VYSVĚTLENÍ JEDNÉ DŮKAZOVÉ METODY FERMATOVY HYPOTÉZY UŽITÍM TEORIE DĚLITELNOSTI

LADISLAV SKULA

ABSTRAKT. V článku je podáno vysvětlení možného použití teorie dělitelnosti pro důkaz Fermatovy hypotézy v článku L. Kocandy [1], ve kterém se autor dopustil chyby. Účelem tohoto příspěvku je podat podrobnější vysvětlení tohoto nedostatku.

1. Úvod

Fermatova hypotéza v současné matematické terminologii je následující tvrzení:

Rovnice

$$x^n + y^n = z^n, \tag{1.1}$$

kde n je přirozené číslo ≥ 3, nemá žádné řešení v přirozených číslech x, y, z.

Pierre de Fermat (1601–1665) dokázal tuto hypotézu pro $n = 4$. Z tohoto důvodu stačí při důkazu Fermatovy hypotézy omezit se jen na liché prvočíselné exponenty n. Dále pro eventuelní řešení této hypotézy je možno předpokládat:

$$\text{přirozená čísla } x, y, z \text{ jsou po dvou nesoudělná.} \tag{1.2}$$

Předpokládejme, že x, y, z jsou přirozená čísla splňující rovnici (1.1) a n je liché přirozené číslo ≥ 3. Jestliže $z \geq x + y$, pak $z^n \geq (x+y)^n > x^n + y^n = z^n$, což je spor. Tudíž platí

$$z > x, \quad z > y, \quad x + y > z. \tag{1.3}$$

Jelikož platí

$$z^n = x^n + y^n = (x+y) \cdot \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} x^{n-k} y^{k-1}, \tag{1.4}$$

můžeme o číslech x, y, z ještě předpokládat:

$$\gcd\{x + y, z\} > 1. \tag{1.5}$$

Podmínku (1.5) můžeme také nahradit silnější podmínkou

$$\text{jestliže } \pi \text{ je prvočíslo, které dělí číslo } x + y, \text{pak } \pi \text{ dělí číslo } z. \tag{1.6}$$

2010 *MSC.* Primární 11D41; Sekundární 11A05.

Klíčová slova. Fermatova hypotéza.

Práce byla podporována projektem A-Math-Net – Síť pro transfer znalostí v aplikované matematice (CZ.1.07/2.4.00/17.0100).

Označní 1.1. Z důvodu jednoduchosti budeme největšího společného dělitele dvou přirozených čísel ξ, η značit symbolem

$$(\xi, \eta) := \gcd\{\xi, \eta\}.$$

2. Přirozená čísla x, y, z

Budeme v dalším předpokládat, že x, y, z jsou přirozená čísla splňující podmínky (1.2), (1.3), tedy

$$(x, y) = (x, z) = (y, z) = 1, \quad z > x, \quad z > y, \quad x + y > z.$$

Zřejmě platí

Tvrzení 2.1. *Číslo $x + y - z$ je přirozené číslo a čísla $(x, z - y), (y, z - x)$ jsou nesoudělná a dělí číslo $x + y - z$.*

Označní 2.2. Položíme

$$c := c(x, y, z) = \frac{x + y - z}{(x, z - y) \cdot (y, z - x)}.$$

Podle Tvrzení 2.1 je číslo $c = c(x, y, z)$ přirozené číslo a dále platí:

Tvrzení 2.3. *Jestliže čísla x, y, z splňují podmínku (1.5), pak*

$$c = c(x, y, z) \geq 2.$$

Důkaz. Předpokládejme, že čísla x, y, z splňují podmínku (1.5). Pak existuje prvočíslo π, které dělí čísla $x+y, z$. Jestliže $c = 1$, pak $(x, z-y) \cdot (y, z-x) = x+y-z$. Tudíž $\pi | (x, z - y)$ nebo $\pi | (y, z - x)$ a pak $\pi | x$ nebo $\pi | y$, což je spor s nesoudělností těchto čísel s číslem z. □

Uvedený výsledek v Tvrzení 2.3 vede k otázce, zdali pro některé trojice x, y, z může být $c(x, y, z) > 1$. Jestliže by se totiž ukázalo, že vždy máme $c(x, y, z) = 1$, pak bychom dostali úplný důkaz Fermatovy hypotézy.

M. Kureš nalezl dvě trojice čísel x, y, z, pro které platí $c(x, y, z) > 1$. Jsou to trojice $x = 3$, $y = 7$, $z = 8$ a $x = 5$, $y = 7$, $z = 8$. Jak se snadno nahlédne, máme $c(3, 7, 8) = 2$ a $c(5, 7, 8) = 4$. Podle výpočtu je počet takových trojic pro $z \leq 15$ s podmínkou $x < y$ roven 19. Následující tabulka udává všechny tyto trojice x, y, z, $x < y$ se silnější podmínkou (δ) na čísla x, y, z. Tyto trojice jsou vybrané z předcházejících trojic.

x	y	z	c
7	9	10	2
5	11	12	4
7	11	12	6
3	13	14	2
5	11	14	2
11	14	15	5
13	14	15	6

Tabulka 1

3. Výsledky článku L. Kocandy

Ve svém článku [1] L. Kocanda předpokládá existenci přirozených čísel x, y, z s vlastnostmi (1.2), (1.3), (1.5) a prezentuje spor s jejich existencí. Spor je založen na chybném tvrzení, že číslo $c(x, y, z) = 1$. V tomto případě se pak skutečně dochází ke sporu (ve Tvrzení 2.2). Tato rovnost ale neplatí, jak ukazují citované trojice nalezené M. Kurešem a trojice v Tabulce 1.

Pro kontrolu uvedeme jen jiné označení v článku [1]:

$$z - y = d,\ z - x = v, \quad (x, z - y) = (x, d) = d_1,$$
$$(y, z - x) = (y, v) = v_1, \quad x + y - z = p.$$

4. Další možnosti

Další možnosti spočívají v získání ze vztahu (1.4) nějaké vlastnosti čísel x, y, z týkající se dělitelnosti. Například podmínka (1.6) by se mohla nahradit ještě silnější podmínkou

existuje přirozené číslo $n \geq 3$ takové, že číslo $x + y$ dělí z^n.

Reference

[1] L. Kocanda: *Jak mohl Fermat uvažovat*, Kvaternion **1** (2013), 51–54.
[2] P. Ribeneboim: *13 Lectures on Fermat's Last Theorem*, Springer Verlag, New York, 1979.

Ladislav Skula, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: `skula@fme.vutbr.cz`