DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE NECELÉHO ŘÁDU

JIŘÍ KARÁSEK

Abstrakt. Přehledový článek prezentuje základní informace o diferenciálních rovnicích neceléhо řádu. Zatímco modelování mnohých jevů studovaných v aplikacích pomocí klasických diferenciálních rovnic je všeobecně známé a hojně rozšířené, v některých situacích neposkytuje dostatečně uspokojivé výsledky, a je proto třeba uchýlit se k obecnějšímu přístupu – k diferenciálním rovnicím neceléhо řádu, které popisují studované jevy lépe. Cílem tohoto článku je seznámit čtenáře s fundamentálními pojmy a výsledky této teorie. Článek se omezuje pouze na matematický aparát teorie, aniž by uváděl motivaci a interpretaci výsledků v konkrétních aplikacích.

1. Riemannův-Liouvilleův integrál a derivace neceléhо řádu

Definice 1.1. Nechť funkce f je integrovatelná (např. riemannovsky) na intervalu $\langle a,t\rangle$ pro libovolné $t\in I$, kde $I=\langle a,b\rangle$, $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ nebo $I=\langle a,\infty)$, $a\in\mathbb{R}$. Nechť $\alpha\in\mathbb{R}$. Definujeme $J^{\alpha}_{a+}(f)$ takto:

(i) Nechť $\alpha\in\mathbb{R}^+$. Pak

$$J^{\alpha}_{a+}(f)(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

(Zde Γ značí funkci gama, [7], str 521.)

(ii) Nechť $\alpha\in\mathbb{Z}^-_0$, f má na I nebo jeho části $(-\alpha)$-tou derivaci $f^{(-\alpha)}$. Pak

$$J^{\alpha}_{a+}(f)=f^{(-\alpha)}.$$

(iii) Nechť $\alpha\in\mathbb{R}^- -\mathbb{Z}$, $n_\alpha=-\lfloor\alpha\rfloor$, $J^{\alpha+n_\alpha}_{a+}(f)$ má na I nebo jeho části n_α-tou derivaci $\big(J^{\alpha+n_\alpha}_{a+}(f)\big)^{(n_\alpha)}$. Pak

$$J^{\alpha}_{a+}(f)=\big(J^{\alpha+n_\alpha}_{a+}(f)\big)^{(n_\alpha)}\quad\left(=\frac{1}{\Gamma(\alpha+n_\alpha)}\cdot\Big(\int\limits_a^t\frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha-n_\alpha}}\,\mathrm{d}\tau\Big)^{(n_\alpha)}\right).$$

($\lfloor x\rfloor$ značí celou část x, tj. největší celé číslo menší nebo rovné x.)

$J^{\alpha}_{a+}(f)$ se nazývá *levostranný Riemannův-Liouvilleův integrál funkce f řádu α.*

2010 *MSC.* Primární 34K06, 34K25.

Klíčová slova. Riemann-Liouvilleův integrál a derivace neceléhо řádu, Caputova derivace neceléhо řádu, Mittag-Lefflerova funkce, Wrightova funkce, diferenciální rovnice neceléhо řádu.

Práce byla podporována projektem A-Math-Net – Síť pro transfer znalostí v aplikované matematice (CZ.1.07/2.4.00/17.0100).

Definice 1.2. Nechť jsou splněny předpoklady 1.1 s tím, že $\beta = -\alpha \in \mathbb{R}_0^+$. Definujeme

$$D_{a+}^{\beta}(f) = J_{a+}^{\alpha}(f).$$

$D_{a+}^{\beta}(f)$ se nazývá *levostranná Riemannova-Liouvilleova derivace funkce f řádu β.*

Příklad 1.3. (i) Nechť $f(t) = 1$, $I = \langle a, \infty)$. Pak

$$J_{a+}^{\alpha}(f)(t) = \begin{cases} \frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} & \text{pro } \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}^- \\ 0 & \text{pro } \alpha \in \mathbb{Z}^- \end{cases},$$

$$D_{a+}^{\beta}(f)(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\beta)(t-a)^{\beta}} & \text{pro } \beta \in \mathbb{R}_0^+ - \mathbb{N} \\ 0 & \text{pro } \beta \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

(ii) Nechť $f(t) = (t-a)^s$, $s \in \mathbb{R}_0^+$, $I = \langle a, \infty)$. Pak

$$J_{a+}^{\alpha}(f)(t) = \begin{cases} \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+1)}(t-a)^{\alpha+s} & \text{pro } \alpha + s \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}^- \\ 0 & \text{pro } \alpha + s \in \mathbb{Z}^- \end{cases},$$

$$D_{a+}^{\beta}(f)(t) = \begin{cases} \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s-\beta+1)(t-a)^{\beta-s}} & \text{pro } s - \beta \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}^- \\ 0 & \text{pro } s - \beta \in \mathbb{Z}^- \end{cases}.$$

