BLANKA ŠEDIVÁ A MIROSLAV LÁVIČKA

ABSTRAKT. Cílem příspěvku je podat základní informaci o průběhu řešení projektu OP VK (Operační program Vzdělávání pro konkurenceschopnost), který se od října 2010 řeší na katedře matematiky (KMA) Fakulty aplikovaných věd (FAV) Západočeské univerzity (ZČU) v Plzni. Uvedený projekt je mimo jiné směřován na inovaci struktury, formy a obsahu předmětů vyučovaných katedrou matematiky na šesti fakultách ZČU.

1. ÚVOD

Projekt *Modernizace obsahu a formy výuky matematiky pro přírodní a technické vědy* CZ.1.07/2.2.00/15.0377 (viz [1]) je financován v rámci Operačního programu *Vzdělávání pro konkurenceschopnost* (OP VK), který je víceletým tematickým programem v gesci Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy (MŠMT) ČR, v jehož rámci je možné v období 2007–2013 čerpat finanční prostředky z Evropského sociálního fondu (ESF), jednoho ze strukturálních fondů Evropské unie (EU). Uvedený projekt je konkrétně realizován v rámci prioritní osy 2 – *Terciální vzdělávání, výzkum a vývoj*, oblast podpory 2.2. *Vysokoškolské vzdělávání*. Doba trvání projektu je od 1. 10. 2010 do 31. 9. 2013 a celkový rozpočet projektu je 13 mil. Kč.

2. HLAVNÍ CÍLE PROJEKTU

Cílem projektu je vytvořit novou strukturu základních a nadstavbových matematických předmětů vyučovaných katedrou matematiky FAV ZČU. Důraz při inovaci výuky matematiky je kladen na modularizaci matematických předmětů, zkvalitnění a modernizaci studijních opor a vytvoření motivačních a aplikačních materiálů sloužících k popularizaci a propagaci matematických principů a postupů. Vzhledem k velké diferenciaci výuky matematických předmětů (katedra matematiky zajišťuje výuku 316 předmětů, z toho na 182 předmětech byl např. v akademickém roce 2008/09 zapsán alespoň jeden student; celkový počet studentů zapsaných na předměty garantované katedrou matematiky byl v loňském roce 15 720) je nezbytné vytvořit novou modularizaci předmětů.

2010 MSC. Primární 97B70, 97A80, 97B10, 00A99.

Klíčová slova. Modernizace výuky matematiky, přírodní a technické vědy, vzdělávání pro konkurenceschopnost.

Práce byla podporována projektem OPVK *Modernizace obsahu a formy výuky matematiky pro přírodní a technické vědy* CZ.1.07/2.2.00/15.0377 a projektem OPVK *A-Math-Net Síť pro transfer znalostí v aplikované matematice* CZ.1.07/2.4.00/17.0100.

Na jedné straně je třeba podtrhnout společné základy exaktních matematických principů, které symbolizují širokou uplatnitelnost těchto principů napříč dalšími obory. Již nyní jsou některé základní kurzy matematiky na různých fakultách přednášeny v rámci stejných pravidel a harmonogramů. Na druhé straně znalosti a schopnosti studentů nastupujících na VŠ jsou velmi rozdílné, jednotné pevně stanovené požadavky v každém semestru jsou pro část studentů příliš jednoduché a pro část studentů příliš náročné. Nově navrhovaná struktura předmětů bude umožňovat studentům větší možnost volby rychlosti a intenzity studia matematických předmětů. V rámci spolupráce s dalšími fakultami a katedrami ZČU, které garantují jednotlivé studijní programy a obory, budou formulovány požadované klíčové kompetence v oblasti matematiky a jejích aplikací.

Nedílnou součástí projektu je v rámci zlepšení motivace studentů jednotlivých fakult vytvoření databáze materiálů, které budou demonstrovat uplatnitelnost obecných matematických principů a poznatků v konkrétní aplikační oblasti. Globálnější náhled umožní absolventům mimo jiné lepší adaptaci na trhu práce. Zahraniční spolupráce pak umožní především udržet moderní trendy ve výuce matematických předmětů.

Projekt zahrnuje pět klíčových aktivit (KA):

1. Analýza a inovace současné struktury matematických předmětů a nová formulace požadovaných klíčových kompetencí.
2. Vytvoření databáze podpůrných materiálů a příkladů.
3. Vytvoření databáze motivačních a aplikačních příkladů.
4. Pořádání propagačních aktivit a seminářů pro studenty a pedagogické pracovníky středních a vysokých škol.
5. Zahraniční spolupráce a zapojení zahraničních odborníků do realizace inovovaných studijních programů.

3. CÍLOVÉ SKUPINY PROJEKTU

Projekt je směřován na následující cílové skupiny:

1. *studenty matematických předmětů* vyučovaných katedrou matematiky, část studentů (1a) se bude aktivně zapojovat při vypracovávání analýz, tvorbě a vyhodnocování dotazníků, na vytváření databáze příkladů a studijních materiálů (předpokládáme cca 10–20 studentů každý rok) a další část studentů (1b) bude tuto databázi využívat (například v loňském roce jenom u databáze TRIAL, kterou využívali především studenti prvních ročníků fakult FAV, FST, FEL, FEK, FPE, FZS a UUD, se jednalo o cca 3 000 studentů každý semestr); celkový počet studentů zapsaných ve školním roce 2008/09 na „velké předměty“ (nad 100 studentů v jednom předmětu) byl 12 861;
2. *uchazeče o studium* na technických, ekonomických a přírodovědně orientovaných fakultách ZČU; u této skupiny můžeme pouze odhadovat počet podle dosavadních zkušeností; pravidelných dnů otevřených dveří na katedře matematiky se každoročně zúčastňuje cca 200 návštěvníků; naši studenti a pedagogové navštíví během roku cca 15 SŠ za účelem propagace exaktních oborů; v databázi TRIAL jsou registrovány tisíce přístupů během roku;

