NAVIER–STOKESOVY ROVNICE: SLABÉ ŘEŠENÍ, JEHO JEDNOZNAČNOST A REGULARITA

MILAN POKORNÝ

Abstrakt. Tento článek je stručným úvodem do studia vlastností slabých řešení evolučních Navier–Stokesových rovnic nestlačitelného proudění. Nejprve jsou představeny různé typy řešení a vztahy mezi nimi. Poté se článek věnuje slabému řešení, otázce jeho existence, jednoznačnosti a regularitě v různých situacích a také podmíněné regularitě (kritéria regularity). Je určen spíše pro nespecialisty v daném oboru, kteří jsou seznámeni se základy teorie slabých řešení parciálních diferenciálních rovnic.

1. Úvod

Nechť oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je vyplněná látkou, kterou modelujeme jako kontinuum. Pro jednoduchost předpokládejme, že tato oblast je neměnná v čase. Na základě představ mechaniky kontinua (viz např. [23]) je možno odvodit následující integrální tvary bilance hmoty a energie[1]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_B \varrho \,\mathrm{d}x + \int_{\partial B} \varrho \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_B \varrho\mathbf{u} \,\mathrm{d}x + \int_{\partial B} \varrho \mathbf{u}\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \int_{\partial B}\mathbb{T}\mathbf{n}\,\mathrm{d}S + \int_B \varrho\mathbf{f}\,\mathrm{d}x.$$

Zde skalární pole ϱ reprezentuje hustotu látky, vektorové pole $\mathbf{u}$ rychlostní pole, tenzor $\mathbb{T}$ je tenzor napětí (vektor $\mathbb{T}\mathbf{n}$ reprezentuje plošné síly v kontinuu) a $\mathbf{f}$ je vektor objemových sil (např. tíhová síla). Množina B je libovolná měřitelná podmnožina Ω s dostatečně hladkou hranicí, aby všechny integrály výše měly smysl.

Správně bychom měli ještě uvažovat bilanci momentu hybnosti a celkové energie. My ale budeme předpokládat, že hustota vnitřní energie je konstantní v prostoru i v čase (pak je bilance celkové energie, alespoň pro hladké funkce, důsledkem bilance hybnosti) a že látka nemá žádné vnitřní momenty hybnosti. Potom z bilance momentu hybnosti pouze plyne, že tenzor napětí $\mathbb{T}$ je symetrický.

Na základě standardních úvah (podělením $|B|$ a limitou $|B| \to 0^+$ spolu se záměnou derivace a integrálu, za předpokladu dostatečné hladkosti všech veličin) lze ze systému integrálních bilančních rovnic odvodit jejich následující diferenciální

2010 *MSC.* Primární 35Q30, 76D05.

Klíčová slova. Navier–Stokesovy rovnice, slabé řešení, jednoznačnost, regularita řešení.

Práce byla podporována grantem GA ČR č. 201/09/0917 a projektem A-Math-Net – Síť pro transfer znalostí v aplikované matematice (CZ.1.07/2.4.00/17.0100).

[1] Poznamenejme, že všechny integrály v článku chápeme v Lebesgueově smyslu.

tvar[2]

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) = 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial (\varrho \mathbf{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \operatorname{div} \mathbb{T} = \varrho \mathbf{f}. \tag{1.2}$$

Později ale uvidíme, že tento postup v sobě skrývá jistý problém.

Budeme předpokládat, že daná látka je nestlačitelná, tj. objem její libovolné části se v čase nemění. To je ekvivalentní podmínce

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \tag{1.3}$$

Budeme-li dále předpokládat, že látka je homogenní (tj. hustota je v počátečním čase konstantní v prostoru), potom hustota je rovna kladné konstantě a rovnice (1.1) se redukuje na (1.3) s tím, že hodnota ϱ v rovnici (1.2) je rovna předepsané konstantě.

Máme tedy celkem 4 rovnice pro 9 neznámých: 3 složky rychlosti a 6 složek symetrického tenzoru napětí. Proto musíme ještě něco říci o tenzoru napětí. Za předpokladu, že studujeme newtonovskou tekutinu a přijímáme princip nezávislosti na pozorovateli, vychází

$$\mathbb{T} = 2\mu \mathbb{D}(\mathbf{u}) - p\mathbb{I},$$

kde $\mu > 0$ je dynamická viskozita, p je tlak a $\mathbb{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\big(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T\big)$ je symetrická část gradientu rychlosti. Pokud ve vztahu (1.2) podělíme hustotou, přeznačíme tlak a přejdeme ke kinetické viskozitě $\nu = \mu/\varrho$, dostáváme systém rovnic

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

standardně nazývaný Navier–Stokesovy rovnice pro nestlačitelné proudění (zkráceně též nestlačitelné Navier–Stokesovy rovnice). Tento systém budeme studovat na časoprostorovém válci $I \times \Omega$, přičemž $I = (0,T)$ je časový interval.

Tento systém musíme doplnit o počáteční a okrajové podmínky. Počáteční podmínku je potřeba předepsat pro rychlost

$$\mathbf{u}(0,x) = \mathbf{u}_0(x), \qquad x \in \Omega. \tag{1.5}$$

Problematika okrajových podmínek je komplikovanější. Není příliš zřejmé, jaké okrajové podmínky jsou fyzikálně správně, zejména v případě, kdy na části hranice tekutina vtéká a na části vytéká. Abychom si situaci zjednodušili (což je ale pravda jen částečně), budeme v tomto článku uvažovat homogenní Dirichletovu podmínku

$$\mathbf{u}(t,x) = \mathbf{0}, \qquad t \in I, x \in \partial\Omega. \tag{1.6}$$

V některých případech, pokud se chceme zabývat jen samotným systémem rovnic a chceme se zcela vyhnout problémům s okrajovou podmínkou, můžeme uvažovat periodické okrajové podmínky, popř. můžeme brát $\Omega = \mathbb{R}^3$, tj. uvažovat Cauchyovu úlohu. Podmínka na chování řešení v nekonečnu (jistý pokles řešení k nule) je nahrazen slabší podmínkou konvergence jistých integrálů.

Klasickým řešením úlohy (1.4)–(1.6) nazýváme dvojici funkcí $(\mathbf{u}, p)$, přičemž vektorová funkce $\mathbf{u}$ je spojitá na $[0,T) \times \overline{\Omega}$ a má na $(0,T) \times \Omega$ spojité druhé parciální derivace podle prostorových proměnných a první parciální derivaci podle

[2]Symbol $\otimes$ označuje tenzorový součin vektorů. Tedy $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j$.

času, funkce p má na $(0,T)\times\Omega$ spojité první parciální derivace podle prostorových proměnných, obě splňují rovnosti (1.4) ve smyslu rovnosti spojitých funkcí a rovnosti (1.5), resp. (1.6) jsou splněny ve smyslu limit pro $t\to 0^+$, resp. $x\to\partial\Omega$. Jak uvidíme později, i když jsou všechna data libovolně hladká, není zaručeno, že takové řešení existuje.

Systém rovnic (1.2) byl navržen francouzským inženýrem Claude-Louisem Navierem v roce 1822 jako zobecnění Eulerových rovnic pro případ proudění viskózní tekutiny. Vzhledem ke způsobu odvození nebyl model ve své době přijat. Stalo se tak teprve po roce 1845, kdy britský matematik a fyzik irského původu George Gabriel Stokes tento systém odvodil na základě představ mechaniky kontinua (odvodil i rovnice pro stlačitelné proudění). K intezivnějšímu matematickému studiu tohoto systému rovnic dochází teprve ve dvacátých letech minulého století díky pracím švédského teoretického fyzika Carla Wilhelma Oseena ([39]). Na jeho výsledky navázal ve své doktorské práci francouzský matematik Jean Leray ([32], [31]). Formuloval celou řadu zajímavých problémů, některé vyřešil, jiné zůstaly otevřené po mnoho let či dokonce jsou otevřené dodnes. Z našeho pohledu je nejzajímavější studium řešitelnosti Cauchyovy úlohy v $\mathbb{R}^2$ a v $\mathbb{R}^3$. Zatímco ve dvojdimenzionálním případě se mu podařilo dokázat existenci klasických řešení, ve trojdimenzionálním případě neuspěl. Definoval proto nový typ řešení, které nazval „solution tourbulante“, jehož existenci byl schopen dokázat. Z dnešního pohledu jde vlastně o slabé řešení splňující silnou energetickou nerovnost. On sám věřil spíše v to, že klasické řešení tohoto systému obecně neexistuje, že v konečném čase se stane řešení singulární. Otázka, zda je tomu tak, je dodnes otevřená a patří mezi sedm problémů pro třetí tisíciletí, za jejichž řešení nabídl Clay Mathematical Institute odměnu milión amerických dolarů (viz [1]).

Po druhé světové válce se Jean Leray k problémům matematické mechaniky tekutin nevrátil. V jeho stopách však pokračovala celá řada světově uznávaných odborníků. Zmiňme zejména Eberharda Hopfa ([24]), Olgu Alexandrovnu Ladyženskou ([29]), Jaques-Louise Lionse ([33]), Pierre-Louise Lionse ([34]) aj. Z významných českých matematiků se této problematice věnovali či věnují především Jindřich Nečas ([36]) a Vladimír Šverák ([43] nebo [15]).

