



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Předmluva k třetímu číslu časopisu Kvaternion

Milí čtenáři, třetí číslo časopisu Kvaternion přináší velmi zajímavá témata z různých oblastí matematiky. Za svou z historického hlediska krátkou dobu existence časopisu si Kvaternion již našel svůj okruh autorů i čtenářů. Svědčí o tom zájem o publikování v tomto časopise i kladné ohlasy. V předmluvě zatím nikdy nechyběla zmínka o tom, že Kvaternion není časopisem ryze vědeckým a že jeho smyslem je především popularizace matematiky. Přesto jsem přesvědčen, že se do třetího čísla se zájmem začnou nejen studenti, ale i ti, kterým se matematika stala již povoláním, a že tam naleznou inspiraci pro svoji další práci. Podobně jako ve dvou předcházejících číslech jsou i v tomto čísle uveřejněny příspěvky z workshopu v rámci projektu AMathNet. V tomto případě se jedná o 3. workshop „Aplikovaná matematika“ pořádaný Ústavem matematiky FSI VUT v Brně ve dnech 28. 1.–31. 1. 2013 v Horní Bečvě. Jsou to články „Moore-Penroseova inverze matice a její aplikace“ (autor Ladislav Skula) a „O řešení problémů slabé konvergence“ (autor Jan Franců). Další dva články obsahují tematiku přednesenou v rámci semináře z algebry a geometrie pořádaného na FSI VUT. Jedná se o články „Diferenciální rovnice necelého řádu“ (autor Jiří Karásek) a „Kvaternionové algebry s programem SAGE“ (autorka Lenka Macálková). Dále v tomto čísle naleznete články „Logika fyziky z hlediska sémantické perspektivy“ (autor Ivan Chajda) a „Jak mohl Fermat uvažovat“ (autor Ladislav Kocanda). Věříme, že rozmanitost témat zajistí, že každý, kdo otevře stránky Kvaternionu, si najde něco zajímavého ze svého oboru nebo třeba i oboru velmi vzdáleného.

Brno 28. 5. 2013

LOGIKA FYZIKY Z HLEDISKA SÉMANTICKÉ PERSPEKTIVY

IVAN CHAJDA

ABSTRAKT. Je popsán základní aparát používaný v logice kvantové mechaniky. Ukazuje se, že sémantika logiky kvantové mechaniky se odlišuje od sémantiky klasické logiky a jsou zde zmíněny nejdůležitější rozdíly. Je vzpomenuť přínos G. Birkhoffa a J. von Neumanna pro vznik logiky kvantové mechaniky.

Logika fyziky se zabývá výroky o fyzikálním systému. Pro vysvětlení našeho východiska připomeneme nejprve logickou strukturu klasické fyziky. Nechť je dán fyzikální systém $\mathcal{S}$ a nechť X je jeho fázový prostor. Matematicky vzato, za X bereme topologický prostor s Borelovskou strukturou. Prvky z X pak identifikujeme se stavy fyzikálního systému $\mathcal{S}$. Pozorovatelné veličiny (tzv. observables) jsou pak měřitelné funkce $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ a elementární výroky o fyzikálním systému $\mathcal{S}$ mají tvar $f \in \Delta$, kde Δ je některá měřitelná podmnožina množiny reálných čísel $\mathbb{R}$. Složené výroky pak tvoříme z elementárních výroků pomocí logických spojek negace (označení $\neg$), disjunkce (ozn. $\vee$) a konjunkce (ozn. $\wedge$). Elementární výrok $f \in \Delta$ o systému $\mathcal{S}$ je pravdivý ve stavu $x \in X$, právě když $f(x) \in \Delta$, neboli $x \in f^{-1}(\Delta)$. Tento pojem je tedy zaveden čistě sémanticky. Následně zavádíme pojem tzv. sémantického vyplývání (ozn. $\models$) takto:

$(f \in \Delta) \models (g \in \Gamma)$, pokud pravdivost $f \in \Delta$ implikuje pravdivost $g \in \Gamma$.

Na množině všech výroků zavádíme ekvivalenci (ozn. $\sim$) takto:

$$(f \in \Delta) \sim (g \in \Gamma), \text{ právě když} \\ (f \in \Delta) \models (g \in \Gamma) \text{ v konjunkci s } (g \in \Gamma) \models (f \in \Delta).$$

Označme $[f \in \Delta]$ třídu výroků ekvivalentních s výrokem $f \in \Delta$ v ekvivalenci $\sim$. Lze tedy definovat $[f \in \Delta] = f^{-1}(\Delta)$. Toto je identifikace tzv. Lindenbaumovy–Tarského algebry, jejíž prvky jsou právě výše popsané třídy ekvivalentních výroků. Tato identifikace tedy ztotožňuje třídu výroků o systému $\mathcal{S}$ (tj. prvky Lindenbaumovy–Tarského algebry) s algebrou $\Sigma(X)$ měřitelných (Borelovských) podmnožin X . Pro fyzikální systém $\mathcal{S}$ klasické fyziky je $\Sigma(X)$ Booleova algebra, přičemž výše zmíněné logické spojky $\models$, $\neg$, $\vee$ a $\wedge$ odpovídají množinově-teoretickým operacím inkluze, komplementace, sjednocení a průnik. Zřejmě $\emptyset$ je nejmenším a X největším prvkem této Booleovy algebry, které v naší sémantice hrají roli nepravdy (ozn. $\perp$)

2010 MSC. Primární 03G12, 81P10.

Klíčová slova. Sémantika, logika kvantové mechaniky, Hilbertův prostor, samoadjungované operátory.

Práce byla podporována projektem A-Math-Net – Síť pro transfer znalostí v aplikované matematice (CZ.1.07/2.4.00/17.0100).

a pravdy (ozn. $\top$). Všimněme si, že pro fyzikální systém $\mathcal{S}$ klasické logiky speciálně platí:

1. disjunkce a konjunkce vzájemně distributují;
2. $p \vee q$ je pravdivé, právě když p je pravdivé nebo q je pravdivé;
3. $p \wedge q$ je pravdivé, právě když p je pravdivé a q je pravdivé;
4. $\neg p$ je pravdivý výrok, právě když p není pravdivý;
5. existuje tzv. materiální implikace $\Rightarrow: \Sigma(X) \times \Sigma(X) \rightarrow \Sigma(X)$ splňující $p \leq (q \Rightarrow r)$, právě když $p \wedge q \leq r$, a tedy $(q \Rightarrow r) = (q^c \cup r)$, kde q^c označuje množinový komplement q .

Nyní se budeme zabývat sémantikou logiky neklasického fyzikálního systému. Logika kvantové mechaniky v našem pojetí byla zavedena Garettem Birkhoffem a John von Neumannem v r. 1936, ovšem první přístup J. von Neumanna se datuje již od r. 1932. Vychází z pojmu Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$, jehož jednotkové vektory jsou interpretovány jako tzv. čisté stavy. Pozorovatelné veličiny (observables) se identifikují se samoadjungovanými operátory $a: \text{Dom}(a) \rightarrow \mathcal{H}$, kde $\text{Dom}(a)$ je hustá podmnožina v $\mathcal{H}$. Pro jednoduchost můžeme ještě předpokládat, že tyto operátory jsou ohraničené, tj. $\text{Dom}(a) = \mathcal{H}$. Elementární výroky mají opět tvar $a \in \Delta$ jako v klasické fyzice a lze je opět spojovat pomocí logických spojek $\neg$, $\vee$ a $\wedge$. Nyní je pravdivý predikát na $a \in \Delta$ určen přiřazenou spektrální projekcí, což zapisujeme $E_a(\Delta)$. Neboli zobrazení $\Delta \mapsto E_a(\Delta)$ je tzv. spektrální míra definovaná pomocí a . Podle J. von Neumannova přístupu z r. 1932 je výrok $a \in \Delta$ pravdivý ve stavu $\psi \in \mathcal{H}$, právě když $\psi \in E_a(\Delta)\mathcal{H}$, tj. třída ekvivalence určená touto podmínkou může být vyjádřena jako

$$[a \in \Delta] = E_a(\Delta)\mathcal{H}.$$

Každá taková třída je tudíž uzavřeným podprostorem Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$, přičemž uspořádání této množiny tříd je opět dáno množinovou inkluzí. Sémantické vyplývání pak odpovídá množinové inkluzi přiřazených lineárních podprostorů. Odtud plyne, že svaz $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ uzavřených lineárních podprostorů prostoru $\mathcal{H}$ je korektní kvantově-mechanickou analogií svazu $\Sigma(X)$ měřitelných podmnožin klasického fázového prostoru X klasického fyzikálního systému $\mathcal{S}$.

G. Birkhoff a J. von Neumann byli vedeni tímto přístupem k tvrzení, že logika kvantové mechaniky je popsána svazem $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, který zde hraje roli Lindenbaumovy–Tarského algebry ekvivalentních tříd kvantově-mechanických výroků. Logické spojky jsou zde ovšem realizovány odlišně než v logice klasického fyzikálního systému, a to takto:

$p \vee q$ je uzavřený podprostor prostoru $\mathcal{H}$ generovaný $p \cup q$;

$p \wedge q = p \cap q$ (jako v klasickém systému).

Co se týká negace, Birkhoff a von Neumann definovali $\neg p$ jako výrok, který je pravdivý, právě když p je nepravdivý. Neboli v kvantové mechanice je výrok $a \in \Delta$ nepravdivý ve stavu ψ , právě když $\psi \in (E_a(\Delta)\mathcal{H})^\perp$, kde $^\perp$ označuje ortogonální komplement v $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Pak $\neg p = p^\perp$. Svaz $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ má nejmenší prvek $\{0\}$ a největší prvek $\mathcal{H}$, $\neg$ je tzv. ortokomplementace. Dohromady, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ lze chápat jako tzv. ortomodulární svaz.

Avšak Birkhoff a von Neumann odolali pokušení o takto jednoduchý popis logiky kvantové mechaniky. Všimli si totiž podstatných rozdílů mezi výrokovou logikou

klasické fyziky, což je Booleova algebra, a logikou kvantové mechaniky, které lze vyjádřit v následujících pěti bodech (srovnej s předchozími body 1–5 u logiky klasické mechaniky):

1. disjunkce a konjunkce nejsou vzájemně distributivní;
2. existují stavy, ve kterých je $p \vee q$ pravdivý výrok, přičemž ani p ani q není pravdivý;
3. existují výroky p, q , pro které nelze $p \wedge q$ uvažovat jako konjunkci, neboť tato konjunkce nemá fyzikální smysl (interpretaci);
4. $\neg p = \top$, právě když $p = \perp$, nikoliv když $p \neq \top$;
5. neexistuje zobrazení $\Rightarrow: \mathcal{L}(\mathcal{H}) \times \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ splňující $p \leq (q \Rightarrow r)$, právě když $p \wedge q \leq r$ (neboli $q \Rightarrow r$ není rovno $q^c \cup r$, kde q^c je množinový komplement q).

Poznamenejme, že bod 4 vlastně znamená, že v logice kvantové mechaniky neplatí „zákon vyloučeného třetího“. Dále, $p \Rightarrow q = \neg p \vee q$, právě když $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ je Booleova algebra, tj. právě když uvažovaný fyzikální systém $\mathcal{S}$ je klasický. Tedy logika kvantové mechaniky splňuje pouze slabší verzi zákona $p \leq (q \Rightarrow r)$, právě když $p \wedge q \leq r$, tj. tento zákon platí pouze pro p a q splňující

$$q = (q \wedge p^\perp) \vee (q \wedge p).$$

V tomto případě říkáme, že p, q komutují. To pak vede k zavedení tzv. Sasakiho implikace

$$p \Rightarrow_s q = p^\perp \vee (p \wedge q).$$

Můžeme tedy shrnout vztahy mezi popsány algebraickými pojmy. Pro daný Hilbertův prostor $\mathcal{H}$ je každý jeho uzavřený podprostor určen některou projekcí p , která definuje ohraničený lineární operátor $p: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ splňující $p^2 = p$ (tj. je idempotentní) a $p^* = p$ (je samoadjungovaný). Neboli existuje vzájemně jednoznačná korespondence mezi projekcemi na $\mathcal{H}$ a uzavřenými lineárními podprostory $\mathcal{H}$. Projekce p určuje podprostor $p(\mathcal{H})$ a naopak, každý uzavřený podprostor je obrazem v právě jedné projekci. Označme $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ algebru všech ohraničených operátorů na $\mathcal{H}$. Je-li $\mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ množina všech projekcí na $\mathcal{H}$, lze definovat uspořádání na $\mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ takto:

$$p \leq q, \text{ právě když } p(\mathcal{H}) \subseteq q(\mathcal{H}).$$

Je ihned patrné, že $p \leq q$, právě když $pq = qp = p$. Dále, $p^\perp = 1 - p$ a lze definovat

$$p \wedge q = \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} (pq)^n, \quad p \vee q = (p^\perp \vee q^\perp)^\perp,$$

kde symbol s-lim označuje limitu v silné operátorové topologii (tj. s-lim $a_n = a$, právě když $\lim \| (a_n - a)\psi \| = 0$ pro každé $\psi \in \mathcal{H}$, přičemž $\|a\psi\| = p_\psi(a)$). Pokud p, q komutují, lze tyto vztahy zapsat jednodušším způsobem takto:

$$p \wedge q = pq, \quad p \vee q = p + q - pq.$$

Poznamenejme závěrem, že maximální množiny vzájemně komutujících prvků tvoří tzv. bloky.

REFERENCE

- [1] G. Birkhoff, J. von Neuman: *The logic of quantum mechanics*, Ann. of Math. **37** (1936), 823–843.
- [2] J. von Neuman: *Matematische Grundlagen der Quantummechanik*, Berlin, 1932.

Ivan Chajda, Katedra algebry a geometrie, Přírodovědecká fakulta, Palackého Univerzita,
17. listopadu 12, 771 46 Olomouc, Česká republika,
e-mail: `ivan.chajda@upol.cz`

MOORE-PENROSEOVA INVERZE MATICE A JEJÍ APLIKACE

LADISLAV SKULA

ABSTRAKT. V článku je uvedena definice pseudoinverzní matice, ukázána její existence a jednoznačnost a zmíněny dvě metody jejího výpočtu. Pomocí pseudoinverze je definováno „řešení“ systému lineárních rovnic s komplexními koeficienty vzhledem k nejmenším čtvercům s minimální normou a ukázán její význam pro aplikace. Toto řešení je demonstrováno na konkrétním příkladě.

1. ÚVOD

Tento příspěvek má sloužit jako doplněk k látce z lineární algebry přednášené v oboru matematického inženýrství na VUT. Motivací je následující problematika často potřebná v mnoha aplikacích matematiky ([1],[2],[4],[8],[9]):

Jestliže máme nějaký systém lineárních rovnic (koeficienty jsou reálná čísla), který máme řešit, pak pro množinu $\mathcal{R}$ všech řešení tohoto systému rovnic platí jedna z následujících možností:

- (a) množina $\mathcal{R}$ je jednoprvková (systém rovnic má právě jedno řešení),
- (b) množina $\mathcal{R}$ je nekonečná (systém rovnic má nekonečně mnoho řešení),
- (c) množina $\mathcal{R}$ je prázdná množina, $\mathcal{R} = \emptyset$ (systém rovnic nemá žádné řešení).

Velmi často v aplikacích matematiky je ale potřeba mít nějaké řešení systému lineárních rovnic. Proto je nutno v případě a) z množiny řešení vybrat jedno v jakémisi smyslu *význačné řešení* a to používat. V případě, že systém nemá řešení (případ c), musí se nějaká n -tice reálných čísel (n je počet neznámých) určit a brát jako *významné řešení* soustavy.

Tento výběr řešení však nemůže být libovolný, musí nějakým způsobem odpovídat potřebám aplikační oblasti. V praxi takových možností se vyskytuje celá řada, ale nejvýznamnější a nejčastěji používaná metoda je metoda tzv. *metoda nejmenších čtverců*, která je založena na pojmu *pseudoinverzní matice*. Tuto metodu se pokusíme v tomto příspěvku vysvětlit.

Budeme předpokládat znalosti lineární algebry v rozsahu přednášky v prvním semestru z této oblasti ve studiu matematického inženýrství prezentované ve skriptech [6]. Tyto znalosti jenom rozšíříme o skutečnost, že uvedené výsledky platí nejenom pro reálná čísla, ale též pro čísla komplexní tvořící těleso $\mathbb{C}$ (dokonce pro lineární algebru nad libovolným komutativním tělesem).

2010 MSC. Primární 15A09, 93E24.

Klíčová slova. Pseudoinverzní matice, Moore-Penroseova inverze, Penroseovy podmínky, skeletní rozklad matice, metoda nejmenších čtverců, nejlepší přibližné řešení .

Práce byla podporována projektem A-Math-Net – Síť pro transfer znalostí v aplikované matematice (CZ.1.07/2.4.00/17.0100).

Tudíž prvky matice A budou komplexní čísla, transponovanou matici matice A budeme značit symbolem A^T a symbolem $\bar{A}$ budeme označovat matici vzniklou z matice A nahrazením prvků matice A , což jsou komplexní čísla, čísla komplexně sdruženými. V teorii matic s komplexními čísly se zavádí tzv. *hermitovský operátor* značený symbolem $*$ definovaný pro matici A typu $m \times n$ vztahem:

$$A^* = (\bar{A})^T.$$

Zřejmě matice A^* je typu $n \times m$ a pro matice A, B typů vhodných pro násobení máme:

$$(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*, \quad (A^*)^* = A.$$

Hodnost matice A budeme označovat symbolem $r(A)$ (z angličtiny „rank“).

Poznamenejme, že partie, která pojednává o psedoinverzní matici a metodě nejmenších čtverců, je velmi dobře vysvětlena v knize [7] v kapitole 4 a 7. V této knize každá kapitola je doplněna odstavcem MATLAB Moment, ve kterém je popsáno použití systému MATLAB na výpočty uvedených pojmů.

2. PSEUDOINVERZNÍ MATICE

V tomto odstavci zavedeme pojem pseudoinverzní matice, kterou má každá matice a tato pseudoinverzní matice je jednoznačně určena.

Definice 2.1. Nechť A je matice (nad tělesem komplexních čísel $\mathbb{C}$) typu $m \times n$. Matice X typu $n \times m$ se nazývá *pseudoinverzní matice* matice A , jestliže platí:

- (1) $AXA = A$,
- (2) $XAX = X$,
- (3) $(AX)^* = AX$,
- (4) $(XA)^* = XA$.

Podmínky (1)–(4) se nazývají *Penroseovy podmínky* a pseudoinverzní matice se často nazývá *Moore-Penroseova inverze* matice A nebo stručně *M-P inverze* ([3]). Mluvíme také jen o *pseudoinverzi* matice A .

Věta 2.2 (o jednoznačnosti pseudoinverzní matice). *Jestliže matice má pseudoinverzi, pak tato pseudoinverze je určena jednoznačně.*

Důkaz. Důkaz je veden tím způsobem, že předpokládáme, že matice A má dvě pseudoinverze B a C . Pak se vhodným použitím Penroseových podmínek dokáží rovnosti:

$$B = CAB \quad \text{a} \quad C = CAB,$$

odkud plyne $B = C$. □

Označení 2.3. Jelikož je pseudoinverze jednoznačně určena, můžeme pro ni zavést označení. Tuto pseudoinverzi budeme označovat symbolem A^+ .

Při zjišťování, zdali matice X je pseudoinverze matice A , se obvykle postupuje tak, že se ověřují Penroseovy podmínky (1)–(4). V případě jejich platnosti je pak X jednoznačně definovaná pseudoinverzní matice A^+ matice A .

Příklad 2.4. a) Jestliže A je regulární matice, pak matice $X = A^{-1}$ vyhovuje Penroseovým podmínkám, tudíž

$$A^+ = A^{-1}.$$

b) Je-li $A = O_{m,n}$ nulová matice typu $m \times n$, pak podobně ověříme Penroseovy podmínky pro $X = O_{n,m}$, odkud plyne

$$O_{m,n}^+ = O_{n,m}.$$

c) Jestliže matice A má pseudoinverzi, pak má pseudoinverzi též matice A^+ a platí:

$$(A^+)^+ = A.$$

d) Jestliže D je diagonální matice řádu n

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix},$$

pak pro Moore-Penroseovu inverzi matice D máme

$$D^+ = \begin{pmatrix} d_1^+ & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^+ & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n^+ \end{pmatrix},$$

kde pro komplexní číslo c symbol c^+ značí 0 , jestliže $c = 0$. V případě, že c je nenulové komplexní číslo, položíme $c^+ = c^{-1}$.