Poznámka 1.4. Za obdobných předpokladů se definuje na intervalu $I = \langle a, b \rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ nebo $I = (-\infty, b\rangle$, $b \in \mathbb{R}$, funkce $J_{b-}^{\alpha}(f)$:

(i) $J_{b-}^{\alpha}(f)(t) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_t^b (\tau - t)^{\alpha-1} f(\tau)\, \mathrm{d}\tau \qquad \text{pro } \alpha \in \mathbb{R}^+,$

(ii) $J_{b-}^{\alpha}(f) = (-1)^{\alpha} f^{(-\alpha)} \qquad \text{pro } \alpha \in \mathbb{Z}_0^-,$

(iii) $J_{b-}^{\alpha}(f) = (-1)^{n_\alpha} \big(J_{b-}^{\alpha+n_\alpha}(f)\big)^{(n_\alpha)} \qquad \text{pro } \alpha \in \mathbb{R}^- - \mathbb{Z},$

$D_{b-}^{\beta}(f) = J_{b-}^{\alpha}(f) \qquad \text{pro } \beta = -\alpha \in \mathbb{R}_0^+.$

$J_{b-}^{\alpha}(f)$ se pak nazývá *pravostranný Riemannův-Liouvilleův integrál funkce f řádu α, $D_{b-}^{\beta}(f)$ pravostranná Riemannova-Liouvilleova derivace funkce f řádu β.* V případě, že $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, resp. $\beta \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{N}$ hovoříme v obou situacích o *Riemannově-Liouvilleově integrálu,* resp. *derivaci neceléh řádu.*

2. Caputova derivace neceléh řádu

Definice 2.1. Za předpokladů v 1.2 definujeme pro $\beta \in \mathbb{R}_0^+$

$${}^{C}D_{a+}^{\beta}(f) = D_{a+}^{\beta}(g),$$

kde $g(t) = f(t) - \displaystyle\sum_{k=0}^{\lceil \beta \rceil - 1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k,$

přičemž funkce f má v a derivace až do řádu $\lceil \beta \rceil - 1$. (Zde $\lceil x \rceil$ značí nejmenší celé číslo větší nebo rovné x.) ${}^{C}D_{a+}^{\beta}(f)$ se nazývá *levostranná Caputova derivace funkce f řádu β.*

Příklad 2.2. (i) Nechť $f(t) = 1$, $I = \langle a, \infty)$, $\beta \in \mathbb{R}^+$. Pak ${}^{C}D_{a+}^{\beta}(f)(t) = 0$.

(ii) Nechť $f(t) = (t-a)^s$, $s \in \mathbb{R}^+$, $I = \langle a, \infty)$, $\beta \in \mathbb{R}^+$. Pak

$$ {}^C D_{a+}^{\beta}(f)(t) = \begin{cases} \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s-\beta+1)}(t-a)^{s-\beta} & \text{pro } s - \lceil \beta \rceil + 1 \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{pro } s - \lceil \beta \rceil + 1 \in \mathbb{Z}_0^- \end{cases}, $$

zatímco pro $s - \lceil \beta \rceil + 1 \in \mathbb{R}^- - \mathbb{Z}$ neexistuje.

Poznámka 2.3. Obdobně se definuje *pravostranná Caputova derivace* ${}^C D_{b-}^{\beta}(f)$ *funkce* f *řádu* β.

3. Některé speciální funkce

Definice 3.1. Nechť $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\beta \in \mathbb{R}$. *Mittag-Lefflerova funkce* $E_{\alpha,\beta}$ *se dvěma parametry* je definována řadou

$$ E_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \qquad \text{na } \mathbb{R}. $$

(Pokud některá hodnota $\alpha k + \beta$ je rovna celému nekladnému číslu, příslušný člen se vynechá.)

Poznámka 3.2. (i) Pro $\alpha \in \mathbb{R}^+$ se funkce $E_{\alpha,1}$ značí E_α a nazývá se *Mittag-Lefflerova funkce s jedním parametrem.*

(ii) Mittag-Lefflerovy funkce pro některé hodnoty parametrů:

$$ \begin{aligned} & E_1(t) = e^t , \\ & E_2(t) = \begin{cases} \cosh\sqrt{t} & \text{pro } t \in \mathbb{R}_0^+ \\ \cos\sqrt{-t} & \text{pro } t \in \mathbb{R}^- \end{cases}, \\ & E_2(-t) = \begin{cases} \cos\sqrt{t} & \text{pro } t \in \mathbb{R}_0^+ \\ \cosh\sqrt{-t} & \text{pro } t \in \mathbb{R}^- \end{cases}, \\ & E_2(t^2) = \cosh t , \\ & E_2(-t^2) = \cos t , \\ & E_{\frac{1}{2}}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{t^2} \int_t^{\infty} e^{-\tau^2} \, \mathrm{d}\tau , \\ & E_{1,2}(t) = \begin{cases} \frac{e^t - 1}{t} & \text{pro } t \in \mathbb{R} - \{0\} \\ 1 & \text{pro } t = 0 \end{cases}, \end{aligned} $$

