ELEMENTÁRNÍ DŮKAZ LEVINOVY-MAYOVY VĚTY

JAN ČERMÁK A JIŘÍ JÁNSKÝ

Autoři tento příspěvek věnují prof. RNDr. Alexandru Ženíškovi, DrSc., bývalému řediteli Ústavu matematiky a Otci zakladateli oboru Matematické inženýrství na FSI VUT v Brně.

ABSTRAKT. Článek se zabývá problematikou lokalizace kořenů polynomu obecného stupně s obecnými reálnými koeficienty. Vedle vlastního teoretického přínosu je tato otázka důležitá především v souvislosti s analýzou stability některých diferenciálních a diferenčních rovnic. Hlavním výsledkem článku je originální důkazová metoda, formulující nutné a postačující podmínky pro to, aby všechny kořeny daného polynomu měly velikost menší než jedna. Tato metoda umožňuje odvodit dosud známé výsledky efektivněji, než je tomu v případě standardních důkazových postupů. Navíc je také aplikovatelná i na dosud nezkoumané typy polynomů.

1. VYMEZENÍ PROBLEMATIKY

Jednou z významných otázek tradičně diskutovaných v souvislosti s vyšetřováním polynomu k-tého stupně s reálnými koeficienty

$$P(\lambda) = \lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + \cdots + p_{k-1}\lambda + p_k\,, \qquad p_i \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

je problém lokalizace jeho kořenů. Přesněji vyjádřeno, podstatou problému je formulace podmínek zaručujících, že všech k kořenů polynomu $P(\lambda)$ leží uvnitř předem vymezené části komplexní roviny. Tímto problémem se zabývala a dosud zabývá řada významných matematiků, a to především pro dva typy oblastí: levou polorovinu v komplexní rovině (tedy množinu všech komplexních čísel se zápornou reálnou částí) a jednotkový kruh v komplexní rovině (tedy množinu všech komplexních čísel, jejichž velikost je menší než jedna). Přesná znění odpovídajících problémů jsou pak tato:

Problém 1: Formulujte nutné a postačující podmínky pro parametry polynomu $P(\lambda)$ zaručující, že všechny jeho kořeny mají zápornou reálnou část.

Problém 2: Formulujte nutné a postačující podmínky pro parametry polynomu $P(\lambda)$ zaručující, že všechny jeho kořeny mají velikost menší než jedna.

Hlavním důvodem, proč jsou významné právě tyto dvě oblasti, je jejich souvislost s analýzou stability lineárních diferenciálních a diferenčních rovnic vyšších řádů. V další kapitole ukážeme, že otázka optimálních podmínek asymptotické

2010 *MSC.* Primární 12D10, 39A30.

Klíčová slova. Polynom, lokalizace kořenů, lineární diferenční rovnice, asymptotická stabilita.

Práce byla podporována projektem A-Math-Net – Síť pro transfer znalostí v aplikované matematice (CZ.1.07/2.4.00/17.0100).

stability pro tyto typy rovnic je ekvivalentní výše formulovaným problémům, kde polynom $P(\lambda)$ hraje roli odpovídajícího charakteristického polynomu.

Odpovědi na oba uvedené problémy jsou známé a spojené se jmény význačných matematiků. Připomeneme je v jejich klasické podobě.

Věta 1.1 (Routh-Hurwitz). *Označme*

$$d(n) = \begin{pmatrix} p_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{2n-1} & p_{2n-2} & p_{2n-3} & p_{2n-4} & \cdots & \cdots & p_n \end{pmatrix}, \qquad n = 1, 2, \dots, k\,,$$

kde prvek p_m nahradíme nulou pro $m > k$. Pak všechny kořeny $P(\lambda)$ mají zápornou reálnou část právě tehdy, když

$$d(1) > 0,\ d(2) > 0,\ \dots,\ d(k) > 0\,.$$

Věta 1.2 (Schur-Cohn). *Označme*

$$D(n) = \det \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ B_n & A_n \end{pmatrix}, \qquad n = 1, 2, \dots, k-1\,,$$

kde

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ p_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ p_{n-1} & \cdots & p_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & p_k \\ \vdots & \iddots & \iddots & p_{k-1} \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ p_k & p_{k-1} & \cdots & p_{k-n+1} \end{pmatrix}.$$

Pak všechny kořeny $P(\lambda)$ mají velikost menší než jedna právě tehdy, když

$$P(1) > 0\,, \qquad (-1)^k P(-1) > 0 \tag{1.2}$$

a zároveň

$$D(1) > 0,\ D(2) > 0,\ \dots,\ D(k-1) > 0\,. \tag{1.3}$$

Poznámka 1.3. V literatuře je známo několik variant Schurova-Cohnova kritéria. Formulace Věty 1.2 vychází ze znění uvedeného v monografii [11], s přihlédnutím k náhradě podmínky $D(k) > 0$ nerovnostmi (1.2) (viz [7, str. 87]).

