VARIAČNÍ TŘÍDY A ZOBRAZENÍ VE VARIAČNÍ POSLOUPNOSTI DRUHÉHO ŘÁDU: EXPLICITNÍ FORMULE

ZBYNĚK URBAN

ABSTRAKT. Třídy diferenciálních forem, reprezentující základní variační objekty (Lagrangián, Eulerova-Lagrangeova forma, Helmholtzova forma), a variační morfismy (Eulerovo-Lagrangeovo zobrazení, Helmholtzovo zobrazení) jsou studovány jako objekty variační posloupnosti ve fibrované mechanice. Jsou odvozeny explicitní formule pro variační třídy a morfismy ve variační posloupnosti druhého řádu v kanonických souřadnicích, umožňující přímé použití v lokálním a globálním inverzním variačním problému.

1. ÚVOD

Koncept variační posloupnosti, kterou v této práci uvažujeme na fibrovaných varietách s 1-rozměrnou bází („fibrovaná mechanika"), zavedl D. Krupka [1] za účelem studia lokálních a globálních charakteristik *Eulerova-Lagrangeova zobrazení* variačního počtu na *konečných* jetových prodlouženích fibrovaných variet, s návazností na myšlenku P. Dedeckera o konstrukci podobného komplexu, jakým je De Rhamův komplex diferenciálních forem, v němž by jedním z morfismů bylo Eulerovo-Lagrangeovo zobrazení. Základními problémy, které jsou studovány v teorii variční posloupnosti, jsou lokální a globální inverzní problém variačního počtu a s ním související struktura Helmholtzových podmínek variačnosti. Je-li zadán systém funkcí (resp. diferenciálních rovnic), pak řešení inverzního variačního problému spočívá v nalezení podmínek, za jakých tento systém splývá s Eulerovými-Lagrangeovými výrazy (resp. rovnicemi) Lagrangeovy funkce, lokálně či globálně definované, kterou hledáme.

Za stejným účelem vznikla teorie variačního bikomplexu různých autorů (Vinogradov, Dedecker a Tulczyjew, Takens, Anderson a Duchamp, Saunders, Olver, aj.) v různých verzích na *nekonečných* jetových prodlouženích fibrovaných variet. Částečné srovnání těchto přístupů lze nalézt v článcích Krupka [4] a Vitolo [13].

Variační posloupnost je konstruována jako faktorová posloupnost De Rhamovy posloupnosti podle její exaktní podposloupnosti *kontaktních* forem. Hlavní význam této posloupnosti spočívá v tom, že její morfismy, mající význam variačních zobrazení (Eulerovo-Lagrangeovo zobrazení, Helmholtzovo zobrazení, atd.), lze zcela

---

2010 *MSC.* Primární 49Q99, 58E30, 58A20; Sekundární 70G75.

Klíčová slova. Variační posloupnost, Lagrangián, Eulerovy-Lagrangeovy výrazy, Helmholtzovy podmínky, kontaktní diferenciální forma, jet, fibrovaná varieta.

Práce byla podpořena grantem č. CZ.1.07/2.3.00/30.0058 MŠMT ČR na Univerzitě Pardubice a projektem A-Math-Net – Síť pro transfer znalostí v aplikované matematice (CZ.1.07/2.4.00/17.0100).

popsat bez ohledu na variační funkcionály, a lze navíc charakterizovat jejich lokální a globální aspekty pomocí kohomologických grup podkladových variet.

Cílem této práce je odvodit základní souřadnicové formule pro variační třídy a zobrazení ve variační posloupnosti druhého řádu pro účely aplikací, zejména pak Helmholtzovy variační podmínky. Zároveň lze text chápat jako úvod do teorie variačních posloupností na fibrovaných varietách. Variační posloupnosti na fibrovaných varietách byly dále studovány v pracích Krupka [2, 3], Musilová [8], Krupka a Šeděnková [6], Vitolo [13] (viz. také reference), Krupka, Urban a Volná [7], a na kontaktních elementech Urban a Krupka [11], Urban [10].

V této práci používáme Ehresmannovu teorii jetů. Podrobný výklad podkladových struktur lze nalézt v monografiích Krupka [5] a Saunders [9].

V celém článku Y označuje fibrovanou varietu nad 1-*rozměrnou bází* X s *projekcí* $\pi : Y \to X$ („fibrovaná mechanika“). Nechť $m = \dim Y - 1$. Připomeňme, že podle definice je π *surjektivní submerze.* Jsou tedy splněny následující dvě ekvivalentní podmínky v každém bodě $y \in Y$: (i) tečné zobrazení k projekci π v bodě y, $T_y\pi : T_yY \to T_{\pi(y)}X$, je surjektivní, (ii) v bodě y existuje souřadnicový systém (V, ψ), $\psi = (s, q^\sigma)$, $1 \leq \sigma \leq m$, a v bodě $\pi(y) \in X$ souřadnicový systém (U, φ), $\varphi = (t)$, takové, že $U = \pi(V)$ a $t \circ \pi = s$. Souřadnicový systém (V, ψ) na Y z podmínky (ii) nazýváme *fibrovaný souřadnicový systém.* Při označení *fibrovaných souřadnic* používáme konvenci $s = t$, tedy píšeme $\psi = (t, q^\sigma)$. Souřadnicový systém (U, φ) na bázi X je podmínkou (ii) určen jednoznačně a nazývá se *asociovaný* k fibrovanému souřadnicovému systému (V, ψ). *Řezem* fibrované variety $\pi : Y \to X$ nazýváme zobrazení $\gamma : U \to Y$ definované na nějaké otevřené podmnožině $U \subset X$ a takové, že $\pi \circ \gamma = \mathrm{id}_U$, kde id_U je identické zobrazení množiny U.

Nechť $r \geq 1$ je celé číslo. Označme J^rY r-té *jetové prodloužení* fibrované variety Y. Prvek $J^r_x\gamma \in J^rY$, nazývaný *r-jet* řezu γ v bodě $x \in X$, je definován jako třída relace ekvivalence na množině hladkých řezů γ fibrované variety $\pi : Y \to X$, definovaných na okolí bodu x s hodnotami v bodě $y = \gamma(x)$: „$\gamma_1 \sim \gamma_2$, existuje-li fibrovaný souřadnicový systém (V, ψ), $\psi = (t, q^\sigma)$, v bodě $y = \gamma_1(x) = \gamma_2(x)$ takový, že $D^l(q^\sigma\gamma_1\varphi^{-1})(\varphi(x)) = D^l(q^\sigma\gamma_2\varphi^{-1})(\varphi(x))$ pro každé $l = 1, 2, \ldots, r$.“ Pokud $\gamma_1 \sim \gamma_2$, pak podle pravidla o derivaci složeného zobrazení snadno ukážeme, že pro libovolný fibrovaný souřadnicový systém $(\bar{V}, \bar{\psi})$, $\bar{\psi} = (\bar{t}, \bar{q}^\sigma)$, v bodě $y = \gamma_1(x) = \gamma_2(x)$ platí $D^l(\bar{q}^\sigma\gamma_1\bar{\varphi}^{-1})(\bar{\varphi}(x)) = D^l(\bar{q}^\sigma\gamma_2\bar{\varphi}^{-1})(\bar{\varphi}(x))$ pro každé $l = 1, 2, \ldots, r$. Na množině J^rY definujeme *kanonické jetové projekce* $\pi^{r,s} : J^rY \to J^sY$, $0 \leq s \leq r$, a $\pi^r : J^rY \to X$ formulemi $\pi^{r,s}(J^r_x\gamma) = J^s_x\gamma$, $\pi^r(J^r_x\gamma) = x$. Je-li $\gamma : U \to Y$ hladký řez fibrované variety Y na otevřené množině $U \subset X$, pak hladké zobrazení $J^r\gamma : U \to J^rY$, definované vztahem $J^r\gamma(x) = J^r_x\gamma$, nazýváme *$r$-jetové prodloužení* řezu γ.