V závěrečném odstavci 4 prezentujeme větu o existenci pseudoinverzní matice pro každou matici nad tělesem komplexních čísel $\mathbb{C}$ a dvě metody výpočtu této pseudoinverze.

3. MOORE-PENROSEOVA INVERZE A SYSTÉM LINEÁRNÍCH ROVNIC

Pro řešení soustavy lineárních rovnic se používá aparát teorie matic a vektorů. V tomto příspěvku budeme pro přirozené číslo n rozumět n -rozměrným vektorovým prostorem $\mathbb{C}^n$ množinu všech matic nad komplexními čísly typu $n \times 1$. Tyto matice budeme považovat za vektory, přičemž komplexní čísla budou skaláry. Operace sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem se definují jako tyto operace s maticemi.

Definice 3.1. Pro n -rozměrné vektory $X, Y \in \mathbb{C}^n$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

položíme

$$(X, Y) = Y^* \cdot X = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \bar{y}_i \text{ a } \|X\| = \sqrt{(X, X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}.$$

Komplexní číslo (X, Y) se nazývá *skalární součin vektorů* X, Y a číslo $\|X\|$ *norma vektoru* X . Jestliže $(X, Y) = 0$, pak se vektory X, Y nazývají *ortogonální* ([5]).

Tvrzení 3.2. *Pro n -rozměrné vektory X, Y a komplexní číslo λ máme:*

(a) *Norma $\|X\|$ je reálné nezáporné číslo, přičemž*

$$\|X\| = 0 \iff X = 0_{n,1},$$

(b) *$\|\lambda X\| = |\lambda| \cdot \|X\|$ a platí trojúhelníková nerovnost:*

$$\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|.$$

Pro ortogonální vektory stejného rozměru se dá dokázat *Pythagorova věta*.

Věta 3.3 (Pythagorova věta). *Pro ortogonální n -rozměrné vektory X, Y máme*

$$\|X + Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2.$$

V dalším budeme uvažovat systém $(*)$ lineárních rovnic (nad tělesem komplexních čísel $\mathbb{C}$) s maticí soustavy A typu $m \times n$, s vektorem absolutních členů B rozměru m a n -rozměrným vektorem X neznámých $x_1, \dots, x_n$, tedy

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Tento systém $(*)$ lineárních rovnic budeme zapisovat v maticovém zápisu:

$$A \cdot X = B. \quad (*)$$

Definice 3.4. Pro systém lineárních rovnic $(*)$ položíme:

$$X_0 = A^+ \cdot B.$$

Pro n -rozměrný vektor X_0 platí následující věta:

Věta 3.5 (Hlavní věta). *Pro každý n -rozměrný vektor $X \neq X_0$ máme:*

$$\|A \cdot X_0 - B\| \leq \|A \cdot X - B\|$$

a v případě $\|AX_0 - B\| = \|AX - B\|$ platí

$$\|X_0\| < \|X\|.$$

Tudíž vektor X_0 minimalizuje normu $\|AX - B\|$ a ze všech n rozměrných vektorů X , které minimalizují tuto normu, má nejmenší normu. Vektor X_0 (viz [3],[5]) se nazývá *řešení systému $(*)$ vzhledem k nejmenším čtvercům s minimální normou nebo nejlepší přibližné řešení systému $(*)$ (the least squares solution of minimum norm)*.

Příklad 3.6. Nalezněte řešení následujícího systému vzhledem k nejmenším čtvercům s minimální normou:

$$\begin{aligned}x + 4y + 3z &= 2 \\ -x + y + 2z &= -2 \\ -2x - 2y &= 1.\end{aligned}$$

Matice této soustavy je matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vektory

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

jsou vektory absolutních členů a neznámých. Hodnost matice A soustavy je rovna 2 a hodnost rozšířené matice soustavy (AB) je rovna 3, tudíž soustava nemá řešení, ale existuje „řešení“ X_0 této soustavy vzhledem k nejmenším čtvercům s minimální normou. K získání tohoto „řešení“ použijeme pseudoinverzi matice A :

$$A^+ = \frac{1}{231} \begin{pmatrix} 3 & -43 & -54 \\ 27 & -2 & -24 \\ 24 & 41 & 30 \end{pmatrix},$$

odkud dostaneme

$$X_0 = A^+ \cdot B = \frac{1}{231} \begin{pmatrix} 38 \\ 34 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Poznámka 3.7. Pro nejlepší přibližné řešení X_0 systému (*) je sice norma $\|A \cdot X - B\|$ minimální, ale vektor X_0 nemusí být jediný vektor X , pro který je tato norma minimální:

Příklad 3.8. Uvažujme následující systém lineárních rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{aligned}x + y &= 1 \\ x + y &= 0.\end{aligned}$$

Matice tohoto systému A a matice B absolutních členů jsou dány identitami:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pro pseudoinverzi A^+ máme $A^+ = \frac{1}{4} \cdot A$, odkud plyne pro nejlepší přibližné řešení

$$X_0 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pak

$$A \cdot X_0 - B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pak pro minimální normu máme

$$\|A \cdot X_0 - B\|^2 = \frac{1}{2}.$$

Např. pro vektor X :

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

dostaneme

$$\|A \cdot X - B\|^2 = \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad \|X_0\| = \frac{1}{8} < \frac{1}{4} = \|X\|^2.$$

4. METODY VÝPOČTU PSEUDOINVERZNÍ MATICE

V současné době existuje celá řada metod výpočtu pseudoinverzní matice, z nichž většina může sloužit jako důkaz pro existenci této Moore-Penroseovy inverze. V tomto odstavci uvedeme dvě nejčastěji používané metody ([3]).

Metoda skeletního rozkladu matice.

Definice 4.1. Matice M typu $m \times n$ se nazývá matice *úplné řádkové (sloupcové) hodnosti*, jestliže hodnota matice M je rovna počtu řádků (sloupců), tedy

$$r(M) = m \quad (r(M) = n).$$

Pro existenci a vyjádření pseudoinverze matice s úplnou hodností potřebujeme lemma:

Lemma 4.2. *Jestliže matice M má úplnou řádkovou (sloupcovou) hodnotu, pak matice $M \cdot M^*$ ($M^* \cdot M$) je regulární, tedy má inverzní matici.*

Následující tvrzení udává formule pro pseudoinverzi matic s úplnou hodností:

Tvrzení 4.3. *Jestliže matice M má úplnou řádkovou sloupcovou hodnotu, pak má pseudoinverzi a platí:*

$$M^+ = M^* \cdot (M \cdot M^*)^{-1} \quad (M^+ = (M^* \cdot M)^{-1} \cdot M^*).$$

Pro konstrukci pseudoinverze obecné matice se většinou používá následující věty:

Věta 4.4 (O skeletním rozkladu matice – Theorem on “rank factorization” of a matrix). *Nechť A je nenulová matice typu $m \times n$ s hodnotí r . Pak existují matice B , C typu $m \times r$, $r \times n$ takové, že platí:*

$$A = B \cdot C, \quad r(B) = r(C) = r.$$

Rozklad $A = B \cdot C$ se nazývá skeletní rozklad matice A .

Analogem pro tvrzení $(M \cdot N)^{-1} = N^{-1} \cdot M^{-1}$ pro regulární matice M, N stejného řádu je věta:

Věta 4.5. *Jestliže $A = B \cdot C$ je skeletní rozklad matice A , pak*

$$A^+ = (B \cdot C)^+ = C^+ \cdot B^+.$$

Uvedená formule slouží k výpočtu pseudoinverze metodou skeletního rozkladu.

Příklad 4.6. Vypočítejte pseudoinverzi matice A soustavy lineárních rovnic 3 neznámých z odstavce 3. Připomeňme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice A má skeletní rozklad $A = B \cdot C$, kde

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Z tvrzení 4.3 dostaneme

$$\begin{aligned} B^+ &= (B^* B)^{-1} B^* = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{77} \begin{pmatrix} 10 & -15 & -26 \\ 17 & 13 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Podobně dostaneme

$$C^+ = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Odtud podle vzorce $A^+ = C^+ \cdot B^+$ obdržíme

$$A^+ = \frac{1}{231} \begin{pmatrix} 3 & -43 & -54 \\ 27 & -2 & -24 \\ 24 & 41 & 30 \end{pmatrix}.$$

Poznámka 4.7. Jestliže matice B, C vystupující ve skeletním rozkladu matice A mají za prvky celá čísla, pak matice

$$\det(B^* \cdot B) \cdot \det(C \cdot C^*) \cdot A^+$$

má za prvky také celá čísla. To vysvětluje koeficient $\frac{1}{231}$ z předešlého příkladu, protože $231 = 77 \cdot 3$ a $\det(B^* \cdot B) = 77$, $\det(C \cdot C^*) = 3$.

Grevilleův algoritmus

Grevilleův algoritmus je založen na rekurenci vzhledem k počtu sloupců matice. Pro matici, která má jen jeden sloupec, je její pseudoinverze daná následující formulí, která se snadno dokáže ([3]).

Tvrzení 4.8. Pro matici A typu $m \times 1$ (A má jeden sloupec) máme

$$A^+ = 0_{1,m}, \text{ jestliže } A = 0_{m,1},$$

a v případě $A \neq 0$, máme

$$A^+ = (A^* \cdot A)^{-1} \cdot A^*.$$

Tvrzení 4.6 je první krok při použití rekurence. Pro obecnou matici pak můžeme použít hlavní větu Grevilleova algoritmu.

Věta 4.9. Předpokládejme, že umíme sestavit pseudoinverzi matice, která má n sloupců (n je přirozené číslo) a nechť $M = (Ns)$ je matice typu $m \times (n+1)$,

přičemž s je poslední sloupec matice M a N je podmatice matice M typu $m \times n$.
 Položme

$$d = N^+ \cdot s \quad a \quad c = s - N \cdot d.$$

Dále položme

$$b = \begin{cases} c^+, & \text{jestliže } c \neq 0 \\ (1 + d^*d)^{-1}d^*N^+ & \text{pro } c = 0. \end{cases}$$

Pak

$$M^+ = \begin{pmatrix} N^+ - db \\ b \end{pmatrix}.$$

REFERENCE

- [1] J. Anděl: *Matematická statistika*, SNTL, Praha, 1985.
- [2] A. Ben-Israel, T.N.E. Greville: *Generalized Inverses, Theory and Applications*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 2003.
- [3] P. J. Davis: *Circulant Matrices*, 2nd ed., New York, 1994.
- [4] K. L. Doty, C. Melchiorri, C. Bonivento: *A Theory of Generalized Inverses Applied to Robotics*, The International Journal of Robotics, 1992, 36pp.
- [5] F.R. Gantmacher: *The Theory of Matrices*, Chelsea, New York, 1959, anglický překlad z ruštiny.
- [6] J. Karásek, L. Skula: *Lineární algebra*, Teoretická část, 3. vyd., FSI VUT, Brno, 2012.
- [7] R. Piziak, P.L. Odell: *Matrix Theory, From Generalized Inverses to Jordan Form*, Chapman & Hall/CRC, 2007.
- [8] S.S. Searle: *Matrix Algebra Useful for Statistics*, New York, 1982.
- [9] F. Šik: *Lineární algebra zaměřená na numerickou analýzu*, MU, Brno, 1998.

Ladislav Skula, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
 e-mail: skula@fme.vutbr.cz

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE NECELÉHO ŘÁDU

JIRÍ KARÁSEK

ABSTRAKT. Přehledový článek prezentuje základní informace o diferenciálních rovnicích necelého řádu. Zatímco modelování mnohých jevů studovaných v aplikacích pomocí klasických diferenciálních rovnic je všeobecně známé a hojně rozšířené, v některých situacích neposkytuje dostatečně uspokojivé výsledky, a je proto třeba uchýlit se k obecnějšímu přístupu – k diferenciálním rovnicím necelého řádu, které popisují studované jevy lépe. Cílem tohoto článku je seznámit čtenáře s fundamentálními pojmy a výsledky této teorie. Článek se omezuje pouze na matematický aparát teorie, aniž by uváděl motivaci a interpretaci výsledků v konkrétních aplikacích.

1. RIEMANNŮV-LIOUVILLEŮV INTEGRÁL A DERIVACE NECELÉHO ŘÁDU

Definice 1.1. Nechť funkce f je integrovatelná (např. riemannovsky) na intervalu $\langle a, t \rangle$ pro libovolné $t \in I$, kde $I = \langle a, b \rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ nebo $I = \langle a, \infty \rangle$, $a \in \mathbb{R}$. Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Definujeme $J_{a+}^{\alpha}(f)$ takto:

(i) Nechť $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Pak

$$J_{a+}^{\alpha}(f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

(Zde Γ značí funkci gama, [7], str 521.)

(ii) Nechť $\alpha \in \mathbb{Z}_0^-$, f má na I nebo jeho části $(-\alpha)$ -tou derivaci $f^{(-\alpha)}$. Pak

$$J_{a+}^{\alpha}(f) = f^{(-\alpha)}.$$

(iii) Nechť $\alpha \in \mathbb{R}^- - \mathbb{Z}$, $n_{\alpha} = -\lfloor \alpha \rfloor$, $J_{a+}^{\alpha+n_{\alpha}}(f)$ má na I nebo jeho části n_{α} -tou derivaci $(J_{a+}^{\alpha+n_{\alpha}}(f))^{(n_{\alpha})}$. Pak

$$J_{a+}^{\alpha}(f) = (J_{a+}^{\alpha+n_{\alpha}}(f))^{(n_{\alpha})} \quad \left(= \frac{1}{\Gamma(\alpha + n_{\alpha})} \cdot \left(\int_a^t \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{1-\alpha-n_{\alpha}}} d\tau \right)^{(n_{\alpha})} \right).$$

($\lfloor x \rfloor$ značí celou část x , tj. největší celé číslo menší nebo rovné x .)

$J_{a+}^{\alpha}(f)$ se nazývá *levostranný Riemannův-Liouvilleův integrál funkce f řádu α* .

2010 MSC. Primární 34K06, 34K25.

Klíčová slova. Riemann-Liouvilleův integrál a derivace necelého řádu, Caputova derivace necelého řádu, Mittag-Lefflerova funkce, Wrightova funkce, diferenciální rovnice necelého řádu.

Práce byla podporována projektem A-Math-Net – Síť pro transfer znalostí v aplikované matematice (CZ.1.07/2.4.00/17.0100).

Definice 1.2. Necht jsou splněny předpoklady 1.1 s tím, že $\beta = -\alpha \in \mathbb{R}_0^+$. Definujeme

$$D_{a+}^\beta(f) = J_{a+}^\alpha(f).$$

$D_{a+}^\beta(f)$ se nazývá *levostranná Riemannova-Liouvilleova derivace funkce f řádu β* .

Příklad 1.3. (i) Necht $f(t) = 1$, $I = \langle a, \infty \rangle$. Pak

$$J_{a+}^\alpha(f)(t) = \begin{cases} \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} & \text{pro } \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}^- \\ 0 & \text{pro } \alpha \in \mathbb{Z}^- \end{cases},$$

$$D_{a+}^\beta(f)(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\beta)(t-a)^\beta} & \text{pro } \beta \in \mathbb{R}_0^+ - \mathbb{N} \\ 0 & \text{pro } \beta \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

(ii) Necht $f(t) = (t-a)^s$, $s \in \mathbb{R}_0^+$, $I = \langle a, \infty \rangle$. Pak

$$J_{a+}^\alpha(f)(t) = \begin{cases} \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+1)}(t-a)^{\alpha+s} & \text{pro } \alpha + s \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}^- \\ 0 & \text{pro } \alpha + s \in \mathbb{Z}^- \end{cases},$$

$$D_{a+}^\beta(f)(t) = \begin{cases} \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s-\beta+1)(t-a)^{\beta-s}} & \text{pro } s - \beta \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}^- \\ 0 & \text{pro } s - \beta \in \mathbb{Z}^- \end{cases}.$$

Poznámka 1.4. Za obdobných předpokladů se definuje na intervalu $I = \langle a, b \rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ nebo $I = (-\infty, b)$, $b \in \mathbb{R}$, funkce $J_{b-}^\alpha(f)$:

$$(i) \quad J_{b-}^\alpha(f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad \text{pro } \alpha \in \mathbb{R}^+,$$

$$(ii) \quad J_{b-}^\alpha(f) = (-1)^\alpha f^{(-\alpha)} \quad \text{pro } \alpha \in \mathbb{Z}_0^-,$$

$$(iii) \quad J_{b-}^\alpha(f) = (-1)^{n_\alpha} (J_{b-}^{\alpha+n_\alpha}(f))^{(n_\alpha)} \quad \text{pro } \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z},$$

$$D_{b-}^\beta(f) = J_{b-}^\alpha(f) \quad \text{pro } \beta = -\alpha \in \mathbb{R}_0^+.$$

$J_{b-}^\alpha(f)$ se pak nazývá *pravostranný Riemannův-Liouvilleův integrál funkce f řádu α* , $D_{b-}^\beta(f)$ *pravostranná Riemannova-Liouvilleova derivace funkce f řádu β* . V případě, že $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, resp. $\beta \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{N}$ hovoříme v obou situacích o *Riemannově-Liouvilleově integrálu*, resp. *derivaci necelého řádu*.

2. CAPUTOVA DERIVACE NECELÉHO ŘÁDU

Definice 2.1. Za předpokladů v 1.2 definujeme pro $\beta \in \mathbb{R}_0^+$

$${}^C D_{a+}^\beta(f) = D_{a+}^\beta(g),$$

$$\text{kde } g(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{[\beta]-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k,$$

přičemž funkce f má v a derivace až do řádu $[\beta] - 1$. (Zde $[x]$ značí nejmenší celé číslo větší nebo rovné x .) ${}^C D_{a+}^\beta(f)$ se nazývá *levostranná Caputova derivace funkce f řádu β* .

Příklad 2.2. (i) Necht $f(t) = 1$, $I = \langle a, \infty \rangle$, $\beta \in \mathbb{R}^+$. Pak ${}^C D_{a+}^\beta(f)(t) = 0$.

(ii) Nechť $f(t) = (t - a)^s$, $s \in \mathbb{R}^+$, $I = \langle a, \infty \rangle$, $\beta \in \mathbb{R}^+$. Pak

$${}^C D_{a+}^\beta(f)(t) = \begin{cases} \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s-\beta+1)}(t-a)^{s-\beta} & \text{pro } s - [\beta] + 1 \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{pro } s - [\beta] + 1 \in \mathbb{Z}_0^- \end{cases},$$

zatímco pro $s - [\beta] + 1 \in \mathbb{R}^- - \mathbb{Z}$ neexistuje.

Poznámka 2.3. Obdobně se definuje *pravostranná Caputova derivace* ${}^C D_{b-}^\beta(f)$ funkce f řádu β .

3. NĚKTERÉ SPECIÁLNÍ FUNKCE

Definice 3.1. Nechť $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\beta \in \mathbb{R}$. *Mittag-Lefflerova funkce* $E_{\alpha,\beta}$ se dvěma parametry je definována řadou

$$E_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad \text{na } \mathbb{R}.$$

(Pokud některá hodnota $\alpha k + \beta$ je rovna celému nekladnému číslu, příslušný člen se vynechá.)

Poznámka 3.2. (i) Pro $\alpha \in \mathbb{R}^+$ se funkce $E_{\alpha,1}$ značí E_α a nazývá se *Mittag-Lefflerova funkce s jedním parametrem*.