3. *pedagogické pracovníky SŠ a VŠ* v Plzeňském kraji a sousedních krajích – jedním z cílů projektu je přispět k popularizaci a propagaci matematických principů a metod a prostřednictvím jednoduchých aplikačních a motivačních příkladů pomoci SŠ pedagogům přesvědčit žáky, aby zvyšovali své analytické schopnosti a dovednosti; předpokládáme, že budeme organizovat cca 2–3 semináře pro cca 20–30 SŠ a VŠ pedagogů každý rok; cílem těchto pracovních seminářů bude nejenom seznamování s motivačními úlohami a jejich tvorba, ale především vytváření a prohlubování partnerských vazeb mezi pedagogy SŠ a VŠ;
4. *akademické pracovníky KMA FAV*, kteří budou využívat vytvořenou databázi materiálů a rozvíjet zahraniční kontakty, jedná se o akademické pracovníky, kteří vedou přednášky a cvičení především v nižších ročnících (cca 20–30 akademických pracovníků každý semestr).

4. ANALÝZA A INOVACE SOUČASNÉ STRUKTURY MATEMATICKÝCH PŘEDMĚTŮ A NOVÁ FORMULACE POŽADOVANÝCH KLÍČOVÝCH KOMPETENCÍ

4.1. Cíle aktivity KA-1

Cílem této aktivity je analýza současného stavu výuky matematických předmětů a v rámci spolupráce s garanty programů a oborů našich fakult a kateder nová formulace požadovaných klíčových kompetencí studentů v oblasti matematiky. Po analýze současného stavu výuky matematiky v jednotlivých programech a oborech a analýze provázanosti předmětů a jejich modularizace hodláme ve spolupráci s garanty programů a oborů nově formulovat požadovaný soubor vědomostí, dovedností, schopností studentů nezbytných pro další studium.

Cílem je navrhnout moderní strukturu matematických předmětů tak, aby byla větší mírou zohledněna různá úroveň vstupních znalostí studentů. Zároveň chceme posilovat mezioborovost výuky základních matematických pojmů a dovedností, a přispět tak k větší adaptabilitě studentů. Chceme dále rozvinout systém centrálních a samohodnotících testů, které umožní zvolit vhodnou vstupní úroveň studia matematických předmětů.

Studenti s velmi dobrou vstupní znalostí matematických pojmů a dostatečně zažitými dovednostmi se budou moci soustředit na prohlubování svých matematických znalostí (například i v cizím jazyce), případně na rozšiřování mezioborových aplikací matematiky. Naopak studenti, kteří v rámci testů identifikují své neznalosti v některých základních matematických oblastech, budou mít možnost doplnit si tyto nedostatky v dodatkových nepovinných kurzech. Tímto postupem chceme předejít situacím, kdy studenti po neúspěchu u zkoušek z jednotlivých předmětů musí tento předmět absolvovat celý znovu ve stejném, často pro ně příliš rychlém, tempu.

Činnosti v rámci aktivity směřují tedy k inovaci studijních programů. Na činnosti se budou podílet především pracovníci KMA, kolegové ze spolupracujících kateder a fakult a předpokládáme též vytvoření pracovní skupiny studentů. Na základě provedených analýz očekáváme, že dojde k výrazné úpravě stávajících matematických předmětů tak, aby lépe korespondovaly se znalostmi, schopnostmi a především potřebami studentů.

4.2. Výstupy aktivity KA-1

Výstupem této aktivity bude především nově navržená struktura matematických předmětů v jednotlivých programech a oborech na Západočeské univerzitě v Plzni. Nezbytnou součástí nově koncipované struktury bude navržení, vytvoření a implementace metod pro ověření vstupních a výstupních znalostí studentů (zda jsou schopni předměty v daném rozsahu absolvovat). V této oblasti budeme vycházet z plošného testování studentů prvních ročníků, které naše katedra organizuje již od roku 2006. Např. v roce 2008 se tohoto plošného testu zúčastnilo celkem 2 222 studentů ze sedmi fakult ZČU a dvou fakult Jihočeské univerzity.

Součástí nové struktury bude i inovovaný systém zapisování a volby základních a doplňujících předmětů ze strany studenta, hodláme posílit zodpovědnost studenta za volbu matematických předmětů. Výstupy a závěry vyplývající z této aktivity se budou přímo dotýkat studentů Fakulty aplikovaných věd (FAV), Fakulty ekonomické (FEK), Fakulty elektrotechnické (FEL), Fakulty pedagogické (FPE), Fakulty strojní (FST), Fakulty zdravotních studií (FZS) a Ústavu umění a designu (ÚUD). Jenom během prvního roku studia absolvují všichni tito studenti vždy minimálně dva až tři matematické předměty (kromě FZS, kde je ve studijním plánu některých oborů zařazen pouze jeden matematicky orientovaný předmět ve 2. ročníku studia). Pochopitelně technické fakulty mají počet matematicky orientovaných předmětů daleko větší.

4.3. Současný stav aktivity KA-1

V rámci této klíčové aktivity pokračuje paralelní práce na dvou základních úkolech: *modernizace studijních plánů* zahrnujících matematické předměty garantované katedrou matematiky a *analýza a vyhodnocování vstupních znalostí studentů* nastupujících do prvních ročníků vybraných fakult Západočeské univerzity v Plzni.