Hladká struktura na Y indukuje *asociovanou* strukturu hladké variety na J^rY následovně. Je-li (V, ψ), $\psi = (t, q^\sigma)$, fibrovaný souřadnicový systém na Y, (U, φ), $\varphi = (t)$, asociovaný souřadnicový systém na X, pak dvojice (V^r, ψ^r), kde $V^r = (\pi^{r,0})^{-1}(V)$ a $\psi^r = (t, q^\sigma, q^\sigma_1, q^\sigma_2, \ldots, q^\sigma_r)$, s reálnými funkcemi $q^\sigma_l : V^r \to \mathbf{R}$ danými vztahem $q^\sigma_l(J^r_x\gamma) = D^l(q^\sigma\gamma\varphi^{-1})(\varphi(x))$, tvoří souřadnicový systém na J^rY, nazývaný *asociovaný fibrovaný souřadnicový systém.* Pro $r \leq 3$ píšeme $\dot{q}^\sigma = q^\sigma_1$, $\ddot{q}^\sigma = q^\sigma_2$, $\dot{\ddot{q}}^\sigma = q^\sigma_3$. Tvoří-li fibrované souřadnicové systémy (V, ψ) hladký atlas na Y, pak asociované fibrované souřadnicové systémy (V^r, ψ^r) tvoří hladký atlas a generují hladkou strukturu variety na J^rY s dimenzí $\dim J^rY = m(r+1)+1$.

Pro libovolnou otevřenou podmnožinu W ve fibrované varietě Y klademe $W^r = (\pi^{r,0})^{-1}(W)$. Symbolem $\Omega_0^r W$ značíme okruh hladkých funkcí a symbolem $\Omega_k^r W$ $\Omega_0^r W$-modul hladkých diferenciálních forem, definovaných na $W^r \subset J^rY$. Vnější algebru hladkých diferenciálních forem, definovaných na W^r, značíme $\Omega^r W$.

2. Kontaktní formy a kanonický rozklad forem

V této části definujeme pojem kontaktní 1-formy a rozšířené kontaktní k-formy na jetovém prodloužení fibrované variety a uvádíme vlastnosti kontaktních forem, zejména rozklad forem na kontaktní komponenty. Kanonický rozklad diferenciálních forem je základním nástrojem v geometrické variační teorii na fibrovaných prostorech (Krupka [1, 3, 5]).

Diferenciální 1-forma $\rho \in \Omega_1^r W$ se nazývá *kontaktní*, je-li

$$J^r\gamma^*\rho = 0 \tag{2.1}$$

pro každý hladký řez γ fibrované variety Y, definovaný na libovolné otevřené podmnožině množiny W. Jinými slovy, kontaktní 1-forma se anuluje podél jetového prodloužení libovolného řezu fibrované variety. Ve smyslu definice (2.1) je pak každá funkce kontaktní právě tehdy, když je identicky nulová, a každá diferenciální k-forma je kontaktní pro $k \geq 2$. Lokální popis kontaktních 1-forem je dán následovně.

Lemma 2.1. (a) *Nechť W je otevřená podmnožina fibrované variety Y. Pak forma $\rho \in \Omega_1^r W$ je kontaktní právě tehdy, když v každém fibrovaném souřadnicovém systému (V, ψ), $\psi = (t, q^\sigma)$, na $W \subset Y$ má ρ vyjádření*

$$\rho = \sum_{j=0}^{r-1} B_\sigma^j \omega_j^\sigma,$$

kde

$$\omega_j^\sigma = dq_j^\sigma - q_{j+1}^\sigma dt, \quad 0 \leq j \leq r-1. \tag{2.2}$$

(b) *Jsou-li dány dva fibrované souřadnicové systémy na Y, (V, ψ), $\psi = (t, q^\sigma)$, a $(\bar{V}, \bar{\psi})$, $\bar{\psi} = (\bar{t}, \bar{q}^\sigma)$, takové, že $V \cap \bar{V} \neq \emptyset$, pak*

$$\bar{\omega}_j^\sigma = \sum_{l=0}^{j} \frac{\partial \bar{q}_j^\sigma}{\partial q_l^\nu} \omega_l^\nu, \tag{2.3}$$

kde $\bar{\omega}_j^\sigma = d\bar{q}_j^\sigma - \bar{q}_{j+1}^\sigma d\bar{t}$, $0 \leq j \leq r-1$.

1-formy (2.2) jsou kontaktní formy a jsou lineárně nezávislé. Lze je tedy doplnit na *kontaktní bázi* 1-forem definovaných na souřadnicovém okolí V^r,

$$dt,\ \omega_j^\sigma,\ dq_r^\sigma. \tag{2.4}$$

Formule $dq_j^\sigma = \omega_j^\sigma + q_{j+1}^\sigma dt$ definuje bijektivní korespondenci mezi kontaktní bází (2.4) a kanonickou bází dt, dq_j^σ, dq_r^σ, $0 \leq j \leq r-1$, 1-forem na V^r.

Poněvadž operace vnější derivace a pull-back diferenciálních forem komutují, z definice (2.1) vyplývá, že pro kontaktní formu $\rho \in \Omega_k^r W$, $k \geq 1$, je rovněž $d\rho$ kontaktní; pokud navíc $\eta \in \Omega_l^r W$, pak také $\rho \wedge \eta$ je kontaktní forma. Ideál vnější algebry $\Omega^r W$ diferenciálních forem na W^r, lokálně generovaný kontaktními 1-formami (2.2), se nazývá *kontaktní ideál*. *Kontaktní* k*-formou* rozumíme libovolnou k-formu náležející do kontaktního ideálu. Transformační vlastnost (2.3) kontaktních 1-forem má následující důsledek: *k-formy na W^r lokálně generované k vnějšími faktory ω^σ_j (2.2), t.j. k-formy lokálně vyjádřené ve tvaru*

$$\rho = A^{j_1 j_2 \dots j_k}_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k} \omega^{\sigma_1}_{j_1} \wedge \omega^{\sigma_2}_{j_2} \wedge \dots \wedge \omega^{\sigma_k}_{j_k}, \tag{2.5}$$

tvoří podmodul modulu diferenciálních k-forem $\Omega^r_k W$, který značíme $\Omega^r_{k,c} W$.

Kanonický rozklad diferenciálních forem na jejich kontaktní komponenty je založen na rozkladu tečných vektorů. Definujme nyní morfismus tečných vektorových prostorů $h : TJ^{r+1}Y \to TJ^rY$ nad projekcí $\pi^{r+1,r} : J^{r+1}Y \to J^rY$, nazývaný *horizontalizace*. Každému tečnému vektoru ξ k $J^{r+1}Y$ v bodě $J^{r+1}_x\gamma$ přiřadíme tečný vektor $h\xi$ k J^rY v bodě $J^r_x\gamma$ předpisem $h\xi = T_x J^r\gamma \circ T\pi^{r+1} \cdot \xi$. Tečný vektor $h\xi \in TJ^rY$ nazýváme *horizontální komponenta* vektoru ξ. *Kontaktní komponentu* $p\xi$ vektoru ξ definujeme předpisem $p\xi = T\pi^{r+1,r} \cdot \xi - h\xi$. Má-li tečný vektor $\xi \in TJ^{r+1}Y$ lokální vyjádření

$$\xi = \xi^0 \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=0}^{r+1} \Xi^\sigma_j \frac{\partial}{\partial q^\sigma_j},$$

pak

$$h\xi = \xi^0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=0}^{r} q^\sigma_{j+1} \frac{\partial}{\partial q^\sigma_j} \right), \quad p\xi = \sum_{j=0}^{r} (\Xi^\sigma_j - q^\sigma_{j+1}\xi^0) \frac{\partial}{\partial q^\sigma_j},$$

a

$$\begin{aligned} dt(J^r_x\gamma)(h\xi) &= \xi^0, \quad dt(J^r_x\gamma)(p\xi) = 0, \\ \omega^\sigma_j(J^r_x\gamma)(h\xi) &= 0, \quad \omega^\sigma_j(J^r_x\gamma)(p\xi) = \Xi^\sigma_j - q^\sigma_{j+1}\xi^0. \end{aligned}$$