Dříve než se podíváme na zobecnění pojmu klasického řešení, připomeňme některé prostory funkcí, které budeme v dalším potřebovat.

Lebesgueovy prostory budeme značit $L^p(\Omega)$; pro $1\le p\le\infty$ jde o Banachovy prostory se standardní normou $\|\cdot\|_p$. Sobolevovy prostory značíme $W^{k,p}(\Omega)$, $k\in\mathbb{N}$, $1\le p\le\infty$; spolu s normou $\|\cdot\|_{k,p}$ jde opět o Banachovy prostory. Prostor $W_0^{k,p}(\Omega)$ potom označuje funkce z uzávěru hladkých funkcí s kompaktním nosičem v Ω v normě $\|\cdot\|_{k,p}$. Poznamenejme jen, že pro oblasti Ω s lipschitzovskou hranicí a $p<\infty$ je prostor $W_0^{1,p}(\Omega)$ totožný s podprostorem $W^{1,p}(\Omega)$ takovým, že funkce mají na hranici Ω nulovou hodnotu ve smyslu stop. Duální prostor k $W_0^{1,p}(\Omega)$ budeme značit pro $1<p<\infty$ $W^{-1,p'}(\Omega)$, kde $p'=\frac{p}{p-1}$ je hölderovsky sdružený exponent k p. Vektorové veličiny bude psány tučně, tenzorové veličiny pak speciálním fontem. Analogické značení budeme používat i pro příslušné prostory funkcí.

Budeme dále potřebovat prostory funkcí s nulovou divergencí. Budeme pracovat s prostorem $(1 \le p < \infty)$

$$\mathbf{W}^{1,p}_{0,\mathrm{div}}(\Omega) = \overline{\{\mathbf{v} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega); \mathrm{div}\, \mathbf{v} = 0\}}^{\|\cdot\|_{1,p}},$$

pro který pro oblasti s lipschitzovskou hranicí a $1 < p < \infty$ platí

$$\mathbf{W}^{1,p}_{0,\mathrm{div}}(\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega); \mathrm{div}\, \mathbf{v} = 0\}.$$

Dále připomeňme Helmholtzův rozklad, tj. libovolnou vektorovou funkci z $\mathbf{L}^2(\Omega)$ lze psát jako

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \nabla q,$$

kde pro Ω s lipschitzovskou hranicí

$$\mathbf{v}_1 \in \mathbf{L}^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega); \mathrm{div}\, \mathbf{v} = 0 \text{ ve smyslu } \mathcal{D}'(\Omega); \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ na } \partial\Omega \text{ ve smyslu } W^{-\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)\}$$

a $q \in W^{1,2}(\Omega)$. Navíc je tento rozklad ortogonální.

Protože studujeme evoluční úlohy, budeme pracovat s Bochnerovými prostory. Nechť X je Banachův prostor. Budeme pracovat s prostory spojitých funkcí na intervalu I s hodnotami v X, tj. $C(I; X)$, s prostory spojitých funkcí na intervalu I ve slabé topologii X značenými $C(I; X_w)$ a s prostory bochnerovsky integrovatelných funkcí přes interval I s hodnotami v X takových, že norma v X má konečnou L^p normu přes I, $L^p(I; X)$. Další informace o všech výše uvedených prostorech funkcí je možno nalézt například v [2], [19], [20] nebo v [41].

Tento článek se věnuje jen jednomu vybranému problému z velkého množství možných úloh, se kterými se můžeme setkat při matematické analýze úloh proudění tekutin. I když se omezíme jen na malou třídu modelů, tj. na matematický popis nestlačitelného proudění newtonovské tekutiny, zůstane počet zajímavých otevřených problému stále velký. Jen tak na okraj, v minulém roce byl vyřešen jeden otevřený problém týkající se stacionárního proudění ve dvou dimenzích s nehomogenní okrajovou podmínkou za předpokladu, že hranice oblasti má více komponent, viz [26]. I tak analogický problém ve třech dimenzích zůstává otevřený. Tento článek se ale soustředí především na problematiku slabého řešení evolučních Navier–Stokesových rovnic ve prostorové dimenzi tři. I když jde ve své podstatě o nejjednodušší reálný model tekutiny a je intenzívně studován matematiky z pohledu analýzy i z pohledu numerického řešení, jsou fundamentální otázky existence a regularity (tj. hladkosti) řešení stále otevřené.

Tento systém rovnic je prototypem na první pohled relativně „jednoduchého“ nelineárního parabolického problému, kde nicméně klasické ale i různé speciální metody selhávají a nedaří se nalézt odpověď na základní otázky. A to i přesto, že se ročně objevují stovky článků, které se věnují Navier–Stokesovým rovnicím. Důvodem sepsání tohoto článku je dát českému čtenáři základní informace ohledně těchto rovnic. A to nejen výsledků, ale i metod, jak se dají dané výsledky dokázat. V některých případech je důkaz uveden celý, někdy jsou uvedeny jen základní myšlenky či je důkaz vynechán úplně. Pokud někoho tato problematika zaujme natolik, že by si chtěl přečíst něco více, v českém jazyce existuje přehledový článek [37], kromě něj potom pouze online dostupná skripta autora tohoto článku (viz [41], [42]). V anglicky psané literatuře pak existuje celá řada monografií (např. [44],

[14], [34]), pro čtenáře znalého francouzského jazyka pak doporučuji pěknou knihu [7]. Z novějších přehledových prací pak zmiňme ještě [35], tato práce se ale dívá na Navier–Stokesovy rovnice jako na speciální případ jistých nenewtonovských modelů (tzv. tekutiny s mocninným růstem).

2. Různé typy řešení Navier–Stokesových rovnic

Výše jsme uvedli definici klasického řešení. Jak bylo zmíněno, existence klasického řešení není zřejmá v prostorové dimenzi tři ani v situacích, kdy všechna data úlohy jsou libovolně hladká. Proto je vhodné zavést jiné typy řešení a pokusit se studovat, za jakých podmínek tato řešení existují.

My se v dalších částech této práce budeme věnovat *slabému řešení*. Myšlenka jeho zavedení je následující. Pokud rovnici (1.4) vynásobíme hladkou funkcí $\boldsymbol{\varphi}$ s kompaktním nosičem v časoprostoru a formálně provedeme integraci per partes, resp. použijeme Gaußovu formuli, dostáváme

$$\int_0^T \int_\Omega \Big(-\mathbf{u}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} - (\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) : \nabla\boldsymbol{\varphi} + \nu\nabla\mathbf{u} : \nabla\boldsymbol{\varphi} - p\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\varphi}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0.$$

Nevýhodou je, že nám ve formulaci zůstává tlak. Proto budeme předpokládat, že máme $\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi} = 0$. Navíc místo integrace per partes u časové derivace nahradíme integrál přes prostor vhodným funkcionálem a dostáváme následující formulaci:

Definice 2.1. Nechť $\mathbf{f} \in L^2(0,T;\mathbf{W}^{-1,2}(\Omega))$, $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{L}^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$. Funkci $\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;\mathbf{W}^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))$ takovou, že její slabá derivace podle času $\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} \in L^q(0,T;(\mathbf{W}^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))^*)$ pro jisté $q \geq 1$, nazýváme *slabým řešením* úlohy (1.2)–(1.5), jestliže

$$\Big\langle \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t},\boldsymbol{\varphi}\Big\rangle_{(\mathbf{W}^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))^*,\mathbf{W}^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)} + \int_\Omega \Big((\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})\cdot\boldsymbol{\varphi} + \nu\nabla\mathbf{u} : \nabla\boldsymbol{\varphi}\Big)\,\mathrm{d}x = \langle \mathbf{f},\boldsymbol{\varphi}\rangle_{\mathbf{W}^{-1,2}(\Omega),\mathbf{W}^{1,2}_0(\Omega)}$$

pro všechna $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$ a s.v. $t \in (0,T)$ a počáteční podmínka je splněna ve smyslu

$$\lim_{t\to 0^+} \int_\Omega \mathbf{u}(t,\cdot)\cdot\mathbf{w}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathbf{u}_0\cdot\mathbf{w}\,\mathrm{d}x \tag{2.1}$$

pro všechna $\mathbf{w} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$.

Poznamenejme, že splnění počáteční podmínky (2.1) souvisí s tím, že funkce $\mathbf{u}$ patřící do prostorů uvedených v definici výše je po změně na množině míry nula z prostoru $C([0,T];\mathbf{L}^2_w(\Omega))$, a proto má limita smysl.

