O ŘEŠENÍ PROBLÉMŮ SLABÉ KONVERGENCE

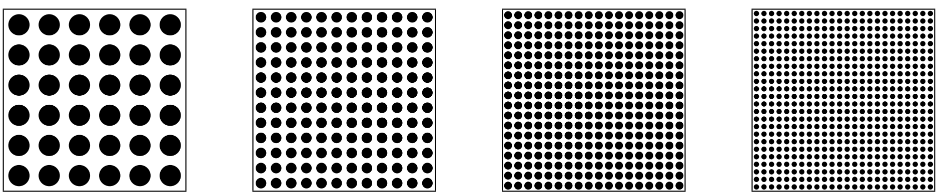
JAN FRANCŮ

ABSTRAKT. Článek je pokračováním práce J. Franců: *Od kompozitních materiálů ke slabé konvergenci,* Kvaternion 2/2012, 113-124, ve které byla formulována úloha homogenizace parciálních diferenciálních rovnic. Matematický přístup vede na studium posloupnosti řešení parciálních diferenciálních rovnic s periodickými koeficienty a_n se zmenšující se periodou $\varepsilon = 1/n \to 0$.

Koeficienty a_n nekonvergují silně, ale jenom slabě. V slabé formulaci úlohy se tak vyskytuje součin dvou slabě konvergentních posloupností funkcí a nelze přejít k limitě: součin dvou slabě konvergentních posloupností nekonverguje k součinu příslušných slabých limit. Podobně nelze přejít k limitě ve funkci $\Phi(a_n)$ složené se slabě konvergentní posloupností $\{a_n\}$. Řešení obou zmíněných problémů je obsahem tohoto článku. V případě součinu dvou slabě konvergentních posloupností lze problém řešit pomocí dvojškálové limity, v případě funkce složené se slabě konvergentní posloupností je řešením limita ve tvaru souboru Youngových měr.

1. Úvod

Článek je pokračováním příspěvku [11], ve kterém byla formulována úloha homogenizace parciálních diferenciálních rovnic. Připomeňme, že homogenizací rozumíme matematickou metodu pro modelování kompozitních materiálů. Zejména z výpočetních důvodů modelovaný silně heterogenní materiál potřebujeme nahradit „ekvivalentním“ materiálem homogenním.



Obr. 1. Příklad posloupnosti materiálů se zjemňující se strukturou.

Přístup navržený I. Babuškou spočívá v tom, že místo jednoho materiálu zkoumáme posloupnost heterogenních materiálů se zjemňující se strukturou, která z makroskopického hlediska „konverguje“ k „ekvivalentnímu“ homogennímu materiálu. V matematické formulaci studujeme posloupnosti řešení parciálních diferenciálních rovnic s periodickými koeficienty se zmenšující se periodou.

2010 *MSC.* Primární 35B27.

Klíčová slova. Homogenizace, slabá konvergence, soubor Youngových měr, dvojškálová konvergence.

Práce byla podporována projektem A-Math-Net – Síť pro transfer znalostí v aplikované matematice (CZ.1.07/2.4.00/17.0100).

Analýza této posloupnosti rovnic umožňuje počítat makroskopické vlastnosti tohoto fiktivního „ekvivalentního“ tzv. homogenizovaného materiálu z vlastností jednotlivých složek a jejich geometrického uspořádání.

Studovaná posloupnost periodických koeficientů a_n se zmenšující se periodou $\varepsilon = 1/n$, která odpovídá posloupnosti materiálů se zjemňující se strukturou, nekonverguje v klasickém smyslu silně, ale jen slabě. Připomeňme, že v Banachově prostoru V obvyklá (silná) konvergence „měří“ konvergenci posloupnosti $\{u_n\}$ k u^* při $n \to \infty$ pomocí normy:

$$u_n \to u^* \quad \Longleftrightarrow \quad \|u_n - u^*\|_V \to 0.$$

Při slabé konvergenci konvergenci „testují“ spojité lineární funkcionály:

$$u_n \rightharpoonup u^* \quad \Longleftrightarrow \quad F(u_n - u^*) \to 0 \text{ pro každé } F \in V^*,$$

kde V^* je tzv. duální prostor spojitých lineárních funkcionálů na V.

V prostoru konečné dimenze slabá a silná konvergence splývají, v prostorech nekonečné dimenze je každá silně konvergentní posloupnost i slabě konvergentní, obráceně to neplatí. V prostorech konečné dimenze každá omezená posloupnost obsahuje konvergentní podposloupnost, v prostorech nekonečné dimenze již to neplatí. Protože v aplikacích často potřebujeme z omezené posloupnosti (např. přibližných řešení nějaké úlohy) zaručit existenci konvergující podposloupnosti, slabá konvergence situaci „zachrání“. V reflexivním Banachově prostoru totiž platí: každá omezená posloupnost obsahuje slabě konvergentní podposloupnost.

Vedle této „příjemné“ vlastnosti však slabá konvergence má i některé „nepříjemné“ vlastnosti: v případě složení se spojitou funkcí $F(\xi)$ se slabá konvergence nezachovává:

$$u_n \rightharpoonup u^* \qquad \not\Rightarrow \qquad F(u_n) \to F(u^*), \tag{1.1}$$

také v součinu dvou slabě konvergentních posloupností nelze přejít k limitě:

$$u_n \rightharpoonup u^*\ ,\ v_n \rightharpoonup v^* \qquad \not\Rightarrow \qquad u_n v_n \to u^* v^*. \tag{1.2}$$

Je to způsobeno tím, že ve slabé limitě se nezachovala informace o lokálním chování posloupnosti. Abychom v těchto případech mohli přejít k limitě, musíme zavést nějakou limitu, ve které by informace o lokálním chování slabě konvergujících funkcí u_n byla zachována.

Řešením těchto problémů se budeme zabývat v tomto článku. Nejprve shrneme vlastnosti konvergencí integrovatelných funkcí. Pro řešení problému složené funkce použijeme limitu ve tvaru souboru Youngových měr, pro řešení problému součinu dvou slabě konvergentních posloupností zavedeme tzv. dvojškálovou konvergenci a naznačíme její využití v teorii homogenizace.

2. Lebesgueovy prostory funkcí

Budeme se zabývat integrovatelnými funkcemi, protože mají hlavní význam pro modelování jevů v mechanice kontinua. Podrobnosti najdete např. v [8], [10] a v učebnicích funkcionální analýzy.

2.1. Zavedení Lebesgueových prostorů

V dalším Ω bude omezený otevřený interval v $\mathbb{R}$, nebo v N-rozměrném případě omezená oblast, tj. omezená souvislá otevřená množina v $\mathbb{R}^N$, s „rozumnou“ hranicí $\partial\Omega$. Buď p exponent, $1 \le p < \infty$. Uvažujme měřitelné funkce $u(x)$ (např. funkce po částech spojité), které mají konečný integrál z p-té mocniny přes Ω, tj. $\int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty$. Integrál bereme ve smyslu Lebesgueově, který je zobecněním obvyklého integrálu na „horší“, méně spojité funkce než funkce po částech spojité. Tyto funkce tvoří lineární prostor $\mathscr{L}^p(\Omega)$, protože skalární násobek αu a součet $u + v$ je opět v množině $\mathscr{L}^p(\Omega)$. Funkcionál

$$\|u\|_p = \left[\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}} \tag{2.1}$$

splňuje první dva axiomy normy na $\mathscr{L}^p(\Omega)$, protože platí $\|\alpha u\|_p = |\alpha| \cdot \|u\|_p$ a Minkowského nerovnost dává trojúhelníkovou nerovnost $\|u+v\|_p \le \|u\|_p + \|v\|_p$. Třetí axiom $\|u\|_p = 0 \Rightarrow u = 0$ však splněn není, rovnost $\|u\|_p = 0$ splňují i funkce, které mají ve spočetně mnoha bodech nenulové hodnoty, integrál to „nepozná“. Proto v prostoru $\mathscr{L}^p(\Omega)$ ztotožníme funkce, které se liší jen na množině míry nula, tj. pokud $\|u - v\|_p = [\int_\Omega |u - v|^p \, dx]^{\frac{1}{p}} = 0$. Říkáme, že funkce u, v jsou si rovny „skoro všude“, zkráceně „s.v.“, a považujeme je za totožné. Dostáváme tak Lebesgueův prostor

$$L^p(\Omega) = \mathscr{L}^p(\Omega)|_{\underline{\underline{\text{s.v.}}}} \equiv \{u : \Omega \to \mathbb{R}, \|u\|_p < \infty\}|_{\underline{\underline{\text{s.v.}}}} \tag{2.2}$$

vybavený normou $\|\cdot\|_p$ definovanou (2.1). V prostoru jsou ztotožněny funkce, které se rovnají „skoro všude“, tj. liší se nejvýše na množině míry nula, přesněji prvky prostoru jsou třídy funkcí, které se navzájem liší nejvýše na množině míry nula.