Nechť $\rho \in \Omega^r_k W$ je libovolná k-forma, $k \geq 1$, a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ jsou tečné vektory k $J^{r+1}Y$ v bodě $J^{r+1}_x\gamma \in W^{r+1}$. Pak $T\pi^{r+1,r} \cdot \xi_l = h\xi_l + p\xi_l$, $1 \leq l \leq k$, přičemž všechny horizontální komponenty $h\xi_l$ náleží do 1-rozměrného vektorového podprostoru v $T_{J^r_x\gamma} J^rY$. Dostáváme odtud

$$\begin{aligned} &(\pi^{r+1,r})^* \rho(J^{r+1}_x\gamma)(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) \\ &= \rho(J^r_x\gamma)(T_{J^{r+1}_x\gamma}\pi^{r+1,r} \cdot \xi_1, T_{J^{r+1}_x\gamma}\pi^{r+1,r} \cdot \xi_2, \dots, T_{J^{r+1}_x\gamma}\pi^{r+1,r} \cdot \xi_k) \\ &= \rho(J^r_x\gamma)(h\xi_1 + p\xi_1, h\xi_2 + p\xi_2, \dots, h\xi_k + p\xi_k) \\ &= p_{k-1}\rho(J^{r+1}_x\gamma)(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) + p_k\rho(J^{r+1}_x\gamma)(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k), \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} p_k\rho(J^{r+1}_x\gamma)(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) &= \rho(J^r_x\gamma)(p\xi_1, p\xi_2, \dots, p\xi_k), \\ p_{k-1}\rho(J^{r+1}_x\gamma)(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) &= \rho(J^r_x\gamma)(h\xi_1, p\xi_2, \dots, p\xi_k) \\ &\quad + \rho(J^r_x\gamma)(p\xi_1, h\xi_2, p\xi_3, \dots, p\xi_k) \\ &\quad + \dots + \rho(J^r_x\gamma)(p\xi_1, p\xi_2, \dots, p\xi_{k-1}, h\xi_k). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Tudíž

$$(\pi^{r+1,r})^*\rho = p_{k-1}\rho + p_k\rho. \tag{2.7}$$

Formule (2.7) se nazývá *kanonický rozklad* formy ρ na kontaktní komponenty. Formu $p_{k-1}\rho$, resp. $p_k\rho$, (2.6) na $W^{r+1} \subset J^{r+1}Y$ nazýváme $(k-1)$-*kontaktní*, resp. k-*kontaktní*, *komponenta* formy ρ. Přesněji řečeno, jde o kanonický rozklad formy $(\pi^{r+1,r})^*\rho$. V případě 1-forem, $k = 1$, značíme $h\rho = p_0\rho$ a $p\rho = p_1\rho$, tedy $(\pi^{r+1,r})^*\rho = h\rho + p\rho$.

Lemma 2.2. *Nechť (V, ψ), $\psi = (t, q^\sigma)$, je fibrovaný souřadnicový systém na Y takový, že $V \subset W$.*

(a) *Nechť 1-forma $\rho \in \Omega_1^r W$ má v kanonické bázi vyjádření*

$$\rho = A dt + \sum_{j=0}^{r} B_\sigma^j dq_j^\sigma.$$

Pak

$$p\rho = \sum_{j=0}^{r} B_\sigma^j \omega_j^\sigma, \quad h\rho = \left(A + \sum_{j=0}^{r} B_\sigma^j q_{j+1}^\sigma \right) dt. \tag{2.8}$$

(b) *Je-li $f \in \Omega_0^r W$ funkce na W^r, pak*

$$(\pi^{r+1,r})^* df = hdf + pdf, \tag{2.9}$$

kde

$$hdf = \frac{df}{dt} dt, \quad pdf = \sum_{j=0}^{r} \frac{\partial f}{\partial q_j^\sigma} \omega_j^\sigma.$$

Analogicky jako v předchozím lemmatu lze snadno nalézt vyjádření pro $p_{k-1}\rho$ a $p_k\rho$ libovolné k-formy ρ. Je-li $p_{k-1}\rho = 0$, pak $(\pi^{r+1,r})^*\rho = p_k\rho$ je k-kontaktní k-forma tvaru (2.5). Rozklad vnější derivace funkce (2.9) a 1-formy (2.8) často potřebujeme při výpočtu tříd diferenciálních forem.

Definujeme nyní nový typ kontaktnosti pro formy stupně $k \geq 2$.

Řekneme, že k-forma $\rho \in \Omega_k^r W$, $k \geq 2$, je *rozšířená kontaktní forma*, jestliže ke každému bodu $y_0 \in W$ existuje fibrovaný souřadnicový systém (V, ψ), $\psi = (t, q^\sigma)$, v bodě y_0 a $(k-1)$-kontaktní $(k-1)$-forma $\eta_V \in \Omega_{k-1,c}^r V$ tak, že

$$p_{k-1}(\rho - d\eta_V) = 0.$$

Jinými slovy, $\rho \in \Omega_k^r W$ je rozšířená kontaktní forma, má-li ρ lokální vyjádření

$$\rho = \mu + d\eta, \tag{2.10}$$

kde μ je k-kontaktní k-forma a η je $(k-1)$-kontaktní $(k-1)$-forma na daném souřadnicovém V.

Lemma 2.3. *Nechť $W \subset Y$ je otevřená množina a $\rho \in \Omega_k^r W$ je rozšířená kontaktní forma. Pak rozklad* (2.10) *formy ρ je určen jednoznačně.*

Rozšířené kontaktní k-formy na W^r tvoří vektorový podprostor vektorového prostoru k-forem $\Omega_k^r W$, který značíme $\Theta_k^r W$. Podle Lemmatu 2.3. je $\Theta_k^r W$ direktním součtem podmodulů $\Omega_{k,c}^r W$ a $\Omega_{k-1,c}^r W$. V dalším textu uvažujeme $\Theta_k^r W$ zejména se strukturou *abelovské grupy*.

3. Variační posloupnost ve fibrované mechanice

Nechť $W \subset Y$ je otevřená množina. Pro každé $k \geq 1$, $\Theta^r_k W$ je podgrupa abelovské grupy $\Omega^r_k W$ a dostáváme tak podposloupnost abelovských grup rozšířených kontaktních forem

$$0 \to \Theta^r_1 W \to \Theta^r_2 W \to \Theta^r_3 W \to \cdots \to \Theta^r_M W \to 0 \tag{3.1}$$

De Rhamovy posloupnosti

$$0 \to \mathbf{R} \to \Omega^r_0 W \to \Omega^r_1 W \to \Omega^r_2 W \to \cdots \to \Omega^r_N W \to 0, \tag{3.2}$$

kde $M = mr + 1$, $N = \dim J^r Y = m(r+1) + 1$. (3.1) a (3.2) jsou diferenciální posloupnosti, jejichž morfismy tvoří operátor vnější derivace d. Posloupnost (3.1) se nazývá *kontaktní podposloupnost* De Rhamovy posloupnosti (3.2). Připomeňme, že diferenciální posloupnost se nazývá *exaktní*, jestliže v každém členu je obraz daného morfismu roven jádru následujícího morfismu. De Rhamova posloupnost (3.2) je tedy podle *Poincaréova lemmatu lokálně exaktní*: nechť forma $\rho \in \Omega^r_k W$ splňuje podmínku $d\rho = 0$ (ρ je *uzavřená*), pak ke každému bodu z W^r existuje okolí U a diferenciální $(k-1)$-forma η na U tak, že $\rho|_U = d\eta$.

Následující tvrzení výplývá ze struktury rozšířených kontaktních forem.