Pokud bychom formálně vzali za testovací funkci $\boldsymbol{\varphi} := \mathbf{u}$ a předpokládali, že tato funkce je dostatečně hladká, dostali bychom po integraci přes časový interval $(0,t) \subset (0,T)$ tzv. *energetickou rovnost*

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\mathbf{u}(t,\cdot)|^2\,\mathrm{d}x + \int_0^t\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int_\Omega |\mathbf{u}_0|^2\,\mathrm{d}x + \int_0^t \langle\mathbf{f},\mathbf{u}\rangle\,\mathrm{d}\tau.$$

K získání této rovnosti jsme použili rovnost

$$\int_\Omega (\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_\Omega \mathbf{u}\cdot\nabla|\mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}x = 0. \tag{2.2}$$

Ta ale platí pouze pro dostatečně hladké funkce, aby se uvedená aplikace Gaußovy věty dala ospravedlnit díky aproximaci sobolevovských funkcí s nulovou stopou pomocí funkcí hladkých s kompaktním nosičem. V této souvislosti zmiňme, že obecně nemůžeme použít řešení jako testovací funkci ve slabé formulaci, tedy nevíme, zda je energetická rovnost splněna. Na druhou stranu, jak uvidíme v další části, můžeme získat energetickou rovnost pro jistou aproximaci naší úlohy a limitním přechodem získáme místo rovnosti nerovnost. Dostáváme tedy:

Definice 2.2. Slabé řešení Navier–Stokesových rovnic splňuje *silnou energetickou nerovnost*, jestliže

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\mathbf{u}(t,\cdot)|^2\,\mathrm{d}x + \int_s^t\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau \le \frac{1}{2}\int_\Omega |\mathbf{u}(s,\cdot)|^2\,\mathrm{d}x + \int_s^t \langle\mathbf{f},\mathbf{u}\rangle\,\mathrm{d}\tau \tag{2.3}$$

pro s.v. $s \ge 0$ (včetně $s = 0$) a všechna $t \in (s,T]$. Slabé řešení splňuje *energetickou nerovnost*, jestliže je (2.3) splněno pro $s = 0$ a s.v. $t \in (0,T)$. Slabé řešení, které splňuje energetickou nerovnost, budeme nazývat *Leray–Hopfovo slabé řešení.*

Poznamenejme, že zde není terminologie jednotná a někdy se Leray–Hopfovým řešením nazývá slabé řešení splňující silnou energetickou nerovnost.

Všimněme si, že slabou formulaci jsme formálně získali z klasické formulace; ta vyplynula z bilančních rovnic v integrálním tvaru za předpokladu, že řešení je dostatečně hladké. Zdánlivě jsme tedy odvodili slabou formulaci za předpokladu, že řešení má takovou hladkost, že existuje klasické řešení, tj. pokud klasické řešení neexistuje, nemá smysl ani slabá formulace. Naštěstí lze slabou formulaci odvodit přímo z integrálních bilančních rovnic. Toho si všiml již C.W. Oseen ve své knize [39], kde ovšem místo Lebesgueova integrálu pracoval s vícerozměrným integrálem Riemannovým. Tím jsou jeho podmínky na řešení o něco silnější, než kolik je třeba při použití Lebesgueova integrálu.

V příští kapitole naznačíme důkaz existence Leray–Hopfova slabého řešení a v dalších částech si řekneme něco o jeho vlastnostech. Všimněme si též, že slabým řešením je pouze pole rychlosti, musíme tedy také ukázat, jak z jeho znalosti získat tlak. Nejprve ale uveďme ještě další tři definice řešení Navier–Stokesových rovnic.

Prvním bude tzv. *vhodné slabé řešení* („suitable weak solution“). Tento pojem pochází z článku [8] autorů Luise Caffarelliho, Roberta Kohna a Louise Nirenberga, kteří na základě předchozích prací Vladimira Scheffera tento pojem zavedli za účelem studia lokální regularity řešení Navier–Stokesových rovnic. Přesněji:

Definice 2.3. Nechť $\mathbf{f} \in L^2(0,T;\mathbf{L}^{\frac{6}{5}}(\Omega))$, $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{L}^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Dvojice $(\mathbf{u},p)$ je vhodným slabým řešením naší úlohy (1.2)–(1.5), jestliže

- $\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;\mathbf{W}^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))$
- $p \in L^{\frac{3}{2}}((0,T)\times\Omega)$
- dvojice $(\mathbf{u},p)$ je distributivním řešením systému (1.2)
- počáteční podmínka je splněna ve smyslu (2.1)

- je splněna zobecněná energetická nerovnost, tj. pro každé $\Phi \in C_0^\infty((0,T)\times\Omega)$, $\Phi \geq 0$ a s.v. $t \in (0,T)$, platí

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\mathbf{u}(t,\cdot)|^2\Phi(t,\cdot)\,\mathrm{d}x + \int_0^t\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\mathbf{u}|^2\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \Delta\Phi\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau + \int_0^t\int_\Omega \Big(\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 + p\Big)\mathbf{u}\cdot\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^t\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau.$$

Zobecněná energetická nerovnost se ve formě rovnosti dostane formálně testováním (1.4) funkcí $\mathbf{u}\Phi$ a integrací přes $(0,t)$. Díky konstrukci řešení pomocí vhodné aproximace a následným limitním přechodem se dostane místo rovnosti nerovnost. Podobně jako u slabého řešení totiž není jasné, že můžeme pro distributivní řešení splňující pouze předpoklady o hladkosti z Definice 2.3 zobecněnou energetickou nerovnost získat. Dále poznamenejme, že díky vlastnostem $\mathbf{u}$ a p je možno dostat odhad na časovou derivaci $\mathbf{u}$, rychlost je tedy slabě spojitá a splnění počáteční podmínky má smysl. Zřejmě vhodné slabé řešení je řešením slabým, lze pak ukázat, že je dokonce i Leray–Hopfovým. Na druhou stranu, při dodatečném předpokladu na počáteční podmínku a hladkost oblasti je možno ukázat, že tlak příslušný slabému řešení patří do $L^{\frac{5}{3}}((0,T)\times\Omega)$. Pro slabé řešení (i když splňuje energetickou nerovnost) ale obecně nevíme, zda je splněna zobecněná energetická nerovnost. Obecně tedy slabé řešení nemusí být vhodným slabým řešením. Nakonec poznamenejme, že vhodné slabé řešení existuje za vhodných předpokladů na $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{f}$ a Ω, které jsou restriktivnější než podmínky uvedené v definici výše, viz např. [8] nebo [30]. V češtině je potom možno si něco o tomto typu řešení jakož i o některých aplikacích přečíst v online dostupných skriptech [42].

Další typ řešení, o kterém se stručně zmíníme, se v anglicky psané literatuře nazývá „mild solution“ a byl zaveden v práci [18]. Pokud víme, adekvátní český překlad neexistuje, snad by se dalo mluvit o „jemném“ či „mírném“ řešení, ale ani jeden překlad nám nepřipadá vhodný. Jeho myšlenka spočívá v tom, že si konvektivní člen přesuneme na pravou stranu a pomocí Duhamelovy formule zapíšeme řešení příslušného lineárního problému, tj. dostáváme následující integrální identitu

$$\mathbf{u}(t,x) = \mathrm{e}^{tA}\mathbf{u}_0 - \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)A}P\,\mathrm{div}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})\,\mathrm{d}s,$$

kde e^{tA} označuje příslušnou Stokesovu semigrupu. Tento typ řešení je vhodný pro studium řešení, které je lokální v čase nebo odpovídá malým datům v různých funkčních prostorech, obecnějších než těch, které připouštíme u slabého řešení. Na druhou stranu, díky způsobu důkazu existence, který je založen na aplikaci Banachovy věty o pevném bodu v prostorech typu $C([0,T];X)$ pro vhodný Banachův prostor X, není možno dokázat existenci globálního řešení v čase bez omezení na velikost dat v nějakém prostoru. My se nadále tímto typem řešení nebudeme zabývat.

Posledním typem řešení je velmi slabé řešení, viz např. [3], [16]. Jeho definice je založena na tom, že ve slabé formulaci se všechny prostorové a časové derivace pomocí aplikace Gaußova vzorce převedou na testovací funkce a předpokládá se lepší integrovatelnost $\mathbf{u}$ přes časoprostor. Tento typ řešení je zajímavý spíše pro nehomogenní okrajovou podmínku či nenulovou divergenci, takže ho nebudeme dále zmiňovat.

3. Existence slabého řešení

V této kapitole si ukážeme existenci slabého řešení, a dokonce i Leray–Hopfova řešení, pro omezené oblasti v $\mathbb{R}^N$, $N = 2, 3$. Vzhledem k tomu, že důkaz je poměrně dobře znám a je z pohledu teorie parabolických rovnic relativně standardní, omezíme se na hlavní kroky důkazu a na případně rozdíly vůči důkazu pro nelineární parabolickou rovnici. Na případné další detaily odkazujeme čtenáře na [41] či na standardní monografie [34] či [44].

Máme následující tvrzení:

Věta 3.1. *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N = 2, 3$, *je omezená oblast,* $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{L}^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$, $\mathbf{f} \in L^2(0, T; \mathbf{W}^{-1,2}(\Omega))$. *Potom existuje alespoň jedno Leray–Hopfovo slabé řešení úlohy* (1.2)–(1.5). *Navíc, toto řešení splňuje*

$$\lim_{t\to 0^+} \|\mathbf{u}(t, \cdot) - \mathbf{u}_0\|_2 = 0.$$

Poznámka 3.2. Tvrzení Věty 3.1 platí i pro $\mathbf{f} \in L^2(0, T; (\mathbf{W}^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))^*)$. Potíže ale nastanou v okamžiku, kdy se budeme snažit zrekonstruovat tlak (viz Kapitola 4), obecně v tomto případě nemusí existovat. Proto budeme uvažovat silnější podmínku na pravou stranu.