Lebesgueův prostor definujeme i pro exponent $p = \infty$. V tomto případě je normou tzv. esenciální supremum, ve kterém bereme infimum ze všech suprem přes množinu Ω zmenšenou o množinu N míry nula

$$\|u\|_\infty = \inf_{\mathrm{m}(N)=0} \left(\sup_{x \in \Omega - N} |f(x)| \right) \tag{2.3}$$

a (2.2) definuje prostor $L^\infty(\Omega)$ skoro všude omezených měřitelných funkcí na Ω.

Všechny prostory $L^p(\Omega)$ obsahují funkce definované na stejné množině Ω. Pomocí Hölderovy nerovnosti lze pro exponenty $1 < p < q < \infty$ dokázat nerovnosti

$$\|u\|_1 \le \mathrm{m}(\Omega)^{1-\frac{1}{p}} \cdot \|u\|_p \le \mathrm{m}(\Omega)^{1-\frac{1}{q}} \cdot \|u\|_q \le \mathrm{m}(\Omega) \cdot \|u\|_\infty. \tag{2.4}$$

Důsledkem této nerovnosti je skutečnost, že v případě oblasti Ω konečné míry při zvětšování p se prostor $L^p(\Omega)$ „zmenšuje“, tj. pro $1 < p < q < \infty$ platí inkluze

$$L^1(\Omega) \supset L^p(\Omega) \supset L^q(\Omega) \supset L^\infty(\Omega). \tag{2.5}$$

Prvky prostorů $L^p(\Omega)$ s $p < \infty$ obecně nelze násobit. Pomocí Hölderovy nerovnosti však lze odvodit následující tvrzení.

Věta 2.1. *Buď $p, q, r \in \langle 0, \infty \rangle$ splňující $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Potom platí*

$$\|uv\|_r \le \|u\|_p \|v\|_q, \tag{2.6}$$

odkud plyne implikace

$$u \in L^p(\Omega), \quad v \in L^q(\Omega) \quad \Longrightarrow \quad u\,v \in L^r(\Omega).$$

Základní vlastnosti Lebesgueových prostorů lze shrnout ve větě:

Věta 2.2. *Prostory $L^p(\Omega)$ jsou pro všechna $1 \le p \le \infty$ v normě $\|\cdot\|_p$ úplné, tj. Banachovy prostory. Pro $1 \le p < \infty$ jsou separabilní, tj. obsahují spočetnou hustou podmnožinu, pro $p = \infty$ separabilní nejsou.*

2.2. Spojité lineární funkcionály

Podle obecné definice posloupnost $\{u_n\}$ v prostoru V slabě konverguje k u^*, jestliže $F(u_n - u^*) \to 0$ pro každý spojitý lineární funkcionál F na V. Spojité lineární funkcionály na Banachově prostoru V tvoří opět Banachův prostor V^* s normou $\|F\|_* = \sup\{|F(u)|,\ \|u\| \le 1\}$. Konkrétní tvar funkcionálů na Lebesgueových prostorech a jejich vlastnosti jsou shrnuty v následující větě:

Věta 2.3. *Nechť $p \in (1,\infty)$ a $p^* = \frac{p}{p-1}$ exponent sdružený k p, tj. splňující $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. Potom pro každý spojitý lineární funkcionál F na $L^p(\Omega)$ existuje právě jedna funkce $f \in L^{p^*}(\Omega)$ taková, že*

$$F(u) = \int_\Omega f(x)u(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \forall u \in L^p(\Omega). \tag{2.7}$$

Platí i obrácené tvrzení: Pro každou funkci $f \in L^{p^*}(\Omega)$ je F definovaný (2.7) spojitý lineární funkcionál na $L^p(\Omega)$. Existuje proto vzájemně jednoznačné zobrazení, které je izometrické (zachovává normu $\|F\|_* = \|f\|_{p^*}$) a izomorfní (zachovává operace lineárního prostoru sčítání a skalární násobek) mezi funkcionály $(L^p(\Omega))^*$ a funkcemi $L^{p^*}(\Omega)$. Schématicky $(L^p(\Omega))^* \approx L^{p^*}(\Omega)$.

V případě $p = 1$ lze všechny funkcionály F na $L^1(\Omega)$ vyjádřit ve tvaru (2.7), kde reprezentující funkce $f \in L^\infty(\Omega)$.

V případě $p = \infty$ jen některé funkcionály F na $L^\infty(\Omega)$ lze vyjádřit ve tvaru (2.7), kde $f \in L^1(\Omega)$. Existuje však hodně funkcionálů na $L^\infty(\Omega)$, které nelze reprezentovat pomocí funkce $f \in L^1(\Omega)$. Symbolicky lze proto psát:

$$(L^p(\Omega))^* \approx L^{p^*}(\Omega), \qquad (L^1(\Omega))^* \approx L^\infty(\Omega), \qquad (L^\infty(\Omega))^* \underset{\not\approx}{\supsetneq} L^1(\Omega). \tag{2.8}$$

Na duálním prostoru V^* existují spojité lineární funkcionály $\Phi : V^* \to \mathbb{R}$. Při tzv. kanonickém vnoření $\mathscr{I} : V \to V^{**}$ každému prvku $u \in V$ lze přiřadit funkcionál $\Phi : V^* \to \mathbb{R}$ tím, že položíme $\Phi(F) = F(u)$ pro každý $F \in V^*$. Pokud tímto způsobem dostaneme celý V^{**}, tj. $\mathscr{I}(V) = V^{**}$, mluvíme o prostoru reflexivním. V případě Lebesgueových prostorů situaci shrnuje věta:

Věta 2.4. *Pro $p \in (1,\infty)$ jsou prostory $L^p(\Omega)$ reflexivní, zbývající prostory $L^1(\Omega)$ a $L^\infty(\Omega)$ reflexivní nejsou.*

2.3. Konvergence v Lebesgueových prostorech

Na prostorech $L^p(\Omega)$ máme několik druhů konvergence. Pomocí předchozích výsledků konkretizujeme jednotlivé konvergence: Nechť $\{u_n\} \subset L^p(\Omega)$ a $u^* \in L^p(\Omega)$. Řekneme, že posloupnost $\{u_n\}$ v $L^p(\Omega)$ při $n \to \infty$

- konverguje (silně, v normě) k u^* $(1 \le p < \infty)$, zapisujeme $u_n \to u^*$, jestliže

$$\|u_n - u^*\|_p \equiv \left[\int_\Omega |u_n(x) - u^*|^p \,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} \to 0,$$

- konverguje slabě k u^* $(1 \le p < \infty)$, zapisujeme $u_n \rightharpoonup u^*$, jestliže

$$F(u_n - u^*) \equiv \int_\Omega f(x)(u_n(x) - u^*(x))\,\mathrm{d}x \to 0 \qquad \forall f \in L^{p^*}(\Omega),$$

  přičemž pro $p > 1$ je $p^* = \frac{p}{p-1}$ a pro $p = 1$ je $p^* = \infty$,
- konverguje slabě k u^* $(p = \infty)$, zapisujeme $u_n \rightharpoonup u^*$, jestliže

$$F(u_n - u^*) \to 0 \qquad \forall F \in (L^\infty(\Omega))^*,$$

- konverguje slabě-$*$ k u^* $(p = \infty)$, zapisujeme $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u^*$, jestliže

$$F(u_n - u^*) \equiv \int_\Omega f(x)(u_n(x) - u^*(x))\,\mathrm{d}x \to 0\,, \qquad \forall f \in L^1(\Omega).$$

Poznamenejme, že pro $p = \infty$ máme dvě slabé konvergence: „silnější“ slabou a „slabší“ slabou-$*$, která je definovaná stejně jako slabá konvergence pro $p < \infty$.

Pro zkoumání slabé konvergence máme následující užitečné kritérium, které využívá skutečnosti, že hladké funkce jsou husté v každém $L^p(\Omega)$, $p < \infty$:

Věta 2.5. *Buď u_n omezená posloupnost v $L^p(\Omega)$, tj. $\|u_n\|_p \le M$, $u^* \in L^p(\Omega)$, $(1 \le p < \infty)$ a nechť*

$$\int_\Omega (u_n(x) - u^*(x))\varphi(x)\,\mathrm{d}x \to 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2.9}$$

Potom u_n konverguje k u^* slabě v $L^p(\Omega)$. Pokud u_n je omezená v $L^\infty(\Omega)$ a platí (2.9), *potom u_n konverguje k u^* slabě-$*$ v $L^\infty(\Omega)$.*

V aplikacích velmi důležitou vlastností je „kompaktnost“ vzhledem k nějaké konvergenci, kdy omezená posloupnost obsahuje konvergentní podposloupnost:

Věta 2.6. *Buď $\{u_n\}$ omezená posloupnost v $L^p(\Omega)$, $(1 < p < \infty)$. Potom existuje podposloupnost $\{u_{n'}\}$ slabě konvergující k nějakému $u^* \in L^p(\Omega)$.*

V případě $p = \infty$ omezená posloupnost v $L^\infty(\Omega)$ obsahuje slabě-$*$ konvergentní podposloupnost, nemusí však obsahovat slabě konvergentní podposloupnost.