Věta 3.1. *Kontaktní podposloupnost* (3.1) *De Rhamovy posloupnosti je lokálně exaktní.*

Dostáváme následující diagram,

$$\begin{tikzcd}
& & & 0 & 0 & \\
& & & \Omega^r_1W/\Theta^r_1W \arrow[u] \arrow[r] & \Omega^r_2W/\Theta^r_2W \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathbf{R} \arrow[r] & \Omega^r_0W \arrow[r] \arrow[ur] & \Omega^r_1W \arrow[u] \arrow[r] & \Omega^r_2W \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
& & 0 \arrow[u] \arrow[r] & \Theta^r_1W \arrow[u] \arrow[r] & \Theta^r_2W \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
& & & 0 \arrow[u] & 0, \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

v němž faktorizací De Rhamovy posloupnosti podle její exaktní kontaktní podposloupnosti vzniká faktorová posloupnost

$$\begin{aligned} 0 \to \mathbf{R} \to \Omega^r_0 W \to \Omega^r_1 W/\Theta^r_1 W \to \Omega^r_2 W/\Theta^r_2 W \\ \to \cdots \to \Omega^r_M W/\Theta^r_M W \to \Omega^r_{M+1} W \to \cdots \to \Omega^r_N W \to 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Třídu diferenciální formy $\rho \in \Omega^r_k W$ z faktorové grupy $\Omega^r_k W/\Theta^r_k W$ ve variační posloupnosti (3.3) značíme $[\rho]$. Faktorová zobrazení v (3.3), $E : \Omega^r_k W/\Theta^r_k W \to \Omega^r_{k+1} W/\Theta^r_{k+1} W$, jsou definována vztahem

$$E([\rho]) = [d\rho]. \tag{3.4}$$

Posloupnost (3.3) se nazývá *variační posloupnost řádu* r na $W \subset Y$.

Věta 3.2. *Faktorová posloupnost* (3.3) *je lokálně exaktní.*

Členy variační posloupnosti jakožto faktorové grupy jsou určeny jednoznačně až na isomorfismus. To umožňuje vyjádření tříd ve variační posloupnosti pomocí různých reprezentantů. Následující tvrzení se uplatní při výpočtu reprezentantů tříd a při studiu vnoření variační posloupnosti r-tého řádu do posloupnosti $(r+1)$-ního řádu (problém redukce řádu).

Věta 3.3. *Faktorové zobrazení* $\Omega_k^r W/\Theta_k^r W \to \Omega_k^{r+1} W/\Theta_k^{r+1} W$ *injekce* $\Omega_k^r W \ni \rho \to (\pi^{r+1,r})^* \rho \in \Omega_k^{r+1} W$ *je injektivní.*

Variační posloupnost (3.3) lze formulovat také v případě, kdy podkladové prostory jsou *svazky* diferenciálních forem na r-jetovém prodloužení $J^r Y$. Ukazuje se, že pro odpovídající komplex globálních řezů lze aplikovat abstraktní De Rhamův teorém, umožňující vyšetřovat lokální a globální aspekty morfismů ve variační posloupnosti pomocí kohomologických grup fibrované variety Y; viz. Poznámka 4.5.

4. Variační třídy a zobrazení ve variační posloupnosti druhého řádu

V této části ukážeme variační význam tříd diferenciálních k-forem, kde $k = 1, 2, 3$, a jejich morfismů ve variační posloupnosti. Pro účely aplikací nalezneme explicitní formule ve variační posloupnosti *druhého* řádu. Přirozeně vzniká otázka, zda existuje kanonický reprezentant třídy forem ve variační posloupnosti. Tento *problém reprezentace* variační posloupnosti (globálně definovanými) diferenciálními formami byl studován a na fibrovaných varietách obecně řešen různými autory; komentáře ke srovnání lze nalézt v práci Volná, Urban [12].

Věta 4.1. *Nechť* $W \subset Y$ *je otevřená množina a* (V, ψ), $\psi = (t, q^\sigma)$, *je fibrovaný souřadnicový systém* W.

(a) *Nechť* $\rho \in \Omega_1^2 W$ *má vyjádření v kontaktní bázi tvaru*

$$\rho = A dt + B_\sigma \omega^\sigma + B_\sigma^1 \dot{\omega}^\sigma + C_\sigma d\ddot{q}^\sigma. \tag{4.1}$$

Pak třída $[\rho]$ *je prvkem* $\Omega_1^2 W/\Theta_1^2 W$ *a je reprezentována diferenciální formou na* $W^3 \subset J^3 Y$,

$$[\rho] = (A + C_\sigma \dddot{q}^\sigma) dt. \tag{4.2}$$

(b) *Nechť* $\rho \in \Omega_2^2 W$ *má vyjádření v kontaktní bázi tvaru*

$$\begin{aligned} \rho = {} & A_\sigma \omega^\sigma \wedge dt + A_\sigma^1 \dot{\omega}^\sigma \wedge dt + B_\nu d\ddot{q}^\nu \wedge dt \\ & + \frac{1}{2} C_{\sigma_1 \sigma_2} \omega^{\sigma_1} \wedge \omega^{\sigma_2} + \frac{1}{2} C_{\sigma_1 \sigma_2}^1 \dot{\omega}^{\sigma_1} \wedge \dot{\omega}^{\sigma_2} + C_{\nu,\sigma}^{1,0} \dot{\omega}^\nu \wedge \omega^\sigma \\ & + D_{\nu,\sigma} d\ddot{q}^\nu \wedge \omega^\sigma + D_{\nu,\sigma}^1 d\ddot{q}^\nu \wedge \dot{\omega}^\sigma + \frac{1}{2} D_{\nu_1 \nu_2} d\ddot{q}^{\nu_1} \wedge d\ddot{q}^{\nu_2}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Pak třída $[\rho]$ *je prvkem* $\Omega_2^2 W/\Theta_2^2 W$ *a je reprezentována diferenciální formou na* $W^5 \subset J^5 Y$,

$$[\rho] = \varepsilon_\sigma([\rho])\, \omega^\sigma \wedge dt, \tag{4.4}$$

kde

$$\varepsilon_\sigma([\rho]) = (A_\sigma - D_{\nu,\sigma} \dddot{q}^\nu) - \frac{d}{dt}(A_\sigma^1 - D_{\nu,\sigma}^1 \dddot{q}^\nu) + \frac{d^2}{dt^2} (B_\sigma - D_{\nu\sigma} \dddot{q}^\nu). \tag{4.5}$$

(c) *Nechť $\rho \in \Omega_3^2 W$ má vyjádření v kontaktní bázi tvaru*

$$
\begin{aligned}
\eta = {} & \frac{1}{2} A_{\sigma_1\sigma_2} \omega^{\sigma_1} \wedge \omega^{\sigma_2} \wedge dt + A^1_{\nu,\sigma} \dot{\omega}^{\nu} \wedge \omega^{\sigma} \wedge dt + \frac{1}{2} A^1_{\nu_1\nu_2} \dot{\omega}^{\nu_1} \wedge \dot{\omega}^{\nu_2} \wedge dt \\
& + B_{\nu,\sigma} d\ddot{q}^{\nu} \wedge \omega^{\sigma} \wedge dt + B^1_{\nu,\sigma} d\ddot{q}^{\nu} \wedge \dot{\omega}^{\sigma} \wedge dt + \frac{1}{2} B_{\nu_1\nu_2} d\ddot{q}^{\nu_1} \wedge d\ddot{q}^{\nu_2} \wedge dt \\
& + \frac{1}{6} C_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3} \omega^{\sigma_1} \wedge \omega^{\sigma_2} \wedge \omega^{\sigma_3} + \frac{1}{2} C^1_{\nu,\sigma_1\sigma_2} \dot{\omega}^{\nu} \wedge \omega^{\sigma_1} \wedge \omega^{\sigma_2} \\
& + \frac{1}{2} C^1_{\nu_1\nu_2,\sigma} \dot{\omega}^{\nu_1} \wedge \dot{\omega}^{\nu_2} \wedge \omega^{\sigma} + \frac{1}{6} C^1_{\nu_1\nu_2\nu_3} \dot{\omega}^{\nu_1} \wedge \dot{\omega}^{\nu_2} \wedge \dot{\omega}^{\nu_3} \\
& + \frac{1}{2} D_{\nu,\sigma_1\sigma_2} d\ddot{q}^{\nu} \wedge \omega^{\sigma_1} \wedge \omega^{\sigma_2} + \frac{1}{2} D_{\nu_1\nu_2,\sigma} d\ddot{q}^{\nu_1} \wedge d\ddot{q}^{\nu_2} \wedge \omega^{\sigma} \\
& + \frac{1}{6} D_{\nu_1\nu_2\nu_3} d\ddot{q}_2^{\nu_1} \wedge d\ddot{q}^{\nu_2} \wedge d\ddot{q}^{\nu_3} + D^1_{\nu,\mu,\sigma} d\ddot{q}^{\nu} \wedge \dot{\omega}^{\mu} \wedge \omega^{\sigma} \\
& + \frac{1}{2} D^1_{\nu,\sigma_1\sigma_2} d\ddot{q}^{\nu} \wedge \dot{\omega}^{\sigma_1} \wedge \dot{\omega}^{\sigma_2} + \frac{1}{2} D^1_{\nu_1\nu_2,\sigma} d\ddot{q}^{\nu_1} \wedge d\ddot{q}^{\nu_2} \wedge \dot{\omega}^{\sigma}.
\end{aligned}
$$