$$E_{1,3}(t) = \begin{cases} \frac{e^t-1-t}{t^2} & \text{pro } t \in \mathbb{R} - \{0\} \\ \frac{1}{2} & \text{pro } t = 0 \end{cases},$$

$$E_{1,m}(t) = \begin{cases} \frac{e^t - \sum\limits_{k=0}^{m-2} \frac{t^k}{k!}}{t^{m-1}} & \text{pro } t \in \mathbb{R} - \{0\} \\ \frac{1}{(m-1)!} & \text{pro } t = 0 \end{cases},$$

$$E_{2,2}(t) = \begin{cases} \frac{\sinh\sqrt{t}}{\sqrt{t}} & \text{pro } t \in \mathbb{R}^+ \\ 1 & \text{pro } t = 0 \\ \frac{\sin\sqrt{-t}}{\sqrt{-t}} & \text{pro } t \in \mathbb{R}^- \end{cases},$$

$$E_{2,2}(t^2) = \begin{cases} \frac{\sinh t}{t} & \text{pro } t \in \mathbb{R} - \{0\} \\ 1 & \text{pro } t = 0 \end{cases},$$

$$E_{2,2}(-t^2) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{pro } t \in \mathbb{R} - \{0\} \\ 1 & \text{pro } t = 0 \end{cases}.$$

Definice 3.3. Nechť $\alpha, m \in \mathbb{R}^+$, $l \in \mathbb{R}$ jsou taková čísla, že $\alpha(jm+l) \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}^-$ pro každé $j \in \mathbb{N}_0$. *Zobecněná Mittag-Lefflerova funkce* $E_{\alpha,m,l}$ je definována řadou

$$E_{\alpha,m,l}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \quad \text{na } \mathbb{R},$$

kde $c_0 = 1$, $c_k = \prod\limits_{j=0}^{k-1} \frac{\Gamma(\alpha(jm+l)+1)}{\Gamma(\alpha(jm+l+1)+1)}$ pro $k \in \mathbb{N}$.
(Pokud opět některý argument funkce Γ ve jmenovateli je roven celému nekladnému číslu, příslušný člen se vynechá.)

Poznámka 3.4. Je $E_{\alpha,1,l} = \Gamma(\alpha l + 1)\, E_{\alpha,\alpha l+1}$, pokud $\alpha(j+l) \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}^-$ pro každé $j \in \mathbb{N}_0$.

Definice 3.5. Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ jsou taková čísla, že $\beta - \alpha > -1$, $a + \alpha k \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}^-$ pro každé $k \in \mathbb{N}_0$.
Wrightova funkce ${}_1\Psi_1$ (zde stručně Ψ) je definována řadou

$$\Psi\left[\begin{matrix}(a,\alpha)\\(b,\beta)\end{matrix}\middle|\, t\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+\alpha k)}{\Gamma(b+\beta k)} \cdot \frac{t^k}{k!} \quad \text{na } \mathbb{R},$$

přičemž platí stejná úmluva jako ve 3.3.

Poznámka 3.6. (i) Obecněji se Wrightovy funkce definují se dvěma parametry p a q, $p \in \mathbb{N}_0$, $q \in \mathbb{N}$: ${}_p\Psi_q$ ([3], str. 56). V tomto článku se jiný případ než $p = q = 1$ nebude vyskytovat.

(ii) Mittag-Lefflerova funkce je zvláštním případem Wrightovy funkce, platí totiž

$$\Psi\left[\begin{matrix}(1,1)\\(b,\beta)\end{matrix}\middle|\, t\right] = E_{\beta,b}(t)$$

pro libovolné hodnoty b, β splňující předpoklady z 3.5.

4. Diferenciální rovnice neceléhO řádu s Riemannovými-Liouvilleovými derivacemi

V této a další části uvedeme několik typů diferenciálních rovnic neceléhO řádu, u nichž lze některá nebo všechna řešení vyjádřit pomocí speciálních funkcí ze 3. části článku nebo jinak. V případě lineárních homogenních diferenciálních rovnic s jednou derivací neceléhO řádu popíšeme také asymptotickou stabilitu řešení.

Věta 4.1. *Nechť $\alpha, \lambda, m \in \mathbb{R}^+$, $\beta \in \mathbb{R}$ jsou taková čísla, že platí $m \neq 1$, $\frac{\beta+\alpha m}{1-m} > -1$. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Pak diferenciální rovnice*

$$D^{\alpha}_{a+}(y)(t) = \lambda(t-a)^{\beta} y^m(t)$$

má řešení

$$y(t) = \left(\frac{\Gamma(\frac{\beta+\alpha}{1-m}+1)}{\lambda\,\Gamma(\frac{\beta+\alpha m}{1-m}+1)}\right)^{\frac{1}{m-1}} (t-a)^{\frac{\beta+\alpha}{1-m}}.$$

Důkaz. [3], Example 3.3, str. 177.