2.4. Podstata problémů

Vedle výše uvedené „dobré“ vlastnosti (možnost z každé omezené posloupnosti vybrat slabě konvergentní podposloupnost) má slabá konvergence i dvě „nepříjemné“ vlastnosti při přechodu k limitě, které jsme uvedli v úvodu (1.1) a (1.2). Čím je to způsobeno? Slabá limita obsahuje málo informací o lokálním chování funkcí u_n. Například posloupnosti

- $u_n(x) = \sin(nx)$,
- $u_n(x) = x(\pi - x)\sin(nx)$,
- $u_n(x) = \frac{1}{n}\sin x$,
- $u_n(x) = \frac{1}{n}\sin(n!x)$,
- $u_n(x) = \cos(nx)$,
- $u_n(x) = e^x \sin(n^2 x)$,
- $u_n(x) = \frac{1}{n^2}$,
- $u_n(x) = 0$

mají všechny slabou limitu $u^*(x) = 0$, lokální chování uvedených posloupností je však značně odlišné. Nutno proto zavést pojem limity, který by obsahoval i informaci o lokálním chování posloupnosti u_n.

3. Funkce složená se slabě konvergentní posloupností

Buď $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá funkce. Při složení funkce $\Phi(u)$ se silně konvergující posloupností $\{u_n\}$ můžeme přejít k limitě:

$$u_n \to u^* \quad \Longrightarrow \quad \Phi(u_n) \to \Phi(u^*),$$

pokud však posloupnost $\{u_n\}$ konverguje jenom slabě k u^*, nemůžeme přejít k limitě, protože neplatí implikace:

$$u_n \rightharpoonup u^* \quad \Longrightarrow \quad \Phi(u_n) \rightharpoonup \Phi(u^*). \tag{3.1}$$

Jako protipříklad uvedeme funkci $\Phi(\xi) = \xi^2$ a posloupnost $u_n(x) = \sin(nx)$, která slabě konverguje k nulové funkci $u^*(x) = 0$, ale

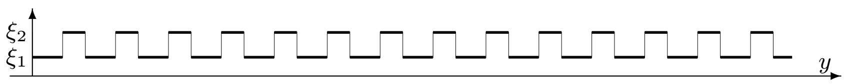
$$\Phi(u_n(x)) = \sin^2(nx) = \tfrac{1}{2}[1 - \cos(2nx)] \rightharpoonup \tfrac{1}{2} \neq 0 = (u^*(x))^2 = \Phi(u^*(x)).$$

3.1. Pro které funkce Φ platí implikace (3.1)?

Věta 3.1. *Implikace* (3.1) *platí pro každou posloupnost* $\{u_n\}$ *právě, když funkce* Φ *je lineární, tj.* $\Phi(\xi) = k\xi + q$, *kde* $k, q \in \mathbb{R}$.

Důkaz implikace „$\Leftarrow$“. Nechť Φ je lineární, tj. $\Phi(\xi) = k\xi + q$. Jestliže $u_n \rightharpoonup u^*$, potom $F(u_n - u^*) \to 0$ pro každý $F \in (L^p(\Omega))^*$. Proto platí

$$F(\Phi(u_n) - \Phi(u^*)) = F((k\,u_n + q) - (k\,u^* + q)) = k\,F(u_n - u^*) \to 0\,.$$



Obr. 2. Funkce typu „cimbuří“.

Důkaz implikace „$\Rightarrow$“. Pro $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}, \lambda \in (0,1)$ definujme funkci $\varphi : \langle 0,1) \to \mathbb{R}$

$$\varphi(y) = \begin{cases} \xi_1 & \text{pro } \; y \in \langle 0, \lambda), \\ \xi_2 & \text{pro } \; y \in \langle \lambda, 1) \end{cases} \tag{3.2}$$

a periodicky ji rozšiřme na celé $\mathbb{R}$. Pro $n = 1, 2, 3, \dots$ tak dostáváme posloupnost funkcí $u_n(x) = \varphi(nx)$ typu „cimbuří“ s periodou $\frac{1}{n}$, viz Obr. 2. Posloupnost u_n konverguje slabě ke konstantní funkci $u^*(x) = \lambda\,\xi_1 + (1 - \lambda)\,\xi_2$.

Na druhé straně $\Phi(u_n)$ konverguje slabě k $\lambda\,\Phi(\xi_1) + (1 - \lambda)\,\Phi(\xi_2)$. Podle implikace (3.1) má platit $\lim \Phi(u_n) = \Phi(u^*)$, tedy

$$\lambda\,\Phi(\xi_1) + (1 - \lambda)\,\Phi(\xi_2) = \Phi(\lambda\,\xi_1 + (1 - \lambda)\,\xi_2).$$

Funkce $\Phi(\xi)$ je proto lineární. $\square$

3.2. Případ nelineární funkce Φ

Podívejme se, kterými funkcemi Φ má smysl se zabývat. Nejprve nutno zaručit, že pro měřitelnou funkci u bude složená funkce opět měřitelná. To je splněno pro spojitou funkci Φ. Budeme proto uvažovat spojitou funkci Φ, i když to není nutné, stačilo by například, aby Φ byla po částech spojitá.

Dále musíme zaručit, aby pro $u \in L^p(\Omega)$ složená funkce $\Phi(u)$ byla v prostoru $L^q(\Omega)$. To zaručí podmínka omezeného růstu s konstantami $c_1, c_0 > 0$:

$$|F(\xi)| \le c_1|\xi|^{p/q} + c_0. \tag{3.3}$$

V případě $p = \infty$ stačí, aby Φ byla spojitá. Pokud $p < \infty$ a $q = \infty$, funkce Φ musí být omezená. Uvedené podmínky zaručí, že pro $u \in L^p(\Omega)$ bude $\Phi(u) \in L^q(\Omega)$. Podrobnosti včetně případu zobrazení $u \mapsto \Phi(\cdot, u)$ lze najít např. v [10]. V dalším se budeme zabývat jen omezenými funkcemi, tj. funkcemi v $L^\infty(\Omega)$.

3.3. Speciální tvar limity slabě konvergentní posloupnosti

Na několika příkladech ukážeme speciální tvar limity slabě konvergentní posloupnosti, ve kterém se informace o chování u_n zachová, aby bylo možné přejít k limitě. Využijeme přitom názorné pojmy z teorie pravděpodobnosti.

Příklad 3.2. Vezměme posloupnost $\{u_n\}$ funkcí $u_n(x) = \varphi(nx)$ typu „cimbuří“ definovanou v (3.2) v důkazu Věty 3.1. V příkladu je vidět, že ve skoro každém bodě x posloupnost $\{u_n(x)\}$ nabývá hodnoty ξ_1 s „pravděpodobností“ λ a hodnoty ξ_2 s „pravděpodobností“ $(1 - \lambda)$. Průměrem $\{u_n(x)\}$ je již zmíněná slabá limita $u^*(x) = \lambda\xi_1 + (1 - \lambda)\xi_2$. Analogicky lze spočítat průměr hodnot $\Phi(u_n(x))$

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(u_n) = \lambda\,\Phi(\xi_1) + (1 - \lambda)\,\Phi(\xi_2).$$

Jako řešení našeho problému se proto nabízí vzít za limitu posloupnosti $\{u_n\}$ funkci, jejíž hodnota v každém x není reálné číslo, ale „náhodná veličina“ $\nu(x)$. V našem příkladě je $\nu(x)$ náhodná veličina nezávislá na x, která nabývá hodnoty ξ_1 a ξ_2 s pravděpodobnostmi λ a $(1 - \lambda)$. Slabá limita $u^*(x)$ je pak střední hodnota $\mathrm{E}(\nu(x))$ náhodné veličiny $\nu(x)$. Hodnoty $\Phi(u_n(x))$ konvergují ke střední hodnotě $\mathrm{E}(\Phi(\nu(x)))$ funkce náhodné veličiny $\Phi(\nu(x))$ nabývající hodnot $\Phi(\xi_1)$ a $\Phi(\xi_2)$ s pravděpodobnostmi λ a $(1 - \lambda)$.