Idea důkazu Věty 3.1. Nejprve si uvědomme, že splnění počáteční podmínky v silném smyslu je důsledkem slabé spojitosti a energetické nerovnosti. Přesněji, slabá spojitost nám dává

$$\liminf_{t\to 0^+} \|\mathbf{u}(t, \cdot)\|_2 \leq \|\mathbf{u}_0\|_2,$$

zatímco energetická nerovnost implikuje

$$\limsup_{t\to 0^+} \|\mathbf{u}(t, \cdot)\|_2 \geq \|\mathbf{u}_0\|_2.$$

Protože

$$\lim_{t\to 0^+} \mathbf{u}(t, \cdot) = \mathbf{u}_0$$

slabě v $\mathbf{L}^2(\Omega)$, plyne odsud a z vlastností Hilbertových prostorů silná konvergence. Dále připomeňme, že v důsledku toho, v jakých prostorech leží $\mathbf{u}$ a její časová derivace, je nutně $\mathbf{u}$ slabě spojitá v $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Stačí tedy dokázat existenci slabého řešení, patřícího do příslušných prostorů, takového, že nabývá počáteční podmínku $\mathbf{u}_0$ a splňuje energetickou nerovnost.

Aproximativní řešení budeme konstruovat pomocí Galerkinovy metody. Nechť $\{\mathbf{w}^i\}_{i=1}^\infty$ tvoří úplný ortogonální systém v prostoru $\mathbf{W}^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$ a nechť tento systém je ortonormální v $\mathbf{L}^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$. Příkladem takového systému jsou vhodně nanormované vlastní funkce Stokesova operátoru. Hledejme pro každé $n \in \mathbb{N}$ funkci

$$\mathbf{u}^n(t, x) = \sum_{i=1}^n c_i^n(t)\mathbf{w}^i(x)$$

tak, že pro každé $j = 1, 2, \dots, n$ platí

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Big(\frac{\partial \mathbf{u}^n}{\partial t} \cdot \mathbf{w}^j + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n) \cdot \mathbf{w}^j + \nu \nabla \mathbf{u}^n : \nabla \mathbf{w}^j\Big) \,\mathrm{d}x \\ = \langle \mathbf{f}, \mathbf{w}^j \rangle_{\mathbf{W}^{-1,2}(\Omega), \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)}, \\ \mathbf{u}^n(0,x) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{w}^i, \qquad a_i = \int_\Omega \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{w}^i \,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{3.1}$$

Systém (3.1) je vlastně systémem obyčejných diferenciálních rovnic pro neznámé funkce $c_j^n(t)$, $j = 1, \dots, n$, a na základě Carathéodoryho teorie dostáváme existenci (lokálně v čase) zobecněného řešení. Toto řešení bude globální v čase, pokud se nám podaří ukázat jisté apriorní odhady.

Všimněme si, že když vynásobíme j-tou rovnici funkcí $c_j^n(t)$ a sečteme pro j od 1 do n, dostáváme díky tomu, že konvektivní člen je nulový (viz (2.2)), rovnost

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega |\mathbf{u}^n(t,\cdot)|^2 \,\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla \mathbf{u}^n|^2 \,\mathrm{d}x = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}^n \rangle.$$

Odsud plyne nejen to, že řešení existuje na maximálním možném intervalu $(0,T)$, ale také to, že

$$\|\mathbf{u}^n\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} + \|\mathbf{u}^n\|_{L^2(0,T;\mathbf{W}^{1,2}(\Omega))} \le C(\mathbf{u}_0, \mathbf{f})$$

a je splněna aproximativní energetická rovnost

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\mathbf{u}^n(t,\cdot)|^2 \,\mathrm{d}x + \int_0^t \int_\Omega |\nabla \mathbf{u}^n|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}^n \rangle \,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}\int_\Omega |\mathbf{u}^n(0,\cdot)|^2 \,\mathrm{d}x.$$

Nyní, přímo z definice a z rovnosti (3.1), můžeme získat následující duální odhad časové derivace

$$\begin{aligned}&\Big\|\frac{\partial \mathbf{u}^n}{\partial t}\Big\|_{L^q(0,T;(\mathbf{W}^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))^*)} \\ &\le C \sup_{\boldsymbol{\varphi} \in L^{q'}(0,T;\mathbf{W}^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)); \|\boldsymbol{\varphi}\| \le 1} \int_0^T \int_\Omega \Big(\nabla \mathbf{u}^n \nabla \boldsymbol{\varphi} + (\mathbf{u}^n \otimes \mathbf{u}^n) : \nabla \boldsymbol{\varphi}\Big) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + C(\mathbf{f}).\end{aligned}$$

Použitím odhadu

$$\|\mathbf{u}^n\|_4^2 \le \begin{cases} \|\mathbf{u}^n\|_2^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}_n\|_{1,2}^{\frac{3}{2}}, & N = 3 \\ \|\mathbf{u}^n\|_2 \|\mathbf{u}_n\|_{1,2}, & N = 2, \end{cases}$$

pak dostáváme (hlavní omezení pochází z konvektivního členu) že pro $N = 3$ můžeme brát $q = \frac{4}{3}$, zatímco pro $N = 2$ máme dokonce $q = 2$, přičemž posloupnost $\frac{\partial \mathbf{u}^n}{\partial t}$ je omezená v prostoru $L^q(0,T;(W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))^*)$. Nyní můžeme přistoupit k limitním přechodům. Z apriorních odhadů dostáváme, že vybraná podposloupnost slabých řešení konverguje slabě k jisté funkci $\mathbf{u}$ v prostoru $L^2(0,T;\mathbf{W}^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))$ a slabě * v prostoru $L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$. Dále časová derivace konverguje slabě k $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ v prostoru $L^q(0,T;(\mathbf{W}^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))^*)$. To ale k limitnímu přechodu nestačí, potřebujeme silnou konvergenci k limitnímu přechodu v nelineárním členu. Ta je důsledkem tzv. Aubin–Lionsova lemmatu (viz např. [41]), díky odhadu v prostorových proměnných v „lepším prostoru“ a alespoň nějakého odhadu časové derivace dostáváme silnou konvergenci v $L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$, což nám umožňuje přejít nejenom v rovnici, ale i v energetické nerovnosti. Nakonec se ukáže, že naše konstrukce aproximativního řešení, viz $(3.1)_2$, zaručuje splnění počáteční podmínky $\mathbf{u}_0$ ve slabém smyslu. Důkaz je hotov. □

4. Existence tlaku

Cílem je zjistit, zda slabá formulace nezničila informaci o tlaku, tj. zda existuje pro každé $t \in (0,T)$ distribuce $p(t,\cdot) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (popř. hladší) tak, že

$$\Big\langle \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \boldsymbol{\varphi} \Big\rangle + \int_\Omega (\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x + \nu \int_\Omega \nabla\mathbf{u} : \nabla\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x + \langle \nabla p, \boldsymbol{\varphi}\rangle = \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}\rangle$$
$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega) \text{ a s.v. } t \in (0,T).$$

Pro obecnou situaci, kdy naše řešení z předchozí kapitoly je zkonstruované Galerkinovou metodou, máme pouze

Věta 4.1. *Nechť* $\mathbf{u}$ *je slabé řešení Navier–Stokesových rovnic zkonstruované Galerkinovou metodou,* $\Omega \in C^{0,1}$, $N = 2,3$.
Potom existuje $P : (0,T)\times\Omega \to R$ *tak, že* $P(t) \in L^2(\Omega)$, $\forall t \in (0,T)$, *a splňuje*

$$\int_0^t \Big(-\nu \int_\Omega \nabla\mathbf{u} : \nabla\boldsymbol{\chi}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega (\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})\cdot\boldsymbol{\chi}\,\mathrm{d}x + \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\chi}\rangle \Big)\,\mathrm{d}\tau$$
$$= \int_\Omega P(t)\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\chi}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \mathbf{u}(t)\cdot\boldsymbol{\chi}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \mathbf{u}_0\cdot\boldsymbol{\chi}\,\mathrm{d}x, \quad \forall \boldsymbol{\chi} \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega).$$

Důkaz je možno nalézt např. v [21] či v [42].

Poznámka 4.2. Obecně není ale pravda, že $P(t) = \int_0^t p(\tau)\,\mathrm{d}\tau$, není zřejmé, že náš „tlak“ je skutečně primitivní funkcí k hledanému tlaku. Tedy získaný výsledek není příliš uspokojivý.