Mohlo by se tedy zdát, že oba problémy jsou úspěšně vyřešeny, a nemá proto smysl se jimi nadále zabývat. To je však pravda pouze částečná. Obě kritéria sice dávají odpověď na otázku, zda všechny kořeny daného polynomu $P(\lambda)$ náleží do vymezených oblastí, ovšem pouze pro polynomy s pevně zvoleným stupněm k a s konkrétně specifikovanými koeficienty p_i. Pokud bychom chtěli získat explicitní a efektivní podmínky na lokalizaci kořenů polynomu $P(\lambda)$ obecného stupně k a ss obecnými keoficienty p_i, pak uvedená kritéria nejsou dostačující. Co je tím přesně míněno, vysvětlíme na následujících příkladech. Omezíme se v nich (jako i v celém dalším textu) pouze na Problém 2, tedy na otázku lokalizace všech kořenů $P(\lambda)$ uvnitř jednotkového kruhu.

Příklad 1.4. Uvažujme kvadratický polynom

$$P_2(\lambda) = \lambda^2 + p_1\lambda + p_2 \,. \tag{1.4}$$

Z podmínek (1.2) a (1.3) Schurova-Cohnova kritéria vyplývá, že oba kořeny $P_2(\lambda)$ mají velikost menší než jedna právě tehdy, když platí

$$P(1) = 1 + p_1 + p_2 > 0\,, \qquad (-1)^2P(-1) = 1 - p_1 + p_2 > 0\,,$$
$$D(1) = \det\begin{pmatrix} 1 & p_2 \\ p_2 & 1 \end{pmatrix} = 1 - p_2^2 > 0\,.$$

Můžeme tedy shrnout, že oba kořeny kvadratického polynomu $P_2(\lambda)$ mají velikost menší než jedna právě tehdy, když

$$|p_1| < 1 + p_2 < 2\,. \tag{1.5}$$

Příklad 1.5. Uvažujme dále kubický polynom

$$P_3(\lambda) = \lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3\,.$$

V tomto případě Schurovo-Cohnovo kritérium implikuje tyto podmínky:

$$P(1) = 1 + p_1 + p_2 + p_3 > 0\,, \qquad (-1)^3P(-1) = 1 - p_1 + p_2 - p_3 > 0$$

a

$$\begin{aligned} D(1) &= \det\begin{pmatrix} 1 & p_3 \\ p_3 & 1 \end{pmatrix} = 1 - p_3^2 > 0\,, \\ D(2) &= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p_3 \\ p_1 & 1 & p_3 & p_2 \\ 0 & p_3 & 1 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & 1 \end{pmatrix} = (1 - p_3^2)^2 - (p_2 - p_1p_3)^2 > 0\,. \end{aligned}$$

Dostáváme tak nerovnosti

$$|p_1 + p_3| < 1 + p_2\,, \qquad |p_3| < 1\,, \qquad |p_2 - p_1p_3| < 1 - p_3^2\,.$$

Tedy kubický polynom $P_3(\lambda)$ má všechny tři kořeny o velikosti menší než jedna právě tehdy, když

$$|p_1 + p_3| < 1 + p_2\,, \qquad |p_2 - p_1p_3| < 1 - p_3^2\,. \tag{1.6}$$

Již v těchto jednoduchých speciálních případech si lze povšimnout, jak silný aparát v sobě obsahuje zmíněné kritérium. V obou případech totiž existují známá vyjádření kořenů daného polynomu pomocí jeho koeficientů. Mohlo by se tedy zdát, že jednodušší bude získat podmínky (1.5) a (1.6) přímo ze vztahů pro vyjádření kořenů. Přímým výpočtem se však lze přesvědčit o tom, že již v případě kvadratického polynomu vyžaduje odvození podmínek (1.5) ze vzorce pro kořeny $\lambda_{1,2}$ jisté početní úsilí. V případě kubického polynomu je pak početní výhodnost odvození podmínek (1.6) ze Schurova-Cohnova kritéria zcela markantní. Není totiž těžké si domyslet, jaké úsilí by vyžadovalo odvození těchto podmínek přímo z Cardanových vzorců pro kořeny kubického polynomu.

Oba případy ale současně ilustrují, že takto explicitně pojatý tvar podmínek se začíná s rostoucím stupněm daného polynomu komplikovat. Např. pro polynom

$$P_4(\lambda) = \lambda^4 + p_1\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_3\lambda + p_4$$

lze výše popsaným způsobem ze Schurova-Cohnova kritéria odvodit, že $P_4(\lambda)$ má všechny své kořeny o velikosti menší než jedna právě tehdy, když

$$|p_4| < 1\,, \qquad |p_1 + p_3| < 1 + p_2 + p_4$$

a

$$|p_2(1-p_4) + p_4(1-p_4^2) + p_1(p_1p_4 - p_3)| < p_2p_4(1-p_4) + 1 - p_4^2 + p_3(p_1p_4 - p_3)\,.$$

Je tedy evidentní, že Schurovo-Cohnovo kritérium nemůže dát pro polynom $P(\lambda)$ s obecným stupněm k podobné explicitní podmínky jako pro $P_2(\lambda)$ či $P_3(\lambda)$. Bylo tedy třeba hledat jiné metody, jak zformulovat potřebné podmínky, a to zejména v souvislosti s jistými speciálními polynomy obecného k-tého stupně, které se začaly v literatuře objevovat v souvislosti s některými diskrétními problémy. Mezi nejjednodušší polynomy tohoto typu patří

$$Q(\lambda) = \lambda^k - \lambda^{k-1} + q\,, \qquad q \in \mathbb{R}\,, \tag{1.7}$$

který se poprvé objevil v článku [10] jako charakteristický polynom pro speciální lineární diferenční rovnici modelující jistý populační problém. V tomto článku byla současně zformulována jednoduchá nutná a postačující podmínka pro to, aby všech k kořenů tohoto polynomu mělo velikost menší než jedna.