Analýza a modernizace studijních plánů: Tým řešitelů pro tuto část aktivity se věnoval diskusi o nové koncepci studijních plánů a novému přístupu při výuce matematiky v jednotlivých ročnících vysokoškolského vzdělávání. Podle nového návrhu byly připraveny nové předměty, které úspěšně prošly vnitrouniverzitním akreditačním řízením. Zároveň byly modernizovány studijní plány některých oborů. V současné době probíhají diskuse nad novou podobou dalších studijních programů bakalářského a magisterského studia, které jsou garantovány katedrou matematiky. V rámci diskusí k modernizaci výuky matematiky bylo rozhodnuto o výraznějším zapojení výpočetní techniky do procesu výuky vysokoškolské matematiky – konkrétně se jedná o zavedení systému *WolframAlpha* do výuky.

Hlavní důvody většího využití symbolických operací ve výuce jsou následující:

- na ostatních katedrách (především technických fakult) je tento systém při výuce již dávno využíván;
- naším cílem je naučit studenty matematicky myslet, nikoliv drilovat věci, které budou v budoucnu řešit jen pomocí počítače;
- výraznějším rozšířením „chytrých telefonů“ a tabletů je praktické využívání symbolických matematických operací dostupné téměř všem studentům;

- preferovaná platforma WolframAlpha byla na konci roku 2010 výrazně posílena a doplněna řadou dovedností, které překonávají bariéru přesných syntaxí.

V souvislosti s uvedenou aktivitou byl podán projekt FRVŠ 706/2012/A/b *Mobilní počítačová učebna nové generace*, který je synergickým doplňkem. V souvislosti s využíváním symbolických operací byl vyzkoušen pilotní test využití těchto přístupů nejprve mezi členy katedry matematiky, dále byly tyto metody a postupy výuky aplikovány v letním semestru v předmětech MS2, MA2, MA-A a M2E. Záměrně byly zvoleny pro pilotní zkušenosti jak předměty velkokapacitní (více než 100 studentů), tak předměty pro menší skupiny studentů.

V rámci druhé linie klíčové aktivity probíhaly práce na podrobném statistickém vyhodnocení vstupních testů. Podrobná analýza byla zaměřena též na souvislost vstupních znalostí studentů a jejich úspěšnost v absolvování matematických předmětů v prvním semestru studia. Současně probíhají přípravy nové varianty vstupních testů pro studenty akademického roku 2011/2012.

4.4. Plánované akce v rámci KA-1 pro nejbližší období

Práce členů realizačního týmu, kteří se podílí na této klíčové aktivitě, se v budoucím období soustředí především na modernizaci dalších studijních oborů bakalářského a magisterského studia garantovaných katedrou matematiky. Předpokládáme též zahájení diskusí s dalšími fakultami s cílem přesněji specifikovat jejich požadavky na klíčové kompetence studentů z oblasti matematiky. Intenzivně budou probíhat práce na dalším plošném testování vstupních znalostí studentů matematiky na ZČU. Toto testování proběhne během září 2011.

5. VYTVOŘENÍ DATABÁZE PODPŮRNÝCH MATERIÁLŮ A PŘÍKLADŮ

5.1. Cíle aktivity KA-2

Tato aktivita směřuje především k modernizaci didaktických metod. Na tvorbě portálu s databází podpůrných materiálů a příkladů se budou podílet akademičtí pracovníci KMA, studenti různých fakult, kteří navštěvují některý z kurzů matematických předmětů, středoškolští pedagogové a zahraniční odborníci. Předpokládáme, že činnost na této aktivitě bude probíhat průběžně po celou dobu projektu.

V této oblasti budeme navazovat především na projekt TRIAL – viz [2]. Tento systém vznikl v minulosti na katedře spontánně bez grantových podpor a jeho současná podoba je k dispozici na <http://trial.kma.zcu.cz>. V databázi je nyní k dispozici přibližně 220 typů příkladů. Nově vzniká verze TRIAL2, která zahrnuje i studijní podpory teoretické (přehled definic, vět, důkazů a podobně). Cílem je právě plné využití a naplnění tohoto portálu. Nyní teoretická část pokrývá cca 30–40 % současné výuky v prvních dvou letech bakalářského studia (všech programů a oborů, které v rámci studijních plánů obsahují matematické předměty garantované katedrou matematiky). Databáze příkladů a testů je vytvořena cca k 50–60 % odpovídající výuky v základních matematických předmětech, navíc obsahuje řadu příkladů a studijních opor pro předměty ve vyšších ročnících. Řadu využívaných studijních materiálů mají studenti k dispozici na portálech jednotlivých oddělení katedry, popř. na stránkách jednotlivých vyučujících.

Cílem projektu je vytvořit jednotné (pokud možno graficky atraktivní) vstupní rozhraní, kde studenti najdou souhrnné informace o studijních oporách pro předměty garantované katedrou matematiky. Předpokládáme, že navržený portál bude zahrnovat minimálně studijní podpory pro teoretickou část výuky (definice, věty) a příklady všech matematických předmětů v prvních dvou letech studia.