(ii) Mittag-Lefflerovy funkce pro některé hodnoty parametrů:

$$\begin{aligned} E_1(t) &= e^t, \\ E_2(t) &= \begin{cases} \cosh \sqrt{t} & \text{pro } t \in \mathbb{R}_0^+ \\ \cos \sqrt{-t} & \text{pro } t \in \mathbb{R}^- \end{cases}, \\ E_2(-t) &= \begin{cases} \cos \sqrt{t} & \text{pro } t \in \mathbb{R}_0^+ \\ \cosh \sqrt{-t} & \text{pro } t \in \mathbb{R}^- \end{cases}, \\ E_2(t^2) &= \cosh t, \\ E_2(-t^2) &= \cos t, \\ E_{\frac{1}{2}}(t) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{t^2} \int_t^\infty e^{-\tau^2} d\tau, \\ E_{1,2}(t) &= \begin{cases} \frac{e^t - 1}{t} & \text{pro } t \in \mathbb{R} - \{0\} \\ 1 & \text{pro } t = 0 \end{cases}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{1,3}(t) &= \begin{cases} \frac{e^t - 1 - t}{t^2} & \text{pro } t \in \mathbb{R} - \{0\} \\ \frac{1}{2} & \text{pro } t = 0 \end{cases}, \\
E_{1,m}(t) &= \begin{cases} \frac{e^t - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{t^k}{k!}}{t^{m-1}} & \text{pro } t \in \mathbb{R} - \{0\} \\ \frac{1}{(m-1)!} & \text{pro } t = 0 \end{cases}, \\
E_{2,2}(t) &= \begin{cases} \frac{\sinh \sqrt{t}}{\sqrt{t}} & \text{pro } t \in \mathbb{R}^+ \\ 1 & \text{pro } t = 0 \\ \frac{\sin \sqrt{-t}}{\sqrt{-t}} & \text{pro } t \in \mathbb{R}^- \end{cases}, \\
E_{2,2}(t^2) &= \begin{cases} \frac{\sinh t}{t} & \text{pro } t \in \mathbb{R} - \{0\} \\ 1 & \text{pro } t = 0 \end{cases}, \\
E_{2,2}(-t^2) &= \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{pro } t \in \mathbb{R} - \{0\} \\ 1 & \text{pro } t = 0 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Definice 3.3. Nechť $\alpha, m \in \mathbb{R}^+, l \in \mathbb{R}$ jsou taková čísla, že $\alpha(jm+l) \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}^-$ pro každé $j \in \mathbb{N}_0$. *Zobecněná Mittag-Lefflerova funkce* $E_{\alpha,m,l}$ je definována řadou

$$E_{\alpha,m,l}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \quad \text{na } \mathbb{R},$$

kde $c_0 = 1$, $c_k = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\Gamma(\alpha(jm+l)+1)}{\Gamma(\alpha(jm+l+1)+1)}$ pro $k \in \mathbb{N}$.

(Pokud opět některý argument funkce Γ ve jmenovateli je roven celému nekladnému číslu, příslušný člen se vynechá.)

Poznámka 3.4. Je $E_{\alpha,1,l} = \Gamma(\alpha l + 1) E_{\alpha,\alpha l+1}$, pokud $\alpha(j+l) \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}^-$ pro každé $j \in \mathbb{N}_0$.

Definice 3.5. Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ jsou taková čísla, že $\beta - \alpha > -1$, $a + \alpha k \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}^-$ pro každé $k \in \mathbb{N}_0$.

Wrightova funkce ${}_1\Psi_1$ (zde stručně Ψ) je definována řadou

$$\Psi \left[\begin{matrix} (a, \alpha) \\ (b, \beta) \end{matrix} \middle| t \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a + \alpha k)}{\Gamma(b + \beta k)} \cdot \frac{t^k}{k!} \quad \text{na } \mathbb{R},$$

přičemž platí stejná úmluva jako ve 3.3.

Poznámka 3.6. (i) Obecněji se Wrightovy funkce definují se dvěma parametry p a q , $p \in \mathbb{N}_0$, $q \in \mathbb{N} : {}_p\Psi_q$ ([3], str. 56). V tomto článku se jiný případ než $p = q = 1$ nebude vyskytovat.

(ii) Mittag-Lefflerova funkce je zvláštním případem Wrightovy funkce, platí totiž

$$\Psi \left[\begin{matrix} (1,1) \\ (b,\beta) \end{matrix} \middle| t \right] = E_{\beta,b}(t)$$

pro libovolné hodnoty b, β splňující předpoklady z 3.5.

4. DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE NECELÉHO ŘÁDU
 S RIEMANNOVÝMI-LIOUVILLEOVÝMI DERIVACEMI

V této a další části uvedeme několik typů diferenciálních rovnic necelého řádu, u nichž lze některá nebo všechna řešení vyjádřit pomocí speciálních funkcí ze 3. části článku nebo jinak. V případě lineárních homogenních diferenciálních rovnic s jednou derivací necelého řádu popíšeme také asymptotickou stabilitu řešení.

Věta 4.1. *Nechť $\alpha, \lambda, m \in \mathbb{R}^+$, $\beta \in \mathbb{R}$ jsou taková čísla, že platí $m \neq 1$, $\frac{\beta+\alpha m}{1-m} > -1$. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Pak diferenciální rovnice*

$$D_{a+}^{\alpha}(y)(t) = \lambda(t-a)^{\beta}y^m(t)$$

má řešení

$$y(t) = \left(\frac{\Gamma(\frac{\beta+\alpha}{1-m} + 1)}{\lambda \Gamma(\frac{\beta+\alpha m}{1-m} + 1)} \right)^{\frac{1}{m-1}} (t-a)^{\frac{\beta+\alpha}{1-m}}.$$

Důkaz. [3], Example 3.3, str. 177.

Poznámka 4.2. V případě $m \in \mathbb{N}$ sudého výsledek platí pro libovolné $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Věta 4.3. *Nechť $\alpha, \lambda, m \in \mathbb{R}^+$, $\beta \in \mathbb{R}$ jsou taková čísla, že platí $m \neq 1$, $\frac{\beta+\alpha m}{1-m} > -1$. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Nechť $\mu \in \mathbb{R}^+$ je takové číslo, že platí*

$$\Gamma\left(\frac{\beta+\alpha m}{1-m} + 1\right)(\lambda\mu^m + b) - \Gamma\left(\frac{\beta+\alpha}{1-m} + 1\right)\mu = 0. \quad (1)$$

Pak diferenciální rovnice

$$D_{a+}^{\alpha}(y)(t) = \lambda(t-a)^{\beta}y^m(t) + b(t-a)^{\frac{\beta+\alpha m}{1-m}}$$

má řešení

$$y(t) = \mu(t-a)^{\frac{\beta+\alpha}{1-m}}.$$

Důkaz. [3], Example 3.4, str. 181.

Poznámka 4.4. V případě $m \in \mathbb{N}$ sudého výsledek platí pro libovolné $\lambda \in \mathbb{R}^*$ a libovolné $\mu \in \mathbb{R}$ splňující podmínku (1).

Věta 4.5. *Nechť $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$, $a, \lambda \in \mathbb{R}$ jsou taková čísla, že $\lceil \alpha \rceil = n$. Nechť funkce f splňuje předpoklady z 1.1. Nechť $b_k \in \mathbb{R}$ pro $k = 1, 2, \dots, n$. Pak Cauchyův problém*

$$D_{a+}^{\alpha}(y)(t) = \lambda y(t) + f(t),$$

$$D_{a+}^{\alpha-k}(y)(a) = b_k \quad \text{pro } k = 1, 2, \dots, n$$

má jediné řešení

$$\begin{aligned} y(t) = & \sum_{j=1}^n b_j(t-a)^{\alpha-j} E_{\alpha, \alpha-j+1}(\lambda(t-a)^{\alpha}) + \\ & + \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda(t-\tau)^{\alpha}) f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Důkaz. [3], Theorem 4.1, str. 224.

Věta 4.6. *Nechť $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ a $\beta \in \mathbb{R}_0^+$ jsou taková čísla, že $[\alpha] = n$.
Nechť $b_k \in \mathbb{R}$ pro $k = 1, 2, \dots, n$. Pak Cauchyův problém*

$$\begin{aligned} D_{a+}^{\alpha}(y)(t) &= \lambda(t-a)^{\beta}y(t), \\ D_{a+}^{\alpha-k}(y)(a) &= b_k \quad \text{pro } k = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

má jediné řešení

$$y(t) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)} (t-a)^{\alpha-j} \cdot E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-j}{\alpha}}(\lambda(t-a)^{\alpha+\beta}).$$

Důkaz. [3], Theorem 4.2, str. 227.

Věta 4.7. *Nechť $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $k, n \in \mathbb{N}$, $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}_0^+$ jsou taková čísla, že $[\alpha] = n$.
Nechť dále $\mu_p, f_p \in \mathbb{R}$ pro $p = 1, 2, \dots, k$ jsou taková, že $\mu_p > -1 - \alpha$, $\mu_p \neq -j$, $(r+1)(\alpha+\beta) + \mu_p \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}^-$ pro libovolné $p = 1, 2, \dots, k$, $j = 1, 2, \dots, n$ a $r \in \mathbb{N}_0$. Pak Cauchyův problém*

$$\begin{aligned} D_{a+}^{\alpha}(y)(t) &= \lambda(t-a)^{\beta}y(t) + \sum_{p=1}^k f_p(t-a)^{\mu_p}, \\ D_{a+}^{\alpha-j}(y)(a) &= b_j \quad \text{pro } j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

má jediné řešení

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)} (t-a)^{\alpha-j} \cdot E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-j}{\alpha}}(\lambda(t-a)^{\alpha+\beta}) + \\ &+ \sum_{p=1}^k \frac{\Gamma(\mu_p+1)f_p}{\Gamma(\mu_p+\alpha+1)} (t-a)^{\alpha+\mu_p} \cdot E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta+\mu_p}{\alpha}}(\lambda(t-a)^{\alpha+\beta}). \end{aligned}$$

Důkaz. [3], Example 4.22, str. 254.

Poznámka 4.8. Věta 4.6 je zvláštním případem 4.7; je uvedeno samostatně pouze z metodických důvodů.

Věta 4.9. *Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, $l \in \mathbb{N}$ jsou taková čísla, že $[\alpha] = l$, $\alpha - l + 1 > \beta$.
Nechť $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Pak diferenciální rovnice*

$$D_{0+}^{\alpha}(y)(t) - \lambda D_{0+}^{\beta}(y)(t) = \mu y(t)$$

má obecné řešení

$$y(t) = \sum_{j=1}^l c_j \sum_{u=0}^{\infty} \frac{\mu^u}{u!} t^{\alpha u + \alpha - j} \cdot \Psi \left[\begin{matrix} (u+1, 1) \\ (\alpha u + \alpha + 1 - j, \alpha - \beta) \end{matrix} \middle| \lambda t^{\alpha - \beta} \right],$$

kde $c_j \in \mathbb{R}$ pro $j = 1, 2, \dots, l$.

Speciálně pro $\mu = 0$ má obecné řešení

$$y(t) = \sum_{j=1}^l c_j t^{\alpha-j} \cdot E_{\alpha-\beta, \alpha+1-j}(\lambda t^{\alpha-\beta}).$$

Důkaz. [3], Theorem 5.2, str. 286.

Věta 4.10. *Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, $l, m \in \mathbb{N}$ jsou taková čísla, že $\lceil \alpha \rceil = l$, $m \geq 3$, $\alpha - l + 1 > \beta$.*

Nechť $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-2} \in \mathbb{R}$ jsou taková čísla, že $\beta > \alpha_{m-2} > \dots > \alpha_1 > \alpha_0 = 0$.

Nechť $\lambda, A_0, A_1, \dots, A_{m-2} \in \mathbb{R}$. Pak diferenciální rovnice

$$D_{0+}^{\alpha}(y)(t) - \lambda D_{0+}^{\beta}(y)(t) - \sum_{k=0}^{m-2} A_k D_{0+}^{\alpha_k}(y)(t) = 0$$

má obecné řešení

$$\begin{aligned} y(t) = & \sum_{j=1}^l c_j \sum_{u=0}^{\infty} \left(\sum_{k_0+\dots+k_{m-2}=u} \frac{1}{k_0! \dots k_{m-2}!} \cdot \right. \\ & \cdot \left(\prod_{\nu=0}^{m-2} A_{\nu}^{k_{\nu}} \right) t^{(\alpha-\beta)u+\alpha-j+\sum_{\nu=0}^{m-2} (\beta-\alpha_{\nu})k_{\nu}} \cdot \\ & \cdot \left. \Psi \left[\begin{matrix} (u+1, 1) \\ ((\alpha-\beta)u+\alpha+1-j+\sum_{\nu=0}^{m-2} (\beta-\alpha_{\nu})k_{\nu}, \alpha-\beta) \end{matrix} \middle| \lambda t^{\alpha-\beta} \right] \right), \end{aligned}$$

kde $c_j \in \mathbb{R}$ pro $j = 1, 2, \dots, l$ jsou libovolná čísla.

Důkaz. [3], Theorem 5.3, str. 291.

Věta 4.11. *Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, $\alpha > \beta$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Nechť funkce f splňuje předpoklady z 1.1 pro $a = 0$. Pak diferenciální rovnice*

$$D_{0+}^{\alpha}(y)(t) - \lambda D_{0+}^{\beta}(y)(t) = \mu y(t) + f(t)$$

má partikulární řešení

$$y(t) = \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} G_{\alpha,\beta;\lambda,\mu}(t-\tau) f(\tau) d\tau,$$

kde $G_{\alpha,\beta;\lambda,\mu}(t) = \sum_{u=0}^{\infty} \frac{\mu^u}{u!} t^{\alpha\mu} \cdot \Psi \left[\begin{matrix} (u+1, 1) \\ (\alpha u + \alpha, \alpha - \beta) \end{matrix} \middle| \lambda t^{\alpha-\beta} \right]$. Speciálně pro $\mu = 0$ má partikulární řešení

$$y(t) = \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta,\alpha}(\lambda(t-\tau)^{\alpha-\beta}) f(\tau) d\tau.$$

Důkaz. [3], Theorem 5.5, str. 297.

Věta 4.12. *Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, $m \in \mathbb{N}$ jsou taková čísla, že $m \geq 3$, $\alpha > \beta$. Nechť $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-2} \in \mathbb{R}$ jsou taková, že $\beta > \alpha_{m-2} > \dots > \alpha_1 > \alpha_0 = 0$. Nechť $\lambda, A_0, A_1, \dots, A_{m-2} \in \mathbb{R}$. Nechť funkce f splňuje předpoklady z 1.1 pro $a = 0$. Pak diferenciální rovnice*

$$D_{0+}^{\alpha}(y)(t) - \lambda D_{0+}^{\beta}(y)(t) - \sum_{k=0}^{m-2} A_k D_{0+}^{\alpha_k}(y)(t) = f(t)$$

má partikulární řešení

$$y(t) = \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} G_{\alpha_1, \dots, \alpha_{m-2}, \beta, \alpha; \lambda} (t - \tau) f(\tau) d\tau,$$

$$\text{kde } G_{\alpha_1, \dots, \alpha_{m-2}, \beta, \alpha; \lambda} (t) = \sum_{u=0}^{\infty} \left(\sum_{k_0 + \dots + k_{m-2} = u} \frac{1}{k_0! \dots k_{m-2}!} \cdot \left(\prod_{\nu=0}^{m-2} A_{\nu}^{k_{\nu}} \right) t^{(\alpha-\beta)u + \sum_{\nu=0}^{m-2} (\beta-\alpha_{\nu})k_{\nu}} \cdot \Psi \left[\begin{matrix} (u+1, 1) \\ ((\alpha-\beta)u + \alpha + \sum_{\nu=0}^{m-2} (\beta-\alpha_{\nu})k_{\nu}, \alpha-\beta) \end{matrix} \middle| \lambda t^{\alpha-\beta} \right] \right).$$

Důkaz. [3], Theorem 5.6, str. 299.

Definice 4.13. Necht $\alpha, \lambda, b_0 \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$. Pak řešení Cauchyova problému

$$\begin{aligned} D_{0+}^{\alpha}(y)(t) &= \lambda y(t), \\ D_{0+}^{\alpha-1}(y)(0) &= b_0 \end{aligned}$$

se nazývá *asymptoticky stabilní*, jestliže $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$.

Věta 4.14. Necht $\alpha, \lambda, b_0 \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$. Je-li $\lambda < 0$, pak řešení Cauchyova problému

$$\begin{aligned} D_{0+}^{\alpha}(y)(t) &= \lambda y(t), \\ D_{0+}^{\alpha-1}(y)(0) &= b_0 \end{aligned}$$

je asymptoticky stabilní.

Důkaz. [2], Theorem 3.1, str. 864.

5. DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE NECELÉHO ŘÁDU S CAPUTOVÝMI DERIVACEMI

Poznámka 5.1. Výsledky ze 4.1 a 4.3 zůstávají v platnosti i pro Caputovy derivace včetně poznámek 4.2 a 4.4 ([2], Example 3.7, str. 209).

Věta 5.2. Necht $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$, $a, \lambda \in \mathbb{R}$ jsou taková čísla, že $\lceil \alpha \rceil = n$. Necht funkce f splňuje předpoklady z 1.1. Necht $b_k \in \mathbb{R}$ pro $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Pak Cauchyův problém

$$\begin{aligned} {}^C D_{a+}^{\alpha}(y)(t) &= \lambda y(t) + f(t), \\ y^{(k)}(a) &= b_k \quad \text{pro } k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

má jediné řešení

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{j=0}^{n-1} b_j (t-a)^j E_{\alpha, j+1}(\lambda(t-a)^{\alpha}) + \\ &+ \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda(t-\tau)^{\alpha}) f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Speciálně pro $\alpha = \frac{1}{2}$ má Cauchyův problém

$$\begin{aligned} {}^C D_{a+}^{\frac{1}{2}}(y)(t) &= \lambda y(t), \\ y(a) &= b_0 \end{aligned}$$

jediné řešení

$$y(t) = \frac{2b_0}{\sqrt{\pi}} e^{\lambda^2(t-a)} \int_{\lambda\sqrt{t-a}}^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau.$$

Důkaz. [3], Theorem 4.3, Example 4.9, str. 231.

Věta 5.3. Necht' $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$, $a, \lambda \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}_0^+$ jsou taková čísla, že $[\alpha] = n$. Necht' $b_k \in \mathbb{R}$ pro $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Pak Cauchyův problém

$$\begin{aligned} {}^C D_{a+}^{\alpha}(y)(t) &= \lambda(t-a)^{\beta} y(t), \\ y^{(k)}(a) &= b_k \quad \text{pro } k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

má jediné řešení

$$y(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{j!} (t-a)^j E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta+j}{\alpha}}(\lambda(t-a)^{\alpha+\beta}).$$

Důkaz. [3], Theorem 4.4, str. 233.

Věta 5.4. Necht' $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, $l, m \in \mathbb{N}$ jsou taková čísla, že $[\alpha] = l$, $[\beta] = m$, $\alpha - l + 1 > \beta$, necht' $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Pak diferenciální rovnice

$${}^C D_{0+}^{\alpha}(y)(t) - \lambda {}^C D_{0+}^{\beta}(y)(t) - \mu y(t) = 0$$

má obecné řešení

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{j=0}^{m-1} c_j \left(\sum_{u=0}^{\infty} \frac{\mu^u}{u!} t^{\alpha u+j} \cdot \Psi \left[\begin{matrix} (u+1, 1) \\ (\alpha u+j+1, \alpha-\beta) \end{matrix} \middle| \lambda t^{\alpha-\beta} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \lambda \sum_{u=0}^{\infty} \frac{\mu^u}{u!} t^{\alpha u+j+\alpha-\beta} \cdot \Psi \left[\begin{matrix} (u+1, 1) \\ (\alpha u+j+1+\alpha-\beta, \alpha-\beta) \end{matrix} \middle| \lambda t^{\alpha-\beta} \right] \right) + \\ &\quad + \sum_{j=m}^{l-1} c_j \sum_{u=0}^{\infty} \frac{\mu^u}{u!} t^{\alpha u+j} \cdot \Psi \left[\begin{matrix} (u+1, 1) \\ (\alpha u+j+1, \alpha-\beta) \end{matrix} \middle| \lambda t^{\alpha-\beta} \right], \end{aligned}$$

kde $c_j \in \mathbb{R}$ pro $j = 0, 1, 2, \dots, l-1$. Speciálně pro $\mu = 0$ má obecné řešení

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{j=0}^{m-1} c_j \left(t^j E_{\alpha-\beta, j+1}(\lambda t^{\alpha-\beta}) - \lambda t^{\alpha-\beta+j} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta+j+1}(\lambda t^{\alpha-\beta}) \right) + \\ &\quad + \sum_{j=m}^{l-1} c_j t^j E_{\alpha-\beta, j+1}(\lambda t^{\alpha-\beta}). \end{aligned}$$

Důkaz. [3], Theorem 5.13, str. 314.