Pak třída $[\rho]$ je prvkem $\Omega_3^2 W / \Theta_3^2 W$ a je reprezentována diferenciální formou na $W^7 \subset J^7 Y$,

$$
\begin{aligned}
[\rho] = {} & \frac{1}{2} \varepsilon_{\nu\sigma}([\eta])\, \omega^{\nu} \wedge \omega^{\sigma} \wedge dt + \kappa_{\nu,\sigma}([\eta])\, \dot{\omega}^{\nu} \wedge \omega^{\sigma} \wedge dt + \frac{1}{2} \kappa_{\nu\sigma}([\eta])\, \ddot{\omega}^{\nu} \wedge \omega^{\sigma} \wedge dt \\
& + \tau_{\nu,\sigma}([\eta])\, {}^{\cdot}\ddot{\omega}^{\nu} \wedge \omega^{\sigma} \wedge dt + \frac{1}{2} \tau_{\nu\sigma}([\eta])\, {}^{\cdot}\ddot{\omega}^{\cdot\nu} \wedge \omega^{\sigma} \wedge dt,
\end{aligned}
$$

kde

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{\nu\sigma}([\eta]) = {} & A_{\nu\sigma} + D_{\mu,\nu\sigma} {}^{\cdot}\ddot{q}^{\cdot\mu} - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(A^1_{\nu,\sigma} - A^1_{\sigma,\nu} + (D^1_{\mu,\nu,\sigma} - D^1_{\mu,\sigma,\nu}) {}^{\cdot}\ddot{q}^{\cdot\mu} \right) \\
& + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} (A^1_{\nu\sigma} + D^1_{\mu,\nu\sigma} {}^{\cdot}\ddot{q}^{\cdot\mu}) - \frac{1}{4} \frac{d^3}{dt^3} \left(B^1_{\nu,\sigma} - B^1_{\sigma,\nu} + (D^1_{\mu\nu,\sigma} - D^1_{\mu\sigma,\nu}) {}^{\cdot}\ddot{q}^{\cdot\mu} \right) \\
& + \frac{1}{2} \frac{d^4}{dt^4} (B_{\nu\sigma} + D_{\mu\nu\sigma} {}^{\cdot}\ddot{q}^{\cdot\mu}_3), \\
\kappa_{\nu,\sigma}([\eta]) = {} & \frac{1}{2} \big(A^1_{\nu,\sigma} + A^1_{\sigma,\nu} + (D^1_{\mu,\nu,\sigma} + D^1_{\mu,\sigma,\nu}) w_3^{\mu} \\
& - \frac{d}{dw^L} \left(B_{\nu,\sigma} + B_{\sigma,\nu} + (D_{\mu\nu,\sigma} + D_{\mu\sigma,\nu}) w_3^{\mu} \right) \\
& + \frac{d^2}{d(w^L)^2} \left(B^1_{\nu,\sigma} + B^1_{\sigma,\nu} + (D^1_{\mu\nu,\sigma} + D^1_{\mu\sigma,\nu}) w_3^{\mu} \right) \big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\kappa_{\nu\sigma}([\eta]) = {} & A^1_{\sigma\nu} + D^1_{\mu,\sigma\nu} w_3^{\mu} + (B_{\nu,\sigma} - B_{\sigma,\nu}) + (D_{\mu\nu,\sigma} - D_{\mu\sigma,\nu}) w_3^{\mu} \\
& + \frac{1}{2} \frac{d}{dw^L} \left(B^1_{\nu,\sigma} - B^1_{\sigma,\nu} + (D^1_{\mu\nu,\sigma} - D^1_{\mu\sigma,\nu}) w_3^{\mu} \right) \\
& - 2 \frac{d^2}{d(w^L)^2} (B_{\nu\sigma} + D_{\mu\nu\sigma} w_3^{\mu}), \\
\tau_{\nu,\sigma}([\eta]) = {} & -\frac{1}{2} \left(B^1_{\nu,\sigma} + B^1_{\sigma,\nu} + (D^1_{\mu\nu,\sigma} + D^1_{\mu\sigma,\nu}) w_3^{\mu} \right), \\
\tau_{\nu\sigma}([\eta]) = {} & B_{\nu,\sigma} + D_{\mu\nu\sigma} w_3^{\mu}.
\end{aligned}
$$

Následující tvrzení popisuje strukturu faktorových zobrazení ve variační posloupnosti druhého řádu, souvisejících se základními variačními objekty (totální derivace, Eulerovo-Lagrangeovo zobrazení, Helmholtzovo zobrazení).

Věta 4.2. *Nechť $W \subset Y$ je otevřená množina a (V, ψ), $\psi = (t, q^\sigma)$, je fibrovaný souřadnicový systém na W.*

(a) *Je-li $f \in \Omega_0^2 W$, pak $E(f) = (df/dt)dt$.*

(b) *Nechť $\rho \in \Omega_1^2 W$ má vyjádření v kontaktní bázi* (4.1). *Pak*

$$E([\rho]) = \varepsilon_\sigma([d\rho])\, \omega^\sigma \wedge dt, \tag{4.6}$$

kde

$$\begin{aligned}\varepsilon_\sigma([d\rho]) = {} & \frac{\partial A}{\partial w^\sigma} + \frac{\partial C_\nu}{\partial w^\sigma}\ddddot{q}^\nu - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial A}{\partial \dot{q}^\sigma} + \frac{\partial C_\nu}{\partial \dot{q}^\sigma}\ddddot{q}^\nu\right) \\ & + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial A}{\partial \ddot{q}^\sigma} + \frac{\partial C_\nu}{\partial \ddot{q}^\sigma}\ddddot{q}^\nu\right) - \frac{d^3 C_\sigma}{dt^3}.\end{aligned}$$