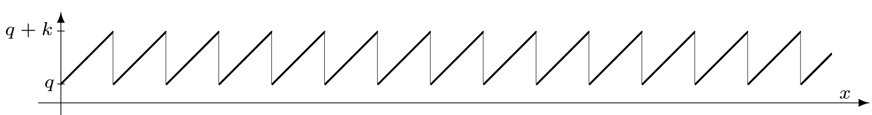
Uvedený příklad lze snadno zobecnit na případ funkcí u_n nabývajících k hodnot:

Příklad 3.3. Nechť periodická funkce $\varphi(y)$ nabývá k hodnot ξ_i s „obsahy“ λ_i v periodě $\langle 0, 1)$, přičemž $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$. Potom za zobecněnou limitu posloupnosti $u_n(x) = \varphi(nx)$ můžeme vzít náhodnou veličinu nabývající hodnot $\xi_1, \ldots, \xi_k$ s pravděpodobnostmi $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Slabou limitou $\{u_n(x)\}$ je střední hodnota $\mathrm{E}(\nu) = \lambda_1\xi_1 + \cdots + \lambda_k\xi_k$ a posloupnost $\{\Phi(u_n)\}$ slabě konverguje ke střední hodnotě $\Phi(\nu)$:

$$\mathrm{E}(\Phi(\nu(x))) = \lambda_1\Phi(\xi_1) + \cdots + \lambda_k\Phi(\xi_k).$$

Zatím jsme brali posloupnost po částech konstantních funkcí $u_n(x) = \varphi(nx)$, které vedly k náhodným veličinám diskrétního typu. Jaká bude zobecněná limita v případě funkce φ, která není po částech konstantní, ale po částech spojitá?

Příklad 3.4. Uvažujme funkci tvaru pily $\varphi(y) = q+ky$ pro $y \in \langle 0, 1)$ periodicky rozšířenou na celé $\mathbb{R}$ a posloupnost funkcí $u_n(x) = \varphi(nx)$, viz Obr. 3.



Obr. 3. Funkce tvaru „pily“.

Funkce u_n konvergují slabě ke konstantní funkci $u^*(x) = q + \frac{k}{2}$. Funkce u^n nabývají všech hodnot v intervalu $\langle k, q+k)$ stejně „často“. Proto zobecněná limita bude náhodná veličina $\nu(x)$ se spojitým rovnoměrným rozdělením opět nezávislá na x. Lze ji určit pomocí hustoty pravděpodobnosti

$$f(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{pro } \ \xi \in \langle q, q+k), \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

Potom slabá limita funkcí $\Phi(u_n)$ je konstantní funkce

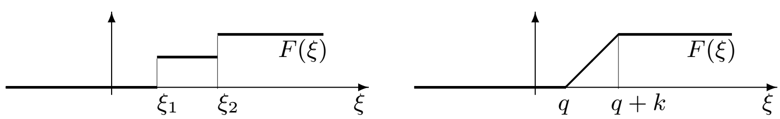
$$\mathrm{E}(\Phi(\nu(x))) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(\xi) f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_q^{q+k} \frac{1}{k}\,\Phi(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Inspirováni příklady dáme nové limitě „matematický kabát“.

3.4. Youngova míra

Za zobecněnou limitu posloupnosti $\{u_n\}$ vezmeme soubor tzv. Youngových pravděpodobnostních měr $\{\nu(x) \mid x \in \Omega\}$ na $\mathbb{R}$. Jako každá míra i Youngova míra je množinová funkce definovaná na systému $\mathscr{S}$ měřitelných podmnožin $\mathbb{R}$. Připomeňme, že systém $\mathscr{S}$ musí obsahovat prázdnou množinu $\emptyset$ a celý prostor $\mathbb{R}$, s každou množinou její doplněk a každé sjednocení spočetně mnoha množin z $\mathscr{S}$. Vlastní míra ν je nezáporná a σ-aditivní: míra sjednocení spočetně mnoha disjunktních podmnožin je rovna součtu měr jednotlivých množin. Navíc jako u pravděpodobnostní míry je míra celého prostoru rovna jedné: $\nu(\mathbb{R}) = 1$.

Youngova míra má charakter náhodné veličiny, v Příkladu 3.2 a 3.3 byla diskrétního typu, proto jsme ji charakterizovali pravděpodobnostní funkcí, v Příkladu 3.4 byla spojitého typu, proto jsme ji charakterizovali hustotou pravděpodobnosti. Oba typy však lze charakterizovat distribuční funkcí $F(\xi)$. Připomeňme, že distribuční funkce $F(\xi)$ je neklesající funkce s limitami $F(-\infty) = 0$ a $F(\infty) = 1$. Distribuční funkce z Příkladu 3.2 a 3.4 jsou na Obr. 4.



Obr. 4. Distribuční funkce F míry „cimbuří“ a distribuční funkce „pily“.

Střední hodnotu náhodné veličiny ν i složení $\Phi(\nu)$ lze pomocí distribuční funkce $F(\xi)$ náhodné veličiny ν vyjádřit ve tvaru Stieltjesova integrálu

$$\mathrm{E}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} \xi\,\mathrm{d}F(\xi) \qquad \text{a} \qquad \mathrm{E}(\Phi(\nu)) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(\xi)\,\mathrm{d}F(\xi).$$

Připomeňme stručně pojem Stieltjesova integrálu. Buď $D = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m\}$, kde $a = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_m = b$, dělení intervalu $I = \langle a, b\rangle$ a body $\{c_1, \dots, c_m\}$ splňující $c_i \in (\xi_{i-1}, \xi_i)$ body tohoto dělení. Potom pro funkce $f, g : I \to \mathbb{R}$ výraz

$$S(f, g, D, c) = \sum_{i=1}^{m} f(c_i)(g(\xi_i) - g(\xi_{i-1}))$$

nazveme integrálním součtem. Pokud při zjemňování dělení $|D| \to 0$ existuje limita součtů $S(f, g, D, c)$ nezávislá na výběru dělení D a bodů c_i, tuto limitu nazveme Riemann-Stieltjesovým integrálem funkce f podle funkce g přes $\langle a, b\rangle$ a zapisujeme

$$\int_a^b f(\xi)\,\mathrm{d}g(\xi).$$

Integrál existuje, pokud funkce f je spojitá a g má konečnou variaci. Pokud funkce g má derivaci g', lze Stieltjesův integrál přepsat na integrál

$$\int_a^b f(\xi)\,\mathrm{d}g(\xi) = \int_a^b f(\xi)\,g'(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Tento Riemann-Stieltjesův integrál lze zobecnit na Lebesgue-Stieltjesův integrál.

Vraťme se ještě k příkladu s posloupností funkcí $u_n(x) = \sin(nx)$.

Příklad 3.5. V případě $u_n(x) = \sin(nx)$ je limitou posloupnosti $\{u_n\}$ soubor Youngových měr (náhodných veličin) $\nu(x) = \nu$ nezávislý na x. Míru ν lze popsat hustotou pravděpodobnosti

$$f(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-\xi^2}} & \text{pro } -1 < \xi < 1,\\ 0 & \text{jinde,} \end{cases}$$

nebo distribuční funkcí

$$F(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \xi \le -1,\\ \frac{1}{\pi}\arcsin(\xi) + \frac{1}{2} & \text{pro } -1 < \xi < 1,\\ 1 & \text{pro } \xi \ge 1. \end{cases}$$

Pro spojitou Φ pak posloupnost $\Phi(\sin(nx))$ slabě konverguje ke konstantní funkci

$$\int_{-1}^{1} \Phi(\xi)\frac{1}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}\,\mathrm{d}\xi = \int_{-1}^{1} \Phi(\xi)\,\mathrm{d}\big(\tfrac{1}{\pi}\arcsin(\xi) + \tfrac{1}{2}\big)\,.$$

Dosud ve všech příkladech vystupovaly funkce u_n „stejnoměrně“ slabě konvergující ke konstantní funkci. V případě, kdy periodické funkce u_n mají „proměnlivou amplitudu“ a případně slabě konvergují k nenulové funkci, například

$$u_n(x) = \varphi(nx)g(x) + h(x),$$

potom limitou $u^*(x)$ je soubor měr $\{\nu(x) \mid x \in \Omega\}$ s parametrem $x \in \Omega$, kdy pro různá x jsou různé i míry $\nu(x)$ s parametrem x, které jsou charakterizované distribučními funkcemi $F(x, \xi)$ s parametrem x definované pro $\xi \in \mathbb{R}$ a $x \in \Omega$.

3.5. Souhrn řešení problému složené funkce

V případě spojité funkce Φ na posloupnosti $\{u_n\}$ omezené v $L^\infty(\Omega)$ a slabě-$*$ konvergující, lze problém (1.1) řešit tím, že za limitu posloupnosti $u_n(x)$ vezmeme *soubor Youngových měr* $\nu(x)$ s parametrem $x \in \Omega$.

Poznamenejme, že v případě, kdy $u_n(x)$ silně konverguje k hodnotě $u^*(x)$, míra $\nu(x)$ je tzv. Diracova míra $\delta_{u^*(x)}$ soustředěná v $u^*(x)$, tj. náhodná veličina $\nu(x)$ nabývá jen jedné hodnoty $u^*(x)$, a tedy není náhodná.