Věta 5.5. *Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, $l, m \in \mathbb{N}$ jsou taková čísla, že $[\alpha] = l$, $m \geq 3$, $\alpha - l + 1 > \beta$. Nechť $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-2} \in \mathbb{R}$ jsou taková, že $\beta > \alpha_{m-2} > \dots > \alpha_1 > \dots > \alpha_0 = 0$. Nechť $l_1, l_2, \dots, l_{m-1} \in \mathbb{N}$ jsou taková, že $l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_{m-1} \leq l$, $l_{m-1} - 1 < \beta < l_{m-1}$, $l_k - 1 < \alpha_k \leq l_k$ pro $k = 1, 2, \dots, m-2$. Nechť $\lambda, A_0, A_1, \dots, A_{m-2} \in \mathbb{R}$. Pak diferenciální rovnice*

$${}^C D_{0+}^{\alpha}(y)(t) - \lambda {}^C D_{0+}^{\beta}(y)(t) = \sum_{k=0}^{m-2} A_k {}^C D_{0+}^{\alpha_k}(y)(t)$$

má obecné řešení

$$\begin{aligned} y(t) = & \sum_{j=0}^{b_{m-2}-1} c_j \sum_{u=0}^{\infty} \left(\sum_{k_0+\dots+k_{m-2}=u} \frac{1}{k_0! \dots k_{m-2}!} \cdot \right. \\ & \cdot \left(\prod_{\nu=0}^{m-2} A_{\nu}^{k_{\nu}} \right) t^{(\alpha-\beta)u+j+\sum_{\nu=0}^{m-2} (\beta-\alpha_{\nu})k_{\nu}} \cdot \\ & \cdot \left(\Psi \left[\left((\alpha-\beta)u+1+j+\sum_{\nu=0}^{m-2} (\beta-\alpha_{\nu})k_{\nu}, \alpha-\beta \right) \middle| \lambda t^{\alpha-\beta} \right] - \right. \\ & - \lambda t^{\alpha-\beta} \cdot \Psi \left[\left((\alpha-\beta)(u+1)+1+j+\sum_{\nu=0}^{m-2} (\beta-\alpha_{\nu})k_{\nu}, \alpha-\beta \right) \middle| \lambda t^{\alpha-\beta} \right] - \\ & - \sum_{k=0}^{m-2} A_k t^{\alpha-\alpha_k} \cdot \Psi \left[\left((\alpha-\beta)u+\alpha-\alpha_k+1+j+\sum_{\nu=0}^{m-2} (\beta-\alpha_{\nu})k_{\nu}, \alpha-\beta \right) \middle| \lambda t^{\alpha-\beta} \right] \Big) \Big) + \\ & + \sum_{j=l_{m-1}-1}^{l_{m-1}-1} c_j \sum_{u=0}^{\infty} \left(\sum_{k_0+\dots+k_{m-2}=u} \frac{1}{k_0! \dots k_{m-2}!} \cdot \left(\prod_{\nu=0}^{m-2} A_{\nu}^{k_{\nu}} \right) t^{(\alpha-\beta)u+j+\sum_{\nu=0}^{m-2} (\beta-\alpha_{\nu})k_{\nu}} \cdot \right. \\ & \cdot \left(\Psi \left[\left((\alpha-\beta)u+1+j+\sum_{\nu=0}^{m-2} (\beta-\alpha_{\nu})k_{\nu}, \alpha-\beta \right) \middle| \lambda t^{\alpha-\beta} \right] - \right. \\ & - \lambda t^{\alpha-\beta} \cdot \Psi \left[\left((\alpha-\beta)(u+1)+1+j+\sum_{\nu=0}^{m-2} (\beta-\alpha_{\nu})k_{\nu}, \alpha-\beta \right) \middle| \lambda t^{\alpha-\beta} \right] \Big) \Big) + \\ & + \sum_{j=l_{m-1}}^{l-1} c_j \sum_{u=0}^{\infty} \left(\sum_{k_0+\dots+k_{m-2}=u} \frac{1}{k_0! \dots k_{m-2}!} \cdot \left(\prod_{\nu=0}^{m-2} A_{\nu}^{k_{\nu}} \right) t^{(\alpha-\beta)u+j+\sum_{\nu=0}^{m-2} (\beta-\alpha_{\nu})k_{\nu}} \cdot \right. \\ & \cdot \left. \Psi \left[\left((\alpha-\beta)u+1+j+\sum_{\nu=0}^{m-2} (\beta-\alpha_{\nu})k_{\nu}, \alpha-\beta \right) \middle| \lambda t^{\alpha-\beta} \right] \right), \end{aligned}$$

kde $c_j \in \mathbb{R}$ pro $j = 0, 1, 2, \dots, l-1$ jsou libovolná čísla.

Důkaz. [3], Theorem 5.14, str. 319.

Věta 5.6. *Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, $\alpha > \beta$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Nechť funkce f splňuje předpoklady z 1.1 pro $a = 0$. Pak diferenciální rovnice*

$${}^C D_{0+}^{\alpha}(y)(t) - \lambda {}^C D_{0+}^{\beta}(y)(t) = \mu y(t) + f(t)$$

má partikulární řešení téhož tvaru jako ve 4.11 včetně speciálního případu $\mu = 0$.

Důkaz. [3], Theorem 5.16, str.323.

Věta 5.7. *Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, $m \in \mathbb{N}$ jsou taková čísla, že $m \geq 3$, $\alpha > \beta$. Necht $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-2} \in \mathbb{R}$ jsou taková, že $\beta > \alpha_{m-2} > \dots > \alpha_1 > \alpha_0 = 0$. Necht $\lambda, A_0, A_1, \dots, A_{m-2} \in \mathbb{R}$. Necht funkce f splňuje předpoklady z 1.1 pro $a = 0$. Pak diferenciální rovnice*

$${}^C D_{0+}^{\alpha}(y)(t) - \lambda {}^C D_{0+}^{\beta}(y)(t) - \sum_{k=0}^{m-2} A_k {}^C D_{0+}^{\alpha_k}(y)(t) = f(t)$$

má partikulární řešení téhož tvaru jako ve 4.12.

Důkaz. [3], Theorem 5.17, str. 324.

Definice 5.8. *Nechť $\alpha, \lambda, b_0 \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$. Pak řešení Cauchyova problému*

$${}^C D_{0+}^{\alpha}(y)(t) = \lambda y(t),$$

$$y(0) = b_0$$

se nazývá asymptoticky stabilní, jestliže $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$.

Věta 5.9. *Nechť $\alpha, \lambda, b_0 \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$. Je-li $\lambda < 0$, pak řešení Cauchyova problému*

$${}^C D_{0+}^{\alpha}(y)(t) = \lambda y(t),$$

$$y(0) = b_0$$

je asymptoticky stabilní.

Důkaz. [8], str. 346.

REFERENCE

- [1] S. S. Bayin: *Mathematical Methods in Science and Engineering*, John Wiley, Hoboken, 2006.
- [2] D. Qian, C. Li, R. P. Agarwal, P. J. Y. Young: *Stability analysis of fractional differential system with Riemann-Liouville derivative*, Mathematical and Computer Modelling **52** (2010), 862–874.
- [3] A. A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo: *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam, 2006.
- [4] T. Kisela: *Fractional differential equations and their applications*, diplomová práce, FSI VUT, Brno, 2008.
- [5] K. B. Oldham, J. Spanier: *The Fractional calculus*, Academic Press, San Diego, 1974.
- [6] I. Podlubný: *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 1999.
- [7] K. Rektorys a spolupracovníci: *Přehled užití matematiky I.*, Prometheus, Praha, 1995.
- [8] Q. S. Zeng, Q. Y. Cao, X. J. Zhu: *The asymptotic stability of sequential fractional-order systems*, J. Shanghai Jiao Tong Univ. **39** (2005), 346–348.

Jiří Karásek, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně,
Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: karasek@fme.vutbr.cz

O ŘEŠENÍ PROBLÉMŮ SLABÉ KONVERGENCE

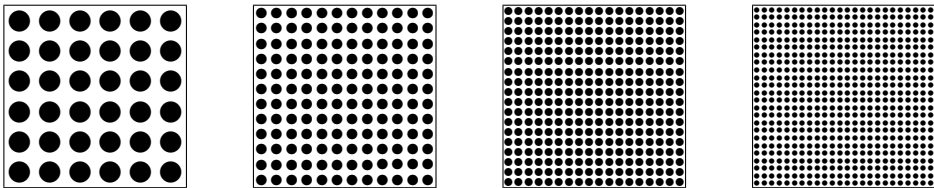
JAN FRANCŮ

ABSTRAKT. Článek je pokračováním práce J. Franců: *Od kompozitních materiálů ke slabé konvergenci*, Kvaternion 2/2012, 113-124, ve které byla formulována úloha homogenizace parciálních diferenciálních rovnic. Matematický přístup vede na studium posloupnosti řešení parciálních diferenciálních rovnic s periodickými koeficienty a_n se zmenšující se periodou $\varepsilon = 1/n \rightarrow 0$.

Koeficienty a_n nekonvergují silně, ale jenom slabě. V slabé formulaci úlohy se tak vyskytuje součin dvou slabě konvergentních posloupností funkcí a nelze přejít k limitě: součin dvou slabě konvergentních posloupností nekonverguje k součinu příslušných slabých limit. Podobně nelze přejít k limitě ve funkci $\Phi(a_n)$ složené se slabě konvergentní posloupností $\{a_n\}$. Řešení obou zmíněných problémů je obsahem tohoto článku. V případě součinu dvou slabě konvergentních posloupností lze problém řešit pomocí dvojskálové limity, v případě funkce složené se slabě konvergentní posloupností je řešením limita ve tvaru souboru Youngových měř.

1. ÚVOD

Článek je pokračováním příspěvku [11], ve kterém byla formulována úloha homogenizace parciálních diferenciálních rovnic. Připomeňme, že homogenizaci rozumíme matematickou metodu pro modelování kompozitních materiálů. Zejména z výpočetních důvodů modelovaný silně heterogenní materiál potřebujeme nahradit „ekvivalentním“ materiálem homogenním.



Obr. 1. Příklad posloupnosti materiálů se zjemňující se strukturou.

Přístup navržený I. Babuškou spočívá v tom, že místo jednoho materiálu zkoumáme posloupnost heterogenních materiálů se zjemňující se strukturou, která z makroskopického hlediska „konverguje“ k „ekvivalentnímu“ homogennímu materiálu. V matematické formulaci studujeme posloupnosti řešení parciálních diferenciálních rovnic s periodickými koeficienty se zmenšující se periodou.

2010 MSC. Primární 35B27.

Klíčová slova. Homogenizace, slabá konvergence, soubor Youngových měř, dvojskálová konvergence.

Práce byla podporována projektem A-Math-Net – Síť pro transfer znalostí v aplikované matematice (CZ.1.07/2.4.00/17.0100).

Analýza této posloupnosti rovnic umožňuje počítat makroskopické vlastnosti tohoto fiktivního „ekvivalentního“ tzv. homogenizovaného materiálu z vlastností jednotlivých složek a jejich geometrického uspořádání.

Studovaná posloupnost periodických koeficientů a_n se zmenšující se periodou $\varepsilon = 1/n$, která odpovídá posloupnosti materiálů se zjemňující se strukturou, nekonečně konverguje v klasickém smyslu silně, ale jen slabě. Připomeňme, že v Banachově prostoru V obvyklá (silná) konvergence „měří“ konvergenci posloupnosti $\{u_n\}$ k u^* při $n \rightarrow \infty$ pomocí normy:

$$u_n \rightarrow u^* \iff \|u_n - u^*\|_V \rightarrow 0.$$

Při slabé konvergenci konvergenci „testují“ spojitě lineární funkcionály:

$$u_n \rightharpoonup u^* \iff F(u_n - u^*) \rightarrow 0 \text{ pro každé } F \in V^*,$$

kde V^* je tzv. duální prostor spojitých lineárních funkcionálů na V .

V prostoru konečné dimenze slabá a silná konvergence splývají, v prostorech nekonečné dimenze je každá silně konvergentní posloupnost i slabě konvergentní, obráceně to neplatí. V prostorech konečné dimenze každá omezená posloupnost obsahuje konvergentní podposloupnost, v prostorech nekonečné dimenze již to neplatí. Protože v aplikacích často potřebujeme z omezené posloupnosti (např. přibližných řešení nějaké úlohy) zaručit existenci konvergující podposloupnosti, slabá konvergence situaci „zachrání“. V reflexivním Banachově prostoru totiž platí: každá omezená posloupnost obsahuje slabě konvergentní podposloupnost.

Vedle této „příjemné“ vlastnosti však slabá konvergence má i některé „nepříjemné“ vlastnosti: v případě složení se spojitou funkcí $F(\xi)$ se slabá konvergence nezachovává:

$$u_n \rightharpoonup u^* \not\Rightarrow F(u_n) \rightarrow F(u^*), \quad (1.1)$$

také v součinu dvou slabě konvergentních posloupností nelze přejít k limitě:

$$u_n \rightharpoonup u^*, v_n \rightharpoonup v^* \not\Rightarrow u_n v_n \rightarrow u^* v^*. \quad (1.2)$$

Je to způsobeno tím, že ve slabé limitě se nezachovala informace o lokálním chování posloupnosti. Abychom v těchto případech mohli přejít k limitě, musíme zavést nějakou limitu, ve které by informace o lokálním chování slabě konvergujících funkcí u_n byla zachována.

Řešením těchto problémů se budeme zabývat v tomto článku. Nejprve shrneme vlastnosti konvergence integrovatelných funkcí. Pro řešení problému složené funkce použijeme limitu ve tvaru souboru Youngových měr, pro řešení problému součinu dvou slabě konvergentních posloupností zavedeme tzv. dvojškálovou konvergenci a naznačíme její využití v teorii homogenizace.

2. LEBESGUEOVY PROSTORY FUNKCÍ

Budeme se zabývat integrovatelnými funkcemi, protože mají hlavní význam pro modelování jevů v mechanice kontinua. Podrobnosti najdete např. v [8], [10] a v učebnicích funkcionální analýzy.

2.1. Zavedení Lebesgueových prostorů

V dalším Ω bude omezený otevřený interval v $\mathbb{R}$, nebo v N -rozměrném případě omezená oblast, tj. omezená souvislá otevřená množina v $\mathbb{R}^N$, s „rozumnou“ hranicí $\partial\Omega$. Buď p exponent, $1 \leq p < \infty$. Uvažujme měřitelné funkce $u(x)$ (např. funkce po částech spojitě), které mají konečný integrál z p -té mocniny přes Ω , tj. $\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty$. Integrál bereme ve smyslu Lebesgueově, který je zobecněním obvyklého integrálu na „horší“, méně spojitě funkce než funkce po částech spojitě. Tyto funkce tvoří lineární prostor $\mathcal{L}^p(\Omega)$, protože skalární násobek αu a součet $u + v$ je opět v množině $\mathcal{L}^p(\Omega)$. Funkcionál

$$\|u\|_p = \left[\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \quad (2.1)$$

splňuje první dva axiomy normy na $\mathcal{L}^p(\Omega)$, protože platí $\|\alpha u\|_p = |\alpha| \cdot \|u\|_p$ a Minkowského nerovnost dává trojúhelníkovou nerovnost $\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$. Třetí axiom $\|u\|_p = 0 \Rightarrow u = 0$ však splněn není, rovnost $\|u\|_p = 0$ splňují i funkce, které mají ve spočetně mnoha bodech nenulové hodnoty, integrál to „nepozná“. Proto v prostoru $\mathcal{L}^p(\Omega)$ ztotožníme funkce, které se liší jen na množině míry nula, tj. pokud $\|u - v\|_p = [\int_{\Omega} |u - v|^p dx]^{\frac{1}{p}} = 0$. Říkáme, že funkce u, v jsou si rovny „skoro všude“, zkráceně „s.v.“, a považujeme je za totožné. Dostáváme tak Lebesgueův prostor

$$L^p(\Omega) = \mathcal{L}^p(\Omega)|_{\text{s.v.}} \equiv \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \|u\|_p < \infty\}|_{\text{s.v.}} \quad (2.2)$$

vybavený normou $\|\cdot\|_p$ definovanou (2.1). V prostoru jsou ztotožněny funkce, které se rovnají „skoro všude“, tj. liší se nejvýše na množině míry nula, přesněji prvky prostoru jsou třídy funkcí, které se navzájem liší nejvýše na množině míry nula.

Lebesgueův prostor definujeme i pro exponent $p = \infty$. V tomto případě je normou tzv. esenciální supremum, ve kterém bereme infimum ze všech suprem přes množinu Ω zmenšenou o množinu N míry nula

$$\|u\|_{\infty} = \inf_{m(N)=0} \left(\sup_{x \in \Omega - N} |f(x)| \right) \quad (2.3)$$

a (2.2) definuje prostor $L^{\infty}(\Omega)$ skoro všude omezených měřitelných funkcí na Ω .

Všechny prostory $L^p(\Omega)$ obsahují funkce definované na stejné množině Ω . Pomocí Hölderovy nerovnosti lze pro exponenty $1 < p < q < \infty$ dokázat nerovnosti

$$\|u\|_1 \leq m(\Omega)^{1-\frac{1}{p}} \cdot \|u\|_p \leq m(\Omega)^{1-\frac{1}{q}} \cdot \|u\|_q \leq m(\Omega) \cdot \|u\|_{\infty}. \quad (2.4)$$

Důsledkem této nerovnosti je skutečnost, že v případě oblasti Ω konečné míry při zvětšování p se prostor $L^p(\Omega)$ „zmenšuje“, tj. pro $1 < p < q < \infty$ platí inkluze

$$L^1(\Omega) \supset L^p(\Omega) \supset L^q(\Omega) \supset L^{\infty}(\Omega). \quad (2.5)$$

Prvky prostorů $L^p(\Omega)$ s $p < \infty$ obecně nelze násobit. Pomocí Hölderovy nerovnosti však lze odvodit následující tvrzení.

Věta 2.1. *Buď $p, q, r \in \langle 0, \infty \rangle$ splňující $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Potom platí*

$$\|uv\|_r \leq \|u\|_p \|v\|_q, \quad (2.6)$$

odkud plyne implikace

$$u \in L^p(\Omega), \quad v \in L^q(\Omega) \implies uv \in L^r(\Omega).$$

Základní vlastnosti Lebesgueových prostorů lze shrnout ve větě:

Věta 2.2. *Prostory $L^p(\Omega)$ jsou pro všechna $1 \leq p \leq \infty$ v normě $\|\cdot\|_p$ úplné, tj. Banachovy prostory. Pro $1 \leq p < \infty$ jsou separabilní, tj. obsahují spočetnou hustou podmnožinu, pro $p = \infty$ separabilní nejsou.*

2.2. Spojité lineární funkcionály

Podle obecné definice posloupnost $\{u_n\}$ v prostoru V slabě konverguje k u^* , jestliže $F(u_n - u^*) \rightarrow 0$ pro každý spojitý lineární funkcionál F na V . Spojité lineární funkcionály na Banachově prostoru V tvoří opět Banachův prostor V^* s normou $\|F\|_* = \sup\{|F(u)|, \|u\| \leq 1\}$. Konkrétní tvar funkcionálů na Lebesgueových prostorech a jejich vlastnosti jsou shrnuty v následující větě:

Věta 2.3. *Nechť $p \in (1, \infty)$ a $p^* = \frac{p}{p-1}$ exponent sdružený k p , tj. splňující $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. Potom pro každý spojitý lineární funkcionál F na $L^p(\Omega)$ existuje právě jedna funkce $f \in L^{p^*}(\Omega)$ taková, že*

$$F(u) = \int_{\Omega} f(x)u(x) \, dx, \quad \forall u \in L^p(\Omega). \quad (2.7)$$

Platí i obrácené tvrzení: Pro každou funkci $f \in L^{p^}(\Omega)$ je F definovaný (2.7) spojitý lineární funkcionál na $L^p(\Omega)$. Existuje proto vzájemně jednoznačné zobrazení, které je izometrické (zachovává normu $\|F\|_* = \|f\|_{p^*}$) a izomorfní (zachovává operace lineárního prostoru sčítání a skalární násobek) mezi funkcionály $(L^p(\Omega))^*$ a funkcemi $L^{p^*}(\Omega)$. Schématicky $(L^p(\Omega))^* \approx L^{p^*}(\Omega)$.*

V případě $p = 1$ lze všechny funkcionály F na $L^1(\Omega)$ vyjádřit ve tvaru (2.7), kde reprezentující funkce $f \in L^\infty(\Omega)$.