Pro případ, kdy je oblast Ω hladká, je možné předchozí výsledek zesílit:

Věta 4.3. *Nechť* $\Omega \in C^2$, $\mathbf{u} \in L^q(0,T;\mathbf{L}^s(\Omega))$, $\mathbb{H}_i \in L^{q_i}(0,T;\mathbb{L}^{s_i}(\Omega))$, $i = 1,2$, *jsou takové, že*

$$-\int_0^T \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_0^T \int_\Omega (\mathbb{H}_1 + \mathbb{H}_2) : \nabla\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

pro všechna $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{C}_0^\infty((0,T)\times\Omega)$ *s* $\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi} = 0$. *Potom existují skalární funkce* $p_i \in L^{q_i}(0,T;L^{s_i}(\Omega))$, $i = 1,2$, *a skalární harmonická funkce* $p_h \in L^q(0,T;L^{s^*}(\Omega))$ *s* $\nabla p_h \in L^q(0,T;\mathbf{L}^s(\Omega))$, $s^* = \frac{Ns}{N-s}$ *pro* $s < N$, $s^* \in [1,\infty)$ *pro* $s = N$ *a* $s^* \in [1,\infty]$ *pro* $s > N$ *taková, že*

$$-\int_0^T \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_0^T \int_\Omega (\mathbb{H}_1 + \mathbb{H}_2) : \nabla\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$
$$+ \int_0^T \int_\Omega (p_1 + p_2)\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^T \int_\Omega \nabla p_h \cdot \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

pro všechna $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{C}_0^\infty((0,T)\times\Omega)$. *Navíc*

$$\|p_i\|_{L^{q_i}(0,T;L^{s_i}(\Omega))} \le C\|\mathbb{H}_i\|_{L^{q_i}(0,T;\mathbb{L}^{s_i}(\Omega))}, \quad i = 1,2,$$

$$\|\nabla p_h\|_{L^q(0,T;\mathbf{L}^s(\Omega))} \le C\|\mathbf{u}\|_{L^q(0,T;\mathbf{L}^s(\Omega))}.$$

Poznámka 4.4. Tuto větu lze použít tak, že za $\mathbb{H}_1$ vezmeme $\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}$ a za $\mathbb{H}_2$ funkci $-\nu\nabla\mathbf{u} - \mathbb{F}$, $\mathbf{f} = \operatorname{div}\mathbb{F}$. Význam této věty spočívá v tom, že umožňuje uvažovat poměrně obecnou pravou stranu, na druhou stranu ale ukazuje, že tlak se obecně nechová tak, jak bychom mohli naivně očekávat. Konkrétně, harmonická část tlaku p_h, která je hladká v prostoru, ale nikoliv v čase, je tím problematickým členem.

Důkaz je možno opět nalézt v [41].

Nakonec si ukažme jinou možnost rekonstrukce tlaku, založenou na vlastnostech řešení jednoho lineárního problému, nestacionárního Stokesova problému

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{g} && \text{v } (0,T)\times\Omega,\\
\operatorname{div}\mathbf{u} &= 0 && \text{v } (0,T)\times\Omega,\\
\mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{na } (0,T)\times\partial\Omega,\\
\mathbf{u}(0) &= \mathbf{u}_0 && \text{v } \Omega.
\end{aligned}$$

Slabá formulace je analogická slabé formulaci pro Navier–Stokesovy rovnice, proto ji nebudeme uvádět. Existence slabého řešení se ukáže stejně jako v případě Navier–Stokesových rovnic, jen máme ušetřenou práci s kompaktností posloupnosti aproximativního řešení a dostaneme okamžitě silnou spojitost v čase. Pokud bychom nyní uvažovali pravou stranu ve tvaru divergence nějaké integrovatelné funkce, dostali bychom opět problém s harmonickou částí tlaku. Proto budeme předpokládat, že pravá strana $\mathbf{f}$ leží v jistém Lebesgueově prostoru.

Pro tento případ máme:

Věta 4.5. *Nechť je počáteční podmínka dostatečně hladká,* $\Omega \in C^2$, *nechť* $\mathbf{g} \in L^t\left(0,T;\mathbf{L}^s(\Omega)\right)$.

Potom jediné řešení také splňuje $\nabla^2\mathbf{u}$, $\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}$, $\nabla p \in L^t(0,T;\mathbf{L}^s(\Omega))$ *a platí*

$$\begin{aligned}
\|\nabla^2\mathbf{u}\|_{L^t(0,T;\mathbb{L}^s(\Omega))} + \left\|\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\right\|_{L^t(0,T;\mathbf{L}^s(\Omega))} + \|\nabla p\|_{L^t(0,T;\mathbf{L}^s(\Omega))}\\
\le C\big(\mathbf{u}_0, \|\mathbf{g}\|_{L^t(0,T;\mathbf{L}^s(\Omega))}\big).
\end{aligned}$$

Důkaz této věty je možno nalézt v [22].

Pokud si vezmeme $\mathbf{g} = -\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} + \mathbf{f}$, dostáváme z předchozí věty:

Věta 4.6. *Nechť* $\mathbf{u}$ *je slabé řešení Navier–Stokesových rovnic a nechť* $\Omega \in C^2$, $\mathbf{f}$ *a* $\mathbf{u}_0$ *jsou dostatečně hladké.*

Potom existuje tlak a Navier–Stokesovy rovnice jsou splněny skoro všude na časoprostoru. Navíc

$$\nabla^2\mathbf{u},\ \tfrac{\partial\mathbf{u}}{\partial t},\ \nabla p \in L^t(0,T;\mathbf{L}^s(\Omega)),\ 1 < s < \tfrac{N}{N-1},\quad \frac{2}{t} + \frac{N}{s} = N+1\ ,\ N = 2,3.$$

Podívejme se, jakou informaci nám to dává pro samotný tlak ve třídimenzionálním případě. Pro zajištění jednoznačnosti budeme předpokládat, že $\int_\Omega p(t,\cdot)\,\mathrm{d}x = 0$ pro s.v. $t \in (0,T)$. Dostáváme

$$p \in L^t(0,T;L^{s^*}(\Omega)),\quad \frac{2}{t} + \frac{3}{s} = N.$$

Pokud požadujeme, aby $t = s^*$, dostáváme ve trojdimenzinálním případě $p \in L^{\frac{5}{3}}\left((0,T)\times\Omega\right)$. Ve dvojdimenzionálním případě potom $p \in L^q\left((0,T)\times\Omega\right)$ pro libovolné $q < 2$.

5. Jednoznačnost a regularita řešení ve dvojrozměrném případě

Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, pak je možno ukázat, že řešení se chová tak, jak bychom si představovali, úloha je korektní („well posed“) ve smyslu Hadamarda. Tedy, řešení (slabé) je jednoznačné, spojitě závislé na datech a tak hladké, jak umožňují data úlohy. Ukažme nejprve

Věta 5.1. *Slabé řešení je ve dvojrozměrném případě jednoznačné.*

Důkaz. Nejprve si uvědomme, že díky tomu, že $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L^2(0,T;(\mathbf{W}^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))^*)$ a $\mathbf{u} \in L^2(0,T;\mathbf{W}^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))$, je $\mathbf{u} \in C(0,T;\mathbf{L}^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega))$ (a též patří do $C([0,T];\mathbf{L}^2(\Omega))$) a platí

$$\Big\langle \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{u} \Big\rangle = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega |\mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}x.$$

Proto můžeme použít řešení jako testovací funkci ve slabé formulaci. Předpokládáme-li, že $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ jsou dvě slabá řešení odpovídající týmž datům a označíme-li $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ jejich rozdíl, pak dostáváme použitím rovnosti typu (2.2)

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega |\mathbf{w}|^2 \,\mathrm{d}x + \nu\int_\Omega |\nabla \mathbf{w}|^2 \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega (\mathbf{w}\cdot\nabla\mathbf{u})\cdot\mathbf{w}\,\mathrm{d}x.$$

Pravou stranu můžeme odhadnout pomocí

$$\Big|\int_\Omega (\mathbf{w}\cdot\nabla\mathbf{u})\cdot\mathbf{w}\,\mathrm{d}x\Big| \le \|\mathbf{w}\|_4^2\|\nabla\mathbf{u}\|_2 \le \frac{1}{2}\nu\|\nabla\mathbf{w}\|_2^2 + C(\nu)\|\mathbf{w}\|_2^2\|\nabla\mathbf{u}\|_2^2$$

a díky nulové počáteční podmínce plyne použitím Gronwallova lemmatu, že $\mathbf{w}$ je nulové, tj. řešení je jednoznačné. □

Díky předchozí větě stačí ukázat regularitu pro řešení, zkonstruované libovolným způsobem. Ukážeme ji pro řešení, které jsme již dříve získali Galerkinovou metodou.

Věta 5.2. *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *je omezená oblast třídy* C^2, $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2((0,T)\times\Omega)$, $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{L}^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$. *Potom libovolné slabé řešení patří navíc do prostorů* $L^2(\varepsilon,T;\mathbf{W}^{2,2}(\Omega)) \cap L^\infty(\varepsilon,T;\mathbf{W}^{1,2}(\Omega))$ *a* $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L^2(\varepsilon,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ *pro libovolné* $\varepsilon > 0$. *Jestliže* $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{W}^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$, *je možno brát* $\varepsilon = 0$.