Poznámka 4.2. V případě $m \in \mathbb{N}$ sudého výsledek platí pro libovolné $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Věta 4.3. *Nechť $\alpha, \lambda, m \in \mathbb{R}^+, \beta \in \mathbb{R}$ jsou taková čísla, že platí $m \neq 1$, $\frac{\beta+\alpha m}{1-m} > -1$. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Nechť $\mu \in \mathbb{R}^+$ je takové číslo, že platí*

$$\Gamma\Big(\frac{\beta+\alpha m}{1-m}+1\Big)(\lambda\,\mu^m + b) - \Gamma\Big(\frac{\beta+\alpha}{1-m}+1\Big)\mu = 0. \tag{1}$$

Pak diferenciální rovnice

$$D^{\alpha}_{a+}(y)(t) = \lambda(t-a)^{\beta} y^m(t) + b(t-a)^{\frac{\beta+\alpha m}{1-m}}$$

má řešení

$$y(t) = \mu(t-a)^{\frac{\beta+\alpha}{1-m}}.$$

Důkaz. [3], Example 3.4, str. 181.

Poznámka 4.4. V případě $m \in \mathbb{N}$ sudého výsledek platí pro libovolné $\lambda \in \mathbb{R}^*$ a libovolné $\mu \in \mathbb{R}$ splňující podmínku (1).

Věta 4.5. *Nechť $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$, $a, \lambda \in \mathbb{R}$ jsou taková čísla, že $\lceil\alpha\rceil = n$. Nechť funkce f splňuje předpoklady z 1.1. Nechť $b_k \in \mathbb{R}$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$. Pak Cauchyův problém*

$$\begin{aligned} &D^{\alpha}_{a+}(y)(t) = \lambda y(t) + f(t),\\ &D^{\alpha-k}_{a+}(y)(a) = b_k \quad \text{pro } k = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

má jediné řešení

$$\begin{aligned} y(t) = \sum_{j=1}^{n} b_j (t-a)^{\alpha-j} E_{\alpha,\alpha-j+1}\big(\lambda(t-a)^{\alpha}\big) +\\ + \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\big(\lambda(t-\tau)^{\alpha}\big) f(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

Důkaz. [3], Theorem 4.1, str. 224.

Věta 4.6. *Nechť $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ a $\beta \in \mathbb{R}_0^+$ jsou taková čísla, že $\lceil \alpha \rceil = n$. Nechť $b_k \in \mathbb{R}$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$. Pak Cauchyův problém*

$$\begin{aligned} &D_{a+}^{\alpha}(y)(t) = \lambda(t-a)^{\beta} y(t), \\ &D_{a+}^{\alpha-k}(y)(a) = b_k \qquad \text{pro } k = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

má jediné řešení

$$y(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (t-a)^{\alpha-j} \cdot E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-j}{\alpha}} \big(\lambda (t-a)^{\alpha+\beta}\big).$$

Důkaz. [3], Theorem 4.2, str. 227.

Věta 4.7. *Nechť $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $k, n \in \mathbb{N}$, $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}_0^+$ jsou taková čísla, že $\lceil \alpha \rceil = n$. Nechť dále $\mu_p, f_p \in \mathbb{R}$ pro $p = 1, 2, \ldots, k$ jsou taková, že $\mu_p > -1 - \alpha$, $\mu_p \neq -j$, $(r+1)(\alpha+\beta) + \mu_p \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}^-$ pro libovolné $p = 1, 2, \ldots, k$, $j = 1, 2, \ldots, n$ a $r \in \mathbb{N}_0$. Pak Cauchyův problém*

$$\begin{aligned} &D_{a+}^{\alpha}(y)(t) = \lambda(t-a)^{\beta} y(t) + \sum_{p=1}^{k} f_p (t-a)^{\mu_p}, \\ &D_{a+}^{\alpha-j}(y)(a) = b_j \qquad \text{pro } j = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

má jediné řešení

$$\begin{aligned} y(t) = &\sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (t-a)^{\alpha-j} \cdot E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-j}{\alpha}} \big(\lambda (t-a)^{\alpha+\beta}\big) + \\ &+ \sum_{p=1}^{k} \frac{\Gamma(\mu_p + 1) f_p}{\Gamma(\mu_p + \alpha + 1)} (t-a)^{\alpha+\mu_p} \cdot E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta+\mu_p}{\alpha}} \big(\lambda (t-a)^{\alpha+\beta}\big). \end{aligned}$$

Důkaz. [3], Example 4.22, str. 254.

Poznámka 4.8. Věta 4.6 je zvláštním případem 4.7; je uvedeno samostatně pouze z metodických důvodů.