Věta 1.6 (Levin-May). *Všechny kořeny polynomu $Q(\lambda)$ mají velikost menší než jedna právě tehdy, když platí*

$$0 < q < 2\cos\frac{(k-1)\pi}{2k-1}\,. \tag{1.8}$$

Poznámka 1.7. Podmínka (1.8) je zcela explicitní a vyplývá z ní přímá závislost koeficientu q na stupni k daného polynomu. Tuto závislost je přitom možné chápat i v opačném smyslu, neboť ekvivalentní vyjádření podmínky (1.8) je

$$0 < q < 2\,, \qquad k < \frac{\arccos(-q/2)}{2\arcsin(q/2)}\,.$$

Hlavním cílem tohoto článku je podat jednoduchý důkaz této věty, který by umožnil i její rozšíření na obecnější typy polynomů. Námi dále navržená důkazová metoda využívá, kromě elementárních znalostí lineární algebry, také základy teorie diferenčních rovnic. Proto jsou v kapitole druhé uvedeny některé základní poznatky o těchto rovnicích, se zaměřením na ty partie, které budeme v důkazu Věty 1.6 potřebovat. Současně nám připomenutí některých základů teorie lineárních diferenčních rovnic umožní alespoň naznačit motivaci formulace Problému 2 a speciálně i Věty 1.6. Kapitola třetí je věnována navrženému alternativnímu důkazu Věty 1.6, zejména popisu jeho principu a souvisejícím výpočtům. V kapitole čtvrté budou uvedeny a komentovány některé výsledky pro obecnější typy polynomů, a to jak výsledky známé, tak i výsledky originální, vyplývající z prezentované důkazové metody.

2. Několik poznámek o diferenčních rovnicích

Hlavní motivací, proč se zabývat Problémem 2, je jeho úzká souvislost s kvalitativní analýzou lineární diferenční rovnice k-tého řádu

$$y(n+k) + p_1y(n+k-1) + \cdots + p_{k-1}y(n+1) + p_ky(n) = 0\,, \qquad n = 0, 1, \ldots\,, \tag{2.1}$$

kde $p_1, \dots, p_k$ jsou reálné konstanty, přičemž $p_k \neq 0$. Připomeňme proto nejprve některé základní pojmy a vlastnosti související s touto rovnicí.

Řešením rovnice (2.1) rozumíme každou posloupnost $\{y(n)\}$, $n = 0, 1, \dots$, která této rovnici po dosazení vyhovuje. K jednoznačné identifikaci jednotlivých řešení je třeba předepsat k počátečních hodnot $y(0), y(1), \dots, y(k-1)$. Všechny následující hodnoty $y(k), y(k+1), \dots$ pak obdržíme z rovnice (2.1) postupným dosazením $n = 0, 1, \dots$. Snadno nahlédneme, že množina všech řešení rovnice (2.1) tvoří vektorový prostor dimenze k. Proto k popisu všech řešení této rovnice stačí nalézt bázi tohoto prostoru, tedy k lineárně nezávislých řešení.

Způsob, jak tato řešení určit, je inspirován úvahami prováděnými při řešení odpovídajících rovnic diferenciálních. Hledejme proto řešení rovnice (2.1) ve tvaru $y(n) = \lambda^n$, kde λ je (obecně komplexní) číslo, které je třeba určit. Dosazením do (2.1) dostáváme *charakteristickou rovnici*

$$\lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + \dots + p_{k-1}\lambda + p_k = 0\,,$$

jejíž levá strana je právě charakteristický polynom $P(\lambda)$ - viz (1.1). Konstrukci potřebných k lineárně nezávislých řešení pomocí kořenů $P(\lambda)$ naznačíme pro $k = 2$.

V tomto případě má příslušná diferenční rovnice

$$y(n+2) + p_1 y(n+1) + p_2 y(n) = 0\,, \qquad n = 0, 1, \dots \tag{2.2}$$

charakteristický polynom (1.4) s dvojicí kořenů λ_1, λ_2. Jsou-li tyto kořeny reálné a různé, pak bázi prostoru řešení rovnice (2.2) tvoří funkce $y_1(n) = \lambda_1^n$ a $y_2(n) = \lambda_2^n$. Má-li polynom (1.4) dvojnásobný reálný kořen λ, pak odpovídající báze prostoru řešení rovnice (2.2) je tvořena funkcemi $y_1(n) = \lambda^n$ a $y_2(n) = n\lambda^n$. Případ, kdy λ_1, λ_2 je dvojice komplexně sdružených kořenů $\alpha \pm \mathrm{i}\beta$, vyžaduje jisté dodatečné početní obraty, jejichž cílem je převést nereálná řešení $(\alpha \pm \mathrm{i}\beta)^n$ na dvojici reálných řešení. Komplexně sdružené kořeny je zapotřebí nejprve vyjádřit v goniometrickém tvaru