V případě $p = \infty$ jen některé funkcionály F na $L^\infty(\Omega)$ lze vyjádřit ve tvaru (2.7), kde $f \in L^1(\Omega)$. Existuje však hodně funkcionálů na $L^\infty(\Omega)$, které nelze reprezentovat pomocí funkce $f \in L^1(\Omega)$. Symbolicky lze proto psát:

$$(L^p(\Omega))^* \approx L^{p^*}(\Omega), \quad (L^1(\Omega))^* \approx L^\infty(\Omega), \quad (L^\infty(\Omega))^* \not\approx L^1(\Omega). \quad (2.8)$$

Na duálním prostoru V^* existují spojitý lineární funkcionály $\Phi: V^* \rightarrow \mathbb{R}$. Při tzv. kanonickém vnoření $\mathcal{J}: V \rightarrow V^{**}$ každému prvku $u \in V$ lze přiřadit funkcionál $\Phi: V^* \rightarrow \mathbb{R}$ tím, že položíme $\Phi(F) = F(u)$ pro každý $F \in V^*$. Pokud tímto způsobem dostaneme celý V^{**} , tj. $\mathcal{J}(V) = V^{**}$, mluvíme o prostoru reflexivním. V případě Lebesgueových prostorů situaci shrnuje věta:

Věta 2.4. *Pro $p \in (1, \infty)$ jsou prostory $L^p(\Omega)$ reflexivní, zbývající prostory $L^1(\Omega)$ a $L^\infty(\Omega)$ reflexivní nejsou.*

2.3. Konvergence v Lebesgueových prostorech

Na prostorech $L^p(\Omega)$ máme několik druhů konvergence. Pomocí předchozích výsledků konkretizujeme jednotlivé konvergence: Nechť $\{u_n\} \subset L^p(\Omega)$ a $u^* \in L^p(\Omega)$. Řekneme, že posloupnost $\{u_n\}$ v $L^p(\Omega)$ při $n \rightarrow \infty$

- konverguje (silně, v normě) k u^* ($1 \leq p < \infty$), zapisujeme $u_n \rightarrow u^*$, jestliže

$$\|u_n - u^*\|_p \equiv \left[\int_{\Omega} |u_n(x) - u^*(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0,$$

- konverguje slabě k u^* ($1 \leq p < \infty$), zapisujeme $u_n \rightharpoonup u^*$, jestliže

$$F(u_n - u^*) \equiv \int_{\Omega} f(x)(u_n(x) - u^*(x)) dx \rightarrow 0 \quad \forall f \in L^p(\Omega),$$

přičemž pro $p > 1$ je $p^* = \frac{p}{p-1}$ a pro $p = 1$ je $p^* = \infty$,

- konverguje slabě k u^* ($p = \infty$), zapisujeme $u_n \rightharpoonup u^*$, jestliže

$$F(u_n - u^*) \rightarrow 0 \quad \forall F \in (L^\infty(\Omega))^*,$$

- konverguje slabě-* k u^* ($p = \infty$), zapisujeme $u_n \xrightarrow{*} u^*$, jestliže

$$F(u_n - u^*) \equiv \int_{\Omega} f(x)(u_n(x) - u^*(x)) dx \rightarrow 0, \quad \forall f \in L^1(\Omega).$$

Poznamenejme, že pro $p = \infty$ máme dvě slabé konvergence: „silnější“ slabou a „slabší“ slabou-*, která je definovaná stejně jako slabá konvergence pro $p < \infty$.

Pro zkoumání slabé konvergence máme následující užitečné kritérium, které využívá skutečnosti, že hladké funkce jsou husté v každém $L^p(\Omega)$, $p < \infty$:

Věta 2.5. *Bud' u_n omezená posloupnost v $L^p(\Omega)$, tj. $\|u_n\|_p \leq M$, $u^* \in L^p(\Omega)$, ($1 \leq p < \infty$) a nechť*

$$\int_{\Omega} (u_n(x) - u^*(x))\varphi(x) dx \rightarrow 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (2.9)$$

Potom u_n konverguje k u^ slabě v $L^p(\Omega)$. Pokud u_n je omezená v $L^\infty(\Omega)$ a platí (2.9), potom u_n konverguje k u^* slabě-* v $L^\infty(\Omega)$.*

V aplikacích velmi důležitou vlastností je „kompaktnost“ vzhledem k nějaké konvergenci, kdy omezená posloupnost obsahuje konvergentní podposloupnost:

Věta 2.6. *Bud' $\{u_n\}$ omezená posloupnost v $L^p(\Omega)$, ($1 < p < \infty$). Potom existuje podposloupnost $\{u_{n'}\}$ slabě konvergující k nějakému $u^* \in L^p(\Omega)$.*

V případě $p = \infty$ omezená posloupnost v $L^\infty(\Omega)$ obsahuje slabě- konvergentní podposloupnost, nemusí však obsahovat slabě konvergentní podposloupnost.*

2.4. Podstata problémů

Vedle výše uvedené „dobré“ vlastnosti (možnost z každé omezené posloupnosti vybrat slabě konvergentní podposloupnost) má slabá konvergence i dvě „nepříjemné“ vlastnosti při přechodu k limitě, které jsme uvedli v úvodu (1.1) a (1.2). Čím je to způsobeno? Slabá limita obsahuje málo informací o lokálním chování funkcí u_n . Například posloupnosti

- | | |
|--------------------------------------|--------------------------------|
| • $u_n(x) = \sin(nx)$, | • $u_n(x) = \cos(nx)$, |
| • $u_n(x) = x(\pi - x) \sin(nx)$, | • $u_n(x) = e^x \sin(n^2 x)$, |
| • $u_n(x) = \frac{1}{n} \sin x$, | • $u_n(x) = \frac{1}{n^2}$, |
| • $u_n(x) = \frac{1}{n} \sin(n!x)$, | • $u_n(x) = 0$ |

mají všechny slabou limitu $u^*(x) = 0$, lokální chování uvedených posloupností je však značně odlišné. Nutno proto zavést pojem limity, který by obsahoval i informaci o lokálním chování posloupností u_n .

3. FUNKCE SLOŽENÁ SE SLABĚ KONVERGENTNÍ POSLOUPNOSTÍ

Bud' $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá funkce. Při složení funkce $\Phi(u)$ se silně konvergující posloupností $\{u_n\}$ můžeme přejít k limitě:

$$u_n \rightarrow u^* \implies \Phi(u_n) \rightarrow \Phi(u^*),$$

pokud však posloupnost $\{u_n\}$ konverguje jenom slabě k u^* , nemůžeme přejít k limitě, protože neplatí implikace:

$$u_n \rightharpoonup u^* \implies \Phi(u_n) \rightharpoonup \Phi(u^*). \quad (3.1)$$

Jako protipříklad uvedeme funkci $\Phi(\xi) = \xi^2$ a posloupnost $u_n(x) = \sin(nx)$, která slabě konverguje k nulové funkci $u^*(x) = 0$, ale

$$\Phi(u_n(x)) = \sin^2(nx) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2nx)] \rightharpoonup \frac{1}{2} \neq 0 = (u^*(x))^2 = \Phi(u^*(x)).$$

3.1. Pro které funkce Φ platí implikace (3.1)?

Věta 3.1. *Implikace (3.1) platí pro každou posloupnost $\{u_n\}$ právě, když funkce Φ je lineární, tj. $\Phi(\xi) = k\xi + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$.*

Důkaz implikace „ $\Leftarrow$ “. Nechť Φ je lineární, tj. $\Phi(\xi) = k\xi + q$. Jestliže $u_n \rightharpoonup u^*$, potom $F(u_n - u^*) \rightarrow 0$ pro každý $F \in (L^p(\Omega))^*$. Proto platí

$$F(\Phi(u_n) - \Phi(u^*)) = F((k u_n + q) - (k u^* + q)) = k F(u_n - u^*) \rightarrow 0.$$



Obr. 2. Funkce typu „cimbuří“.

Důkaz implikace „ $\Rightarrow$ “. Pro $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda \in (0, 1)$ definujme funkci $\varphi : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi(y) = \begin{cases} \xi_1 & \text{pro } y \in \langle 0, \lambda \rangle, \\ \xi_2 & \text{pro } y \in \langle \lambda, 1 \rangle \end{cases} \quad (3.2)$$

a periodicky ji rozšíříme na celé $\mathbb{R}$. Pro $n = 1, 2, 3, \dots$ tak dostáváme posloupnost funkcí $u_n(x) = \varphi(nx)$ typu „cimbuří“ s periodou $\frac{1}{n}$, viz Obr. 2. Posloupnost u_n konverguje slabě ke konstantní funkci $u^*(x) = \lambda \xi_1 + (1 - \lambda) \xi_2$.

Na druhé straně $\Phi(u_n)$ konverguje slabě k $\lambda \Phi(\xi_1) + (1 - \lambda) \Phi(\xi_2)$. Podle implikace (3.1) má platit $\lim \Phi(u_n) = \Phi(u^*)$, tedy

$$\lambda \Phi(\xi_1) + (1 - \lambda) \Phi(\xi_2) = \Phi(\lambda \xi_1 + (1 - \lambda) \xi_2).$$

Funkce $\Phi(\xi)$ je proto lineární. □

3.2. Příklad nelineární funkce Φ

Podívejme se, kterými funkcemi Φ má smysl se zabývat. Nejprve nutno zaručit, že pro měřitelnou funkci u bude složená funkce opět měřitelná. To je splněno pro spojitou funkci Φ . Budeme proto uvažovat spojitou funkci Φ , i když to není nutné, stačilo by například, aby Φ byla po částech spojitá.

Dále musíme zaručit, aby pro $u \in L^p(\Omega)$ složená funkce $\Phi(u)$ byla v prostoru $L^q(\Omega)$. To zaručí podmínka omezeného růstu s konstantami $c_1, c_0 > 0$:

$$|F(\xi)| \leq c_1 |\xi|^{p/q} + c_0. \quad (3.3)$$

V případě $p = \infty$ stačí, aby Φ byla spojitá. Pokud $p < \infty$ a $q = \infty$, funkce Φ musí být omezená. Uvedené podmínky zaručí, že pro $u \in L^p(\Omega)$ bude $\Phi(u) \in L^q(\Omega)$. Podrobnosti včetně případu zobrazení $u \mapsto \Phi(\cdot, u)$ lze najít např. v [10]. V dalším se budeme zabývat jen omezenými funkcemi, tj. funkcemi v $L^\infty(\Omega)$.

3.3. Speciální tvar limity slabě konvergentní posloupnosti

Na několika příkladech ukážeme speciální tvar limity slabě konvergentní posloupnosti, ve kterém se informace o chování u_n zachová, aby bylo možné přejít k limitě. Využijeme přitom názorné pojmy z teorie pravděpodobnosti.

Příklad 3.2. Vezměme posloupnost $\{u_n\}$ funkcí $u_n(x) = \varphi(nx)$ typu „cimbuří“ definovanou v (3.2) v důkazu Věty 3.1. V příkladu je vidět, že ve skoro každém bodě x posloupnost $\{u_n(x)\}$ nabývá hodnoty ξ_1 s „pravděpodobností“ λ a hodnoty ξ_2 s „pravděpodobností“ $(1 - \lambda)$. Průměrem $\{u_n(x)\}$ je již zmíněná slabá limita $u^*(x) = \lambda \xi_1 + (1 - \lambda) \xi_2$. Analogicky lze spočítat průměr hodnot $\Phi(u_n(x))$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(u_n) = \lambda \Phi(\xi_1) + (1 - \lambda) \Phi(\xi_2).$$

Jako řešení našeho problému se proto nabízí vzít za limitu posloupnosti $\{u_n\}$ funkci, jejíž hodnota v každém x není reálné číslo, ale „náhodná veličina“ $\nu(x)$. V našem příkladě je $\nu(x)$ náhodná veličina nezávislá na x , která nabývá hodnoty ξ_1 a ξ_2 s pravděpodobnostmi λ a $(1 - \lambda)$. Slabá limita $u^*(x)$ je pak střední hodnota $E(\nu(x))$ náhodné veličiny $\nu(x)$. Hodnoty $\Phi(u_n(x))$ konvergují ke střední hodnotě $E(\Phi(\nu(x)))$ funkce náhodné veličiny $\Phi(\nu(x))$ nabývající hodnot $\Phi(\xi_1)$ a $\Phi(\xi_2)$ s pravděpodobnostmi λ a $(1 - \lambda)$.

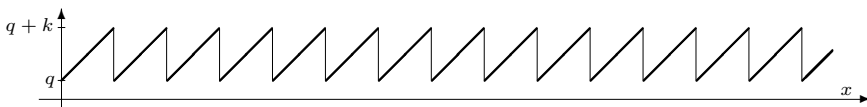
Uvedený příklad lze snadno zobecnit na případ funkcí u_n nabývajících k hodnot:

Příklad 3.3. Nechť periodická funkce $\varphi(y)$ nabývá k hodnot ξ_i s „obsahy“ λ_i v periodě $\langle 0, 1 \rangle$, přičemž $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$. Potom za zobecněnou limitu posloupnosti $u_n(x) = \varphi(nx)$ můžeme vzít náhodnou veličinu nabývající hodnot $\xi_1, \dots, \xi_k$ s pravděpodobnostmi $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Slabou limitou $\{u_n(x)\}$ je střední hodnota $E(\nu) = \lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_k \xi_k$ a posloupnost $\{\Phi(u_n)\}$ slabě konverguje ke střední hodnotě $\Phi(\nu)$:

$$E(\Phi(\nu(x))) = \lambda_1 \Phi(\xi_1) + \dots + \lambda_k \Phi(\xi_k).$$

Zatím jsme brali posloupnost po částech konstantních funkcí $u_n(x) = \varphi(nx)$, které vedly k náhodným veličinám diskrétního typu. Jaká bude zobecněná limita v případě funkce φ , která není po částech konstantní, ale po částech spojitá?

Příklad 3.4. Uvažujme funkci tvaru pily $\varphi(y) = q + ky$ pro $y \in \langle 0, 1 \rangle$ periodicky rozšířenou na celé $\mathbb{R}$ a posloupnost funkcí $u_n(x) = \varphi(nx)$, viz Obr. 3.



Obr. 3. Funkce tvaru „pily“.

Funkce u_n konvergují slabě ke konstantní funkci $u^*(x) = q + \frac{k}{2}$. Funkce u^n nabývají všech hodnot v intervalu $\langle k, q + k \rangle$ stejně „často“. Proto zobecněná limita bude náhodná veličina $\nu(x)$ se spojitým rovnoměrným rozdělením opět nezávislá na x . Lze ji určit pomocí hustoty pravděpodobnosti

$$f(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{pro } \xi \in \langle q, q + k \rangle, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

Potom slabá limita funkcí $\Phi(u_n)$ je konstantní funkce

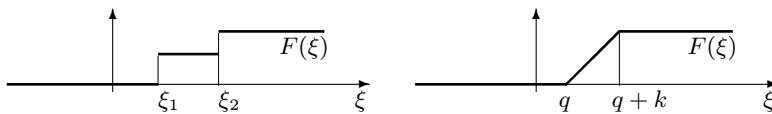
$$E(\Phi(\nu(x))) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(\xi) f(\xi) d\xi = \int_q^{q+k} \frac{1}{k} \Phi(\xi) d\xi.$$

Inspirování příklady dáme nové limitě „matematický kabát“.

3.4. Youngova míra

Za zobecněnou limitu posloupnosti $\{u_n\}$ vezmeme soubor tzv. Youngových pravděpodobnostních měr $\{\nu(x) \mid x \in \Omega\}$ na $\mathbb{R}$. Jako každá míra i Youngova míra je množinová funkce definovaná na systému $\mathcal{S}$ měřitelných podmnožin $\mathbb{R}$. Připomeňme, že systém $\mathcal{S}$ musí obsahovat prázdnou množinu $\emptyset$ a celý prostor $\mathbb{R}$, s každou množinou její doplněk a každé sjednocení spočetně mnoha množin z $\mathcal{S}$. Vlastní míra ν je nezáporná a σ -aditivní: míra sjednocení spočetně mnoha disjunktních podmnožin je rovna součtu měr jednotlivých množin. Navíc jako u pravděpodobnostní míry je míra celého prostoru rovna jedné: $\nu(\mathbb{R}) = 1$.

Youngova míra má charakter náhodné veličiny, v Příkladu 3.2 a 3.3 byla diskrétního typu, proto jsme ji charakterizovali pravděpodobnostní funkcí, v Příkladu 3.4 byla spojitěho typu, proto jsme ji charakterizovali hustotou pravděpodobnosti. Oba typy však lze charakterizovat distribuční funkcí $F(\xi)$. Připomeňme, že distribuční funkce $F(\xi)$ je neklesající funkce s limitami $F(-\infty) = 0$ a $F(\infty) = 1$. Distribuční funkce z Příkladu 3.2 a 3.4 jsou na Obr. 4.



Obr. 4. Distribuční funkce F míry „cimbuří“ a distribuční funkce „pily“.

Střední hodnotu náhodné veličiny ν i složení $\Phi(\nu)$ lze pomocí distribuční funkce $F(\xi)$ náhodné veličiny ν vyjádřit ve tvaru Stieltjesova integrálu

$$E(\nu) = \int_{\mathbb{R}} \xi dF(\xi) \quad \text{a} \quad E(\Phi(\nu)) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(\xi) dF(\xi).$$

Připomeňme stručně pojem Stieltjesova integrálu. Buď $D = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m\}$, kde $a = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_m = b$, dělení intervalu $I = \langle a, b \rangle$ a body $\{c_1, \dots, c_m\}$ splňující $c_i \in (\xi_{i-1}, \xi_i)$ body tohoto dělení. Potom pro funkce $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ výraz

$$S(f, g, D, c) = \sum_{i=1}^m f(c_i)(g(\xi_i) - g(\xi_{i-1}))$$

nazveme integrálním součtem. Pokud při zjemňování dělení $|D| \rightarrow 0$ existuje limita součtů $S(f, g, D, c)$ nezávislá na výběru dělení D a bodů c_i , tuto limitu nazveme Riemann-Stieltjesovým integrálem funkce f podle funkce g přes $\langle a, b \rangle$ a zapisujeme

$$\int_a^b f(\xi) dg(\xi).$$

Integrál existuje, pokud funkce f je spojitá a g má konečnou variaci. Pokud funkce g má derivaci g' , lze Stieltjesův integrál přepsat na integrál

$$\int_a^b f(\xi) dg(\xi) = \int_a^b f(\xi) g'(\xi) d\xi.$$

Tento Riemann-Stieltjesův integrál lze zobecnit na Lebesgue-Stieltjesův integrál.

Vraťme se ještě k příkladu s posloupností funkcí $u_n(x) = \sin(nx)$.

Příklad 3.5. V případě $u_n(x) = \sin(nx)$ je limitou posloupnosti $\{u_n\}$ soubor Youngových měr (náhodných veličin) $\nu(x) = \nu$ nezávislý na x . Míru ν lze popsat hustotou pravděpodobnosti

$$f(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-\xi^2}} & \text{pro } -1 < \xi < 1, \\ 0 & \text{jinde,} \end{cases}$$

nebo distribuční funkcí

$$F(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \xi \leq -1, \\ \frac{1}{\pi} \arcsin(\xi) + \frac{1}{2} & \text{pro } -1 < \xi < 1, \\ 1 & \text{pro } \xi \geq 1. \end{cases}$$

Pro spojitou Φ pak posloupnost $\Phi(\sin(nx))$ slabě konverguje ke konstantní funkci

$$\int_{-1}^1 \Phi(\xi) \frac{1}{\pi\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = \int_{-1}^1 \Phi(\xi) d\left(\frac{1}{\pi} \arcsin(\xi) + \frac{1}{2}\right).$$

Dosud ve všech příkladech vystupovaly funkce u_n „stejněměrně“ slabě konvergující ke konstantní funkci. V případě, kdy periodické funkce u_n mají „proměnlivou amplitudu“ a případně slabě konvergují k nenulové funkci, například

$$u_n(x) = \varphi(nx)g(x) + h(x),$$

potom limitou $u^*(x)$ je soubor měr $\{\nu(x) \mid x \in \Omega\}$ s parametrem $x \in \Omega$, kdy pro různá x jsou různé i míry $\nu(x)$ s parametrem x , které jsou charakterizované distribučními funkcemi $F(x, \xi)$ s parametrem x definované pro $\xi \in \mathbb{R}$ a $x \in \Omega$.