Věta 4.9. *Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, $l \in \mathbb{N}$ jsou taková čísla, že $\lceil \alpha \rceil = l$, $\alpha - l + 1 > \beta$. Nechť $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Pak diferenciální rovnice*

$$D_{0+}^{\alpha}(y)(t) - \lambda\, D_{0+}^{\beta}(y)(t) = \mu\, y(t)$$

má obecné řešení

$$y(t) = \sum_{j=1}^{l} c_j \sum_{u=0}^{\infty} \frac{\mu^u}{u!} t^{\alpha u + \alpha - j} \cdot \Psi \left[\begin{array}{c|c} (u+1,1) & \\ (\alpha u + \alpha + 1 - j, \alpha - \beta) & \end{array} \lambda\, t^{\alpha-\beta} \right],$$

kde $c_j \in \mathbb{R}$ pro $j = 1, 2, \ldots, l$.
Speciálně pro $\mu = 0$ má obecné řešení

$$y(t) = \sum_{j=1}^{l} c_j\, t^{\alpha-j} \cdot E_{\alpha-\beta, \alpha+1-j}(\lambda\, t^{\alpha-\beta}).$$

Důkaz. [3], Theorem 5.2, str. 286.

Věta 4.10. *Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, $l, m \in \mathbb{N}$ jsou taková čísla, že $\lceil \alpha \rceil = l$, $m \geq 3$, $\alpha - l + 1 > \beta$.*
Nechť $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-2} \in \mathbb{R}$ jsou taková čísla, že $\beta > \alpha_{m-2} > \ldots > \alpha_1 > \alpha_0 = 0$. Nechť $\lambda, A_0, A_1, \ldots, A_{m-2} \in \mathbb{R}$. Pak diferenciální rovnice

$$D^{\alpha}_{0+}(y)(t) - \lambda\, D^{\beta}_{0+}(y)(t) - \sum_{k=0}^{m-2} A_k D^{\alpha_k}_{0+}(y)(t) = 0$$

má obecné řešení

$$y(t) = \sum_{j=1}^{l} c_j \sum_{u=0}^{\infty} \Bigg(\sum_{k_0+\ldots+k_{m-2}=u} \frac{1}{k_0! \ldots k_{m-2}!} \cdot \\ \cdot \Big(\prod_{\nu=0}^{m-2} A_{\nu}^{k_{\nu}} \Big) t^{(\alpha-\beta)u+\alpha-j+\sum\limits_{\nu=0}^{m-2}(\beta-\alpha_\nu)k_\nu} \cdot \\ \cdot \Psi \left[\begin{matrix} (u+1,1) \\ \big((\alpha-\beta)u+\alpha+1-j+\sum\limits_{\nu=0}^{m-2}(\beta-\alpha_\nu)k_\nu, \alpha-\beta\big) \end{matrix} \,\middle|\, \lambda\, t^{\alpha-\beta} \right] \Bigg),$$

kde $c_j \in \mathbb{R}$ pro $j = 1, 2, \ldots, l$ jsou libovolná čísla.

Důkaz. [3], Theorem 5.3, str. 291.

Věta 4.11. *Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, $\alpha > \beta$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Nechť funkce f splňuje předpoklady z 1.1 pro $a = 0$. Pak diferenciální rovnice*

$$D^{\alpha}_{0+}(y)(t) - \lambda\, D^{\beta}_{0+}(y)(t) = \mu\, y(t) + f(t)$$

má partikulární řešení

$$y(t) = \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\, G_{\alpha,\beta;\lambda,\mu}(t-\tau) f(\tau)\, \mathrm{d}\tau,$$

kde $G_{\alpha,\beta;\lambda,\mu}(t) = \sum\limits_{u=0}^{\infty} \dfrac{\mu^u}{u!}\, t^{\alpha\mu} \cdot \Psi \left[\begin{matrix} (u+1,1) \\ (\alpha u+\alpha, \alpha-\beta) \end{matrix} \,\middle|\, \lambda t^{\alpha-\beta} \right]$. Speciálně pro $\mu = 0$ má partikulární řešení

$$y(t) = \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta,\alpha}\big(\lambda(t-\tau)^{\alpha-\beta}\big) f(\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

Důkaz. [3], Theorem 5.5, str. 297.

Věta 4.12. *Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, $m \in \mathbb{N}$ jsou taková čísla, že $m \geq 3$, $\alpha > \beta$. Nechť $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-2} \in \mathbb{R}$ jsou taková, že $\beta > \alpha_{m-2} > \ldots > \alpha_1 > \alpha_0 = 0$. Nechť $\lambda, A_0, A_1, \ldots, A_{m-2} \in \mathbb{R}$. Nechť funkce f splňuje předpoklady z 1.1 pro $a = 0$. Pak diferenciální rovnice*

$$D^{\alpha}_{0+}(y)(t) - \lambda\, D^{\beta}_{0+}(y)(t) - \sum_{k=0}^{m-2} A_k\, D^{\alpha_k}_{0+}(y)(t) = f(t)$$

má partikulární řešení

$$y(t) = \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\, G_{\alpha_1,\dots,\alpha_{m-2},\beta,\alpha;\lambda}\,(t-\tau) f(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

kde $G_{\alpha_1,\dots,\alpha_{m-2},\beta,\alpha;\lambda}\,(t) = \sum_{u=0}^{\infty} \Bigg(\sum_{k_0+\dots+k_{m-2}=u} \frac{1}{k_0!\dots k_{m-2}!}\,\cdot$

$$\cdot \Big(\prod_{\nu=0}^{m-2} A_\nu^{k_\nu} \Big) t^{(\alpha-\beta)u+\sum_{\nu=0}^{m-2}(\beta-\alpha_\nu)k_\nu} \cdot \Psi \left[\left. \begin{matrix} (u+1,1) \\ \big((\alpha-\beta)u+\alpha+\sum_{\nu=0}^{m-2}(\beta-\alpha_\nu)k_\nu,\, \alpha-\beta\big) \end{matrix} \,\right|\, \lambda\, t^{\alpha-\beta} \right] \Bigg).$$

Důkaz. [3], Theorem 5.6, str. 299.