$$\lambda_{1,2} = r(\cos(\omega) \pm \mathrm{i}\sin(\omega))\,,$$

kde $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ je velikost daného komplexního čísla a $0 < \omega < \pi$ vyhovuje vztahům

$$\cos(\omega) = \alpha/r\,, \quad \sin(\omega) = \beta/r\,.$$

Bázi prostoru řešení určíme v principu analogicky jako v předcházejících případech. Užitím Moivreovy věty dostáváme bázová řešení

$$\tilde{y}_1(n) = r^n(\cos(\omega n) + \mathrm{i}\sin(\omega n))\,, \quad \tilde{y}_2(n) = r^n(\cos(\omega n) - \mathrm{i}\sin(\omega n))\,.$$

Vhodnou lineární kombinací těchto nereálných řešení pak zajistíme, že báze prostoru řešení rovnice (2.2) je tvořena reálnými funkcemi

$$y_1(n) = r^n \cos(\omega n)\,, \quad y_2(n) = r^n \sin(\omega n)\,. \tag{2.3}$$

Jako ilustraci výše uvedeného postupu zmíníme následující klasický problém.

Příklad 2.1. Jednou z nejznámějších úloh souvisejících s diferenční rovnicí typu (2.2) je nepochybně konstrukce tzv. Fibonacciho posloupnosti

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\,.$$

Většina čtenářů jistě zná princip této posloupnosti (každý člen, druhým počínaje, je součtem dvou předcházejících), stejně jako její klasickou motivaci (modelování populace králíků za jistých specifických podmínek). Označíme-li $F(n)$ jako n-tý člen této posloupnosti, pak vzniká otázka, zda lze nalézt nějaké explicitní (přímé) vyjádření pro $F(n)$ s obecným n. Ke kladnému zodpovězení této otázky si stačí uvědomit, že musí být splněn rekurentní vztah

$$F(n+2) = F(n+1) + F(n)\,, \qquad n = 0, 1, \dots\,, \tag{2.4}$$

přičemž nultý a první člen této posloupnosti je předepsán jako

$$F(0) = 0\,, \qquad F(1) = 1\,. \tag{2.5}$$

Jedná se tedy o diferenční rovnici typu (2.2), jejíž charakteristická rovnice

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

má dvojici reálných různých kořenů

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,, \qquad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\,.$$

Lineární kombinací příslušných bázových řešení $y_1(n) = \lambda_1^n$, $y_2(n) = \lambda_2^n$ pak dostáváme obecné řešení rovnice (2.4) ve tvaru

$$F(n) = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \qquad n = 0, 1, \dots\,. \tag{2.6}$$

Počáteční podmínky (2.5) dosazené do (2.6) specifikují obecné konstanty C_1, C_2 jako $C_1 = 1/\sqrt{5} = -C_2$, čímž dostáváme řešení problému (2.4),(2.5), neboli explicitní vyjádření n-tého členu Fibonacciho posloupnosti ve tvaru

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], \qquad n = 0, 1, \dots\,.$$

O této fascinující posloupnosti by se dalo uvést mnoho dalších zajímavostí, my se však vrátíme k původnímu směru úvah. Především poznamenejme, že rozšíření výše uvedené konstrukce bázových řešení na případ obecného k je přímým zobecněním postupu popsaného pro $k = 2$ (a lze ho nalézt např. v [6]). Speciálně pak odtud vyplývá následující úvaha.

Jednou z nejdůležitějších vlastností diferenčních (a obecně dynamických) rovnic je jejich asymptotická stabilita. Zhruba vyjádřeno, tato vlastnost popisuje schopnost dané rovnice eliminovat případné poruchy vstupních dat. Přesnou definici asymptotické stability v obecném (nelineárním) případě uvádět nebudeme (její znění opět viz [6]). Pro případ lineární diferenční rovnice (2.1) lze tuto vlastnost popsat takto:

Definice 2.2. Diferenční rovnici (2.1) nazveme asymptoticky stabilní, jestliže každé její řešení $y(n)$ konverguje k nule při n rostoucím nade všechny meze.

Jestliže si znovu promyslíme princip konstrukce báze prostoru řešení rovnice (2.1), pak snadno dospějeme k tomuto závěru:

Věta 2.3. *Lineární diferenční rovnice (2.1) je asymptoticky stabilní právě tehdy, když všechny kořeny jejího charakteristického polynomu $P(\lambda)$ mají velikost menší než jedna.*

Tuto větu lze považovat za diskrétní analogii známého kritéria asymptotické stability pro lineární diferenciální rovnici

$$x^{(k)}(t) + p_1 x^{(k-1)}(t) + \cdots + p_{k-1}x'(t) + p_k x(t) = 0\,, \qquad t \geq 0 \tag{2.7}$$

s reálnými koeficienty $p_1, \ldots, p_k$, které připomeneme v následujícím znění.