5.2. Výstupy aktivity KA-2

V návaznosti na výstup KA-1 bude výstupem KA-2 naplnění nově vytvořené struktury matematických předmětů daty. Hlavním výstupem bude vytvoření databáze studijních podpor, příkladů a testů a její prezentace na internetu tak, aby byla dostupná široké odborné i laické veřejnosti. Studenti budou mít možnost využít této databáze při samostudiu před zkouškami a uchazeči o studium na VŠ budou využívat tuto databázi před přijímacími zkouškami. Aktivita je směřována ke studentům v počátečních ročnících fakult Západočeské univerzity v Plzni (jedná se minimálně o 3 000 průkazně podpořených studentů každý semestr) a navíc mohou databázi, tak jako doposud, využívat uchazeči o studium na VŠ, kteří mají možnost vytvořit si dostatečně jasnou představu o náročnosti a složitosti studia matematických předmětů na různých fakultách ZČU, případně se mohou lépe připravit na přijímací zkoušku z matematiky.

5.3. Současný stav aktivity KA-2

Také tato klíčová aktivita probíhá v několika subaktivitách. Průběžně je doplňována stávající databáze podpůrných materiálů, jak z oblasti teoretických materiálů, tak z oblasti příkladů, testovacích úloh a nově též zadávání semestrálních individuálních prací studentům.

Kromě aktualizace a doplňování stávající databáze studijních podpor byla současná databáze rozšířena o nový segment – TRIAL4, který umožňuje správu seminárních a semestrálních prací. Funkčnost systému a jeho uplatnitelnost ve výuce byla pilotně vyzkoušena na vybraných předmětech. Podpůrné materiály pro řadu dalších předmětů byly významně inovovány a přepracovány. Největší změnou bylo zavedení možnosti využívání symbolických výpočetních prostředí do výuky a tím i počítačů, tato změna v pojetí výuky si vyžádala tvorbu kvalitativně odlišných typů příkladů zaměřených méně na výpočtářský dril a více na pochopení podstaty řešeného matematického problému.

Pro zjednodušení hromadného zadávání, opravování, zpracovávání a zveřejňování výsledků semestrálních zápočtových písemných prací byl vyvinut nový systém nazvaný TAG. Paralelně s doplňováním stávajícího systému databáze podpůrných materiálů <http://trial.kma.zcu.cz> probíhají práce na vytváření nového prostředí <http://trial.zcu.cz>. Funkčnost nového systému byla opět pilotně otestována na vybraných předmětech. Následující akademický rok 2011/2012 již předpokládáme přechod databáze materiálů ze „starého“ systému <http://trial.kma.zcu.cz> do systému „nového“ <http://trial.zcu.cz>.

Nadále pokračovala spolupráce s kolegy ze středních škol, kdy došlo k rozšíření kolektivu spolupracovníků o kolegy z dalších středních škol (gymnázium Jírovcova České Budějovice a Gymnázium Chomutov). Byla navázána spolupráce s Ústavem

umění a designu ZČU. V rámci této spolupráce studenti uměleckých oborů navrhli krátké animační sekvence oživující nové prostředí <http://trial.zcu.cz>.

5.4. Plánované akce v rámci KA-2 pro nejbližší období

V následujícím období dojde k postupnému naplňování nově vytvořeného webového prostředí podpůrnými materiály pro studenty. Dále budou pokračovat všechny subaktivity této aktivity: spolupráce se středními školami, naplňování databáze materiály pro studenty, inovace a modernizace dalších předmětů, zlepšování a praktické používání systému pro evidenci písemných prací apod.

6. VYTVOŘENÍ DATABÁZE MOTIVAČNÍCH A APLIKAČNÍCH PŘÍKLADŮ

6.1. Cíle aktivity KA-3

V rámci této aktivity, která směřuje k modernizaci didaktických metod a větší podpoře kombinovaného studia, bude vytvořena databáze motivačních příkladů pro různé oblasti matematiky. Motivační a aplikační příklady zatím nejsou součástí systému TRIAL, ale vybrané příklady jsou často k dispozici na stránkách jednotlivých přednášejících a vyučujících. Chceme vytvořit jednotné, vizuálně přitažlivé www prostředí, kde studenti i širší veřejnost najdou aplikační a motivační příklady, ukázky aplikací a další zajímavosti z oblasti matematických věd.

Na tvorbě této databáze se budou podílet akademičtí pracovníci KMA, studenti různých fakult, kteří navštěvují některý z kurzů matematických předmětů, středoškolské pedagogy a zahraniční odborníci. Předpokládáme, že činnost na této aktivitě bude probíhat průběžně po celou dobu projektu. Záměrem je vytvoření databáze motivačních příkladů a její prezentace na internetu tak, aby byla dostupná široké odborné i laické veřejnosti. Aktivita je směřována ke studentům ve všech ročnících VŠ a otevřenost systému umožní využití též zájemci o studium matematicky orientovaných předmětů a dalšími pedagogy SŠ a VŠ.

6.2. Současný stav aktivity KA-3

Tato klíčová aktivita zahájila svou činnost teprve v červnu 2011. Během této velmi krátké doby byl vytvořen návrh členů realizačního týmu, kteří se budou věnovat uvedené problematice. Byly ujasněny vzájemné kompetence mezi jednotlivými týmy specializované na danou klíčovou aktivitu a navrženy metody komunikačních kanálů pro snadný přenos informací mezi KA2 a KA3. Dále byl připraven podrobný časový harmonogram činnosti v rámci této aktivity.