Definice 4.13. Nechť $\alpha, \lambda, b_0 \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$. Pak řešení Cauchyova problému

$$D_{0+}^{\alpha}(y)(t) = \lambda\, y(t),$$
$$D_{0+}^{\alpha-1}(y)(0) = b_0$$

se nazývá *asymptoticky stabilní*, jestliže $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.

Věta 4.14. *Nechť* $\alpha, \lambda, b_0 \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$. *Je-li* $\lambda < 0$, *pak řešení Cauchyova problému*

$$D_{0+}^{\alpha}(y)(t) = \lambda\, y(t),$$
$$D_{0+}^{\alpha-1}(y)(0) = b_0$$

je asymptoticky stabilní.

Důkaz. [2], Theorem 3.1, str. 864.

5. Diferenciální rovnice neceléo řádu s Caputovými derivacemi

Poznámka 5.1. Výsledky ze 4.1 a 4.3 zůstávají v platnosti i pro Caputovy derivace včetně poznámek 4.2 a 4.4 ([2], Example 3.7, str. 209).

Věta 5.2. *Nechť* $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$, $a, \lambda \in \mathbb{R}$ *jsou taková čísla, že* $\lceil \alpha \rceil = n$. *Nechť funkce* f *splňuje předpoklady z 1.1. Nechť* $b_k \in \mathbb{R}$ *pro* $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. *Pak Cauchyův problém*

$${}^{C}D_{a+}^{\alpha}(y)(t) = \lambda\, y(t) + f(t),$$
$$y^{(k)}(a) = b_k \quad \textit{pro } k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

má jediné řešení

$$y(t) = \sum_{j=0}^{u-1} b_j (t-a)^j\, E_{\alpha,j+1}\big(\lambda(t-a)^{\alpha}\big) +$$
$$+ \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}\, E_{\alpha,\alpha}\big(\lambda(t-\tau)^{\alpha}\big)\, f(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Speciálně pro $\alpha = \frac{1}{2}$ má Cauchyův problém

$$\begin{aligned} {}^C D^{\frac{1}{2}}_{a+}(y)(t) &= \lambda\, y(t), \\ y(a) &= b_0 \end{aligned}$$

jediné řešení

$$y(t) = \frac{2b_0}{\sqrt{\pi}}\, e^{\lambda^2(t-a)} \int\limits_{\lambda\sqrt{t-a}}^{\infty} e^{-\tau^2}\,\mathrm{d}\tau.$$

Důkaz. [3], Theorem 4.3, Example 4.9, str. 231.

Věta 5.3. *Nechť $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$, $a, \lambda \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}^+_0$ jsou taková čísla, že $\lceil \alpha \rceil = n$. Nechť $b_k \in \mathbb{R}$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Pak Cauchyův problém*

$$\begin{aligned} {}^C D^{\alpha}_{a+}(y)(t) &= \lambda\,(t-a)^{\beta}\, y(t), \\ y^{(k)}(a) &= b_k \qquad \textit{pro } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \end{aligned}$$

má jediné řešení

$$y(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{j!}\,(t-a)^j\, E_{\alpha,\, 1+\frac{\beta}{\alpha},\, \frac{\beta+j}{\alpha}}\big(\lambda(t-a)^{\alpha+\beta}\big).$$

Důkaz. [3], Theorem 4.4, str. 233.

Věta 5.4. *Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, $l, m \in \mathbb{N}$ jsou taková čísla, že $\lceil \alpha \rceil = l$, $\lceil \beta \rceil = m$, $\alpha - l + 1 > \beta$, nechť $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Pak diferenciální rovnice*

$${}^C D^{\alpha}_{0+}(y)(t) - \lambda\, {}^C D^{\beta}_{0+}(y)(t) - \mu\, y(t) = 0$$

má obecné řešení

$$\begin{aligned} y(t) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \Bigg(\sum_{u=0}^{\infty} \frac{\mu^u}{u!}\, t^{\alpha u + j} \cdot \Psi\left[\begin{matrix} (u+1,1) \\ (\alpha u + j + 1, \alpha - \beta) \end{matrix} \,\middle|\, \lambda\, t^{\alpha-\beta} \right] - \\ - \lambda \sum_{u=0}^{\infty} \frac{\mu^u}{u!}\, t^{\alpha u + j + \alpha - \beta} \cdot \Psi\left[\begin{matrix} (u+1,1) \\ (\alpha u + j + 1 + \alpha - \beta, \alpha - \beta) \end{matrix} \,\middle|\, \lambda\, t^{\alpha-\beta} \right] \Bigg) + \\ + \sum_{j=m}^{l-1} c_j \sum_{u=0}^{\infty} \frac{\mu^u}{u!}\, t^{\alpha u + j} \cdot \Psi\left[\begin{matrix} (u+1,1) \\ (\alpha u + j + 1, \alpha - \beta) \end{matrix} \,\middle|\, \lambda\, t^{\alpha-\beta} \right], \end{aligned}$$