Věta 2.4. *Rovnice (2.7) je asymptoticky stabilní (tedy každé její řešení $x(t)$ konveguje k nule při t rostoucím nade všechny meze) právě tehdy, když všechny kořeny jejího charakteristického polynomu $P(\lambda)$ mají zápornou reálnou část.*

Jak již bylo zmíněno dříve, předcházející dvě tvrzení jsou hlavním důvodem, proč bylo úsilí řady matematiků věnováno právě řešení Problému 1 a 2.

Z příkladu diferenční rovnice (2.4) a z vyjádření jejího obecného řešení (2.6) je názorně vidět, proč tato rovnice nemůže být asymptoticky stabilní. Zatímco kořen λ_2 příslušného charakteristického polynomu má velikost menší než jedna, kořen λ_1 tuto vlastnost nemá. Pak ve vyjádření (2.6) tedy dominuje právě výraz λ_1^n, který způsobuje neohraničenost řešení.

Tento závěr je samozřejmě zcela přirozený již vzhledem k charakteru Fibonacciho úlohy. Speciálně z hlediska modelování populace králíků zde totiž chybí jakýkoliv regulující prvek (přirození nepřátelé, nedostatek potravy, či samotná přirozená úmrtnost). U složitějších modelů, kde se s těmito faktory počítá, nabývá otázka asymptotické stability velkého významu. A to i v případě nelineárních diskrétních modelů, kde se různé typy rovnovážných stavů klasifikují právě pomocí asymptotické stability příslušných linearizovaných modelů. To byla také motivace článku [10] při vyšetřování asymptotické stability lineární diferenční rovnice

$$y(n+k) - y(n+k-1) + qy(n) = 0\,, \qquad n = 0, 1, \ldots\,, \tag{2.8}$$

získané linearizací rovnice

$$y(n+k) - y(n+k-1) + f(y(n)) = 0\,, \qquad n = 0, 1, \ldots\,, \tag{2.9}$$

která modeluje, při vhodné volbě funkce f, jistý populační problém. Z Věty 2.3 pak vyplývá, že v ekvivalentním vyjádření stačí posoudit podmínky zaručující, že charakteristický polynom $Q(\lambda)$ pro rovnici (2.8) má všechny své kořeny o velikosti menší než jedna. Formulace této podmínky, tedy vztah (1.8), byl hlavní výsledek zmíněného článku. V následující kapitole podáme jeho nový důkaz.

3. Důkaz Levinovy-Mayovy věty

Standardní důkaz Levinovy-Mayovy věty je založen na analytické diskusi kořenů polynomu $Q(\lambda)$ v závislosti na měnícím se koeficientu q. Kromě originálního článku [10] lze nalézt didakticky zdařilou formu tohoto důkazu také v monografii [6, str. 491-497], kde tvoří obsah Apendixu E.

Alternativní důkaz, který předložíme v další části textu, jde proti převažujícímu názoru o nevhodnosti Schurova-Cohnova kritéria při lokalizaci kořenů polynomu $P(\lambda)$ obecného stupně k. Podle tohoto názoru zmíněné kritérium není vhodné pro formulaci explicitních podmínek typu (1.8), a to ani v případě formálně jednoduchých polynomů obecného stupně k (jako je např. polynom $Q(\lambda)$). V dalším ukážeme opak, tedy že Schurova-Cohnova kritéra nejen využít lze, ale navíc se tím celý důkazový proces výrazně zjednoduší.

Hlavní myšlenka naší metody má základní obrysy, možná poněkud překvapivě, společné se způsobem, jakým byla vyřešena Fibonacciho úloha. Připomeňme, že klíčem k nalezení požadovaného explicitního vyjádření hodnoty $F(n)$ pro obecné n bylo sestavení rekurentního vztahu (2.4), doplněného o podmínky (2.5). Rekurence (2.4) je přitom lineární diferenční rovnicí druhého řádu s konstantními koeficienty, jejíž explicitní řešení bylo v kapitole druhé popsáno. V případě Schurova-Cohnova kritéria tedy snadno nahlédneme, že pokud bychom znali explicitní vyjádření determinantů $D(n)$ pro obecné n, pak posouzení podmínky (1.3) tohoto kritéria by mohlo být snadné (ověření podmínek (1.2) je přitom evidentně triviální). Položme si proto tuto otázku: Je možné nalézt rekurenci pro $D(n)$, která by, při doplnění příslušných počátečních podmínek, explicitní vyjádření tvaru $D(n)$ umožnila?

Uvědomíme-li si početní význam jednotlivých symbolů $D(n)$, $D(n+1), \dots$, pak nalezení potřebné rekurence znamená nalezení vhodné relace mezi jednotlivými determinanty.