7. POŘÁDÁNÍ PROPAGAČNÍCH AKTIVIT A SEMINÁŘŮ PRO STUDENTY A PEDAGOGICKÉ PRACOVNÍKY SŠ A VŠ

7.1. Cíle aktivity KA-4

V rámci této klíčové aktivity je naplánováno uskutečnění následujících akcí:

- pořádání dnů otevřených dveří na katedře matematiky a další prezentace katedry matematiky;
- pracovní semináře pro SŠ a VŠ pedagogy, na kterých budou seznámeni se studijními podporami, které jsou k dispozici na www stránkách katedry

matematiky (včetně vytvořené databáze motivačních příkladů a ilustračních příkladů). Předpokládáme pořádání 3-4 seminářů ročně, pro cca 20-30 účastníků; cílem seminářů je docílit větší provázanost matematického vzdělávání na SŠ a VŠ;

- informační aktivity pro zájemce o vysokoškolské studium na středních školách s cílem podpořit zájem studentů o studium exaktních metod. Jako nejvhodnější propagační aktivity vidíme přímé kontaktování studentů posledních ročníků střední školy. Dosavadní zkušenosti ukazují, že největší efekt má propagace prostřednictvím absolventů dané střední školy, kteří jsou aktuálními studenty VŠ propagovaných oborů a programů. Tato část aktivity přímo podporuje spolupráci VŠ se SŠ s cílem poskytnout studentům dostatek informací, eliminovat jejich případné negativní vnímání a očekávání ohledně studia matematických předmětů na vysoké škole. Předpokládáme, že každoročně oslovíme a osobně zkontaktujeme alespoň 20–30 středních škol především v regionu plzeňském, jihočeském a karlovarském. Na přípravě a realizaci propagačních aktivit a seminářů se budou podílet členové katedry matematiky a studenti VŠ a mezi účastníky budou patřit pedagogové a studenti ze středních a vysokých škol.

7.2. Současný stav aktivity KA-4

V souladu se specifikací této klíčové aktivity byla vyvíjena snaha o spolupráci se středními školami s cílem propagovat matematiku. Konkrétně proběhly dvě propagační akce typu dnů otevřených dveří, dále několik přednášek na středních školách, přednášky zvaných hostů a přednášky členů realizačního týmu směřované na propagaci matematického myšlení. Byly též zahájeny rozhovory o možné spolupráci se společností SCIO. Cílem případné budoucí spolupráce, která by synergicky navazovala na aktuálně řešený projekt, by bylo vytvoření e-learningového prostředí pro studenty prvních ročníků ekonomických fakult v matematických předmětech.

7.3. Plánované akce v rámci KA-4 pro nejbližší období

Činnost této klíčové aktivity byla přerušena na období prázdninových měsíců (červenec–srpen 2011). Pracovníci této aktivity byli na uvedenou dobu převedeni do jiných klíčových aktivit. Od září 2011 pak budou připraveny další semináře pro vyučující a studenty ze středních škol Plzeňského a Karlovarského kraje. Budou též připraveny nové propagační materiály KMA a osloveny vytipované střední školy s návrhem na spolupráci.

8. ZAHRANIČNÍ SPOLUPRÁCE A ZAPOJENÍ ZAHRANIČNÍCH ODBORNÍKŮ DO REALIZACE INOVOVANÝCH STUDIJNÍCH PROGRAMŮ

8.1. Cíle aktivity KA-5

V rámci této aktivity plánujeme dvoustranné návštěvy akademických pracovníků zaměřené na pedagogickou činnost. Budeme navazovat a rozvíjet kontakty katedry matematiky (které se v současné době v zahraničí zaměřují především na vědecko-výzkumnou činnost) do oblasti pedagogické. Předpokládaný rozsah výměn je cca 10 člověkotýdnů ročně. Celkem předpokládáme 27 člověkotýdnů (resp. 189 dnů)

za celou dobu trvání projektu, odhadujeme částku cca 20 000 Kč na jeden týden pobytu v zahraničí. Zahraniční pobyty členů katedry, které budou podpořeny z tohoto projektu, budou prioritně zaměřeny na pedagogické aktivity. Zahraniční pobyty budou směřovány na stínování (*shadow-visits*) pedagogů v úvodních ročnících na zahraničních fakultách, na výměnu zkušeností z oblasti pedagogické, na eventuální přípravu a inovaci studijních programů s významným podílem studia v cizím jazyce a podobně.

V této aktivitě navážeme na již ověřenou spolupráci s partnery z předcházejících projektů (např. Brunel University, Department of Mathematical Sciences, Uxbridge (Greater London), Middlesex, Anglie; Hochschule München, Fakultät für Informatik und Mathematik, Mnichov, Německo; Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko, Ljubljana, Slovinsko). Na druhou stranu předpokládáme, že naopak zahraniční pracovníci se budou podílet na realizaci výuky vybraných matematických předmětů v cizím jazyce na katedře matematiky. Tyto kurzy budou určeny pro studenty, kteří mají dostatečné matematické znalosti a schopnosti a mohou studiem matematiky v cizím jazyce rozvinout dále své schopnosti a dovednosti. Uvažujeme pobyt zahraničních lektorů a pedagogů v rozsahu cca 3-4 člověkotýdny ročně. Celkem předpokládáme cca 10 člověkotýdnů za celou dobu trvání projektu, odhadujeme částku cca 20 000 Kč na jeden týden pobytu zahraničního experta na katedře matematiky.

8.2. Současný stav aktivity KA-5

V průběhu sledovaného monitorovacího období se podařilo uzavřít smlouvu o spolupráci s TU Trondheim, Norsko. Dále byla uzavřena bilaterální dohoda s Università degli Studi di Milano-Bicocca, Itálie. Smlouva s TU Drážďany je ve fázi finalizace. Nově se jedná o podpisu smlouvy o případné spolupráci s Fakultetou za matematiku in fiziku, Univerza v Ljubljani (Slovinsko) a Technische Universität Graz (Rakousko). Další jednání probíhají s Politecnico di Milano, Itálie. Zároveň byly vytipovány vhodné zahraniční a tuzemské konference, semináře a workshopy, které jsou zaměřeny na nové metody výuky matematiky na vysokých školách.