Důkaz. Díky regularitě řešení stacionárního Stokesova problému je $\|P\Delta\mathbf{u}\|_2$ pro funkce z $\mathbf{W}^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$ ekvivalentní s $\|\mathbf{u}\|_{2,2}$, přičemž P je Helmholtzova projekce vektorových funkcí z $\mathbf{L}^2(\Omega)$ do $\mathbf{L}^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$. Pokud použijeme ke konstrukci řešení bázi složenou s vlastních funkcí Stokesova operátoru a budeme testovat $P\Delta\mathbf{u}^n$ ve smyslu, že j-tou rovnici vynásobíme $\lambda_j c_j^n(t)$ a sečteme přes j, dostaneme identitu

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\mathbf{u}^n(t)\|_2^2 + \nu\|P\Delta\mathbf{u}^n\|_2^2 = \int_\Omega (\mathbf{u}^n\cdot\nabla\mathbf{u}^n)\cdot P\Delta\mathbf{u}^n\,\mathrm{d}x. \tag{5.1}$$

Pravou stranu můžeme odhadnout použitím Hölderovy a Youngovy nerovnosti a interpolačních nerovností pomocí

$$\|P\Delta\mathbf{u}^n\|_2\|\nabla\mathbf{u}^n\|_4\|\mathbf{u}^n\|_4 \le \frac{\nu}{2}\|P\Delta\mathbf{u}^n\|_2^2 + C(\nu)\|\nabla\mathbf{u}^n\|_2^4\|\mathbf{u}^n\|_2^2.$$

Analogicky můžeme rovnici testovat časovou derivací aproximativního řešení a tím nám přibude na levé straně (5.1) i L^2-norma časové derivace. Je-li počáteční podmínka $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{W}^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$, plyne tvrzení z Gronwallovy nerovnosti. Pokud je pouze v $\mathbf{L}^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$, pak výše získanou nerovnost násobíme seřezávací funkcí času, která je nulová kolem hodnoty 0, od hodnoty ε je jedna a je hladká mezi těmito hodnotami. Tvrzení pak opět plyne z Gronwallovy nerovnosti. □

Použitím metody postupného vylepšování regularity je možno ukázat, že za předpokladu hladkosti pravé strany a oblasti Ω je řešení hladké na $(0,T) \times \overline{\Omega}$. Na hladkost až do počátečního času bychom kromě hladkosti počáteční podmínky potřebovali i jisté podmínky kompatibility.

6. Trojrozměrný případ: lokálně hladké řešení, jednoznačnost typu silné = slabé a podmíněná regularita

V poslední části se budeme věnovat otázce dalších vlastností slabých řešení pro $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Nejprve uveďme jednu pomocnou větu, která má ale význam i sama o sobě. Ukazuje totiž, že i když obecně nevíme, zda slabé řešení je pro hladká data hladké, víme alespoň, že je hladké na krátkém čase, popř. globálně, pokud jsou data úlohy dostatečně malá.

Věta 6.1. *Předpokládejme, že* $\mathbf{f} \in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ *a* $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{W}^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$. *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. *Potom existuje* $T^* > 0$ *takové, že existuje slabé řešení Navier–Stokesových rovnic odpovídající daným datům* $\mathbf{u} \in L^2(0,T^*;\mathbf{W}^{2,2}(\Omega)) \cap L^\infty(0,T^*;\mathbf{W}^{1,2}(\Omega))$ *a* $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L^2(0,T^*;\mathbf{L}^2(\Omega))$. *Je-li počáteční podmínka dostatečně malá, je možno brát* $T^* = \infty$.

Důkaz. Pro jednoduchost předpokládejme $\mathbf{f} = \mathbf{0}$. Podobně jako v případě prostorové dimenze dva získáme pro galerkinovskou aproximaci rovnost (5.1). Nyní nejprve použijeme odhad

$$\Big|\int_\Omega (\mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n)\cdot P\Delta \mathbf{u}^n \,\mathrm{d}x\Big| \le \|P\Delta\mathbf{u}^n\|_2 \|\nabla \mathbf{u}^n\|_3 \|\mathbf{u}^n\|_6 \le \frac{\nu}{2}\|P\Delta\mathbf{u}^n\|_2^2 + C(\nu)\|\nabla\mathbf{u}^n\|_2^6,$$

který vede na diferenciální nerovnost

$$y' \le C y^3.$$

Díky lokálnímu existenčnímu výsledku pro příslušnou obyčejnou diferenciální rovnici dostáváme lokální existenci řešení s omezenou L^2-normou gradientu, což podobně jako ve dvojdimenzionálním případě implikuje hladkost výše. Pokud konvektivní člen odhadneme

$$\Big|\int_\Omega (\mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n)\cdot P\Delta \mathbf{u}^n \,\mathrm{d}x\Big| \le \|P\Delta\mathbf{u}^n\|_2 \|\nabla \mathbf{u}^n\|_6 \|\mathbf{u}^n\|_3 \le C_0 \|P\Delta\mathbf{u}^n\|_2^2 \|\nabla\mathbf{u}^n\|_2^{\frac12} \|\mathbf{u}^n\|_2^{\frac12}$$

a připomeneme, že díky konstrukci platí energetická rovnost, tj.

$$\|\mathbf{u}^n(t,\cdot)\|_2 \le \|\mathbf{u}^n(0,\cdot)\|_2 \le \|\mathbf{u}_0\|_2,$$

pak za předpokladu, že v počátečním čase platí

$$C_0 \|\nabla \mathbf{u}_0\|_2^{\frac12} \|\mathbf{u}_0\|_2^{\frac12} \le \nu, \tag{6.1}$$

máme

$$\|\nabla \mathbf{u}^n(t,\cdot)\|_2 \le \|\nabla \mathbf{u}^n(0,\cdot)\|_2 \le \|\nabla \mathbf{u}_0\|_2.$$

Proto nerovnost (6.1) platí na celém intervalu existence slabého řešení, což dává regularitu. □

Výše uvedená lokální existence je důležitá mimo jiné v následující souvislosti. Níže ukážeme, že hladká řešení jsou jednoznačná na třídě Leray–Hopfových řešení. Pokud máme Leray–Hopfovo řešení odpovídající hladkým datům, víme, že výše zkonstruované hladké řešení se na svém intervalu existence shoduje s Leray–Hopfovým řešením, a proto je Leray–Hopfovo řešení lokálně v čase hladké.

Budeme ještě potřebovat jedno tvrzení:

Lemma 6.2. *Nechť dané slabé řešení Navier–Stokesových rovnic* $\mathbf{u}$ *patří do* $\mathbf{L}^4((0,T)\times\Omega)$. *Potom toto slabé řešení splňuje dokonce energetickou rovnost.*

Důkaz je založen na tom, že se ukáže, že časová derivace takového slabého řešení nutně patří do $L^2(0,T;(\mathbf{W}^{1,2}_{0,\mathrm{div}})^*)$, proto je možno použít řešení jako testovací funkci ve slabé formulaci. Zmiňme pouze, že jiné podmínky na řešení, které zaručují splnění energetické nerovnosti, lze nalézt např. v [12] či v [17].

Můžeme tedy přistoupit k formulaci avizovaného tvrzení o jednoznačnosti.

Věta 6.3. *Nechť* $\mathbf{u}$ *je Leray–Hopfovo slabé řešení na* $(0,T)$ *a nechť* $\mathbf{v}$ *je slabé řešení odpovídající týmž datům, pro které navíc platí, že*

$$\mathbf{v} \in L^t(0,T;\mathbf{L}^s(\Omega)), \qquad \frac{2}{t}+\frac{3}{s}=1, \quad 3\le s\le\infty.$$

Potom $\mathbf{v}=\mathbf{u}$ *s.v. na* $(0,T)\times\Omega$.

Důkaz. Naznačíme ideu důkazu pro případ $s>3$. Případ $s=3$ je možno nalézt v [27]. Uvědomme si, že funkci $\mathbf{u}$ nelze použít jako testovací funkci pro slabou formulaci pro $\mathbf{u}$. Máme ale k dispozici energetickou nerovnost. Dále není těžké pomocí předchozího tvrzení ukázat, že můžeme použít jako testovací funkci pro $\mathbf{v}$ jak $\mathbf{u}$ tak i $\mathbf{v}$ a konečně, analogickými úvahami lze ukázat, že $\mathbf{v}$ je dobrá testovací funkce pro $\mathbf{u}$. Celkem tedy, podobně jako v dimenzi dva, dostaneme pro $\mathbf{w}=\mathbf{u}-\mathbf{v}$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega |\mathbf{w}|^2\,\mathrm{d}x + \nu\int_\Omega |\nabla\mathbf{w}|^2\,\mathrm{d}x \le \int_\Omega (\mathbf{w}\cdot\nabla\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}\,\mathrm{d}x.$$

Pomocí Gaußova vzorce převedeme derivaci na $\mathbf{w}$ a odhadneme člen na pravé straně použitím lepší integrability $\mathbf{v}$ jako

$$\frac{\nu}{2}\|\nabla\mathbf{w}\|_2^2 + C(\nu)\|\mathbf{v}\|_s^t\|\mathbf{u}\|_2^2$$

a jednoznačnost plyne z Gronwallova lemmatu. □.