Aplikujme tedy nejprve Schurovo-Cohnovo kritérium na polynom (1.7). Pak pomocné matice A_n, B_n dostáváme ve tvaru

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & q \\ \vdots & & \iddots & \iddots & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & \iddots & \iddots & & \vdots \\ q & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Prvním cílem při důkazu Levinovy-Mayovy věty bude proto nalezení vhodných rekurentních vztahů pro odpovídající determinanty $D(n)$. Za tímto účelem nyní provedeme následující sloupcové úpravy v determinantu $D(n+2)$:

První sloupec příslušné matice vynásobíme výrazem $-q$ a přičteme k poslednímu sloupci. Poté předposlední sloupec vynásobíme číslem -1 a opět přičteme k poslednímu sloupci. Odtud obdržíme vyjádření

$$D(n+2) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \ \cdots & \cdots \ 0 & 0 \\ -1 & & & \vdots \\ 0 & \boxed{A_{n+1}} & \boxed{B_{n+1}} & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \boxed{B_{n+1}} & \boxed{A_{n+1}} & 0 \\ 0 & & & -1 \\ q & 0 \ \cdots & 0 \ -1 & 2-q^2 \end{pmatrix}.$$

Nyní využitím Laplaceova rozvoje podle posledního sloupce obdržíme relaci

$$D(n+2) = (2-q^2)D(n+1) - D(n)\,.$$

Hledané determinanty tedy lze vyjádřit jako řešení lineární diferenční rovnice

$$D(n+2) - (2-q^2)D(n+1) + D(n) = 0, \qquad n = 0, 1, \ldots, k-3\,, \tag{3.1}$$

doplněné o počáteční podmínky ve tvaru

$$D(0) = 1, \qquad D(1) = 1 - q^2\,. \tag{3.2}$$

Vztahy (3.1), (3.2) tedy představují analogii vztahů (2.4), (2.5) z Fibonacciho úlohy. Dalším krokem je proto vyřešení problému (3.1), (3.2). Proces jeho řešení budeme provádět za předpokladu $0 < q < 2$. Podmínky (1.2), (1.3) totiž speciálně implikují nerovnosti $0 < q < 2$ pro k liché a $0 < q < 1$ pro k sudé.

Protože řešení problému (3.1), (3.2) představuje explicitní vyjádření determinantů $D(n)$ z Schurova-Cohnova kritéria, uvedeme ho v samostatném tvrzení.

Lemma 3.1. *Nechť* $0 < q < 2$. *Potom*

$$D(n) = \cos(\omega n) - \frac{q}{(4-q^2)^{1/2}} \sin(\omega n), \quad n = 0, 1, \ldots, k-1\,, \tag{3.3}$$

kde

$$\omega = \arccos \frac{2-q^2}{2}\,. \tag{3.4}$$

Důkaz: Rekurence (3.1) je lineární diferenční rovnicí druhého řádu. Odpovídající charakteristická rovnice

$$\mu^2 - (2-q^2)\mu + 1 = 0$$

má kořeny

$$\mu_{1,2} = \frac{2-q^2}{2} \pm \mathrm{i}\frac{q(4-q^2)^{1/2}}{2} = \cos(\omega) \pm \mathrm{i}\sin(\omega)\,,$$

kde ω je dáno vztahem (3.4). Obecné řešení rovnice (3.1) je tedy podle (2.3) tvaru

$$D(n) = C_1 \cos(\omega n) + C_2 \sin(\omega n)\,. \tag{3.5}$$

Obecné konstanty C_1, C_2 určíme dosazením počátečních podmínek (3.2) do vztahu (3.5). Odtud dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} 1 &= C_1\,, \\ 1 - q^2 &= C_1 \cos(\omega) + C_2 \sin(\omega)\,, \end{aligned}$$

jejímž vyřešením a dosazením do (3.5) obdržíme vyjádření (3.3). □

Nyní se vrátíme zpět k diskusi podmínky (1.3). Po dosazení (3.3) tato podmínka nabývá tvar

$$\cos(\omega n) - \frac{q}{(4-q^2)^{1/2}} \sin(\omega n) > 0\,, \qquad n = 0, 1, \ldots, k-1\,. \tag{3.6}$$

Vztah (3.6) platí právě tehdy, když

$$\cos(\omega(k-1)) - \frac{q}{(4-q^2)^{1/2}} \sin(\omega(k-1)) > 0\,, \qquad 0 \le (k-1)\omega < \frac{\pi}{2}\,,$$

tedy

$$\omega(k-1) < \operatorname{arccotg} \frac{q}{(4-q^2)^{1/2}}\,.$$

Odtud s využitím vztahů

$$\omega = \arccos \frac{2-q^2}{2} = \pi - 2\arccos \frac{q}{2}, \quad \operatorname{arccotg} \frac{q}{(4-q^2)^{1/2}} = \arccos \frac{q}{2}$$

dostáváme podmínku (1.8). Tím je Levinova-Mayova věta dokázána.

4. Závěrečné komentáře

Důkazová metoda uvedená v předcházející kapitole lze využít i v širších souvislostech. Jedno z možných rozšíření vychází ze skutečnosti, že Schurovo-Cohnovo kritérium lze obecněji formulovat i pro problém, kdy hledáme podmínky zaručující, aby polynom $P(\lambda)$ měl právě m kořenů (kde $0 \le m \le k$) ležících uvnitř jednotkového kruhu v komplexní rovině, a zbývajících $k-m$ kořenů ležících vně tohoto kruhu. Tato varianta Schurova-Cohnova kritéria se využila v článku [2], jehož cílem bylo popsat potřebné explicitní podmínky na parametry k a q polynomu $Q(\lambda)$, a podat tedy úplnou charakterizaci všech možných rozložení jeho k kořenů vzhledem k jednotkovému kruhu v komplexní rovině. Levinovo-Mayovo kritérium pak odtud vyplývá jako speciální případ příslušného tvrzení.