(c) *Nechť $\rho \in \Omega_2^2 W$ má vyjádření v kontaktní bázi* (4.3). *Pak*

$$\begin{aligned}E([\rho]) = {} & \frac{1}{2}\varepsilon_{\nu\sigma}([d\rho])\, \omega^\nu \wedge \omega^\sigma \wedge dt \\ & + \kappa_{\nu,\sigma}([d\rho])\, \dot{\omega}^\nu \wedge \omega^\sigma \wedge dt + \frac{1}{2}\kappa_{\nu\sigma}([d\rho])\, \ddot{\omega}^\nu \wedge \omega^\sigma \wedge dt \\ & + \tau_{\nu,\sigma}([d\rho])\, \dddot{\omega}^\nu \wedge \omega^\sigma \wedge dt + \frac{1}{2}\tau_{\nu\sigma}([d\rho])\, \ddddot{\omega}^\nu \wedge \omega^\sigma \wedge dt,\end{aligned} \tag{4.7}$$

kde

$$\begin{aligned}\tau_{\nu,\sigma}([d\rho]) = {} & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A^1_\nu}{\partial \ddot{q}^\sigma} + \frac{\partial A^1_\sigma}{\partial \ddot{q}^\nu} - \left(\frac{\partial B_\sigma}{\partial \dot{q}^\nu} + \frac{\partial B_\nu}{\partial \dot{q}^\sigma}\right) + (D_{\nu,\sigma} + D_{\sigma,\nu})\right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial D_{\mu\nu}}{\partial \dot{q}^\sigma} + \frac{\partial D_{\mu\sigma}}{\partial \dot{q}^\nu} - \frac{\partial D^1_{\mu,\sigma}}{\partial \ddot{q}^\nu} - \frac{\partial D^1_{\mu\nu}}{\partial \ddot{q}^\sigma}\right)\ddddot{q}^\mu + \frac{d}{dt}(D^1_{\nu,\sigma} + D^1_{\sigma,\nu})\right), \\ \tau_{\nu\sigma}([d\rho]) = {} & \frac{\partial B_\sigma}{\partial \ddot{q}^\nu_2} - \frac{\partial B_\nu}{\partial \ddot{q}^\sigma} + D^1_{\nu,\sigma} - D^1_{\sigma,\nu} + \left(\frac{\partial D_{\mu\nu}}{\partial \ddot{q}^\sigma_2} - \frac{\partial D_{\mu\sigma}}{\partial w^\nu_2}\right)\ddddot{q}^\mu + \frac{d}{dt}(D_{\nu\sigma}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\kappa_{\nu,\sigma}([d\rho]) = {} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_\sigma}{\partial \dot{q}^\nu} + \frac{\partial A_\nu}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial A^1_\sigma}{\partial q^\nu} - \frac{\partial A^1_\nu}{\partial q^\sigma} - \left(\frac{\partial D_{\mu,\sigma}}{\partial \dot{q}^\nu} + \frac{\partial D_{\mu,\nu}}{\partial \dot{q}^\sigma}\right.\right. \\ & \left.\left. + \frac{\partial D^1_{\mu,\nu}}{\partial q^\sigma} + \frac{\partial D^1_{\mu,\sigma}}{\partial q^\nu}\right)\ddddot{q}^\mu\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial A_\sigma}{\partial \ddot{q}^\nu} + \frac{\partial A_\nu}{\partial \ddot{q}^\sigma} - \left(\frac{\partial B_\sigma}{\partial q^\nu} + \frac{\partial B_\nu}{\partial q^\sigma}\right)\right. \\ & \left. - \left(\frac{\partial D_{\mu,\nu}}{\partial \ddot{q}^\sigma} + \frac{\partial D_{\mu,\sigma}}{\partial \ddot{q}^\nu} - \frac{\partial D_{\mu\sigma}}{\partial q^\nu} - \frac{\partial D_{\mu\nu}}{\partial q^\sigma}\right)\ddddot{q}^\mu\right) \\ & + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial A^1_\sigma}{\partial \ddot{q}^\nu} + \frac{\partial A^1_\nu}{\partial \ddot{q}^\sigma} - \left(\frac{\partial B_\sigma}{\partial \dot{q}^\nu} + \frac{\partial B_\nu}{\partial \dot{q}^\sigma}\right) + \left(\frac{\partial D_{\mu\nu}}{\partial \dot{q}^\sigma} + \frac{\partial D_{\mu\sigma}}{\partial \dot{q}^\nu}\right.\right. \\ & \left.\left. - \frac{\partial D^1_{\mu,\nu}}{\partial \ddot{q}^\sigma} - \frac{\partial D^1_{\mu,\sigma}}{\partial \ddot{q}^\nu}\right)\ddddot{q}^\mu + \frac{d}{dt^3}(D^1_{\nu,\sigma} + D^1_{\sigma,\nu})\right),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\kappa_{\nu\sigma}([d\rho]) = {} & \left(\frac{\partial A_\sigma}{\partial \ddot{q}^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial \ddot{q}^\sigma} \right) + \left(\frac{\partial A^1_\nu}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial A^1_\sigma}{\partial \dot{q}^\nu} \right) + \left(\frac{\partial B_\sigma}{\partial q^\nu} - \frac{\partial B_\nu}{\partial q^\sigma} \right) \\
& + \left(\frac{\partial D_{\mu\nu}}{\partial q^\sigma} - \frac{\partial D_{\mu\sigma}}{\partial q^\nu} + \frac{\partial D_{\mu,\nu}}{\partial \ddot{q}^\sigma} - \frac{\partial D_{\mu,\sigma}}{\partial \ddot{q}^\nu} + \frac{\partial D^1_{\mu,\sigma}}{\partial \dot{q}^\nu} - \frac{\partial D^1_{\mu\nu}}{\partial \dot{q}^\sigma} \right) \dddot{q}^\mu \\
& + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \bigg(\frac{\partial A^1_\sigma}{\partial \ddot{q}^\nu} - \frac{\partial A^1_\nu}{\partial \ddot{q}^\sigma} + \frac{\partial B_\sigma}{\partial \dot{q}^\nu} - \frac{\partial B_\nu}{\partial \dot{q}^\sigma} + \bigg(\frac{\partial D_{\mu\nu}}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial D_{\mu\sigma}}{\partial \dot{q}^\nu} \\
& + \frac{\partial D^1_{\mu,\nu}}{\partial \ddot{q}^\sigma} - \frac{\partial D^1_{\mu\sigma}}{\partial \ddot{q}^\nu} \bigg) \dddot{q}^\mu \bigg) + \frac{3}{2} \frac{d}{dt} \left(D_{\nu,\sigma} - D_{\sigma,\nu} - \frac{d}{dt} (D^1_{\nu,\sigma} - D^1_{\sigma,\nu}) \right) \\
& - 2 \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial B_\sigma}{\partial \ddot{q}^\nu} - \frac{\partial B_\nu}{\partial \ddot{q}^\sigma} + \left(\frac{\partial D_{\mu\nu}}{\partial \ddot{q}^\sigma} - \frac{\partial D_{\mu\sigma}}{\partial \ddot{q}^\nu} \right) \dddot{q}^\mu \right) - 2 \frac{d^3 D_{\nu\sigma}}{dt^3},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{\nu\sigma}([d\rho]) = {} & \frac{\partial A_\sigma}{\partial q^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial q^\sigma} + \left(\frac{\partial D_{\mu,\nu}}{\partial q^\sigma} - \frac{\partial D_{\mu,\sigma}}{\partial q^\nu} \right) \dddot{q}^\mu - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \bigg(\frac{\partial A_\sigma}{\partial \dot{q}^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial \dot{q}^\sigma} \\
& + \frac{\partial A^1_\sigma}{\partial q^\nu} - \frac{\partial A^1_\nu}{\partial q^\sigma} + \left(\frac{\partial D_{\mu,\nu}}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial D_{\mu,\sigma}}{\partial \dot{q}^\nu} + \frac{\partial D^1_{\mu,\nu}}{\partial q^\sigma} - \frac{\partial D^1_{\mu,\sigma}}{\partial q^\nu} \right) \dddot{q}^\mu \bigg) \\
& + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial A^1_\sigma}{\partial \dot{q}^\nu} - \frac{\partial A^1_\nu}{\partial \dot{q}^\sigma} + \left(\frac{\partial D^1_{\mu,\nu}}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial D^1_{\mu,\sigma}}{\partial \dot{q}^\nu} \right) \dddot{q}^\mu \right) \\
& - \frac{1}{4} \frac{d^3}{dt^3} \bigg(\frac{\partial A^1_\sigma}{\partial \ddot{q}^\nu} - \frac{\partial A^1_\nu}{\partial \ddot{q}^\sigma} + \frac{\partial B_\sigma}{\partial \dot{q}^\nu} - \frac{\partial B_\nu}{\partial \dot{q}^\sigma} + \left(\frac{\partial D_{\mu\nu}}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial D_{\mu\sigma}}{\partial \dot{q}^\nu} \right) \dddot{q}^\mu \\
& + (D_{\nu,\sigma} - D_{\sigma,\nu}) + \left(\frac{\partial D^1_{\mu,\nu}}{\partial \ddot{q}^\sigma} - \frac{\partial D^1_{\mu,\sigma}}{\partial \ddot{q}^\nu} \right) \dddot{q}^\mu \bigg) \\
& + \frac{1}{2} \frac{d^4}{dt^4} \left(\frac{\partial B_\sigma}{\partial \ddot{q}^\nu} - \frac{\partial B_\nu}{\partial \ddot{q}^\sigma} + \frac{1}{2} (D^1_{\nu,\sigma} - D^1_{\sigma,\nu}) + \left(\frac{\partial D_{\mu\nu}}{\partial \ddot{q}^\sigma} - \frac{\partial D_{\mu,\sigma}}{\partial \ddot{q}^\nu} \right) \dddot{q}^\mu \right) \\
& + \frac{1}{2} \frac{d^5}{dt^5} (D_{\nu\sigma}).
\end{aligned}
$$