kde $c_j \in \mathbb{R}$ pro $j = 0, 1, 2, \ldots, l-1$. Speciálně pro $\mu = 0$ má obecné řešení

$$\begin{aligned} y(t) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \Big(t^j\, E_{\alpha-\beta, j+1}(\lambda\, t^{\alpha-\beta}) - \lambda\, t^{\alpha-\beta+j} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta+j+1}(\lambda\, t^{\alpha-\beta}) \Big) + \\ + \sum_{j=m}^{t-1} c_j\, t^j E_{\alpha-\beta, j+1}(\lambda\, t^{\alpha-\beta}). \end{aligned}$$

Důkaz. [3], Theorem 5.13, str. 314.

Věta 5.5. *Nechť $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^+$, $l,m\in\mathbb{N}$ jsou taková čísla, že $\lceil\alpha\rceil=l$, $m\geq 3$, $\alpha-l+1>\beta$. Nechť $\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{m-2}\in\mathbb{R}$ jsou taková, že $\beta>\alpha_{m-2}>\dots>\alpha_1>>\alpha_0=0$. Nechť $l_1,l_2,\dots,l_{m-1}\in\mathbb{N}$ jsou taková, že $l_1\leq l_2\leq\dots\leq l_{m-1}\leq l$, $l_{m-1}-1<\beta<l_{m-1}$, $l_k-1<\alpha_k\leq l_k$ pro $k=1,2,\dots,m-2$. Nechť $\lambda,A_0,A_1,\dots,A_{m-2}\in\mathbb{R}$. Pak diferenciální rovnice*

$$ {}^C D^{\alpha}_{0+}(y)(t)-\lambda\, {}^C D^{\beta}_{0+}(y)(t)=\sum_{k=0}^{m-2}A_k\, {}^C D^{\alpha_k}_{0+}(y)(t) $$

má obecné řešení

$$
\begin{aligned}
y(t)={}&\sum_{j=0}^{b_{m-2}-1}c_j\sum_{u=0}^{\infty}\Bigg(\sum_{k_0+\ldots+k_{m-2}=u}\frac{1}{k_0!\ldots k_{m-2}!}\cdot\\
&\cdot\Big(\prod_{\nu=0}^{m-2}A_\nu^{k_\nu}\Big)\,t^{(\alpha-\beta)u+j+\sum\limits_{\nu=0}^{m-2}(\beta-\alpha_\nu)k_\nu}\cdot\\
&\cdot\Bigg(\Psi\left[\left.\begin{matrix}(u+1,1)\\ \big((\alpha-\beta)u+1+j+\sum\limits_{\nu=0}^{m-2}(\beta-\alpha_\nu)k_\nu,\alpha-\beta\big)\end{matrix}\right|\lambda\,t^{\alpha-\beta}\right]-\\
&-\lambda\,t^{\alpha-\beta}\cdot\Psi\left[\left.\begin{matrix}(u+1,1)\\ \big((\alpha-\beta)(u+1)+1+j+\sum\limits_{\nu=0}^{m-2}(\beta-\alpha_\nu)k_\nu,\alpha-\beta\big)\end{matrix}\right|\lambda\,t^{\alpha-\beta}\right]-\\
&-\sum_{k=0}^{m-2}A_k\,t^{\alpha-\alpha_k}\cdot\Psi\left[\left.\begin{matrix}(u+1,1)\\ \big((\alpha-\beta)u+\alpha-\alpha_k+1+j+\sum\limits_{\nu=0}^{m-2}(\beta-\alpha_\nu)k_\nu,\alpha-\beta\big)\end{matrix}\right|\lambda\,t^{\alpha-\beta}\right]\Bigg)\Bigg)+\\
&+\sum_{j=l_{m-2}}^{l_{m-1}-1}c_j\sum_{u=0}^{\infty}\Bigg(\sum_{k_0+\ldots+k_{m-2}=u}\frac{1}{k_0!\ldots k_{m-2}!}\cdot\Big(\prod_{\nu=0}^{m-2}A_\nu^{k_\nu}\Big)\,t^{(\alpha-\beta)u+j+\sum\limits_{\nu=0}^{m-2}(\beta-\alpha_\nu)k_\nu}\cdot\\
&\cdot\Bigg(\Psi\left[\left.\begin{matrix}(u+1,1)\\ \big((\alpha-\beta)u+1+j+\sum\limits_{\nu=0}^{m-2}(\beta-\alpha_\nu)k_\nu,\alpha-\beta\big)\end{matrix}\right|\lambda\,t^{\alpha-\beta}\right]-\\
&-\lambda\,t^{\alpha-\beta}\cdot\Psi\left[\left.\begin{matrix}(u+1,1)\\ \big((\alpha-\beta)(u+1)+1+j+\sum\limits_{\nu=0}^{m-2}(\beta-\alpha_\nu)k_\nu,\alpha-\beta\big)\end{matrix}\right|\lambda\,t^{\alpha-\beta}\right]\Bigg)\Bigg)+\\
&+\sum_{j=l_{m-1}}^{l-1}c_j\sum_{u=0}^{\infty}\Bigg(\sum_{k_0+\ldots+k_{m-2}=u}\frac{1}{k_0!\ldots k_{m-2}!}\cdot\Big(\prod_{\nu=0}^{m-2}A_\nu^{k_\nu}\Big)t^{(\alpha-\beta)u+j+\sum\limits_{\nu=0}^{m-2}(\beta-\alpha_\nu)k_\nu}\cdot\\
&\cdot\Psi\left[\left.\begin{matrix}(u+1,1)\\ \big((\alpha-\beta)u+1+j+\sum\limits_{\nu=0}^{m-2}(\beta-\alpha_\nu)k_\nu,\alpha-\beta\big)\end{matrix}\right|\lambda t^{\alpha-\beta}\right]\Bigg),
\end{aligned}
$$