Významnější a zajímavější zobecnění tato důkazová metoda přináší v případě, uvažujeme-li obecnější polynomy k-tého stupně, než je $Q(\lambda)$. Jestliže nahradíme ve vyjádření $Q(\lambda)$ koeficient mínus jedna obecným parametrem p, pak dostáváme polynom

$$\widetilde{Q}(\lambda) = \lambda^k + p\lambda^{k-1} + q\,, \qquad p, q \in \mathbb{R}\,.$$

Za příslušné zobecnění Levinovy-Mayovy podmínky (1.8) pro tento polynom je obvykle považováno následující tvrzení, poprvé publikované v článku [9].

Věta 4.1. *Nechť $p \neq 0$ a q jsou reálná čísla a $k \ge 2$. Pak všechny kořeny $\widetilde{Q}(\lambda)$ mají velikost menší než jedna právě tehdy, když $|p| < k/(k-1)$ a*

$$|p| - 1 < q < (p^2 + 1 - 2|p|\cos\phi)^{1/2} \qquad \text{pro } k \text{ sudá}\,,$$
$$|p+q| < 1 \quad \text{a} \quad |q| < (p^2 + 1 - 2|p|\cos\phi)^{1/2} \qquad \text{pro } k \text{ lichá}\,,$$

kde $\phi \in (0, \pi/k)$ je kořen rovnice $\sin[(k-1)x]/\sin(kx) = 1/|p|$.

Z uvedeného vyjádření je patrné, že toto kritérium sice dává systém nutných a postačujících podmínek pro požadovanou vlastnost kořenů polynomu $\widetilde{Q}(\lambda)$, avšak tento systém podmínek není zcela explicitní. Zejména si povšimněme, že vyžaduje řešení jisté nelineární rovnice, což představuje překážku pro jeho efektivní využití.

Formálně velmi podobný systém podmínek byl odvozen v článku [5] i pro případ polynomu $\lambda^k + p\lambda + q$. Přímým zobecněním obou těchto typů je pak polynom

$$\widehat{Q}(\lambda) = \lambda^k + p\lambda^\ell + q\,, \qquad p, q \in \mathbb{R}\,, \quad k, \ell \in \mathbb{Z}^+\,, \quad k > \ell\,,$$

pro který byly požadované podmínky, lokalizující všechny kořeny $\widehat{Q}(\lambda)$ uvnitř jednotkového kruhu, formulovány v článku [4]. Zde uvedený systém podmínek pro danou lokalizaci kořenů je zobecněním Věty 4.1 a je již poměrně komplikovaný (lze ho nalézt rovněž v monografii [6, str. 250-251]). Alternativní, nikoliv však explicitní systémy podmínek byly později odvozeny v článcích [3] a [8].

Velká přednost metody popsané v předcházející kapitole spočívá v tom, že její aplikací (v kombinaci s dalšími důkazovými technikami) je možné získat podmínky explicitní, a to pro všechny výše zmíněné polynomy. Příslušné tvrzení zformulujeme bez důkazu pro případ nejobecnějšího z nich, tedy polynomu $\widehat{Q}(\lambda)$. Ten je zajímavý především tím, že jde o obecný tříčlenný polynom (pokud u koeficientu q vystupuje člen λ^m, $m \in \mathbb{Z}^+$, $m < \ell$, pak jeho vytknutím převedeme triviálně tento případ na tvar $\widehat{Q}(\lambda)$). Zdůrazněme také ještě, že následující tvrzení dosud nebylo jinde publikováno.

Věta 4.2. *Nechť p, q jsou reálná čísla a nechť k, ℓ jsou nesoudělná přirozená čísla s vlastností $k - \ell \geq 2$.*

(i) *Nechť $(-p)^k(-q)^{k-\ell} \geq 0$. Pak všechny kořeny $\widehat{Q}(\lambda)$ mají velikost menší než jedna právě tehdy, když*

$$|p| + |q| < 1\,.$$

(ii) *Nechť $(-p)^k(-q)^{k-\ell} < 0$. Pak všechny kořeny $\widehat{Q}(\lambda)$ mají velikost menší než jedna právě tehdy, když*

$$|p| + |q| \leq 1\,,$$

nebo

$$p^2 + q^2 < 1 < |p| + |q|\,, \qquad \ell \arccos \frac{1 + p^2 - q^2}{2|p|} + (k - \ell) \arccos \frac{1 - p^2 - q^2}{2|pq|} < \pi\,.$$

Poznámka 4.3. Z Věty 4.2 vyplývá několik zajímavých skutečností. Především si všimněme, že typ podmínek závisí na znaménku koeficientů p, q a paritě mocnin k, ℓ. Bez ohledu na tyto hodnoty, všechny kořeny polynomu $\widehat{Q}(\lambda)$ mají velikost menší než jedna, jestliže jeho koeficienty p, q leží uvnitř čtverce $|p| + |q| < 1$ (přitom na hodnoty mocnin k, ℓ není kladeno žádné další omezení). V případě (i) je tato podmínka současně i podmínkou nutnou. Předpokládáme-li však platnost (ii), vyšetřovaná kořenová vlastnost platí nejen na hranici, ale dokonce i vně tohoto čtverce; v každém případě však p, q musí ležet uvnitř kruhu, který je tomuto čtverci opsán. V tomto případě současně nastupuje také omezení na mocniny k, ℓ obsažené v $\widehat{Q}(\lambda)$. I toto omezení má zajímavou interpretaci, jestliže si uvědomíme rozsah funkčních hodnot příslušných cyklometrických funkcí obsažených v tomto omezení.