V případě, kdy u_n konvergují jenom slabě-$*$, limita ve tvaru souboru Youngových měr nemusí existovat. Pokud existuje, distribuční funkce $F(x,\xi)$ míry $\nu(x)$ pro limitu posloupnosti $\{u_n\}$ v bodě x je dána limitou

$$F(x,\xi) = \lim_{\Delta\to 0}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\Delta}\mathrm{m}(\{t\in(x-\Delta,x+\Delta)\mid u_n(t)<\xi\})\right).$$

Pro omezenou slabě-$*$ konvergující posloupnost u_n však existuje podposloupnost, která už limitu má. Následující věta je proto velmi důležitá pro aplikace:

Věta 3.6. *Každá omezená posloupnost $\{u_n\}$ v $L^\infty(\Omega)$ obsahuje podposloupnost $\{u_{n'}\}$ a soubor měr $\{\nu(x)\}_{x\in\Omega}$ s distribuční funkcí $F(x,\xi)$ takový, že pro každou spojitou funkci Φ platí*

$\Phi(u_n(x))$ *konverguje v $L^\infty(\Omega)$ slabě-$*$ k funkci* $f(x)=\int_{\mathbb{R}}\Phi(\xi)\,\mathrm{d}(F(x,\xi))$.

Řešení problému složené funkce lze charakterizovat následujícím tvrzením:

Věta 3.7. *Pokud posloupnost $\{u_n\}$ má limitu ve tvaru souboru Youngových měr $\nu(x)$, potom platí:* $\lim_{n\to\infty}\Phi(u_n)=\mathrm{E}(\Phi(\nu))$.

4. Součin slabě konvergentních posloupností

Pro silně konvergující posloupnosti platí implikace:

$$u_n \to u^*\,,\quad v_n\to v^* \quad\Longrightarrow\quad u_n\,v_n \to u^*v^*\,,$$

a tudíž také $\int_\Omega u_n v_n\,\mathrm{d}x \longrightarrow \int_\Omega u^*v^*\,\mathrm{d}x$. Implikace platí také v případě, že jedna z konvergencí je slabá:

$$u_n \to u^*\,,\quad v_n\rightharpoonup v^* \quad\Longrightarrow\quad u_n\,v_n \rightharpoonup u^*v^*\,.$$

V případě, kdy obě konvergence jsou jenom slabé, následující implikace neplatí:

$$u_n \rightharpoonup u^*\,,\quad v_n\rightharpoonup v^* \quad\Longrightarrow\quad u_n\,v_n \rightharpoonup u^*v^*\,. \tag{4.1}$$

Například pro $u_n(x)=\sin(nx)$ a $v_n(x)=\sin(nx)$ obě posloupnosti konvergují slabě k nulové funkci $u_n\rightharpoonup 0$, $v_n\rightharpoonup 0$, ale jejich součin konverguje slabě

$$u_n(x)\,v_n(x)=\sin^2(nx)=\tfrac12\,[1-\cos(2nx)]$$

ke konstantní funkci $\frac12$, která se liší od součinu limit $u_n\,v_n$.

Limita ve tvaru souboru Youngových měr nestačí, viz následující příklad:

Příklad 4.1. Uvažujme posloupnosti $u_n(x)=\sin(nx)$ a $v_n(x)=\sin(nx-\alpha)$. Obě posloupnosti slabě konvergují k nule, jejich součin však slabě konverguje

$$u_n(x)\,v_n(x)=\sin(nx)\,\sin(nx-\alpha)=\tfrac12\,[\cos(\alpha)-\cos(2nx-\alpha)]\rightharpoonup\tfrac12\cos(\alpha).$$

Obě posloupnosti $u_n(x)=\sin(nx)$ a $v_n(x)=\sin(nx-\alpha)$ mají stejnou limitu ve tvaru Youngových měr $\nu(x)$, a přitom součin u_nv_n slabě konverguje ke konstantě $\frac12\cos(\alpha)$, která může nabývat libovolnou hodnotu z intervalu $\langle-\frac12,\frac12\rangle$. Proto limita ve tvaru Youngových měr nedokáže určit limitu součinu. Záleží totiž nejen na lokálním chování obou funkcí u_n a v_n, ale i na jejich vzájemném „sfázování“.

Řešením problému je tzv. dvojškálová limita. Upřesněme si některé pojmy.

4.1. Periodické funkce se zmenšující se periodou

Základní periodou Y bude v případě $N = 1$ interval $\langle 0, \overline{y})$, pro $N = 2$ obdélník $\langle 0, \overline{y}_1) \times \langle 0, \overline{y}_2)$, obecně $Y = \langle 0, \overline{y}_1) \times \cdots \times \langle 0, \overline{y}_N)$, přičemž $\overline{y}_i > 0$.

Základní periodu Y bereme „polouzavřenou", abychom posunutím o celočíselné násobky rozměrů periody $k\,\overline{y} \equiv (k_1\overline{y}_1, \ldots, k_N\overline{y}_N)$, kde $(k_1, \ldots, k_N) \equiv k \in \mathbb{Z}^N$, dostali periody $Y_k = Y + k\,\overline{y} \equiv \{y + k\,\overline{y} \mid y \in Y\}$, které tvoří rozklad prostoru $\mathbb{R}^N$, tzv. „dláždění", tj. buňky Y_k jsou navzájem disjunktní a jejich sjednocení $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}^N} Y_k$ dává celý prostor $\mathbb{R}^N$. Míra (objem) periody Y je $\mathrm{m}(Y) = \overline{y}_1 \cdots \overline{y}_N$.

Pro $\varepsilon > 0$ ε-škálovanou periodu Y označme $Y^\varepsilon = \langle 0, \varepsilon\,\overline{y}_1) \times \cdots \times \langle 0, \varepsilon\,\overline{y}_N)$ a škálovanou periodu posunutou o $\varepsilon k\,\overline{y}$ označme Y_k^ε. Škálované posunuté periody $\{Y_k^\varepsilon \mid k \in \mathbb{Z}^N\}$ tvoří opět rozklad prostoru $\mathbb{R}^N$.

Funkci $a(y)$ definovanou na $\mathbb{R}^N$ nazveme Y-*periodickou*, jestliže je periodická s velikostí periody $\overline{y}_i$ v každé proměnné y_i, tj.

$$a(y_1 + k_1\overline{y_1}, \ldots, y_N + k_N\overline{y}_N) = a(y_1, \ldots, y_N) \quad \forall y \in \mathbb{R}^N,\ \forall k \in \mathbb{Z}^N. \tag{4.2}$$

Pokud funkce a má další proměnné, např. x, budeme říkat, že funkce $a(x, y)$ je Y-periodická v y.

Budeme se zabývat posloupností funkcí se zmenšující se periodou. Buď Ω omezená oblast s „rozumnou" hranicí. Pro Y-periodickou funkci $a(y)$ a $\varepsilon > 0$ vztah

$$u(x) = a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \equiv u\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \ldots, \frac{x_N}{\varepsilon}\right), \quad x \in \Omega \tag{4.3}$$

definuje Y^ε-periodickou funkci na Ω. Posloupnost malých čísel $\mathcal{E} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots\}$ klesajících k nule budeme nazývat škálou. Pro škálu $\mathcal{E}$ potom vztah

$$u_n(x) = a\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right), \quad x \in \Omega, \tag{4.4}$$

definuje posloupnost funkcí $\{u_n\}$ se zmenšující se periodou.

4.2. Klasická definice dvojškálové konvergence

Ve dvojškálové konvergenci limita posloupnosti $u_n(x)$ jedné N-tice proměnných x má za limitu funkci $u_0(x, y)$ dvou N-tic proměnných, kde $x \in \Omega$ a $y \in Y$, přičemž první popisuje „globální" a druhá proměnná lokální chování funkcí u_n.

Definice 4.2. Buď $\mathcal{E}$ škála a $\{u_n\}$ omezená posloupnost funkcí v $L^p(\Omega)$. Potom *$\{u_n\}$ konverguje (slabě) dvojškálově k limitě $u_0(x, y)$ v $L^p(\Omega)$ vzhledem ke škále $\mathcal{E}$*, jestliže pro každou funkci $\varphi(x, y)$ spojitou na $\overline{\Omega} \times Y$ a Y-periodickou v y platí

$$\int_\Omega u_n(x)\,\varphi\!\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right)\,\mathrm{d}x \longrightarrow \frac{1}{\mathrm{m}(Y)}\int_\Omega \left(\int_Y u_0(x, y)\,\varphi(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\,. \tag{4.5}$$

Poznámka 4.3. Definice „kontroluje" konvergenci funkcí u_n pomocí testovací funkce φ, která je Y-periodická v proměnné y, přičemž pro každé u_n ji ε_n-„škáluje". Bere přitom hodnoty φ v bodech $(x, x/\varepsilon_n)$, které tvoří množinu míry nula v $\Omega \times Y$. Proto testovací funkce φ nemůže být z $L^p(\Omega \times Y)$, musí být alespoň „trochu" spojitá. Na druhou stranu dvojškálová limita u_0 je jenom z $L^p(\Omega \times Y)$, a nemůžeme ji proto použít jako testovací funkci.