Poznámka 4.3. Třídu $E([\rho])$ (4.7) z Věty 4.2, (c), lze také vyjádřit v jiné bázi a na jiném prodloužení fibrované variety následovně

$$
\begin{aligned}
E([\rho]) = {} & \frac{1}{2} \varepsilon'_{\nu\sigma}([d\rho])\, \omega^\nu \wedge \omega^\sigma \wedge dt \\
& + \kappa'_{\nu,\sigma}([d\rho])\, \omega_1^\nu \wedge \omega^\sigma \wedge dt + \frac{1}{2} \kappa'_{\nu\sigma}([d\rho])\, \omega_1^\nu \wedge \omega_1^\sigma \wedge dt \\
& + \tau'_{\nu,\sigma}([d\rho])\, \omega_2^\nu \wedge \omega_1^\sigma \wedge dt + \frac{1}{2} \tau'_{\nu\sigma}([d\rho])\, \omega_2^\nu \wedge \omega_2^\sigma \wedge dt.
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

Lze však ukázat, že $E([\rho])$ (4.8) obecně *není* (globálně definovaná) forma. Ukazuje se, že reprezentace tříd globálně definovanými diferenciálními formami souvisí s variačními objekty, známými z lokální variační teorie.

Charakterizujme nyní faktorová zobrazení $E : \Omega^2_1 W / \Theta^2_1 W \to \Omega^2_2 W / \Theta^2_2 W$ a $E : \Omega^2_2 W / \Theta^2_2 W \to \Omega^2_3 W / \Theta^2_3 W$ ve variační posloupnosti jiným způsobem. I když třídy ve variační posloupnosti jsou definovány abstraktně ((4.2), (4.4)), jsou úzce spjaty s variační teorií na fibrovaných varietách. Tím je motivována následující terminologie.

Nechť (V,ψ), $\psi=(t,q^\sigma)$, je fibrovaný souřadnicový systém na $W\subset Y$. Mějme 1-formu $\rho\in\Omega^2_1W$, vyjádřenou v kontaktní bázi ve tvaru $\rho=Adt+B_\sigma\omega^\sigma+B^1_\sigma\dot\omega^\sigma+C_\sigma d\ddot q^\sigma$. Definujme *Lagrangeovu funkci* formy ρ, $L:V^3\to\mathbf{R}$, předpisem

$$L=A+C_\sigma\dddot q^\sigma. \tag{4.9}$$

Podle Věty 4.1 představuje funkce (4.9) koeficient třídy $[\rho]$. *Eulerovy-Lagrangeovy výrazy* $E_\sigma(L):V^5\to\mathbf{R}$, asociované s Lagrangeovou funkcí L, jsou pak tvaru

$$E_\sigma(L)=\frac{\partial L}{\partial q^\sigma}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q^\sigma}+\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial\ddot q^\sigma}. \tag{4.10}$$

Nechť $\rho\in\Omega^2_2W$ je 2-forma, mající vyjádření (4.3). Položme

$$\varepsilon_\sigma=(A_\sigma-D_{\nu,\sigma}\dddot q^\nu)-\frac{d}{dt}\left(A^1_\sigma-D^1_{\nu,\sigma}\dddot q^\nu\right)+\frac{d^2}{dt^2}\left(B_\sigma-D_{\nu\sigma}\dddot q^\nu\right). \tag{4.11}$$

Podle Věty 4.2 představuje funkce (4.11) koeficient třídy $[\rho]$, reprezentované *source* formou (4.4).

Helmholtzovy výrazy asociované s ε_μ jsou pak tvaru

$$\begin{aligned}
H^5_{\sigma\nu}(\varepsilon_\mu)&=\frac{\partial\varepsilon_\sigma}{\partial q^\nu_5}+\frac{\partial\varepsilon_\nu}{\partial q^\sigma_5},\\
H^4_{\sigma\nu}(\varepsilon_\mu)&=\frac{\partial\varepsilon_\sigma}{\partial q^\nu_4}-\frac{\partial\varepsilon_\nu}{\partial q^\sigma_4}-\frac{5}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varepsilon_\sigma}{\partial q^\nu_5}-\frac{\partial\varepsilon_\nu}{\partial q^\sigma_5}\right),\\
H^3_{\sigma\nu}(\varepsilon_\mu)&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varepsilon_\sigma}{\partial\dddot q^\nu}+\frac{\partial\varepsilon_\nu}{\partial\dddot q^\sigma}-2\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varepsilon_\sigma}{\partial q^\nu_4}+\frac{\partial\varepsilon_\nu}{\partial q^\sigma_4}\right)\right),\\
H^2_{\sigma\nu}(\varepsilon_\mu)&=\frac{\partial\varepsilon_\sigma}{\partial\ddot q^\nu}-\frac{\partial\varepsilon_\nu}{\partial\ddot q^\sigma}-\frac{3}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varepsilon_\sigma}{\partial\dddot q^\nu}-\frac{\partial\varepsilon_\nu}{\partial\dddot q^\sigma}\right)+\frac{5}{2}\frac{d^3}{dt^3}\left(\frac{\partial\varepsilon_\sigma}{\partial q^\nu_5}-\frac{\partial\varepsilon_\nu}{\partial q^\sigma_5}\right),\\
H^1_{\sigma\nu}(\varepsilon_\mu)&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varepsilon_\sigma}{\partial\dot q^\nu}+\frac{\partial\varepsilon_\nu}{\partial\dot q^\sigma}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varepsilon_\sigma}{\partial\ddot q^\nu}+\frac{\partial\varepsilon_\nu}{\partial\ddot q^\sigma}\right)+\frac{d^3}{dt^3}\left(\frac{\partial\varepsilon_\sigma}{\partial q^\nu_4}-\frac{\partial\varepsilon_\nu}{\partial q^\sigma_4}\right)\right),\\
H^0_{\sigma\nu}(\varepsilon_\mu)&=\frac{\partial\varepsilon_\sigma}{\partial q^\nu}-\frac{\partial\varepsilon_\nu}{\partial q^\sigma}-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varepsilon_\sigma}{\partial\dot q^\nu}-\frac{\partial\varepsilon_\nu}{\partial\dot q^\sigma}\right)+\frac{1}{4}\frac{d^3}{dt^3}\left(\frac{\partial\varepsilon_\sigma}{\partial\dddot q^\nu}-\frac{\partial\varepsilon_\nu}{\partial\dddot q^\sigma}\right)\\
&\quad-\frac{1}{2}\frac{d^5}{dt^5}\left(\frac{\partial\varepsilon_\sigma}{\partial q^\nu_5}-\frac{\partial\varepsilon_\nu}{\partial q^\sigma_5}\right).
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Následující tvrzení je podstatné pro aplikace variační posloupnosti. Ukazujeme, že Eulerovy-Lagrangeovy výrazy (4.10) a Helmholtzovy výrazy (4.12) jsou totožné s koeficienty tříd $E([\rho])$ (4.6), (4.7) ve variační posloupnosti.