Případ $k - \ell = 1$ nebudeme blíže komentovat, od výše diskutovaného se liší pouze v několika detailech.

Je třeba zdůraznit, že aplikace výše popsané důkazové metody se stává výrazně početně náročnější, než byla při odvození Levinovy-Mayovy věty, a to již i ve zmíněných speciálních případech polynomu $\widehat{Q}(\lambda)$. Ačkoliv hlavní myšlenka této metody zůstává stejná, její případná rozšíření na další typy polynomů (speciální čtyřčlenný polynom byl diskutován v článku [1]) bude nepochybně vyžadovat další inspirující nápady. Hlavním problémem se přitom ukazuje být sestavení potřebné rekurence mezi determinanty $D(n)$ z Schurova-Cohnova kritéria, tedy nalezení rozšířené analogie vztahů (3.1), (3.2). Tento problém se týká například polynomu $\lambda^k - \lambda^{k-1} + p\lambda^\ell + q$, který tvarově zobecňuje $Q(\lambda)$ i $\widehat{Q}(\lambda)$. Formulace explicitních nutných a postačujících podmínek, které by zaručily, že všechny kořeny tohoto polynomu mají velikost menší než jedna, je známý otevřený problém. K odpovědi na tento problém by mohla napomoci i metoda, která byla popsána v třetí kapitole tohoto článku.

Poznámka 4.4. Pokud bychom pro polynom $\widehat{Q}(\lambda)$ řešili Problém 1, tedy otázku podmínek zaručujících, že všechny jeho kořeny mají zápornou reálnou část, pak na rozdíl od výše komentovaného Problému 2 je tato otázka v případě $\widehat{Q}(\lambda)$ téměř triviální. Přímo z Routhova-Hurwitzova kritéria totiž jednoduše plynou podmínky $k = 2$, $\ell = 1$, $p, q > 0$.

Na závěr poznamenejme, že uvedené výsledky byly dosaženy v rámci výzkumu, který na Ústavu matematiky FSI VUT probíhá několik posledních let. Kromě autorů tohoto příspěvku se na některých dosažených výsledcích podílel také Petr Tomášek, který je, podobně jako jeden z autorů tohoto textu, absolventem studijního oboru Matematické inženýrství na FSI VUT. Lze tedy říci, že s výrazným přispěním absolventů tohoto oboru, jejich nápadů a postřehů, se podařilo objevit nové výsledky v oblasti, která je považována za klasickou a jejíž výzkum je spojen s řadou významných matematiků minulosti a současnosti.

Případné poznámky, náměty či dotazy k výše uvedené problematice jsou vítány a je možné se s nimi obrátit na kteréhokoliv z autorů tohoto textu.

Reference

[1] J. Čermák, J. Jánský, P. Kundrát: *On necessary and sufficient conditions for the asymptotic stability of higher order linear difference equations*, J. Difference Equ. Appl. **18** (2012), No. 11, 1781–1800.

[2] J. Čermák, J. Jánský: *On a generalization of the Levin-May Theorem*, Carpathian J. Math. **30** (2014), No. 1, 51–58.

[3] S. S. Cheng, S. Y. Huang: *Alternate derivations of the stability region of a difference equation with two delays*, Appl. Math. E-Notes **9** (2009), 225–253.

[4] F. M. Dannan: *The asymptotic stability of* $x(n + k) + ax(n) + bx(n - l) = 0$, J. Difference Equ. Appl. **10** (2004), No. 6, 589–599.

[5] F. M. Dannan, S. Elaydi: *Asymptotic stability of linear difference equation of advanced type*, J. Comput. Anal. Appl. **6** (2004), No. 2, 423–428.

[6] S. Elaydi: *An Introduction to Difference Equations*, 3rd ed., Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 2005.

[7] E. I. Jury: *Theory and Application of The $\mathcal{Z}$-Transform Methods*, Wiley, New York, 1964.

[8] M. M. Kipnis, R. M. Nigmatullin: *Stability of the trinomial linear difference equations with two delays*, Autom. Remote Control **65** (2004), No. 11, 1710–1723.

[9] S. A. Kuruklis: *The asymptotic stability of* $x_{n+1} - ax_n + bx_{n-k} = 0$, J. Math. Anal. Appl. **188** (1994), 719–731.

[10] S. A. Levin, R. May: *A note on difference–delay equations*, Theor. Popul. Biol. **9** (1976), 178–187.

[11] M. Marden: *Geometry of Polynomials*, Mathematical Surveys and Monographs, No. 3, Providence, 1966.

Jan Čermák, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: `cermak.j@fme.vutbr.cz`

Jiří Jánský, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: `jiri.jansky@unob.cz`