Vedle této (slabé) dvojškálové konvergence je nutno zavést silnou dvojškálovou konvergenci, která předpokládá konvergenci (4.5) a vyžaduje navíc rovnost norem

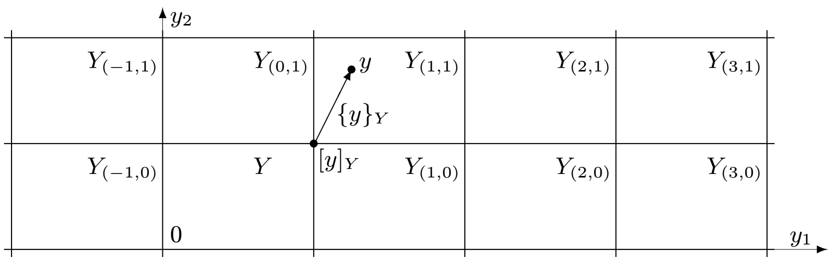
$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{p;\Omega} \cdot \mathrm{m}(Y) = \|u_0\|_{p;\Omega\times Y}. \tag{4.6}$$

Uveďme proto alternativní definici dvojškálové konvergence založenou na rozvinutí. Tato ekvivalentní definice přirozeně definuje slabou i silnou dvojškálovou konvergenci, je názornější a zjednodušuje důkazy tvrzení.

4.3. Rozvinutí funkce

Každé číslo $y \in \mathbb{R}$ lze rozdělit na celou část $[y]$ a necelou část $\{y\}$ následujícím vztahem: $y = [y] + \{y\}$, kde $[y] \in \mathbb{Z}$ a $0 \le \{y\} < 1$.

Tento pojem rozšíříme na $\mathbb{R}^N$ vzhledem k periodě Y a rozklad $\mathbb{R}^N$ na disjunktní posunuté periody Y_k, tj. $\mathbb{R}^N = \bigcup\{Y_k \mid k \in \mathbb{Z}^N\}$. Každý bod $y \in \mathbb{R}^N$ rozložíme $y = [y]_Y + \{y\}_Y$, kde $[y]_Y$ je posunutí $k\,\overline{y}$ periody Y_k, ve které se bod y nachází, a $\{y\}_Y$ je relativní poloha bodu y vzhledem k periodě Y_k, tj. $\{y\}_Y = y - [y]_Y \in Y$.

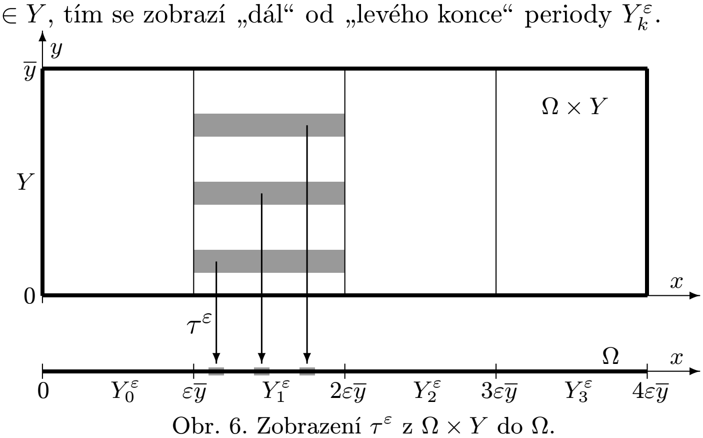


Obr. 5. Rozklad bodu y na „celou“ část $[y]_Y$ (bod) a „necelou“ část $\{y\}_Y$ (vektor).

Definujme zobrazení $\tau^\varepsilon(x,y) = \varepsilon\left[\frac{x}{\varepsilon}\right] + \varepsilon y$, které každému bodu $(x,y) \in \Omega \times Y$ přiřadí bod $\tau^\varepsilon(x,y)$ v množině Ω

$$\tau^\varepsilon(x,y) = \varepsilon\left[\frac{x}{\varepsilon}\right]_Y + \varepsilon y. \tag{4.7}$$

V tomto zobrazení celá „úsečka“ $\{(x,y) \mid x \in \varepsilon Y_k\}$ se zobrazí do jednoho bodu v periodě Y_k^ε, viz Obr. 6 pro jednorozměrný případ. Na obrázku je vidět, že čím „větší“ $y \in Y$, tím se zobrazí „dál“ od „levého konce“ periody Y_k^ε.



Obr. 6. Zobrazení τ^ε z $\Omega \times Y$ do Ω.

Zobrazení umožní funkci u proměnné x přiřadit funkci $\widehat{u}^\varepsilon$ proměnných (x, y):

$$\widehat{u}^\varepsilon(x,y) = u(\tau^\varepsilon(x,y)) \equiv u\left(\varepsilon\left[\frac{x}{\varepsilon}\right]_Y + \varepsilon y\right). \tag{4.8}$$

Poznámka 4.4. Uvedené rozvinutí lze použít bez problémů pro oblasti Ω, pro které hranice Ω probíhá jen po hranicích Y_k^ε, tedy Ω obsahuje pouze „celé“ periody Y_k^ε. V případě, kdy Ω obsahuje „necelé“ periody, v těchto hraničních necelých periodách funkce $\widehat{u}^\varepsilon$ není všude definovaná. Tento problém někteří autoři řeší tím, že v těchto necelých periodách dávají nulu, lepším řešením je identické zobrazení, tj. v necelých periodách položíme jednoduše $\widehat{u}^\varepsilon(x,y) = u(x)$. Potom platí velmi důležitá rovnost

$$\int_{\Omega\times Y} \widehat{u}^\varepsilon(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \mathrm{m}(Y)\int_\Omega u(x)\,\mathrm{d}x, \tag{4.9}$$

tj. „rozvinutí“ zachovává (až na násobek $\mathrm{m}(Y)$) integrál a tím i normu.

4.4. Definice dvojškálové konvergence založená na rozvinutí

Definice 4.5. Buď $\{u_n\}$ posloupnost v $L^p(\Omega)$ a $\mathcal{E}$ škála. Řekneme, že

- posloupnost $u_n(x)$ slabě dvojškálově konverguje k limitě $u_0(x,y)$, pokud
$$\widehat{u}_n^{\varepsilon_n}(x,y) \text{ slabě konvergují k } u_0(x,y) \text{ v } L^p(\Omega\times Y),$$
- posloupnost $u_n(x)$ silně dvojškálově konverguje k limitě $u_0(x,y)$, pokud
$$\widehat{u}_n^{\varepsilon_n}(x,y) \text{ (silně) konvergují k } u_0(x,y) \text{ v } L^p(\Omega\times Y).$$

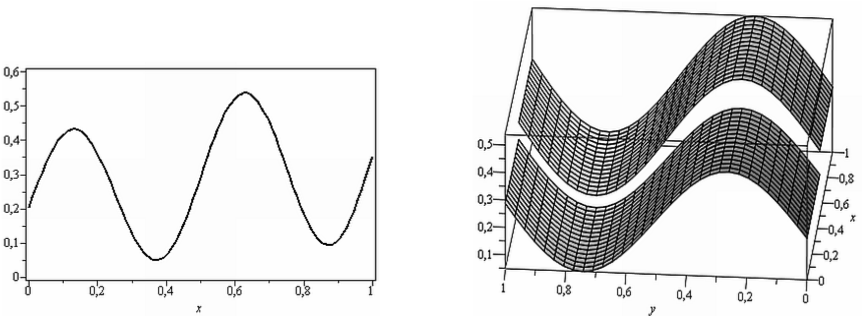
V případě $p = \infty$ bereme slabou-$*$ konvergenci.

Příklad 4.6. Buďte f a g skoro všude omezené měřitelné funkce v omezené oblasti Ω, viz Příklad 3.9 v [11]. Potom $u_n(x) = f(x)\sin(nx) + g(x)$ definuje posloupnost funkcí omezenou v každém $L^p(\Omega)$, která

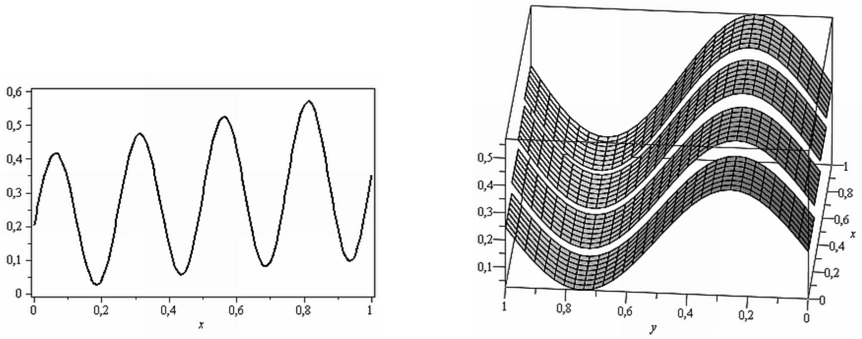
- konverguje slabě k $u^*(x) = g(x)$ v každém $L^p(\Omega)$, $p \in (1,\infty)$ a slabě-$*$ v $L^\infty(\Omega)$.
- konverguje dvojškálově slabě i silně vzhledem ke škále $\{\frac{1}{n}\}$ k limitě $u_0(x,y) = f(x)\sin(y) + g(x)$ pro $p \in (1,\infty\rangle$ — lokální chování je zachyceno v proměnné y.
- slabou limitu lze spočítat z dvojškálové limity
$$u^*(x) = \tfrac{1}{\mathrm{m}(Y)}\textstyle\int_Y u_0(x,y)\,\mathrm{d}y\,.$$
- Pokud zmenšování periody Y_{ε_n} funkcí u_n není „v souladu“ (v rezonanci) se škálou $\mathcal{E}$, například vzhledem ke škále $\{\frac{1}{n\sqrt{2}}\}$, potom u_n konvergují jenom dvojškálově slabě k $u_0(x,y) = g(x)$. V tomto případě limita $u_0(x,y)$ nezávisí na y a lokální chování u_n se nezachovalo ani ve dvojškálové limitě.