Věta 4.4. *Nechť $W\subset Y$ je otevřená množina a (V,ψ), $\psi=(t,q^\sigma)$, je fibrovaný souřadnicový systém na W.*

(a) *Nechť $\rho\in\Omega^2_1W$ má v kontaktní bázi vyjádření* (4.1). *Pak*

$$E([\rho])=\varepsilon_\sigma([d\rho])\,\omega^\sigma\wedge dt,$$

přičemž

$$\varepsilon_\sigma([d\rho])=E_\sigma(L),$$

kde L je Lagrangeova funkce (4.9) *a $E_\sigma(L)$ Eulerovy-Lagrangeovy výrazy* (4.10) *asociované s L.*

(b) *Nechť $\rho \in \Omega_2^2 W$ má v kontaktní bázi vyjádření* (4.3). *Pak*

$$E([\rho]) = \frac{1}{2}\varepsilon_{\nu\sigma}([d\rho])\,\omega^{\nu} \wedge \omega^{\sigma} \wedge dt$$
$$+ \kappa_{\nu,\sigma}([d\rho])\,\omega_1^{\nu} \wedge \omega^{\sigma} \wedge dt + \frac{1}{2}\kappa_{\nu\sigma}([d\rho])\,\omega_2^{\nu} \wedge \omega^{\sigma} \wedge dt$$
$$+ \tau_{\nu,\sigma}([d\rho])\,\omega_3^{\nu} \wedge \omega^{\sigma} \wedge dt + \frac{1}{2}\tau_{\nu\sigma}([d\rho])\,\omega_4^{\nu} \wedge \omega^{\sigma} \wedge dt,$$

přičemž

$$\varepsilon_{\nu\sigma}([d\rho]) = H^0_{\sigma\nu}(\varepsilon_\mu), \quad \kappa_{\nu,\sigma}([d\rho]) = H^1_{\sigma\nu}(\varepsilon_\mu), \quad \kappa_{\nu\sigma}([d\rho]) = H^2_{\sigma\nu}(\varepsilon_\mu),$$
$$\tau_{\nu,\sigma}([d\rho]) = H^3_{\sigma\nu}(\varepsilon_\mu), \quad \tau_{\nu\sigma}([d\rho]) = H^4_{\sigma\nu}(\varepsilon_\mu), \quad H^5_{\sigma\nu}(\varepsilon_\mu) = 0,$$

kde ε_μ je dáno vztahem (4.11) *a $H^l_{\sigma\nu}(\varepsilon_\mu)$ jsou Helmholtzovy výrazy* (4.12) *asociované s ε_μ.*

Poznámka 4.5. Podle Věty 4.4 jsou morfismy

$$E : \Omega_1^2 W/\Theta_1^2 W \to \Omega_2^2 W/\Theta_2^2 W, \text{ resp. } E : \Omega_2^2 W/\Theta_2^2 W \to \Omega_3^2 W/\Theta_3^2 W,$$

ve variační posloupnosti druhého řádu totožné s *Eulerovým-Lagrangeovým zobrazením*, resp. *Helmholtzovým zobrazením* variačního počtu. Variační posloupnost na konečných jetových prodlouženích fibrované variety je tudíž nástrojem ke studiu lokálních a globálních aspektů variační teorie. Jádro a obraz Eulerova-Lagrangeova zobrazení a Helmholtzova zobrazení jsou definovány a můžeme studovat kohomologické grupy odpovídajícího komplexu globálních řezů. Tím je řešen globální inverzní problém variačního počtu.

Z exaktnosti variační posloupnosti vyplývá, že pokud Helmholtzovy výrazy (4.12) jsou identicky nulové, $H^l_{\sigma\nu}(\varepsilon_\mu) = 0$, pak výrazy ε_μ (4.11) jsou *lokálně variační*: lokálně jsou ε_μ pro nějaké L tvaru

$$\varepsilon_\mu = \frac{\partial L}{\partial q^\sigma} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^\sigma} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot q^\sigma}. \tag{4.13}$$

Helmholtzovy podmínky $H^l_{\sigma\nu}(\varepsilon_\mu) = 0$ jsou tak *podmínky lokální variačnosti* (2-formy, systému funkcí). Z lokální variačnosti ovšem *nemusí* vyplývat globální variačnost dané 2-formy (4.4), tedy nemusí existovat globálně definovaná funkce L s vlastností (4.13). Z vlastností variačních posloupností svazků diferenciálních forem na fibrovaných varietách vyplývá, že postačující (topologickou) podmínkou existence globálního Lagrangiánu $\lambda = Ldt$ je nulová druhá De Rhamova kohomologická grupa fibrované variety Y. Je-li tedy source forma (třída 2-formy) $\varepsilon = \varepsilon_\sigma \omega^\sigma \wedge dt$ (4.4) lokálně variační a zároveň $H^2 Y = 0$, pak ε je globálně variační.

Je-li například $Y = \mathbf{R}^m$, platí $H^k \mathbf{R}^m = 0$ pro každé k, $1 \le k \le m$, a tudíž lokální variačnost libovolné source formy (4.4) na $\mathbf{R}^m$ implikuje globální variačnost. Podobně, je-li Y Möbiova páska, pak lokální variačnost implikuje globální variačnost. Naopak, pokud je $Y = S^2$ sféra nebo $Y = S^1 \times S^1$ torus, platí $H^2 S^2 = H^2(S^1 \times S^1) = \mathbf{R} \neq 0$, a tudíž lokální variačnost source formy obecně neimplikuje globální variačnost.

Podrobnější diskuse globálních aspektů variačních posloupností na fibrovaných varietách přesahuje rámec tohoto článku a lze ji nalézt v pracích Krupka [1, 2, 3].

Reference

[1] D. Krupka: *Variational sequences on finite order jet spaces*, in: D. Krupka, J. Janyška (eds.): Diff. Geom. Appl., Proc. Conf., Brno, Czechoslovakia, 1989, 236–254, World Scientific, Singapore, 1990.

[2] D. Krupka: *Lectures on Variational Sequences*, Open Education and Sciences, Opava, Czech Republic, 1995.

[3] D. Krupka: *Variational sequences in mechanics*, Calc. Var. **5** (1997), 557–583.

[4] D. Krupka: *Variational sequences and variational bicomplexes*, in: Diff. Geom. Appl., Proc. Conf., Brno, August 1998, 525–531, Masaryk University in Brno, 1999.

[5] D. Krupka: *Introduction to Global Variational Geometry*, Lepage Inst. Monograph Ser., No. 1, 2012.

[6] D. Krupka, J. Šeděnková: *Variational sequences and Lepage forms*, in: Diff. Geom. Appl., Proc. Conf., Prague, August 2004, 617–627, Charles University, Prague, 2005.

[7] D. Krupka, Z. Urban, J. Volná: *Variational projectors in fibred manifolds*, Miskolc Math. Notes **14** (2013), 503–516.

[8] J. Musilová: *Variational sequence in higher order mechanics*, in: Diff. Geom. Appl., Proc. Conf., Brno, 1995, 611–624, Masaryk University in Brno, 1996.

[9] D. J. Saunders: *The Geometry of Jet Bundles*, Lecture Notes in Mathematics **142**, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[10] Z. Urban: *Variational Sequences in Mechanics on Grassmann Fibrations*, Ph.D. Thesis, University of Ostrava, Czech Republic, 75 pp., 2011.

[11] Z. Urban, D. Krupka: *Variational sequences in mechanics on Grassmann fibrations*, Acta Appl. Math. **112** (2010), 225–249.

[12] J. Volná, Z. Urban: *The interior Euler-Lagrange operator in field theory*, Math. Slovaca, to appear.

[13] R. Vitolo: *Variational sequences*, in: D. Krupka and D. Saunders (eds.): Handbook of Global Analysis, 1117–1164, Elsevier, Amsterdam, 2007.

Zbyněk Urban, Lepage Research Institute, Slatinky 186, 783 42 Slatinice, Česká republika, Katedra matematiky a fyziky, Fakulta elektrotechniky a informatiky, Univerzita Pardubice, Studentská 95, 532 10 Pardubice, Česká republika,
e-mail: `zbynek.urban@lepageri.eu`