kde $c_j\in\mathbb{R}$ pro $j=0,1,2,\dots,l-1$ jsou libovolná čísla.

Důkaz. [3], Theorem 5.14, str. 319.

Věta 5.6. *Nechť $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^+$, $\alpha>\beta$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Nechť funkce f splňuje předpoklady z 1.1 pro $a=0$. Pak diferenciální rovnice*

$$ {}^C D^{\alpha}_{0+}(y)(t)-\lambda\, {}^C D^{\beta}_{0+}(y)(t)=\mu\, y(t)+f(t) $$

má partikulární řešení téhož tvaru jako ve 4.11 včetně speciálního případu $\mu=0$.

Důkaz. [3], Theorem 5.16, str.323.

Věta 5.7. *Nechť* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, $m \in \mathbb{N}$ *jsou taková čísla, že* $m \geq 3$, $\alpha > \beta$. *Nechť* $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-2} \in \mathbb{R}$ *jsou taková, že* $\beta > \alpha_{m-2} > \dots > \alpha_1 > \alpha_0 = 0$. *Nechť* $\lambda, A_0, A_1, \dots A_{m-2} \in \mathbb{R}$. *Nechť funkce* f *splňuje předpoklady z 1.1 pro* $a = 0$. *Pak diferenciální rovnice*

$$ {}^C D^{\alpha}_{0+}(y)(t) - \lambda\, {}^C D^{\beta}_{0+}(y)(t) - \sum_{k=0}^{m-2} A_k\, {}^C D^{\alpha_k}_{0+}(y)(t) = f(t) $$

má partikulární řešení téhož tvaru jako ve 4.12.

Důkaz. [3], Theorem 5.17, str. 324.

Definice 5.8. Nechť $\alpha, \lambda, b_0 \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$. Pak řešení Cauchyova problému

$$ \begin{aligned} &{}^C D^{\alpha}_{0+}(y)(t) = \lambda\, y(t), \\ &y(0) = b_0 \end{aligned} $$

se nazývá *asymptoticky stabilní*, jestliže $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.

Věta 5.9. *Nechť* $\alpha, \lambda, b_0 \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$. *Je-li* $\lambda < 0$, *pak řešení Cauchyova problému*

$$ \begin{aligned} &{}^C D^{\alpha}_{0+}(y)(t) = \lambda\, y(t), \\ &y(0) = b_0 \end{aligned} $$

je asymptoticky stabilní.

Důkaz. [8], str. 346.

Reference

[1] S. S. Bayin: *Mathematical Methods in Science and Engineering*, John Wiley, Hoboken, 2006.

[2] D. Qian, C. Li, R. P. Agarwal, P. J. Y. Young: *Stability analysis of fractional differential system with Riemann-Liouville derivative*, Mathematical and Computer Modelling **52** (2010), 862–874.

[3] A. A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo: *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam, 2006.

[4] T. Kisela: *Fractional differential equations and their applications*, diplomová práce, FSI VUT, Brno, 2008.

[5] K. B. Oldham, J. Spanier: *The Fractional calculus*, Academic Press, San Diego, 1974.

[6] I. Podlubný: *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 1999.

[7] K. Rektorys a spolupracovníci: *Přehled užité matematiky I.*, Prometheus, Praha, 1995.

[8] Q. S. Zeng, Q. Y. Cao, X. J. Zhu: *The asymptotic stability of sequential fractional-order systems*, J. Shanghai Jiao Tong Univ. **39** (2005), 346–348.

Jiří Karásek, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: `karasek@fme.vutbr.cz`