Pro ilustraci definice uveďme grafy rozvinutí konkrétní funkce.

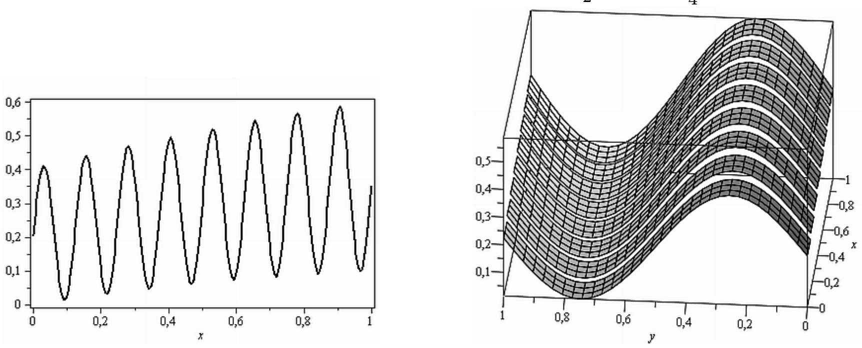
Příklad 4.7. Uvažujme funkce $u_n(x) = f(x)\,\varphi(\frac{x}{\varepsilon}) + g(x)$, kde $f(x) = \frac{1}{5} + \frac{x}{20}$, $\varphi(y) = \sin(2\pi y)$, $g(x) = \frac{1}{5} + \frac{x}{5} - \frac{x^2}{20}$. Ukážeme, jak rozvinutí „transformuje“ funkce u_n pro první tři ε_n: $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$, $\varepsilon_2 = \frac{1}{4}$ a $\varepsilon_3 = \frac{1}{8}$. Na Obr. 7–10 je vidět, jak rozvinuté funkce $\widehat{u}_n^{\varepsilon_n}$ konvergují k dvojškálové limitě $u_0(x,y)$.



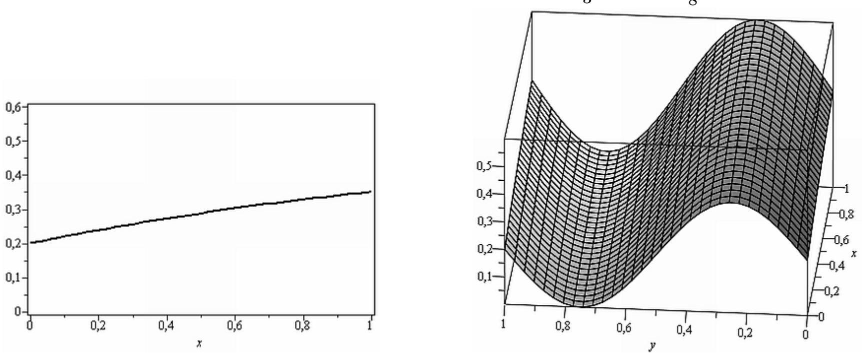
Obr. 7. Funkce u_1 a rozvinutá funkce $\widehat{u}_1^{\varepsilon_1}$ s $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$.



Obr. 8. Funkce u_2 a rozvinutá funkce $\widehat{u}_2^{\varepsilon_2}$ s $\varepsilon_2 = \frac{1}{4}$.



Obr. 9. Funkce u_3 a rozvinutá funkce $\widehat{u}_3^{\varepsilon_3}$ s $\varepsilon_3 = \frac{1}{8}$.



Obr. 10. Slabá limita u^* a dvojškálová limita u_0, která je limitou $\widehat{u}_n^{\varepsilon_n}$.

4.5. Výsledky o dvojškálové konvergenci důležité pro aplikace

Věta 4.8. (KOMPAKTNOST) *Pro každou posloupnost $\{u_n\}$ omezenou v $L^p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$ a škálu $\mathcal{E} = \{\varepsilon_n\}$ existuje funkce $u_0 \in L^p(\Omega \times Y)$ a podposloupnost $\{u_{n'}\}$ konvergující slabě dvojškálově v $L^p(\Omega)$ k limitě u_0 vzhledem k „podškále“ $\mathcal{E}' = \{\varepsilon_{n'}\} \subset \mathcal{E}$.*

Důkaz tvrzení plyne ze skutečnosti, že díky (4.9) rozvinutím funkcí u_n dostaneme opět posloupnost $\widehat{u}_n^{\varepsilon_n}$ stejně omezenou v $L^p(\Omega \times Y)$ a klasický výsledek o kompaktnosti množin v Lebesgueově prostoru $L^p(\Omega \times Y)$ dává tvrzení.

Podle Věty 2.1 součin posloupnosti u_n omezené v $L^p(\Omega)$ a posloupnosti v_n omezené v $L^q(\Omega)$ tvoří posloupnost $u_n v_n$ omezenou v $L^r(\Omega)$, kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Můžeme proto formulovat větu o limitním přechodu.

Věta 4.9. *Nechť pro exponenty $p, q, r \in (1, \infty\rangle$ platí $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Jestliže*

- *u_n silně dvojškálově konverguje k u_0 v $L^p(\Omega)$,*
- *v_n slabě dvojškálově konverguje k v_0 v $L^q(\Omega)$,*

potom platí

- *$u_n v_n$ slabě dvojškálově konverguje k $u_0 v_0$ v $L^r(\Omega)$ a*
- *$u_n v_n$ slabě v $L^r(\Omega)$ konverguje k $\mathrm{m}(Y)^{-1} \int_Y u_0(\cdot, y)\, v_0(\cdot, y)\, \mathrm{d}y$, přičemž v případě $r = \infty$ jde o slabou-$*$ konvergenci v $L^\infty(\Omega)$.*

Důkaz věty plyne z vlastností silné a slabé konvergence v prostorech $L^p(\Omega \times Y)$. Označme $U_n = \widehat{u}_n^{\varepsilon_n}$ a $V_n = \widehat{v}_n^{\varepsilon_n}$. Podle předpokladů věty $U_n \to u_0$ a $V_n \rightharpoonup v_0$. Buď $f \in L^r(\Omega \times Y)$ reprezentující funkcionál F na $L^r(\Omega \times Y)$. Ve výrazu

$$\int_{\Omega \times Y} f(U_n V_n - u_0 v_0)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_{\Omega \times Y} f(U_n - u_0) V_n\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y + \int_{\Omega \times Y} f u_0 (V_n - v_0)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

první člen na pravé straně konverguje k nule, protože $\|U_n - u_0\|_p \to 0$ a $\|V_n\|_q$ je omezená. Druhý člen jde také k nule, protože $f u_0$ reprezentuje funkcionál na slabě konvergentní posloupnosti $(V_n - v_0) \rightharpoonup 0$ v $L^q(\Omega \times Y)$.

5. Využití v teorii homogenizace

Vraťme se nyní k problému homogenizace. Uvažujme lineární eliptickou parciální diferenciální rovnici druhého řádu

$$-\operatorname{div}(a(x)\, \nabla u) \equiv -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = f\,, \qquad x \in \Omega, \tag{5.1}$$

doplněnou vhodnou okrajovou podmínkou na hranici $\Gamma = \partial\Omega$, například $u|_\Gamma = 0$. Pro funkci $a \in L^\infty(\Omega)$ splňující $a(x) \geq \alpha > 0$ a $f \in L^2(\Omega)$ uvedená okrajová úloha má právě jedno (tzv. slabé) řešení, viz [10].

Rovnice modeluje ustálené vedení tepla v desce tvaru Ω izolované na povrchu $(N = 2)$ nebo v tělese $(N = 3)$ zabírajícím objem Ω. Neznámou $u(x)$ je teplota, koeficient $a(x)$ popisuje vlastnosti materiálu a $f(x)$ je hustota výkonu vnitřních zdrojů. Okrajová podmínka $u = 0$ říká, že na okraji Γ je udržovaná nulová teplota. Rovnice popisuje i difúzi, kroucení tyče, viz např. [9].