3.5. Souhrn řešení problému složené funkce

V případě spojitě funkce Φ na posloupnosti $\{u_n\}$ omezené v $L^\infty(\Omega)$ a slabě-* konvergující, lze problém (1.1) řešit tím, že za limitu posloupnosti $u_n(x)$ vezmeme soubor Youngových měr $\nu(x)$ s parametrem $x \in \Omega$.

Poznamenejme, že v případě, kdy $u_n(x)$ silně konverguje k hodnotě $u^*(x)$, míra $\nu(x)$ je tzv. Diracova míra $\delta_{u^*(x)}$ soustředěná v $u^*(x)$, tj. náhodná veličina $\nu(x)$ nabývá jen jedné hodnoty $u^*(x)$, a tedy není náhodná.

V případě, kdy u_n konvergují jenom slabě-*, limita ve tvaru souboru Youngových měr nemusí existovat. Pokud existuje, distribuční funkce $F(x, \xi)$ míry $\nu(x)$ pro limitu posloupnosti $\{u_n\}$ v bodě x je dána limitou

$$F(x, \xi) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\Delta} m(\{t \in (x - \Delta, x + \Delta) \mid u_n(t) < \xi\}) \right).$$

Pro omezenou slabě-* konvergující posloupnost u_n však existuje podposloupnost, která už limitu má. Následující věta je proto velmi důležitá pro aplikace:

Věta 3.6. *Každá omezená posloupnost $\{u_n\}$ v $L^\infty(\Omega)$ obsahuje podposloupnost $\{u_{n'}\}$ a soubor měr $\{\nu(x)\}_{x \in \Omega}$ s distribuční funkcí $F(x, \xi)$ takový, že pro každou spojitou funkci Φ platí*

$$\Phi(u_n(x)) \text{ konverguje v } L^\infty(\Omega) \text{ slabě-* k funkci } f(x) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(\xi) d(F(x, \xi)).$$

Řešení problému složené funkce lze charakterizovat následujícím tvrzením:

Věta 3.7. *Pokud posloupnost $\{u_n\}$ má limitu ve tvaru souboru Youngových měr $\nu(x)$, potom platí: $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(u_n) = E(\Phi(\nu))$.*

4. SOUČIN SLABĚ KONVERGENTNÍCH POSLOUPNOSTÍ

Pro silně konvergující posloupnosti platí implikace:

$$u_n \rightarrow u^*, \quad v_n \rightarrow v^* \implies u_n v_n \rightarrow u^* v^*,$$

a tudíž také $\int_{\Omega} u_n v_n dx \rightarrow \int_{\Omega} u^* v^* dx$. Implikace platí také v případě, že jedna z konverencí je slabá:

$$u_n \rightarrow u^*, \quad v_n \rightharpoonup v^* \implies u_n v_n \rightharpoonup u^* v^*.$$

V případě, kdy obě konvergence jsou jenom slabé, následující implikace neplatí:

$$u_n \rightharpoonup u^*, \quad v_n \rightharpoonup v^* \implies u_n v_n \rightharpoonup u^* v^*. \quad (4.1)$$

Například pro $u_n(x) = \sin(nx)$ a $v_n(x) = \sin(nx)$ obě posloupnosti konvergují slabě k nulové funkci $u_n \rightharpoonup 0$, $v_n \rightharpoonup 0$, ale jejich součin konverguje slabě

$$u_n(x) v_n(x) = \sin^2(nx) = \frac{1}{2} [1 - \cos(2nx)]$$

ke konstantní funkci $\frac{1}{2}$, která se liší od součinu limit $u_n v_n$.

Limita ve tvaru souboru Youngových měr nestačí, viz následující příklad:

Příklad 4.1. Uvažujme posloupnosti $u_n(x) = \sin(nx)$ a $v_n(x) = \sin(nx - \alpha)$. Obě posloupnosti slabě konvergují k nule, jejich součin však slabě konverguje

$$u_n(x) v_n(x) = \sin(nx) \sin(nx - \alpha) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha) - \cos(2nx - \alpha)] \rightharpoonup \frac{1}{2} \cos(\alpha).$$

Obě posloupnosti $u_n(x) = \sin(nx)$ a $v_n(x) = \sin(nx - \alpha)$ mají stejnou limitu ve tvaru Youngových měr $\nu(x)$, a přitom součin $u_n v_n$ slabě konverguje ke konstantě $\frac{1}{2} \cos(\alpha)$, která může nabývat libovolnou hodnotu z intervalu $\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$. Proto limita ve tvaru Youngových měr nedokáže určit limitu součinu. Záleží totiž nejen na lokálním chování obou funkcí u_n a v_n , ale i na jejich vzájemném „sfázování“.

Řešením problému je tzv. dvojskálová limita. Upřesněme si některé pojmy.

4.1. Periodické funkce se zmenšující se periodou

Základní periodou Y bude v případě $N = 1$ interval $\langle 0, \bar{y} \rangle$, pro $N = 2$ obdélník $\langle 0, \bar{y}_1 \rangle \times \langle 0, \bar{y}_2 \rangle$, obecně $Y = \langle 0, \bar{y}_1 \rangle \times \cdots \times \langle 0, \bar{y}_N \rangle$, přičemž $\bar{y}_i > 0$.

Základní periodu Y bereme „polouzavřenou“, abychom posunutím o celočíselné násobky rozměrů periody $k\bar{y} \equiv (k_1\bar{y}_1, \dots, k_N\bar{y}_N)$, kde $(k_1, \dots, k_N) \equiv k \in \mathbb{Z}^N$, dostali periody $Y_k = Y + k\bar{y} \equiv \{y + k\bar{y} \mid y \in Y\}$, které tvoří rozklad prostoru $\mathbb{R}^N$, tzv. „dláždění“, tj. buňky Y_k jsou navzájem disjunktní a jejich sjednocení $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}^N} Y_k$ dává celý prostor $\mathbb{R}^N$. Míra (objem) periody Y je $m(Y) = \bar{y}_1 \cdots \bar{y}_N$.

Pro $\varepsilon > 0$ ε -škálovanou periodu Y označme $Y^\varepsilon = \langle 0, \varepsilon\bar{y}_1 \rangle \times \cdots \times \langle 0, \varepsilon\bar{y}_N \rangle$ a škálovanou periodu posunutou o $\varepsilon k\bar{y}$ označme Y_k^ε . Škálované posunuté periody $\{Y_k^\varepsilon \mid k \in \mathbb{Z}^N\}$ tvoří opět rozklad prostoru $\mathbb{R}^N$.

Funkci $a(y)$ definovanou na $\mathbb{R}^N$ nazveme Y -periodickou, jestliže je periodická s velikostí periody $\bar{y}_i$ v každé proměnné y_i , tj.

$$a(y_1 + k_1\bar{y}_1, \dots, y_N + k_N\bar{y}_N) = a(y_1, \dots, y_N) \quad \forall y \in \mathbb{R}^N, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^N. \quad (4.2)$$

Pokud funkce a má další proměnné, např. x , budeme říkat, že funkce $a(x, y)$ je Y -periodická v y .

Budeme se zabývat posloupností funkcí se zmenšující se periodou. Buď Ω omezená oblast s „rozumnou“ hranicí. Pro Y -periodickou funkci $a(y)$ a $\varepsilon > 0$ vztah

$$u(x) = a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \equiv u\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \dots, \frac{x_N}{\varepsilon}\right), \quad x \in \Omega \quad (4.3)$$

definuje Y^ε -periodickou funkci na Ω . Posloupnost malých čísel $\mathcal{E} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots\}$ klesajících k nule budeme nazývat škálou. Pro škálu $\mathcal{E}$ potom vztah

$$u_n(x) = a\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right), \quad x \in \Omega, \quad (4.4)$$

definuje posloupnost funkcí $\{u_n\}$ se zmenšující se periodou.

4.2. Klasická definice dvojškalové konvergence

Ve dvojškalové konvergenci limita posloupnosti $u_n(x)$ jedné N -tice proměnných x má za limitu funkci $u_0(x, y)$ dvou N -tic proměnných, kde $x \in \Omega$ a $y \in Y$, přičemž první popisuje „globální“ a druhá proměnná lokální chování funkcí u_n .

Definice 4.2. Buď $\mathcal{E}$ škála a $\{u_n\}$ omezená posloupnost funkcí v $L^p(\Omega)$. Potom $\{u_n\}$ konverguje (slabě) dvojškalově k limitě $u_0(x, y)$ v $L^p(\Omega)$ vzhledem ke škále $\mathcal{E}$, jestliže pro každou funkci $\varphi(x, y)$ spojitou na $\Omega \times Y$ a Y -periodickou v y platí

$$\int_{\Omega} u_n(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right) dx \longrightarrow \frac{1}{m(Y)} \int_{\Omega} \left(\int_Y u_0(x, y) \varphi(x, y) dy \right) dx. \quad (4.5)$$

Poznámka 4.3. Definice „kontroluje“ konvergenci funkcí u_n pomocí testovací funkce φ , která je Y -periodická v proměnné y , přičemž pro každé u_n ji ε_n -„škáluje“. Bere přitom hodnoty φ v bodech $(x, x/\varepsilon_n)$, které tvoří množinu míry nula v $\Omega \times Y$. Proto testovací funkce φ nemůže být z $L^p(\Omega \times Y)$, musí být alespoň „trochu“ spojitá. Na druhou stranu dvojškalová limita u_0 je jenom z $L^p(\Omega \times Y)$, a nemůžeme ji proto použít jako testovací funkci.

Vedle této (slabé) dvojškálové konvergence je nutno zavést silnou dvojškálovou konvergenci, která předpokládá konvergenci (4.5) a vyžaduje navíc rovnost norem

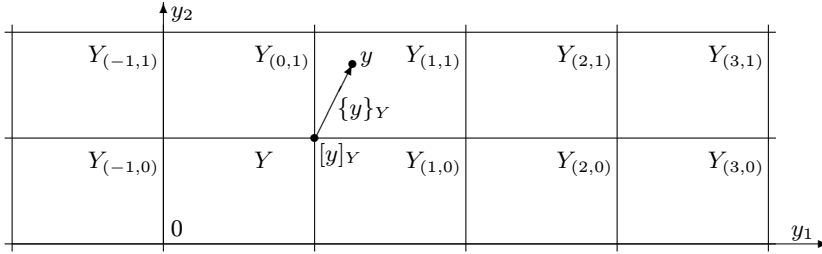
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{p;\Omega} \cdot m(Y) = \|u_0\|_{p;\Omega \times Y}. \quad (4.6)$$

Uvedme proto alternativní definici dvojškálové konvergence založenou na rozvinutí. Tato ekvivalentní definice přirozeně definuje slabou i silnou dvojškálovou konvergenci, je názornější a zjednodušuje důkazy tvrzení.

4.3. Rozvinutí funkce

Každé číslo $y \in \mathbb{R}$ lze rozdělit na celou část $[y]$ a necelou část $\{y\}$ následujícím vztahem: $y = [y] + \{y\}$, kde $[y] \in \mathbb{Z}$ a $0 \leq \{y\} < 1$.

Tento pojem rozšíříme na $\mathbb{R}^N$ vzhledem k periodě Y a rozklad $\mathbb{R}^N$ na disjunktí posunuté periody Y_k , tj. $\mathbb{R}^N = \bigcup \{Y_k \mid k \in \mathbb{Z}^N\}$. Každý bod $y \in \mathbb{R}^N$ rozložíme $y = [y]_Y + \{y\}_Y$, kde $[y]_Y$ je posunutí $k \bar{y}$ periody Y_k , ve které se bod y nachází, a $\{y\}_Y$ je relativní poloha bodu y vzhledem k periodě Y_k , tj. $\{y\}_Y = y - [y]_Y \in Y$.

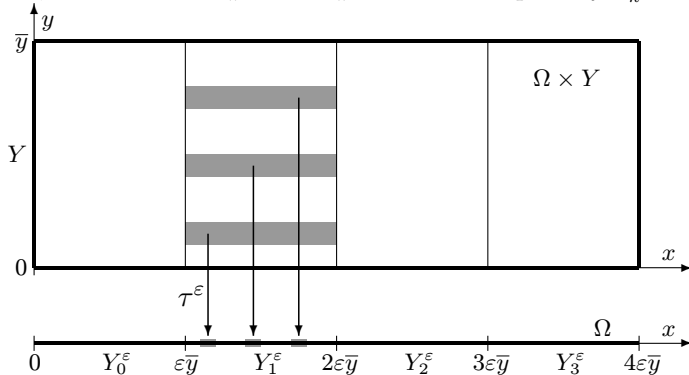


Obr. 5. Rozklad bodu y na „celou“ část $[y]_Y$ (bod) a „necelou“ část $\{y\}_Y$ (vektor).

Definujme zobrazení $\tau^\varepsilon(x, y) = \varepsilon \left[\frac{x}{\varepsilon} \right] + \varepsilon y$, které každému bodu $(x, y) \in \Omega \times Y$ přiřadí bod $\tau^\varepsilon(x, y)$ v množině Ω

$$\tau^\varepsilon(x, y) = \varepsilon \left[\frac{x}{\varepsilon} \right]_Y + \varepsilon y. \quad (4.7)$$

V tomto zobrazení celá „úsečka“ $\{(x, y) \mid x \in \varepsilon Y_k\}$ se zobrazí do jednoho bodu v periodě Y_k^ε , viz Obr. 6 pro jednorozměrný případ. Na obrázku je vidět, že čím „větší“ $y \in Y$, tím se zobrazí „dál“ od „levého konce“ periody Y_k^ε .



Obr. 6. Zobrazení τ^ε z $\Omega \times Y$ do Ω .

Zobrazení umožní funkci u proměnné x přiřadit funkci $\widehat{u}^\varepsilon$ proměnných (x, y) :

$$\widehat{u}^\varepsilon(x, y) = u(\tau^\varepsilon(x, y)) \equiv u\left(\varepsilon \left\lfloor \frac{x}{\varepsilon} \right\rfloor_Y + \varepsilon y\right). \quad (4.8)$$

Poznámka 4.4. Uvedené rozvinutí lze použít bez problémů pro oblasti Ω , pro které hranice Ω probíhá jen po hranicích Y_k^ε , tedy Ω obsahuje pouze „celé“ periody Y_k^ε . V případě, kdy Ω obsahuje „necelé“ periody, v těchto hraničních necelých periodách funkce $\widehat{u}^\varepsilon$ není všude definovaná. Tento problém někteří autoři řeší tím, že v těchto necelých periodách dávají nulu, lepším řešením je identické zobrazení, tj. v necelých periodách položíme jednoduše $\widehat{u}^\varepsilon(x, y) = u(x)$. Potom platí velmi důležitá rovnost

$$\int_{\Omega \times Y} \widehat{u}^\varepsilon(x, y) \, dx \, dy = m(Y) \int_{\Omega} u(x) \, dx, \quad (4.9)$$

tj. „rozvinutí“ zachovává (až na násobek $m(Y)$) integrál a tím i normu.

4.4. Definice dvojskálové konvergence založená na rozvinutí

Definice 4.5. Buď $\{u_n\}$ posloupnost v $L^p(\Omega)$ a $\mathcal{E}$ škála. Řekneme, že

- posloupnost $u_n(x)$ slabě dvojskálově konverguje k limitě $u_0(x, y)$, pokud

$$\widehat{u}_n^{\varepsilon_n}(x, y) \text{ slabě konvergují k } u_0(x, y) \text{ v } L^p(\Omega \times Y),$$

- posloupnost $u_n(x)$ silně dvojskálově konverguje k limitě $u_0(x, y)$, pokud

$$\widehat{u}_n^{\varepsilon_n}(x, y) \text{ (silně) konvergují k } u_0(x, y) \text{ v } L^p(\Omega \times Y).$$

V případě $p = \infty$ bereme slabou-* konvergenci.

Příklad 4.6. Buďte f a g skoro všude omezené měřitelné funkce v omezené oblasti Ω , viz Příklad 3.9 v [11]. Potom $u_n(x) = f(x) \sin(nx) + g(x)$ definuje posloupnost funkcí omezenou v každém $L^p(\Omega)$, která

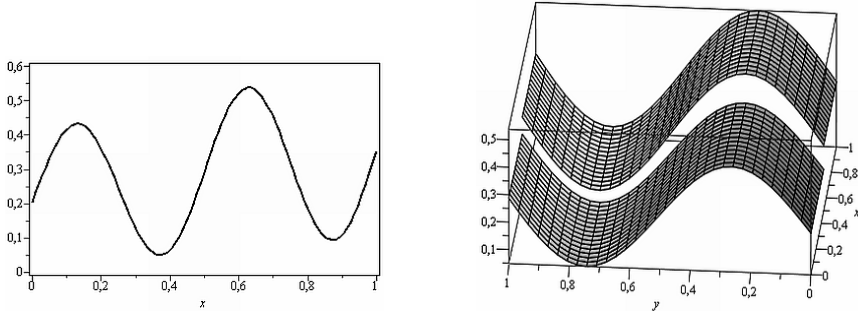
- konverguje slabě k $u^*(x) = g(x)$ v každém $L^p(\Omega)$, $p \in (1, \infty)$ a slabě-* v $L^\infty(\Omega)$.
- konverguje dvojskálově slabě i silně vzhledem ke škále $\{\frac{1}{n}\}$ k limitě $u_0(x, y) = f(x) \sin(y) + g(x)$ pro $p \in (1, \infty)$ — lokální chování je zachyceno v proměnné y .
- slabou limitu lze spočítat z dvojskálové limity

$$u^*(x) = \frac{1}{m(Y)} \int_Y u_0(x, y) \, dy.$$

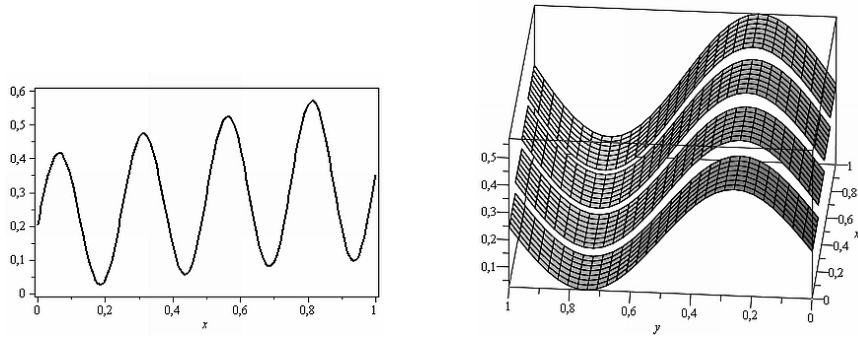
- Pokud zmenšování periody Y_{ε_n} funkcí u_n není „v souladu“ (v rezonanci) se škálou $\mathcal{E}$, například vzhledem ke škále $\{\frac{1}{n\sqrt{2}}\}$, potom u_n konvergují jenom dvojskálově slabě k $u_0(x, y) = g(x)$. V tomto případě limita $u_0(x, y)$ nezávisí na y a lokální chování u_n se nezachovalo ani ve dvojskálové limitě.

Pro ilustraci definice uveďme grafy rozvinutí konkrétní funkce.

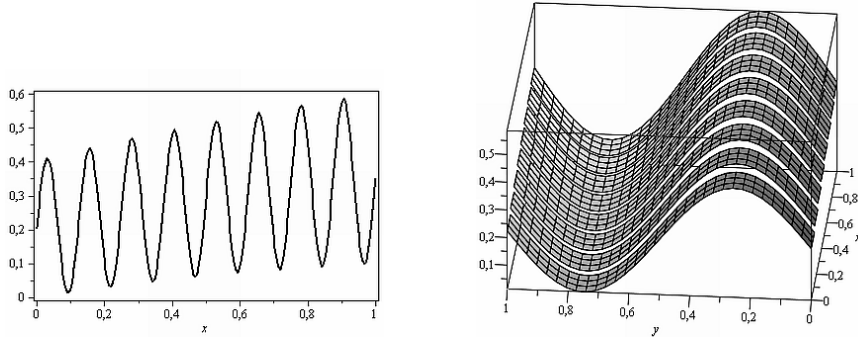
Příklad 4.7. Uvažujme funkce $u_n(x) = f(x) \varphi(\frac{x}{\varepsilon}) + g(x)$, kde $f(x) = \frac{1}{5} + \frac{x}{20}$, $\varphi(y) = \sin(2\pi y)$, $g(x) = \frac{1}{5} + \frac{x}{5} - \frac{x^2}{20}$. Ukážeme, jak rozvinutí „transformuje“ funkce u_n pro první tři ε_n : $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$, $\varepsilon_2 = \frac{1}{4}$ a $\varepsilon_3 = \frac{1}{8}$. Na Obr. 7–10 je vidět, jak rozvinuté funkce $\widehat{u}_n^{\varepsilon_n}$ konvergují k dvojskálové limitě $u_0(x, y)$.