Velmi podobným způsobem, tj. kombinací odhadů výše a věty o regularitě pro $\Omega\subset\mathbb{R}^2$, lze dokázat následující větu:

Věta 6.4. *Nechť* $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ *je omezená oblast třídy* C^2, $\mathbf{f}\in\mathbf{L}^2((0,T)\times\Omega)$, $\mathbf{u}_0\in\mathbf{L}^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$. *Nechť slabé řešení patří navíc do* $L^t(0,T;\mathbf{L}^s(\Omega))$, $\frac{2}{s}+\frac{3}{t}=1$, $s>3$. *Potom toto slabé řešení patří do* $L^2(\varepsilon,T;\mathbf{W}^{2,2}(\Omega))\cap L^\infty(\varepsilon,T;\mathbf{W}^{1,2}(\Omega))$ *a* $\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\in L^2(\varepsilon,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ *pro všechna* $\varepsilon>0$. *Je-li* $\mathbf{u}_0\in\mathbf{W}^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$, *pak je možno brát* $\varepsilon=0$.

Stejně jako pro dvojrozměrnou úlohu, metodou postupného vylepšování hladkosti můžeme ukázat, že řešení je tak hladké, jak umožňují data úlohy.

Tento článek zakončíme pouze výčtem několika dalších vybraných případů, kdy je slabé řešení splňující energetickou nerovnost hladké. Pro jednoduchost se budeme zabývat trochu jinou úlohou, úlohou Cauchyovou na celém $\mathbb{R}^3$ a budeme předpokládat, že pravá strana $\mathbf{f}$ je nulová. Přesněji

Definice 6.5. Nechť $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{L}^2_{\mathrm{div}}(\mathbb{R}^3)$. Potom funkci $\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(0,T;\mathbf{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\mathbb{R}^3))$, jejíž slabá časová derivace $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L^q(0,T;(\mathbf{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\mathbb{R}^3))^*)$ pro jisté $q \geq 1$, nazýváme *slabým řešením Cauchyovy úlohy*, jestliže

$$\Big\langle \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \boldsymbol{\varphi} \Big\rangle_{(\mathbf{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\mathbb{R}^3))^*, \mathbf{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\mathbb{R}^3)} + \int_{\mathbb{R}^3} \Big((\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varphi} + \nu \nabla \mathbf{u} : \nabla \boldsymbol{\varphi} \Big) \,\mathrm{d}x = 0$$

pro všechna $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\mathbb{R}^3)$ a s.v. $t \in (0,T)$ a počáteční podmínka je splněna ve smyslu

$$\lim_{t\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{u}(t,\cdot) \cdot \mathbf{w} \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{u}_0(\cdot) \cdot \mathbf{w} \,\mathrm{d}x$$

pro všechna $\mathbf{w} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$.

Existenci dokonce Leray–Hopfova slabého řešení Cauchyovy úlohy můžeme dokázat pomocí následující metody. Vezměme si $\Omega_n = B_n(0)$ posloupnost koulí postupně vyplňujících celý prostor a posloupnost $\mathbf{u}_0^n$ hladkých funkcí s nosičem v $B_n(0)$ takových, že mají nulovou divergenci a konvergují v $\mathbf{L}^2$-normě k $\mathbf{u}_0$. Na každé kouli existuje řešení podle Věty 3.1. Toto řešení splňuje stejnoměrné odhady v příslušných prostorech a stejně jako při důkazu existence získáme příslušné slabě konvergentní podposloupnosti. Jediný problém je, že tyto podposloupnosti nekonvergují silně na celém $\mathbb{R}^3$, ale jen na omezených podmnožinách. Proto můžeme provést limitní přechod (pomocí diagonálního výběru) jen pro testovací funkce s kompaktním nosičem. Takové funkce jsou ale husté ve $\mathbf{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\mathbb{R}^3)$, odkud plyne existence slabého řešení. Věta o jednoznačnosti silné = slabé se dokazuje podobně jako pro omezené množiny s homogenní Dirichletovou podmínkou, stejně tak příslušné věty o podmíněné regularitě a o lokální existenci hladkých řešení pro hladká data.

Obecné schéma důkazu kritérií regularit je tedy následující. Pro hladké řešení ukážeme apriorní odhady, které jsou nezávislé na čase a tudíž vylučují vznik singularity. Proto je řešení hladké na maximálním možném intervalu. Budeme vždy předpokládat, že studujeme Cauchyovu úlohu na $\mathbb{R}^3$ a naše řešení splňuje energetickou nerovnost. Stejné výsledky by platily i pro úlohu s periodickou okrajovou podmínkou, některá níže uvedená kritéria fungují i na omezených oblastech s vhodnou okrajovou podmínkou, to ale pro nás nebude důležité. Jen zmiňme, že důvodem, proč je Cauchyova úloha či periodické okrajové podmínky jednodušší, je to, že můžeme bez problémů integrovat per partes (používat Gaußovu větu) a nevzniknou nám žádné hraniční členy, které bychom museli kontrolovat.

Omezíme se pouze na přehled základních výsledků. Nejprve připomeňme, že pro

$$\mathbf{u} \in L^t(0,T;\mathbf{L}^s(\mathbb{R}^3)), \qquad \frac{2}{t} + \frac{3}{s} = 1, \quad s > 3, \tag{6.2}$$

je řešení hladké, viz Věta 6.3. Regularita se dá ukázat i pro případ $s = 3$ (tj. $t = \infty$), viz [15], důkaz je ale mnohem technicky obtížnější. Poznamenejme jen, že pro případ, kdy je podmínka (6.2) splněna pouze pro dvě složky rychlosti, lze díky nulové divergenci také dokázat regularitu.

Analogická podmínka na gradient rychlosti je

$$\nabla \mathbf{u} \in L^t(0,T;\mathbb{L}^s(\mathbb{R}^3)), \qquad \frac{2}{t} + \frac{3}{s} = 2, \quad s \geq \frac{3}{2}. \tag{6.3}$$

Hodnoty $s > \frac{3}{2}$ pochází z článku [4], případ $s = \frac{3}{2}$ je pak důsledkem věty o vnoření a práce [15]. Opět poznamenejme, že máme-li informaci o lepší integrabilitě gradientu dvou složek rychlosti (splňující (6.3)) je opět relativně jednoduché díky nulové divergenci rychlosti dokázat, že řešení je hladké. Dále, protože pro $1 < p < \infty$ je $\mathbf{L}^p$-norma vorticity $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{u}$ díky nulové divergenci ekvivalentní $\mathbf{L}^p$-normě gradientu rychlosti, je důkaz regularity pro vorticitu splňující (6.3) pro $\frac{3}{2} \leq s < \infty$ zřejmý. O něco zajímavější je, že i v případě, kdy pouze dvě složky vorticity splňují (6.3), platí regularita, viz [11]. Podobně, je-li

$$p \in L^t(0,T;L^s(\mathbb{R}^3)), \qquad \frac{2}{t} + \frac{3}{s} = 2, \quad s > \frac{3}{2},$$

kde p je tlak příslušný danému slabému řešení, je toto slabé řešení hladké, viz [6].

O něco komplikovanější je situace, kdy je lepší integrovatelnost známa pouze o jedné složce rychlosti. První výsledek v tomto směru, tj. omezenost u_1 v časoprostoru implikuje hladkost řešení naší úlohy, byl dokázán v [38]. Po několika vylepšeních je v současnosti známo, že pro

$$u_1 \in L^t(0,T;L^s(\mathbb{R}^3)), \qquad \frac{2}{t} + \frac{3}{s} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2s}, \quad s \geq \frac{10}{3},$$

je řešení hladké (případ $s > \frac{10}{3}$ viz [46], hraniční hodnota $s = \frac{10}{3}$ potom viz [25]). Pro gradient jedné složky rychlosti se ví, že když

$$\nabla u_1 \in L^t(0,T;\mathbf{L}^s(\mathbb{R}^3)), \qquad \frac{2}{t} + \frac{3}{s} = \frac{23}{12}, \quad s \in [2,3],$$

potom řešení je hladké, viz [47]. Analogický výsledek pouze pro jednu složku vorticity není známý.

Je zajímavé, že pro derivaci rychlostního pole v jednom směru je situace lepší. Přesněji, pro

$$\partial_1 \mathbf{u} \in L^t(0,T;\mathbf{L}^s(\mathbb{R}^3)), \qquad \frac{2}{t} + \frac{3}{s} = 2, \quad s \geq \frac{27}{16},$$

je řešení hladké, viz [28] a [9]. V práci [40] bylo mimo jiné ukázáno, že pro hladkost slabého řešení stačí místo celého gradientu kontrolovat jen dvě složky, tj.

$$\partial_1 u_1, \partial_2 u_2 \in L^t(0,T;L^s(\mathbb{R}^3)), \qquad \frac{2}{t} + \frac{3}{s} = 2, \quad s > \frac{3}{2}.$$

Konečně, v práci [10] bylo ukázáno, že jistá hladkost pouze jedné složky gradientu rychlosti zaručuje hladkost slabého řešení (první takový výsledek byl ukázán v [40]), tedy stačí vědět buď

$$\partial_i u_j \in L^t(0,T;L^s(\mathbb{R}^3)), \qquad \frac{2}{t} + \frac{3}{s} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2s}, \quad s > 3, \quad i \neq j,$$

nebo

$$\partial_i u_i \in L^t(0,T;L^s(\mathbb{R}^3)), \qquad \frac{2}{t}+\frac{3}{s}=\frac{3}{4}+\frac{3}{2s}, \quad s>2.$$

Z dalších výsledků pak zmiňme [43], kde autoři ukázali, že pro hladkost řešení Cauchyovy úlohy stačí vědět, že tlak je omezený zdola a výsledky zaručující hladkost řešení, pokud je směr vorticity či rychlosti dostatečně hladký ([13], [5], [45]). Existuje celá řada dalších výsledků, které pro zaručení hladkosti využívají vyšší hladkost v Běsovových prostorech, popř. kombinují odhady různých veličin, ale tyto výsledky nepokládám za příliš zajímavé z pohledu lepšího pochopení případného vzniku singularity či zachování regularity řešení začínajícího z hladké počáteční podmínky.