5.1. Formulace úlohy homogenizace

Při homogenizaci zkoumáme posloupnost okrajových úloh pro rovnice s koeficienty se zmenšující se periodou. Buď $a(y)$ navíc Y-periodická funkce. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ máme Y^ε-periodický koeficient $a^\varepsilon(x) = a(\frac{x}{\varepsilon})$ a tím i rovnici

$$-\operatorname{div}(a^\varepsilon(x)\,\nabla u^\varepsilon) \equiv -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^\varepsilon(x)\,\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i}\right) = f\,, \qquad x \in \Omega, \tag{5.2}$$

která s okrajovou podmínkou $u^\varepsilon|_\Gamma = 0$ tvoří okrajovou úlohu pro řešení u^ε.

V tzv. slabé formulaci na Sobolevově prostoru $H_0^1(\Omega)$ (se skalárním součinem $(u, v) = \int_\Omega (\nabla u\,\nabla v)\,\mathrm{d}x$ je to Hilbertův prostor) úloha má tvar:

Najdi funkci $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ *splňující integrální identitu*

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^N a^\varepsilon(x)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f v\,\mathrm{d}x\,, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{5.3}$$

Teorie homogenizace uvažuje škálu $\mathcal{E} = \{\varepsilon_n\}$ – posloupnost zmenšujících se $\varepsilon_n \to 0$, čímž dostáváme posloupnost koeficientů $\{a^{\varepsilon_n}\}$, posloupnost okrajových úloh a následně posloupnost řešení $\{u^{\varepsilon_n}\}$.

Ve slabé formulaci (5.3) se vyskytuje součin dvou posloupností: posloupnosti koeficientů $\{a^{\varepsilon_n}\}$ a posloupnosti derivací $\{\frac{\partial u^{\varepsilon_n}}{\partial x_i}\}$ a potřebujeme přejít k limitě.

5.2. Principiální krok

Principiální krok umožní dvojškálová konvergence. Protože koeficient a je v $L^\infty(\Omega)$, koeficienty $a^{\varepsilon_n}(x) = a(\frac{x}{\varepsilon_n})$ konvergují silně dvojškálově v $L^\infty(\Omega)$ k dvojškálové limitě $a_0(x, y) = a(y) \in L^\infty(\Omega)$.

Díky Laxově-Milgramově lemmatu řešení u^ε lze odhadnout v normě prostoru $H_0^1(\Omega)$ konstantou nezávislou na ε. Podle Věty o kompaktním vnoření z teorie Sobolevových prostorů, viz např. [10], existuje funkce $u^* \in H_0^1(\Omega)$ a podposloupnost $\{u^n\}$ (kterou budeme označovat stejně) konvergující k limitě u^* slabě v $H_0^1(\Omega)$ a silně v $L^2(\Omega)$. Navíc z omezenosti posloupnosti $\{u^{\varepsilon_n}\}$ v normě $H_0^1(\Omega)$ plyne omezenost derivací $w_i^{\varepsilon_n} \equiv \frac{\partial u^{\varepsilon_n}}{\partial x_i}$ v normě $L^2(\Omega)$ se stejnou konstantou.

Podle Věty 4.8 existují funkce $w_i^0 \in L^2(\Omega \times Y)$ a podposloupnost taková, že

$$w_i^{\varepsilon_n} \text{ konvergují slabě dvojškálově v } L^2(\Omega) \text{ k } w_i^0. \tag{5.4}$$

Lze dokázat, že existuje taková funkce $u_1 \in L^p(\Omega \times Y)$, která je Y-periodická v y a její derivace $\frac{\partial u_1}{\partial y_i}(x, y)$ jsou v $L^2(\Omega \times Y)$, že limity w_i^0 lze vyjádřit ve tvaru

$$w_i^0(x, y) = \frac{\partial u^*}{\partial x_i}(x, y) + \frac{\partial u_0}{\partial y_i}(x, y)\,. \tag{5.5}$$

Funkce a^{ε_n} a $w_i^{\varepsilon_n}$ tedy splňují předpoklady Věty 4.9, proto součin

$$a^{\varepsilon_n}(x)\,w_i^{\varepsilon_n}(x) \text{ konverguje slabě dvojškálově v } L^2(\Omega) \text{ k } a(y)w_i(x, y). \tag{5.6}$$

V integrální identitě (5.3) nyní můžeme přijít k limitě

$$\int_{\Omega\times Y} \sum_{i=1}^N a\left[\frac{\partial u^*}{\partial x_i} + \frac{\partial u_1}{\partial y_i}\right]\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\Omega\times Y} f v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{5.7}$$

Z této integrální identity volbou vhodných testovacích funkcí lze odvodit rovnici pro homogenizované řešení u^*, vzorce pro homogenizované koeficienty a dokázat, že nejen podposloupnost, ale celá posloupnost $\{u^{\varepsilon_n}\}$ konverguje k homogenizovanému řešení u^*, celý důkaz lze najít např. v [5].

6. Závěr

Článek sa zabýval řešením problémů (1.1) a (1.2) přechodu k limitě se slabě konvergentní posloupností.

V případě složení posloupnosti u_n se spojitou funkcí Φ limita ve tvaru souboru Youngových měr $u^*(x) = \nu(x)$ umožňuje určit limitu $\Phi(u_n)$, viz Věta 3.7. Ne každá slabě konvergující posloupnost má limitu v tomto tvaru. Věta 3.6 navíc dává jistou kompaktnost, tj. existuje podposloupnost, která má limitu ve tvaru souboru Youngových měr.

V případě přechodu k limitě v součinu dvou slabě konvergentních posloupností pomohla dvojškálová konvergence. Pomocí Věty 4.9 lze přejít k limitě pokud se nám podaří vhodnou volbou škály $\mathcal{E} = \{\varepsilon\}$ dosáhnout „souladu“ s jednou posloupností, např. u_n, která potom bude vzhledem ke škále $\mathcal{E}$ konvergovat silně dvojškálově. Pro druhou posloupnost v_n stačí dokázat její omezenost, díky kompaktnosti, viz Věta 4.8, pak už konverguje vybraná podposloupnost dvojškálově slabě.

Uvedené výsledky umožňují přejít k limitě ve slabé formulaci a řešit tak problém homogenizace v případě periodických koeficientů.

Problém přechodu k limitě v součinu dvou slabě konvergentních posloupností zůstává otevřený v případě, pokud se nám nepodaří najít škálu, ve které alespoň jedna z posloupností konverguje silně dvojškálově.

Na závěr uveďme, že pro případ homogenizace rovnic s neperiodickými (například kvaziperiodickými) koeficienty G. Nguetseng nahradil periodičnost koeficientů existencí tzv. homogenizační algebry a dvojškálovou konvergenci nahradil novou, tzv. Σ-konvergencí, viz [13].

Reference

[1] G. Allaire: *Homogenization and two-scale convergence*, SIAM J. Math. Anal. **23** (1992), 1482–1518.

[2] I. Babuška: *Homogenization approach in engineering*, in: Computing Methods in Applied Sciences and Engineering, Lecture Notes in Econ. and Math. Systems **134**, Springer, Berlin 1976, pp. 137-153.

[3] N. Bakhvalov, G. Panasenko: *Homogenization: Averaging Processes in Periodic Media*, Mathematical Problems in the Mechanics of Composite Materials, Springer 1989.

[4] A. Bensoussan, J. L. Lions, G. Papanicolau: *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North Holland, 1978.

[5] D. Cioranescu, P. Donato: *Introduction to Homogenization*, Oxford Univ. Press, 2000.

[6] J. Franců: *Homogenizace — matematická metoda výpočtu materiálů s periodickou strukturou*, Stavebnícky časopis **31** (1983), 789–814.

[7] J. Franců: *Homogenizace*, sborník 6. seminář z parciálních diferenciálních rovnic – Manětín 1981, JČSMF a KMA VŠSE, Plzeň 1982, 21–63.

[8] J. Franců: *Funkcionální analýza I*, skripta FSI VUT v Brně, Akad. nakl. CERM, Brno 2009.

[9] J. Franců: *Parciální diferenciální rovnice*, skripta FSI VUT v Brně, Akad. nakl. CERM, Brno 2011.

[10] J. Franců: *Moderní metody řešení diferenciálních rovnic*, skripta FSI VUT v Brně, Akad. nakl. CERM, Brno 2006.

[11] J. Franců: *Od kompozitních materiálů ke slabé konvergenci*, Kvaternion 2/2012, 113–124.

[12] J. Franců: *Slabá a dvouškálová konvergence*, Sborník semináře: Matematika na vysokých školách, Herbertov 3.–5.9. 2001, 65–68.

[13] G. Nguetseng: *Homogenization structures and applications*, Z. Anal. Anwen. Part I – **22** (2003), 73–107, Part II – **23** (2004), 482–508.

[14] V. Šverák: *Nelineární rovnice a slabá konvergence*, sborník 14. seminář z parciálních diferenciálních rovnic – Hřensko 1989, JČSMF a KMA VŠSE Plzeň 1990, 103–146.

Jan Franců, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: `francu@fme.vutbr.cz`