V současné době se připravuje plán zahraničních výjezdů členů realizačního týmu a případných dalších osob, které budou směřovány na stínování pedagogů v úvodních ročnících na zahraničních fakultách, na výměnu zkušeností z oblasti pedagogické, na eventuální přípravu a inovaci studijních programů s významným podílem studia v cizím jazyce a podobně. Dále probíhají jednání s několika zahraničními pedagogy, kteří se budou v následujícím akademickém roce podílet na výuce vybraných matematických předmětů v cizím (převážně anglickém) jazyce.

9. ZÁVĚR

V příspěvku byly stručně podány základní informace o cílech, cílových skupinách, aktuálním stavu řešení a některých již dosažených výstupech projektu OP VK, který je od října 2010 řešen na katedře matematiky Fakulty aplikovaných věd ZČU v Plzni. Podrobněji byly diskutovány jednotlivé klíčové aktivity s důrazem na plánované akce v nejbližším období. Ačkoliv hlavní část řešitelského týmu pochází z katedry matematiky FAV ZČU, pro zdar projektu je nezbytná kooperace

i s pracovníky z ostatních institucí. Věříme, že k jejich oslovení může pomoci i tento článek.

REFERENCE

- [1] *Oficiální webovské stránky projektu*. [online], 2011, Dostupné na WWW [cit. 31. 8. 2011] <<http://MMM.zcu.cz>>.
- [2] *Portál TRIAL*. [online], 2011, Dostupné na WWW [cit. 31. 8. 2011] <<http://trial.zcu.cz>>.

Blanka Šedivá, Katedra matematiky, Fakulta aplikovaných věd, Západočeská univerzita v Plzni, Univerzitní 8, 301 00 Plzeň, Česká republika,
e-mail: sediva@kma.zcu.cz, <http://www.kma.zcu.cz/Sediva>

Miroslav Lávička, Katedra matematiky, Fakulta aplikovaných věd, Západočeská univerzita v Plzni, Univerzitní 8, 301 00 Plzeň, Česká republika,
e-mail: lavicka@kma.zcu.cz, <http://www.kma.zcu.cz/Lavicka>

PRVNÍ ŠACHOVÝ ZÁPAS MEZI ZAMĚSTNANCI ÚSTAVU MATEMATIKY FSI VUT A STUDENTY MATEMATICKÉHO INŽENÝRSTVÍ

ALICE HAVLÍČKOVÁ A MIROSLAV KUREŠ

ABSTRAKT. Článek se vrací k historicky prvnímu šachovému zápasu mezi zaměstnanci Ústavu matematiky Fakulty strojího inženýrství Vysokého učení technického v Brně a studenty Matematického inženýrství na téže fakultě, který proběhl 20. prosince 2010.

1. PRAVIDLA ZÁPASU

Dne 20. prosince 2010 proti sobě nastoupily dva osmičlenné týmy, tým studentů a tým zaměstnanců. Zahájení zápasu bylo určeno na 9 hodin do seminární místnosti Ústavu matematiky, sraz všech účastníků zde byl již v 8:50. Zápas byl dvoukolový, na každou partii bylo určeno maximálně 120 minut (tzn. 2×60 minut). V prvním kole nastoupil hráč č. 1 týmu zaměstnanců proti hráči č. 1 týmu studentů, hráč č. 2 týmu zaměstnanců proti hráči č. 2 týmu studentů, atd. Barva kamenů na 1. šachovnici se losovala, na dalších šachovnicích se barvy kamenů hráčů téhož týmu střídaly. Losováním bylo rozhodnuto, že studenti začínali na 1. šachovnici bílými kameny. V druhém kole proti sobě nastoupili hráči takto: hráč č. 1 týmu zaměstnanců proti hráči č. 3 týmu studentů a hráč č. 3 týmu zaměstnanců proti hráči č. 1 týmu studentů, a to s kameny opačné barvy než v 1. kole. Analogicky: 2. a 4. šachovnice, 5. a 7. šachovnice, 6. a 8. šachovnice. Partie bylo doporučeno (nikoliv povinné) zapisovat. Zápas skončil cca ve 13 hodin.

2. SESTAVY TÝMŮ, PRŮBĚH A VÝSLEDEK ZÁPASU

Tým studentů nastoupil ve složení:

1. Ing. Jan **Novotný**, *student doktorského oboru Aplikovaná matematika*
2. Jan **Dražka**, *student bakalářského oboru Matematické inženýrství*
3. Alice **Havlíčková**, *studentka bakalářského oboru Matematické inženýrství, kapitánka týmu*
4. Bc. Jan **Holešovský**, *student magisterského oboru Matematické inženýrství*

2010 MSC. Primární 97A20, 97A99.

Klíčová slova. Akademický život, neformální mimovzdělávací akce, šachy.

Práce byla podpořena projektem A-Math-Net Síť pro transfer znalostí v aplikované matematice (CZ.1.07/2.4.00/17.0100).

5. David **Vorel**, student bakalářského oboru *Matematické inženýrství*

6. Jan **Horníček**, student bakalářského oboru *Matematické inženýrství*

7. Mgr. Jana **Hoderová**, Ph.D., *Odbor matematické analýzy*, posila týmu

8. Ondřej **Čepl**, student bakalářského oboru *Matematické inženýrství*



Obrázek 1. Doktor Popela zvítězil i přes značné zpoždění, s nímž se dostavil k partii s Janem Dražkou.