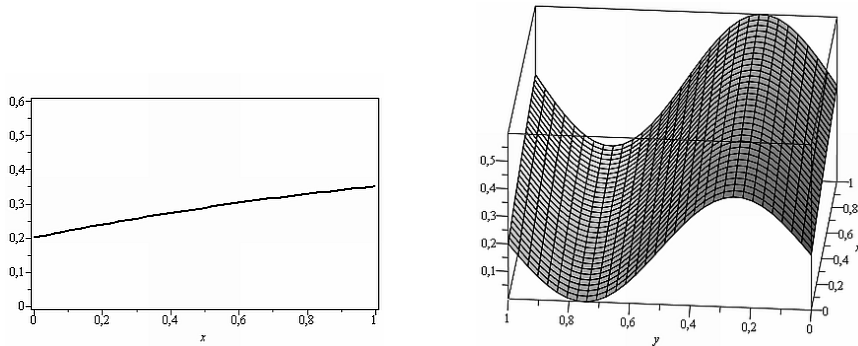
Obr. 7. Funkce u_1 a rozvinutá funkce $\hat{u}_1^{\varepsilon_1}$ s $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$.



Obr. 8. Funkce u_2 a rozvinutá funkce $\hat{u}_2^{\varepsilon_2}$ s $\varepsilon_2 = \frac{1}{4}$.



Obr. 9. Funkce u_3 a rozvinutá funkce $\hat{u}_3^{\varepsilon_3}$ s $\varepsilon_3 = \frac{1}{8}$.



Obr. 10. Slabá limita u^* a dvojskálková limita u_0 , která je limitou $\hat{u}_n^{\varepsilon_n}$.

4.5. Výsledky o dvojškálové konvergenci důležité pro aplikace

Věta 4.8. (KOMPAKTNOST) *Pro každou posloupnost $\{u_n\}$ omezenou v $L^p(\Omega)$ ($1 < p < \infty$) a škálu $\mathcal{E} = \{\varepsilon_n\}$ existuje funkce $u_0 \in L^p(\Omega \times Y)$ a podposloupnost $\{u_{n'}\}$ konvergující slabě dvojškálově v $L^p(\Omega)$ k limitě u_0 vzhledem k „podškále“ $\mathcal{E}' = \{\varepsilon_{n'}\} \subset \mathcal{E}$.*

Důkaz tvrzení plyne ze skutečnosti, že díky (4.9) rozvinutím funkcí u_n dostaneme opět posloupnost $\widehat{u}_n^{\varepsilon_n}$ stejně omezenou v $L^p(\Omega \times Y)$ a klasický výsledek o kompaktnosti množin v Lebesgueově prostoru $L^p(\Omega \times Y)$ dává tvrzení.

Podle Věty 2.1 součin posloupnosti u_n omezené v $L^p(\Omega)$ a posloupnosti v_n omezené v $L^q(\Omega)$ tvoří posloupnost $u_n v_n$ omezenou v $L^r(\Omega)$, kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Můžeme proto formulovat větu o limitním přechodu.

Věta 4.9. *Nechť pro exponenty $p, q, r \in (1, \infty)$ platí $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Jestliže*

- u_n silně dvojškálově konverguje k u_0 v $L^p(\Omega)$,
- v_n slabě dvojškálově konverguje k v_0 v $L^q(\Omega)$,

potom platí

- $u_n v_n$ slabě dvojškálově konverguje k $u_0 v_0$ v $L^r(\Omega)$ a
- $u_n v_n$ slabě v $L^r(\Omega)$ konverguje k $m(Y)^{-1} \int_Y u_0(\cdot, y) v_0(\cdot, y) dy$,
přičemž v případě $r = \infty$ jde o slabou-* konvergenci v $L^\infty(\Omega)$.

Důkaz věty plyne z vlastností silné a slabé konvergence v prostorech $L^p(\Omega \times Y)$. Označme $U_n = \widehat{u}_n^{\varepsilon_n}$ a $V_n = \widehat{v}_n^{\varepsilon_n}$. Podle předpokladů věty $U_n \rightarrow u_0$ a $V_n \rightharpoonup v_0$. Buď $f \in L^r(\Omega \times Y)$ reprezentující funkcionál F na $L^r(\Omega \times Y)$. Ve výrazu

$$\int_{\Omega \times Y} f(U_n V_n - u_0 v_0) dx dy = \int_{\Omega \times Y} f(U_n - u_0) V_n dx dy + \int_{\Omega \times Y} f u_0 (V_n - v_0) dx dy$$

první člen na pravé straně konverguje k nule, protože $\|U_n - u_0\|_p \rightarrow 0$ a $\|V_n\|_q$ je omezená. Druhý člen jde také k nule, protože $f u_0$ reprezentuje funkcionál na slabě konvergentní posloupnosti $(V_n - v_0) \rightharpoonup 0$ v $L^q(\Omega \times Y)$.

5. VYUŽITÍ V TEORII HOMOGENIZACE

Vraťme se nyní k problému homogenizace. Uvažujme lineární eliptickou parciální diferenciální rovnici druhého řádu

$$-\operatorname{div}(a(x) \nabla u) \equiv - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = f, \quad x \in \Omega, \quad (5.1)$$

doplňnou vhodnou okrajovou podmínkou na hranici $\Gamma = \partial\Omega$, například $u|_\Gamma = 0$. Pro funkci $a \in L^\infty(\Omega)$ splňující $a(x) \geq \alpha > 0$ a $f \in L^2(\Omega)$ uvedená okrajová úloha má právě jedno (tzv. slabé) řešení, viz [10].

Rovnice modeluje ustálené vedení tepla v desce tvaru Ω izolované na povrchu ($N = 2$) nebo v tělese ($N = 3$) zabírajícím objem Ω . Neznámou $u(x)$ je teplota, koeficient $a(x)$ popisuje vlastnosti materiálu a $f(x)$ je hustota výkonu vnitřních zdrojů. Okrajová podmínka $u = 0$ říká, že na okraji Γ je udržovaná nulová teplota. Rovnice popisuje i difúzi, kroucení tyče, viz např. [9].

5.1. Formulace úlohy homogenizace

Při homogenizaci zkoumáme posloupnost okrajových úloh pro rovnice s koeficienty se zmenšující se periodou. Buď $a(y)$ navíc Y -periodická funkce. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ máme Y^ε -periodický koeficient $a^\varepsilon(x) = a(\frac{x}{\varepsilon})$ a tím i rovnici

$$-\operatorname{div}(a^\varepsilon(x) \nabla u^\varepsilon) \equiv - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a^\varepsilon(x) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i} \right) = f, \quad x \in \Omega, \quad (5.2)$$

která s okrajovou podmínkou $u^\varepsilon|_\Gamma = 0$ tvoří okrajovou úlohu pro řešení u^ε .

V tzv. slabé formulaci na Sobolevově prostoru $H_0^1(\Omega)$ (se skalárním součinem $(u, v) = \int_\Omega (\nabla u \nabla v) dx$ je to Hilbertův prostor) úloha má tvar:

Najdi funkci $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ splňující integrální identitu

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^N a^\varepsilon(x) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_\Omega f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (5.3)$$

Teorie homogenizace uvažuje škálu $\mathcal{E} = \{\varepsilon_n\}$ – posloupnost zmenšujících se $\varepsilon_n \rightarrow 0$, čímž dostáváme posloupnost koeficientů $\{a^{\varepsilon_n}\}$, posloupnost okrajových úloh a následně posloupnost řešení $\{u^{\varepsilon_n}\}$.

Ve slabé formulaci (5.3) se vyskytuje součin dvou posloupností: posloupnosti koeficientů $\{a^{\varepsilon_n}\}$ a posloupnosti derivací $\{\frac{\partial u^{\varepsilon_n}}{\partial x_i}\}$ a potřebujeme přejít k limitě.

5.2. Principiální krok

Principiální krok umožní dvojškálová konvergence. Protože koeficient a je v $L^\infty(\Omega)$, koeficienty $a^{\varepsilon_n}(x) = a(\frac{x}{\varepsilon_n})$ konvergují silně dvojškálově v $L^\infty(\Omega)$ k dvojškálové limitě $a_0(x, y) = a(y) \in L^\infty(\Omega)$.

Díky Laxově-Milgramově lemmatu řešení u^ε lze odhadnout v normě prostoru $H_0^1(\Omega)$ konstantou nezávislou na ε . Podle Věty o kompaktním vnoření z teorie Sobolevových prostorů, viz např. [10], existuje funkce $u^* \in H_0^1(\Omega)$ a podposloupnost $\{u^n\}$ (kterou budeme označovat stejně) konvergující k limitě u^* slabě v $H_0^1(\Omega)$ a silně v $L^2(\Omega)$. Navíc z omezenosti posloupnosti $\{u^{\varepsilon_n}\}$ v normě $H_0^1(\Omega)$ plyne omezenost derivací $w_i^{\varepsilon_n} \equiv \frac{\partial u^{\varepsilon_n}}{\partial x_i}$ v normě $L^2(\Omega)$ se stejnou konstantou.

Podle Věty 4.8 existují funkce $w_i^0 \in L^2(\Omega \times Y)$ a podposloupnost taková, že

$$w_i^{\varepsilon_n} \text{ konvergují slabě dvojškálově v } L^2(\Omega) \text{ k } w_i^0. \quad (5.4)$$

Lze dokázat, že existuje taková funkce $u_1 \in L^p(\Omega \times Y)$, která je Y -periodická v y a její derivace $\frac{\partial u_1}{\partial y_i}(x, y)$ jsou v $L^2(\Omega \times Y)$, že limity w_i^0 lze vyjádřit ve tvaru

$$w_i^0(x, y) = \frac{\partial u^*}{\partial x_i}(x, y) + \frac{\partial u_0}{\partial y_i}(x, y). \quad (5.5)$$

Funkce a^{ε_n} a $w_i^{\varepsilon_n}$ tedy splňují předpoklady Věty 4.9, proto součin

$$a^{\varepsilon_n}(x) w_i^{\varepsilon_n}(x) \text{ konverguje slabě dvojškálově v } L^2(\Omega) \text{ k } a(y) w_i(x, y). \quad (5.6)$$

V integrální identitě (5.3) nyní můžeme přejít k limitě

$$\int_{\Omega \times Y} \sum_{i=1}^N a \left[\frac{\partial u^*}{\partial x_i} + \frac{\partial u_1}{\partial y_i} \right] \frac{\partial v}{\partial x_i} dx dy = \int_{\Omega \times Y} f v dx dy, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (5.7)$$

Z této integrální identity volbou vhodných testovacích funkcí lze odvodit rovnici pro homogenizované řešení u^* , vzorce pro homogenizované koeficienty a dokázat, že nejen podposloupnost, ale celá posloupnost $\{u^{\varepsilon_n}\}$ konverguje k homogenizovanému řešení u^* , celý důkaz lze najít např. v [5].

6. ZÁVĚR

Článek se zabýval řešením problémů (1.1) a (1.2) přechodu k limitě se slabě konvergentní posloupností.

V případě složení posloupnosti u_n se spojitou funkcí Φ limita ve tvaru souboru Youngových měr $u^*(x) = \nu(x)$ umožňuje určit limitu $\Phi(u_n)$, viz Věta 3.7. Ne každá slabě konvergující posloupnost má limitu v tomto tvaru. Věta 3.6 navíc dává jistou kompaktnost, tj. existuje podposloupnost, která má limitu ve tvaru souboru Youngových měr.

V případě přechodu k limitě v součinu dvou slabě konvergentních posloupností pomohla dvojskálová konvergence. Pomocí Věty 4.9 lze přejít k limitě pokud se nám podaří vhodnou volbou škály $\mathcal{E} = \{\varepsilon\}$ dosáhnout „souladu“ s jednou posloupností, např. u_n , která potom bude vzhledem ke škále $\mathcal{E}$ konvergovat silně dvojskálově. Pro druhou posloupnost v_n stačí dokázat její omezenost, díky kompaktnosti, viz Věta 4.8, pak už konverguje vybraná podposloupnost dvojskálově slabě.

Uvedené výsledky umožňují přejít k limitě ve slabé formulaci a řešit tak problém homogenizace v případě periodických koeficientů.

Problém přechodu k limitě v součinu dvou slabě konvergentních posloupností zůstává otevřený v případě, pokud se nám nepodaří najít škálu, ve které alespoň jedna z posloupností konverguje silně dvojskálově.

Na závěr uvedme, že pro případ homogenizace rovnic s neperiodickými (například kvaziperiodickými) koeficienty G. Nguetseng nahradil periodičnost koeficientů existencí tzv. homogenizační algebry a dvojskálovou konvergenci nahradil novou, tzv. Σ -konvergencí, viz [13].

REFERENCE

- [1] G. Allaire: *Homogenization and two-scale convergence*, SIAM J. Math. Anal. **23** (1992), 1482–1518.
- [2] I. Babuška: *Homogenization approach in engineering*, in: Computing Methods in Applied Sciences and Engineering, Lecture Notes in Econ. and Math. Systems **134**, Springer, Berlin 1976, pp. 137–153.
- [3] N. Bakhvalov, G. Panasenko: *Homogenization: Averaging Processes in Periodic Media*, Mathematical Problems in the Mechanics of Composite Materials, Springer 1989.
- [4] A. Bensoussan, J. L. Lions, G. Papanicolaou: *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North Holland, 1978.
- [5] D. Cioranescu, P. Donato: *Introduction to Homogenization*, Oxford Univ. Press, 2000.
- [6] J. Franců: *Homogenizace — matematická metoda výpočtu materiálů s periodickou strukturou*, Stavebnícky časopis **31** (1983), 789–814.
- [7] J. Franců: *Homogenizace*, sborník 6. seminář z parciálních diferenciálních rovnic – Manětín 1981, JČSMF a KMA VŠSE, Plzeň 1982, 21–63.
- [8] J. Franců: *Funkcionální analýza I*, skripty FSI VUT v Brně, Akad. nakl. CERM, Brno 2009.
- [9] J. Franců: *Parciální diferenciální rovnice*, skripty FSI VUT v Brně, Akad. nakl. CERM, Brno 2011.

- [10] J. Franců: *Moderní metody řešení diferenciálních rovnic*, skriptá FSI VUT v Brně, Akad. nakl. CERM, Brno 2006.
- [11] J. Franců: *Od kompozitních materiálů ke slabé konvergenci*, Kvaternion 2/2012, 113–124.
- [12] J. Franců: *Slabá a dvouškálová konvergence*, Sborník semináře: Matematika na vysokých školách, Herbertov 3.–5.9. 2001, 65–68.
- [13] G. Nguetseng: *Homogenization structures and applications*, Z. Anal. Anwen. Part I – **22** (2003), 73–107, Part II – **23** (2004), 482–508.
- [14] V. Šverák: *Nelineární rovnice a slabá konvergence*, sborník 14. seminář z parciálních diferenciálních rovnic – Hřensko 1989, JČSMF a KMA VŠSE Plzeň 1990, 103–146.

Jan Franců, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně,
Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: francu@fme.vutbr.cz

KVATERNIONOVÉ ALGEBRY S PROGRAMEM SAGE

LENKA MACÁLKOVÁ

ABSTRAKT. V tomto článku si klademe za cíl seznámit čtenáře s využitím systému SAGE v souvislosti s výpočty na kvaternionových algebrách. První část je zaměřena na práci s prvky kvaternionové algebry, ve druhé části se věnujeme ideálům a řádům kvaternionových algeber.

ÚVOD

V první části článku se seznámíme se systémem počítačové algebry SAGE. Poté se budeme věnovat příkladům, ve kterých použijeme SAGE v souvislosti s kvaternionovými algebrami. Ve druhé části pak uvedeme definice ideálu a řádu kvaternionové algebry. Dále se zabýváme pojmem diskriminantu a maximálního řádu kvaternionové algebry.

1. SEZNÁMENÍ SE SYSTÉMEM SAGE

SAGE je open-source systém počítačové algebry, který je vytvořený v programovacím jazyce Python. Je k dispozici pro všechny platformy a je možné jej stáhnout na <http://www.sagemath.org/>, nebo lze využít online rozhraní (přístupné na stejné adrese).

Nyní se lehce seznámíme s ovládáním. Řádek s příkazem bude vždy začínat „sage:“

```
sage: 3-2+5*3-7/3
      41/3
sage: cos(pi/2)
      0
```

Z příkladu je vidět, že základní matematické operace a funkce není složité zapsat. My se v tomto článku zaměříme na použití SAGE v souvislosti s kvaternionovými algebrami.

Začneme tím, že si připomeneme definici kvaternionové algebry. V celém textu budeme pracovat s tělesem, jehož charakteristika není dva.

2010 MSC. Primární 11R52, 11-04.

Klíčová slova. Kvaternionová algebra, SAGE, ideál, řád.

Práce byla podporována projektem A-Math-Net – Síť pro transfer znalostí v aplikované matematice (CZ.1.07/2.4.00/17.0100).

Definice 1.1. *Kvaternionovou algebrou A nad tělesem F rozumíme vektorový prostor dimenze čtyři s bázeovými vektory $1, i, j, k$, kde neutrálním prvkem vzhledem k operaci násobení na A je 1 a dále platí, že*

$$i^2 = a, \quad j^2 = b, \quad ij = -ji = k,$$

kde $a, b \in F^*$.

Poznámka 1.2. Pro těleso F s charakteristikou dva je definice kvaternionové algebry shodná až na zavedení operace násobení. Ta je v tomto případě definována následovně:

$$i^2 + i = a, \quad j^2 = b, \quad ij = j(1 + i) = k,$$

kde $a \in F, b \in F^*$.

Nyní se podíváme, jakým způsobem zadat kvaternionovou algebru v SAGE. Pod příkazem

```
sage: A.<i,j,k>=QuaternionAlgebra(QQ,-1,2)
```

rozumíme: Sestrojí kvaternionovou algebru A s bází $1, i, j, k$, nad tělesem racionálních čísel (tj. QQ), kde $a = -1, b = 2$. Pokud bychom chtěli kvaternionovou algebru nad tělesem K o dvaceti pěti prvcích, kde $a = -1, b = 3$, zadáme

```
sage: B.<i,j,k>=QuaternionAlgebra(GF(25,'z'),-1,3)
```

Symbolem z v příkazu $GF(25, 'z')$ označujeme kořen ireducibilního polynomu, podle něž provádíme operaci modulo v tělese $GF(25)$.