7. Závěr

Tato práce se zabývala klasickými i novějšími výsledky souvisejícími s problémem regularity slabých řešení nestlačitelných Navier–Stokesových rovnic. Po představení modelu a formulaci různých typů řešení byla ukázána existence Leray–Hopfova slabého řešení a jeho dodatečné vlastnosti (jednoznačnost, regularita ve dvojrozměrném případě, jednoznačnost typu silné = slabé a podmíněná regularita (Prodi–Serrinovy podmínky) ve trojrozměrném případě). Konečně, pro Cauchyovu úlohu bylo představeno několik podmínek na různé veličiny, které zaručují hladkost řešení.

Reference

[1] `http://www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equations/`.

[2] R. A. Adams: *Sobolev spaces*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 65, Academic Press, New York-London, 1975.

[3] H. Amann: *On the strong solvability of the Navier-Stokes equations*, J. Math. Fluid Mech. **2** (2000), 16–98.

[4] H. Beirão da Veiga: *A new regularity class for the Navier–Stokes equations in R^n*, Chin. Ann. Math. Ser. B **16** (1995), 407–412.

[5] L. Berselli, H. Beirão da Veiga: *On the regularizing effect of the vorticity direction in incompressible viscous flows*, Differential Integral Equations **15** (2002), 345–356.

[6] L. Berselli, G. P. Galdi: *Regularity criteria involving the pressure for the weak solutions to the Navier-Stokes equations*, Proc. Am. Math. Soc. **130** (2002), 3585–3595.

[7] F. Boyer, P. Fabrie: *Elément d'analyse pour l'étude de quelque modèles découlements de fluides visqueux incompressibles*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.

[8] L. Caffarelli, R. Kohn, L. Nirenberg: *Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations*, Commun. Pure Appl. Math. **35** (1982), 771–831.

[9] C. Cao: *Sufficient conditions for the regularity to the 3D Navier-Stokes equations*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **26** (2010), 1141–1151.

[10] C. Cao, E. S. Titi: *Global regularity criterion for the 3D Navier-Stokes equations involving one entry of the velocity gradient tensor*, Arch. Ration. Mech. Anal. **202** (2011), 919–932.

[11] D. Chae, H. J. Choe: *Regularity of solutions to the Navier–Stokes equation*, Electron. J. Differ. Equ. **5** (1999), 1–7.

[12] A. Cheskidov, S. Friedlander, R. Shvydkoy: *On the energy equality and weak solutions of the 3D Navier–Stokes equations*, Advances in Mathematical Fluid Mechanics, 171–175, Springer, Berlin, 2010.

[13] P. Constantin, C. Fefferman: *Direction of vorticity and the problem of global regularity for the Navier-Stokes equations*, Indiana Univ. Math. J. **42** (1993), 775–789.

[14] P. Constantin, C. Foias: *Navier-Stokes Equations*, Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1988.

[15] L. Eskauriaza, G. Seregin, V. Šverák: *$L^{3,\infty}$-solutions of Navier-Stokes equations and backward uniqueness*, Uspekhi Mat. Nauk **58** (2003), 3–44; translation in Russian Math. Surveys **58** (2003), 211–250.

[16] R. Farwig, H. Kozono, H. Sohr: *Very weak, weak and strong solutions to the instationary Navier-Stokes system*, Topics on Partial Differential Equations, 1–54, Jindřich Nečas Cent. Math. Model. Lect. Notes, 2, Matfyzpress, Prague, 2007.

[17] R. Farwig, Y. Taniuchi: *On the energy equality of Navier-Stokes equations in general unbounded domains*, Arch. Math. (Basel) **95** (2010), 447–456.

[18] H. Fujita, T. Kato: *On the Navier-Stokes initial value problem I*, Arch. Rat. Mech. Anal. **16** (1964), 269–315.

[19] H. Gajewski, K. Gröger, K. Zacharias: *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen*, Akademie–Verlag Berlin, 1974.

[20] G. P. Galdi: *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations. Steady-state Problems*, 2nd ed., Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2011.

[21] G. P. Galdi: *An introduction to the Navier-Stokes initial-boundary value problem*, G. P. Galdi et al. (eds.), Fundamental Directions in Mathematical Fluid Mechanics, Basel: Birkhäuser, 1–70, 2000.

[22] Y. Giga, H. Sohr: *Abstract L^p estimates for the Cauchy problem with applications to the Navier–Stokes equations in exterior domains*, J. Funct. Anal. **102** (1991), 72–94.

[23] M. E. Gurtin: *An Introduction to Continuum Mechanics*, Academic Press, 1981.

[24] E. Hopf: *Über die Anfangswertaufgabe für die Hydrodynamischen Gleichungen*, Math. Nachrichten **4** (1951), 213–231.

[25] X. Jia, Y. Zhou: *Remarks on regularity criteria for the NavierStokes equations via one velocity component*, to appear in Nonlinear Analysis: Real Worlds Applications.

[26] M. V. Korobkov, K. Pileckas, R. Russo: *Solution of Leray's problem for stationary Navier-Stokes equations in plane and axially symmetric spatial domains*, ArXiv:1302.0731.

[27] H. Kozono, H. Sohr: *Remark on uniqueness of weak solutions to the Navier-Stokes equations*, Analysis **16** (1996), 255–271.

[28] I. Kukavica, M. Ziane: *Navier-Stokes equations with regularity in one direction*, J. Math. Phys. **48** (2007), 10 pp.

[29] O. A. Ladyzhenskaya: *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Fluid*, Gordon and Breach, 1969.

[30] O. A. Ladyzhenskaya, G. A. Seregin: *On partial regularity of suitable weak solutions to the three-dimensional Navier-Stokes equations*, J. Math. Fluid Mech. **1** (1999), 356–387.

[31] J. Leray: *Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes de l'hydrodynamique*, Journ. de Math. **12** (1933), 1–82.

[32] J. Leray: *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace*, Acta Math. **63** (1934), 193–248.

[33] J.-L. Lions: *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris, 1969.

[34] P.-L. Lions: *Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Volume I: Incompressible Models*, Clarendon Press, Oxford, 1996.

[35] J. Málek, K. R. Rajagopal: *Mathematical issues concerning the Navier-Stokes equations and some of its generalizations*, In: Evolutionary equations. Vol. II, 371–459, Handb. Differ. Equ., Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2005.

[36] J. Nečas, M. Růžička, V. Šverák: On Leray's self-similar solutions of the Navier-Stokes equations, Acta Math. **176** (1996), 283–294.

[37] J. Neustupa: *Navierovy–Stokesovy rovnice: regularita nebo „blow-up"?*, Pokroky Mat. Fyz. Astron. **51** (2006), 187–197.

[38] J. Neustupa, P. Penel: *Regularity of a suitable weak solution to the Navier–Stokes Equations as a consequence of regularity of one velocity component*, in: J. F. Rodrigues, A. Sequeira, J. Videman (eds.), Applied Nonlinear Analysis, Kluwer-Plenum 1999, 391–402.

[39] C. W. Oseen: *Neuere Methoden in der Hydrodynamik*, Akad. Verlagsgesellschaft M.B.H., Leipzig, 1927.

[40] P. Penel, M. Pokorný: *Some new regularity criteria for the Navier–Stokes equations containing the gradient of velocity*, Appl. Math. **49** (2004), 483–493.

[41] M. Pokorný: *Navier–Stokesovy rovnice*, `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~pokorny/NS.html`.

[42] M. Pokorný: *Regularita řešení Navier–Stokesových rovnic*, `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~pokorny/regularita_NS.html`.

[43] G. Seregin, V. Šverák: *Navier-Stokes equations with lower bounds on the pressure*, Arch. Ration. Mech. Anal. **163** (2002), 65–86.

[44] R. Temam: *Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis*, Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2001.

[45] A. Vasseur: *Regularity criterion for 3D Navier-Stokes equations in terms of the direction of the velocity*, Appl. Math. **54** (2009), 47–52.

[46] Y. Zhou, M. Pokorný: *On a regularity criterion for the Navier-Stokes equations involving gradient of one velocity component*, J. Math. Phys. **50** (2009), 11 pp.

[47] Y. Zhou, M. Pokorný: *On the regularity of the solutions of the Navier-Stokes equations via one velocity component*, Nonlinearity **23** (2010), 1097–1107.

Milan Pokorný, Matematický ústav Univerzity Karlovy, Matematicko–fyzikální fakulta Univerzity Karlovy v Praze, Sokolovská 83, 186 75 Praha, Česká republika,
e-mail: `pokorny@karlin.mff.cuni.cz`