Tým zaměstnanců nastoupil ve složení:

1. Mgr. Ing. Eva **Pekárková**, Ph.D., *Oddělení výzkumu, vývoje a vnějších vztahů*, posila týmu

2. RNDr. Pavel **Popela**, Ph.D., *Odbor statistiky a optimalizace*

3. Prof. RNDr. Ladislav **Skula**, DrSc., *Odbor algebry a diskrétní matematiky*



Obrázek 2. Profesoru Skulovi se nepovedlo zahájení první partie, dokázal ji ale otočit ve svůj prospěch.

4. Doc. RNDr. Bohumil **Maroš**, CSc., *Odbor statistiky a optimalizace*

5. Ing. Petr **Kundrát**, Ph.D., *Odbor matematické analýzy*

6. Doc. RNDr. Miroslav **Kureš**, Ph.D., *Odbor algebry a diskrétní matematiky*, kapitán týmu

7. Mgr. Jaroslav **Hrdina**, Ph.D., *Odbor algebry a diskrétní matematiky*

8. Mgr. Petr **Vašík**, Ph.D., *Odbor algebry a diskrétní matematiky*

Myšlenka zorganizovat předvánoční šachové utkání se zrodila na podzim roku 2010 během diskusí mezi autory tohoto článku, které se někdy více či méně vzdalovaly od tématu bakalářské práce první autorky, která měla být hlavním výsledkem jejich spolupráce. Oba automaticky převzali roli organizátorů a kapitánů týmů. Prvním úkolem bylo ovšem týmy sestavit. Pro studenty se to zpočátku zdálo být velkým problémem. Studenti některých ročníků (např. pátého) tvrdili, že tuto hru neovládají a že „Člověče, nezlob se!“ je jim bližší. Bylo to překvapivé, protože jde o studenty matematiky. I tým učitelů se formoval poměrně ztuha, byť se o některých vědělo, že šachy hrají, nechtěli si zřejmě zadat. Dlouho také zůstával otevřený start bývalého ředitele ústavu profesora Ženíška, který jej nakonec musel odvolat. Oba týmy nakonec vyřešily své sestavy přijetím jednoho externího hosta, posily týmu (šlo v obou případech o dámy, jež studenti umístili na 7. šachovnici a zaměstnanci na 1. šachovnici).

Jak se tedy hrálo? Za studentský tým na první šachovnici nastoupil doktorand Jan Novotný, který hraje šachy závodně na velice dobré úrovni a byl asi nejsilnějším a jedním z nejplatnějších členů týmu. Tým zaměstnanců proti němu postavil skvělou Evu Pekárkovou, rovněž organizovanou hráčku, navíc propagátorku a organizátorku této hry na VUT. Vzájemný souboj těchto jedniček skončil remízou. Jednou z nejsledovanějších partií byla partie Alice Havlíčkové s profesorem Skulou. Bílé se brzy podařilo získat figuru a možná předčasně začala považovat partii za rozhodnutou, ale profesor Skula náskok po mikroskopických krůčcích stahoval, stahoval, až nastoupil s protiútokem a nakonec vyhrál matem! Při dramatickém závěru byl u této šachovnice opravdu nezanedbatelný hlouček diváků. Zajímavé momenty se odehrávaly i na dalších šachovnicích. Zápas skončil vítězstvím týmu zaměstnanců v poměru $10\frac{1}{2}:5\frac{1}{2}$ (1. kolo $6\frac{1}{2}:1\frac{1}{2}$, 2. kolo 4:4). Nejúspěšnějšími hráči (se dvěma vítězstvími) byli P. Popela, B. Maroš, P. Kunderát a J. Horníček.

3. VYBRANÉ PARTIE

Novotný–Pekárková (zapsal a komentoval Jan Novotný)

1.b2-b4 e7-e6 2.Sc1-b2 Jg8-f6 3.b4-b5 d7-d5 4.e2-e3 c7-c5 5.c2-c4 Jb8-d7 6.d2-d3 Sf8-d6 7.Dd1-b3 O-O 8.Jg1-f3 Vf8-e8 9.Jb1-d2 a7-a6 10.a2-a4 a6xb5 11.a4xb5 Va8xa1+ 12.Sb2xa1 Sd6-c7 13.Sf1-e2 d5xc4 14.Jd2xc4 Jf6-d5 15.O-O f7-f6 16.d3-d4 Kg8-h8 (černou připravované e5 nelze pro 17. Jd6 se získkem materiálu, proto ústup krále z ohrožené diagonály) 17.Vf1-d1 Dd8-e7 18.Se2-f1 b7-b6 (pokus rozehrát střelce, který od počátku partie trpí na původním poli; bílý se již ale připravil k akci v centru, a tak na vývin černého střelce už nedorazí; naopak pěšec na b6 se ukáže slabinou) 19.e3-e4 Jd5-f4 20.g2-g3 Jf4-g6 21.d4-d5 e6xd5 22.e4xd5 Sc7-e5 23.Sf1-h3 Se5xa1 (zřejmě kritické postavení; bílý chtěl výměnou na d7 připravit pěšce b6 o posledního obránce; mělo se tak stát ještě před dobráním na a1, aby nebylo možné následující rozvázání přetížených černých figur) (24. Sxd7 Sxd7 25. Vxa1 a černá bude mít potíže krýt b6 a zároveň další hrozby) 24. Vd1xa1 Jd7-e5 25.Sh3xc8 Je5xc4 (nebezpečný napadající kůň je vyměněn a těžkosti černé končí) 26. Sc8-e6 Jc4-d6 (s nabídkou remízy; bílý pokračuje kvůli časové výhodě a nepříznivému stavu utkání; ale nevede si dobře) 27. Va1-e1 De7-a7 28.h2-h4 Da7-a5 29.Ve1-b1 Jg6-f8 30.Se6-h3 Ve8-e4 31.Db3-d3 Ve4-b4 32.Vb1xb4 Da5xb4 33.Dd3-e2 Db4-e4 34.De2xe4 Jd6xe4 35.Jf3-e1 Je4-d6 36.Sh3-f1 Jf8-d7 37.f2-f4 f6-f5 38.Je1-c2 Jd7-f6 39.Jc2-e3 g7-g6 remis $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$ (podruhé není vhodné remízu odmítnout, neboť černá již stojí výrazně lépe, bílí pěšci jsou velmi slabí; kdyby černé nezůstávaly na hodinách dvě minuty proti šesti, zle by bílému zatápěla)

Havlíčková–Skula (zapsala a komentovala Alice Havlíčková)

1.e2-e4 e7-e5 2.Jg1-f3 Jb8-c6 3.Sf1-b5 a7-a6 4.Sb5xc6 d7xc6 5.Jb1-c3 Sf8-d6 6.O-O Jg8-f6 7.d2-d4 Dd8-e7 8.d4xe5 Sd6xe5 9.Sc1-g5 h7-h6 10.Sg5-h4 g7-g5? (tento tah oslabuje krále) 11.Sh4-g3 Sc8-g4 12.Sg3xe5 Sg4xf3 (zde černý ztrácí figuru) 13.Se5xf6 Sf3xd1 14.Sf6xe7 Sd1xc2 15.Va1-c1 Sc2-d3 16.Vf1-d1 Sd3-c4 17.Se7-f6 O-O 18.e4-e5? Sc4-e6 (bílá sice získala materiální výhodu, ale tahem e5 ji opět ztratila; rozehrát střelce bude velký problém) 19.Vd1-d3 b7-b5 20.a2-a3 c6-c5 21.Vc1-d1 Se6-b3 22.Vd1-d2 b5-b4 23.a3xb4 c5xb4 24.Jc3-e4 Sb3-e6 25.Je4-c5? a6-a5 (opět slabý tah, zde již měl černý rozehrát střelce) 26.Jc5xe6 f7xe6 27.Vd3-d7 Vf8-f7 28.Vd7xf7 Kg8xf7 29.Vd2-d7+ Kf7-g6 30.Vd7xc7 a5-a4 31.Vc7-c2 b4-b3 32.Vc2-e2 Va8-c8 33.h2-h3 Vc8-c2 (bílá samozřejmě nemůže měnit věže, černý by si postavil dámu) 34.Ve2-e1 Vc2xb2 35.Sf6-e7 Vb2-a2 (na rozehrání střelce je již pozdě) 36.Ve1-b1 b3-b2 37.Kg1-h2 a4-a3 38.Se7xa3 Va2xa3 39.Vb1xb2 Kg6-f5 (zde černý ztratil veškerý svůj tlak) 40.Vb2-b5 Va3-a2 41.f2-f3 Va2-e2 42.Kh2-g3 h6-h5

43.h3-h4 g5xh4+ 44.Kg3xh4 Ve2xg2 45.Vb5-b4 Kf5xe5 46.Kh4xh5 Vg2-g3 47.Vb4-e4+ Ke5-f5 (zde už bílá rezignovala; buď ztratí pěšce, nebo dostane mat) 48.Ve4-e3 Vg3-h3+, MAT 0-1

Holešovský–Popela (zapsala a komentovala Alice Havlíčková)

1.e2-e4 Jb8-c6 2.Jg1-f3 e7-e5 3.Sf1-c4 Sf8-e7 4.Jb1-c3 d7-d6 5.Sc4xf7+ Ke8xf7 (bílý znemožnil černému rošádu, ale nemá dostatečný útok, a tak je tento tah chybný) 6.Jc3-d5 Jg8-f6 7.Jf3-g5+ Kf7-g8 8.Jd5xe7+ Dd8xe7 9.h2-h3 h7-h6 10.Jg5-f3 Jf6xe4 11.Dd1-e2 Je4-g5 12.d2-d3 Jg5xf3+ 13.De2xf3 Sc8-e6 14.c2-c3 De7-f7 15.Df3-e4 Va8-f8 16.0-0 Se6-d5 17.De4-g4 h6-h5 18.Dg4-g3 h5-h4 19.Dg3-g4 Df7-f5 20.c3-c4 Df5xg4 21.h3xg4 Sd5-e6 22.f2-f3 Jc6-d4 (zde se již bílý musí bránit náporu černých figur, zatímco jeho střelec a věž stojí v základním postavení) 23.Vf1-f2 h4-h3 24.b2-b3 h3-h2+ 25.Kg1-h1 Se6xg4 26.Sc1-b2 Jd4-f5 (a zde je již bílý pod matovým útokem, střelec nejde brát pro Jg3) 27.g2-g3 Jf5xg3+ 28.Kh1-g2 h2-h1D+ 29.Va1xh1 Jg3xh1 30.Vf2-e2 Sg4xf3+ (další chyba bílého, avšak ani bez ní by se už nedokázal ubránit aktivním černým figurám) bílý se vzdal 0-1

Poděkování. Děkujeme řediteli ústavu Prof. RNDr. Josefu Šlapalovi, CSc., za jeho podporu zápasu a bývalé studentce Matematického inženýrství Mgr. Ing. Evě Pekárkové, Ph.D., za zapůjčení šachových souprav a hodin.

Alice Havlíčková, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: alicehavlickova@seznam.cz

Miroslav Kureš, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: kures@fme.vutbr.cz