Uvědomme si, že některé kvaternionové algebry jsou okruhy s dělením (tj. každý nenulový prvek má inverzi), jiné nikoli. Nejznámějším příkladem kvaternionové algebry s dělením jsou Hamiltonovy kvaterniony, což je kvaternionová algebra nad reálnými čísly, kde $a = b = -1$. Kvaternionovou algebrou, která není okruhem s dělením (tzn. má dělitele nuly), je například kvaternionová algebra nad reálnými čísly, kde $a = 1, b = -1$. Zde je dělitelem nuly prvek $1 + i$, neboť $(1 + i)(1 - i) = 0$. Pokud bychom chtěli vědět, zda je daná kvaternionová algebra nad nekonečným tělesem okruhem s dělením, můžeme použít funkci `is_division_algebra()`. SAGE vrátí `True` v kladném případě, v opačném vrátí `False`:

```
sage: B.<i,j,k>=QuaternionAlgebra(GF(25, 'z'), -1,3)
sage: B.is_division_algebra()
False
sage: A.<i,j,k>=QuaternionAlgebra(QQ, -1,3)
sage: A.is_division_algebra()
True
```

Podobnou booleovskou funkcí je například funkce `is_finite()` nebo funkce `is_integral_domain()`. Z jejich názvu si čtenář jistě snadno pochopí, k čemu tyto funkce slouží. Nabízí se otázka, jak probíhají operace s prvky z kvaternionových algeber. Pro příklad můžeme najít dva náhodné prvky x, y z algebry A a spočítat jejich součin a součet:

```

sage: A.<i,j,k>=QuaternionAlgebra(QQ, -1,3)
sage: x=A.random_element()
sage: x
-1 + 4*ii + jj + 1/3*kk
sage: y=A.random_element()
sage: y
15/2 + 1/18*ii - 2*jj
sage: x+y
13/2 + 73/18*ii - jj + 1/3*kk
sage: x*y
41/18 + 599/18*ii + 257/27*jj - 50/9*kk

```

Pro kvaternionovou algebru A a každý její prvek $x = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$ definujeme stopu $\text{Tr}(x)$ a normu $N(x)$ jako

$$\text{Tr}(x) = 2a_0, \quad N(x) = a_0^2 - a_1^2a - a_2^2b + a_3^2ab.$$

Funkce `reduced_norm()` a `reduced_trace()` slouží pro výpočet normy a stopy prvku. Spočítejme tedy pro ukázkou normu a stopu prvku x uvedeného výše:

```

sage: x.reduced_norm()
203/9
sage: x.reduced_trace()
-2

```

2. ŘÁDY KVATERNIONOVÝCH ALGEBER

Před tím, než uvedeme další příklady použití programu SAGE, zavedeme pojem řádu kvaternionové algebry. V této části budeme uvažovat Dedekindův okruh R a jeho podílové těleso K .

Definice 2.1. Mějme vektorový prostor V nad tělesem K . R -mřížkou nad V rozumíme konečně generovaný R -modul obsažený ve V . Mřížka L je *úplná*, jestliže $K \otimes_R L \simeq V$.

Definice 2.2. Nechť A je kvaternionová algebra nad K . Libovolnou úplnou R -mřížku nazveme *ideálem*. Je-li taková mřížka navíc okruhem, tak ji nazýváme *řádem*.

Definice 2.3. Nechť I je ideál kvaternionové algebry A , pak *levým řádem* ideálu I nazýváme množinu

$$\mathcal{O}_l(I) = \{a \in A \mid aI \subset I\}.$$

Pravý řád ideálu I analogicky definujeme jako

$$\mathcal{O}_r(I) = \{a \in A \mid Ia \subset I\}.$$

Pro práci s ideály a řády kvaternionových algeber slouží v SAGE některé funkce. Tyto funkce můžeme použít pouze pro kvaternionové algebry nad racionálními čísly. Začneme s funkcí `ideal()`, která vrací ideál s danými generátory nad $\mathbb{Z}$.

Funkce `basis()`, která je použita v následujícím příkladu, vrací bázi. V následujícím příkladu zadáme ideál I pomocí báze a to tak, že každý prvek báze I je trojnásobkem prvku báze A .

```
sage: A=QuaternionAlgebra(QQ,-1,-13)
sage: I=A.ideal([3*a for a in A.basis()])
sage:I
Fractional ideal (3, 3*i, 3*j, 3*k)
```

Pokud bychom chtěli zjistit, zda je daná množina ideálem, stačí při zadávání ideálu přidat argument `check=False`, např.

```
A.ideal([4*a for a in A.basis()], check=False)}
```

Řád kvaternionové algebry můžeme zadat stejným způsobem jako ideál, jen místo funkce `ideal()` využijeme funkce `quaternion_order()`. Pokud budeme chtít zkontrolovat, zda se jedná o řád, můžeme opět použít `check=False`. SAGE nabízí i funkce `left_order()` a `right_order()` pro práci s levými a pravými řády pro daný ideál I . Pro ukázkou spočteme levý řád ideálu z předchozího případu.

```
sage: A=QuaternionAlgebra(QQ,-1,-13)
sage: Q=A.quaternion_order([1,2*i,2*j,2*k]) sage: Q
Order of Quaternion Algebra (-1, -13) with base ring Rational
Field with basis (1, 2*i, 2*j, 2*k)
sage: I.left_order()
Order of Quaternion Algebra (-1, -13) with base ring Rational
Field with basis (1, i, j, k)
```

V souvislosti s řády kvaternionových algeber je třeba zmínit také maximální řády.

Definice 2.4. *Maximálním řádem* $\mathcal{O}$ kvaternionové algebry A , rozumíme takový řád, že neexistuje žádný řád $\mathcal{O}'$ s vlastností $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}' \subset A$.

Věta 2.5. *Každý řád kvaternionové algebry je podřádem nějakého maximálního řádu.*

Bohužel v současné době nemáme algoritmus, podle kterého bychom byli schopni rychle určit maximální řády kvaternionových algeber. SAGE je schopen vypočítat maximální řád pouze v případě, kdy se jedná o kvaternionovou algebru nad $\mathbb{Q}$, která má prvočíselný diskriminant. Tomuto pojmu se budeme nyní krátce věnovat.

Nejprve seznámíme čtenáře s pojmem p -adické metriky a p -adických čísel.

Definice 2.6. Mějme $n \in \mathbb{Z}$ a p je prvočíslo. Symbolem $v_p(n)$ budeme označovat největší $a \in \mathbb{Z}$, pro které platí $p^a | n$. Pro racionální číslo v základním tvaru $\frac{m}{n}$ položme $v_p(\frac{m}{n}) = v_p(m) - v_p(n)$.

Definice 2.7. Mějme prvočíslo p . Pro libovolné $r \in \mathbb{Q}$ v základním tvaru definujeme p -adickou normu $|r|_p$ tak, že $|r|_p = p^{-v_p(r)}$ pro $r \neq 0$ a $|r|_p = 0$ pro $r = 0$.

S pomocí p -adické normy lze na racionálních číslech zavést tzv. p -adickou metriku ϱ_p tak, že pro každá dvě racionální čísla x, y je jejich vzdálenost v p -adické metrice $\varrho_p(x, y) = |x - y|_p$. Pokud provedeme zúplnění racionálních čísel vzhledem k této metrice, dostáváme tzv. p -adická čísla $\mathbb{Q}_p$, tedy v závislosti na volbě prvočísla 2-adická, 3-adická, ... Lze dokázat, že p -adická čísla tvoří těleso. V případě zájmu si dovoluujeme čtenáře odkázat na [2].

Definice 2.8. Mějme $a, b \in K$. Hilbertovým symbolem vzhledem k tělesu K rozumíme

$$(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{rovnice } ax^2 + by^2 = z^2 \text{ má nenulové řešení v } K \\ -1, & \text{jinak} \end{cases}$$

Hilbertův symbol v tělese $\mathbb{Q}_p$ budeme značit $(a, b)_p$.

Definice 2.9. Mějme kvaternionovou algebru A nad $\mathbb{Q}$, kde $i^2 = a$, $j^2 = b$. Označme X množinu všech prvočísel, kdy $(a, b)_p = -1$. Pak *diskriminantem* d kvaternionové algebry, rozumíme výraz

$$d = \prod_{p \in X} p.$$

Nyní se vrátíme k výpočtům v systému SAGE. Pro výpočet Hilbertova symbolu $(a, b)_p$ lze použít funkci `hilbert_symbol()` s parametry `a, b, p`. Pokud bychom chtěli zjistit všechna prvočísla, která se ve výpočtu diskriminantu vyskytují, využijeme funkce `ramified_primes()`. Pro samotný výpočet diskriminantu pak slouží funkce `discriminant()`.

```
sage: A=QuaternionAlgebra(QQ,-5,-13)
sage: hilbert_symbol(-5,-13,2)
-1
sage: hilbert_symbol(-5,-13,11)
1
sage: A.ramified_primes()
[2,5,13]
sage: A.discriminant()
130
```

Nyní se vrátíme zpět k maximálnímu řádu. Jak už bylo řečeno, SAGE vypočítá maximální řád pouze pro kvaternionovou algebru nad $\mathbb{Q}$ s prvočíselným diskriminantem. V první případě ukážeme výpočet na Hamiltonových kvaternionech. Jejím maximálním řádem jsou tzv. Hurwitzovy kvaterniony.

```

sage: A.<i,j,k>=QuaternionAlgebra(QQ,-1,-1)
sage: A.discriminant()
2
sage: A.maximal_order()
Order of Quaternion Algebra (-1, -1) with base ring Rational
Field with basis (1/2 + 1/2*i + 1/2*j + 1/2*k, i, j, k)
sage: B.<i,j,k>=QuaternionAlgebra(QQ,-7,-11) sage: B.discriminant()
7
B.maximal_order()
Order of Quaternion Algebra (-7, -11) with base ring Rational
Field with basis (1/2 + 1/2*j, 1/2*i + 1/2*k, j, k)

```

SAGE obsahuje ještě mnoho dalších funkcí, které lze použít při zkoumání vlastností kvaternionových algeber, jsou však vysoce nad rámec tohoto textu. Čtenáře proto odkážeme na referenční manuál, který najde na stránkách [3].

REFERENCE

- [1] C. Maclachlan, A. W. Reid: *The Arithmetic of Hyperbolic 3-Manifolds*, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [2] J. Preszler: *Introduction to p-adic numbers*, University of Utah, 2005.
- [3] SAGE: *Sage's Reference Manual*, <http://www.sagemath.org/doc/reference/>.

Lenka Macálková, Ústav matematiky a statistiky, Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita v Brně, Kotlářská 2, 602 00 Brno, Česká republika,
e-mail: macalkoval@gmail.com

JAK MOHL FERMAT UVAŽOVAT

LADISLAV KOCANDA

ABSTRAKT. Článek je rozdělen na dvě části. Vprvní části dokážeme, že pro žádná přirozená čísla x, y, z a n , kde $n \geq 3$, neplatí rovnost $xn + yn = zn$. Kdůkazu nepoužijeme přímo čísla x, y, z ale jejich rozklad na čísla v, d a p , pro která platí: $x = p + d, y = p + v$ a $z = p + d + v$. Vdruhé části dokážeme dvě nejzávažnější věty, na které je vprvní části odkazováno.

1. ÚVOD

Pierre de Fermat (1601–1665) zanechal před třista čtyřiceti osmi léty ve své pozůstalosti jistou Diofantovu knihu, v níž poznamenává, že pro žádná přirozená čísla x, y, z a n , kde $n \geq 3$, neplatí rovnost $x^n + y^n = z^n$. Pro více informací je možné nahlédnout do literatury [1, 2, 3, 4].

Vztah $x^n + y^n = z^n$ funguje bez problémů v oboru přirozených čísel pro $n = 1$ a s použitím vzorců i pro $n = 2$. Uvažujme o tom, co se změnilo, když za n zvolíme číslo liché větší nebo rovno 3.

2. DŮKAZ VELKÉ FERMATOVY VĚTY

Ze vztahu $x^n + y^n = z^n$ je patrné, že $x < z$ a $y < z$, a proto musí existovat přirozené číslo v takové, že $z = x + v$, a přirozené číslo d takové, že $z = y + d$.

Lze dokázat, že existuje přirozené číslo p takové, že $x + y = z + p$. Nahradíme-li ve vztahu $x + y = z + p$ číslo z , pak

$$x + y = z + p = x + v + p,$$

tedy $y = p + v$ a $x + y = y + d + p$, z toho $x = p + d$.

Při nahrazení čísel x a y platí $(p + d) + (p + v) = z + p$, a tedy $z = p + d + v$. Platí-li pro přirozená čísla x, y, z a n vztah $x^n + y^n = z^n$, pak platí i $y^n = z^n - x^n$, tedy $y^n = (zx) \cdot G$, kde G je číslo přirozené. Položíme-li $z - x = v$, lze dokázat, že ze vztahu $y^n = v \cdot G$ bude $v_1 = \gcd(y, v)$. Dále, platí-li pro přirozená čísla x, y, z a n , vztah $x^n + y^n = z^n$, pak platí i $x^n = z^n - y^n$, a tedy $x^n = (zy) \cdot W$, kde W je číslo přirozené. Položíme-li $z - y = d$, pak ze vztahu $x^n = d \cdot W$, dostáváme $d_1 = \gcd(x, d)$. Ze vztahu $v_1 = \gcd(y, v)$ je

$$y = v_1 \cdot g_1 \text{ a } v = v_1 \cdot g_2,$$

2010 MSC. Primární 11D41.

Klíčová slova. Velká Fermatova věta, Pierre de Fermat.

Práce byla podporována projektem A-Math-Net – Síť pro transfer znalostí v aplikované matematice (CZ.1.07/2.4.00/17.0100).

kde $\gcd(g_1, g_2) = 1$, a ze vztahu $d_1 = \gcd(x, d)$ vyplývá, že

$$x = d_1 \cdot w_1 \text{ a } d = d_1 \cdot w_2,$$

kde $\gcd(w_1, w_2) = 1$. Protože $p = yv$, je $p = v_1 \cdot (g_1 - g_2)$ a $p = x - d$ je $p = d_1 \cdot (w_1 - w)$ a platí, že

$$v_1 \cdot (g_1 - g_2) = d_1 \cdot (w_1 - w_2).$$

Protože v_1 a d_1 jsou čísla nesoudělná (v opačném případě by byla soudělná i čísla x, y, z), platí, že $v_1 = (w_1 - w_2)$ a $d_1 = (g_1 - g_2)$, tedy $p = v_1 \cdot d_1$.

Nyní se vraťme k otázce, co by se změnilo, pokud by číslo n bylo větší nebo rovno 3, a hlavně, když n bude liché. Mějme tedy n číslo liché větší nebo rovno třem. Jestliže pro přirozená nesoudělná čísla x, y, z platí $z^n = x^n + y^n$, pak platí, že $z^n = (x + y) \cdot U$, kde U je číslo přirozené, tedy $z_1 = \gcd((x + y), z)$. Pak $z = z_1 \cdot u_1$ a $(x + y) = z_1 \cdot u_2$. Protože $x + y = z + p$, musí platit $z + p = z_1 \cdot u_2$. Z předchozího plyne, že $z_1 \cdot u_1 + v_1 \cdot d_1 = z_1 \cdot u_2$ a následně $v_1 \cdot d_1 = z_1 \cdot u_2 - z_1 \cdot u_1$ a $v_1 \cdot d_1 = z_1 \cdot (u_2 - u_1)$. Z tohoto zápisu ale vyplývá, že buď v_1 nebo d_1 musí být soudělné s číslem z_1 . Tedy pro $n > 2$ liché budou čísla v_1, d_1, z_1 soudělná a tím budou soudělná i čísla x, y, z . Z toho plyne závěr, že neexistují přirozená nesoudělná čísla x, y, z a liché číslo $n > 2$, pro něž platí $x^n + y^n = z^n$.

Zde dokážeme dvě věty, na které je v textu odkazováno.

Věta 2.1. *Platí-li pro přirozená nesoudělná čísla vztah $x^n + y^n = z^n$, pak existuje přirozené číslo p takové, že platí $x + y = z + p$.*

Důkaz. Podívejme se, v jakém vztahu jsou přirozená čísla $x + y$ a číslo z . Pokud by $x + y < z$, pak pro $n > 1$ platí $(x + y)^n < z^n$. Tedy $x^n + nx^{n-1}y + \dots + y^n < z^n$ a $x^n + nx^{n-1}y + \dots + y^n - z^n < 0$. Protože $x^n + y^n z^n = 0$ a $nx^{n-1}y + \dots + nxy^{n-1}$ je kladné, dojdeme ke sporu. Když tedy $x + y > z$, pak existuje přirozené číslo p takové, že $x + y = z + p$. $\square$

Poznámka 2.2. Pokud ve vztahu $x^n + y^n = z^n$ je $n = 1$, pak $x + y = z$, a tedy $p = 0$.

Věta 2.3. *Platí-li pro přirozená nesoudělná čísla x, y, z a $n > 1$ vztah $x^n + y^n = z^n$, pak ze vztahu $x + y = z + p$ je číslo $p = v_1 \cdot d_1$, kde $v_1 = \gcd(y, v)$ a $d_1 = \gcd(x, d)$ při $zx = v$ a $z - y = d$.*

Důkaz rozdělíme na dvě části.

Věta 2.4. *Platí-li $\gcd((g_1 - g_2), (w_1 - w_2)) = 1$ a $\gcd(x, y, z) = 1$, pak $p = v_1 \cdot d_1$.*

Důkaz. K důkazu použijeme známou větu: Jestliže $b|a_1 \cdot b_1$ a je-li $\gcd(b, a_1) = 1$, pak $b|b_1$.

Nechť $\gcd((g_1 - g_2), (w_1 - w_2)) = 1$ ve vztahu $v_1 \cdot (g_1 - g_2) = d_1 \cdot (w_1 - w_2)$, kdy $(g_1 - g_2)|d_1 \cdot (w_1 - w_2)$, při $\gcd((g_1 - g_2), (w_1 - w_2)) = 1$ je $(g_1 - g_2)|d_1$, tedy $d_1 = k \cdot (g_1 - g_2)$. Po dosazení $v_1 \cdot (g_1 - g_2) = k \cdot (g_1 - g_2) \cdot (w_1 - w_2)$ je $v_1 = k \cdot (w_1 - w_2)$, pak dostáváme

$$\begin{aligned} x &= d_1 \cdot w_1 = k \cdot (g_1 - g_2) \cdot w_1, \\ y &= v_1 \cdot g_1 = k \cdot (w_1 - w_2) \cdot g_1, \\ z &= x + v = k \cdot (g_1 - g_2) \cdot w_1 + k \cdot (w_1 - w_2) \cdot g_2 = \\ &= k \cdot ((g_1 - g_2) \cdot w_1 + (w_1 - w_2) \cdot g_2). \end{aligned}$$

Závěr: Bude-li $k > 1$, pak čísla x, y, z jsou soudělná. Při $k = 1$ jsou čísla x, y, z nesoudělná, jak bylo požadováno. Tedy platí, že je-li $d_1 = g_1 - g_2$ a $v_1 = w_1 - w_2$, pak dostáváme $p = v_1 \cdot d_1$. $\square$

Věta 2.5. *Přirozená čísla x, y, z jsou nesoudělná právě tehdy, když $p = v_1 \cdot d_1$.*

Důkaz. Pro násobky trojice přirozených čísel x, y, z , pro která platí

$$\gcd(x, y, z) = 1$$

zavedme: $X = k \cdot x$, $Y = k \cdot y$, $Z = k \cdot z$, kdy $\gcd(X, Y, Z) = k$.

1. Důkaz první části věty „jestliže $\gcd(x, y, z) = 1$, pak $p = v_1 \cdot d_1$ “ provedeme nepřímo. Předpokládejme, že $p = v_1 \cdot d_1 \cdot k$. Pak

$$p = v_1 \cdot d_1 \cdot k = v_1 \cdot (g_1 - g_2),$$

z toho

$$d_1 \cdot k = (g_1 - g_2) \text{ a } d_1 = \frac{1}{k} \cdot (g_1 - g_2).$$

Dále $v_1 \cdot d_1 \cdot k = d_1 \cdot (w_1 - w_2)$, pak

$$v_1 \cdot k = (w_1 - w_2) \text{ a } v_1 = \frac{1}{k} \cdot (w_1 - w_2).$$

Dostáváme

$$\begin{aligned} x = d_1 \cdot w_1 &= \frac{1}{k} \cdot (g_1 - g_2) \cdot w_1, & X = x \cdot k &= (g_1 - g_2) \cdot w_1, \\ y = v_1 \cdot g_1 &= \frac{1}{k} \cdot (w_1 - w_2) \cdot g_1, & Y = y \cdot k &= (w_1 - w_2) \cdot g_1, \end{aligned}$$

a tedy

$$\begin{aligned} z &= x + v = \frac{1}{k} ((g_1 - g_2) \cdot w_1 + (w_1 - w_2) \cdot g_2), \\ Z &= z \cdot k = g_1 \cdot w_1 + w_2 \cdot g_2. \end{aligned}$$

Závěr: Bude-li $k > 1$, pak jsou X, Y, Z čísla soudělná. Aby byla čísla X, Y, Z nesoudělná, musí být $k = 1$ a platí naše tvrzení: Jestliže $\gcd(x, y, z) = 1$, pak $p = v_1 \cdot d_1$.

2. Důkaz druhé části věty „jestliže $p = v_1 \cdot d_1$, pak $\gcd(x, y, z) = 1$ “, provedeme opět nepřímo. Jestliže $k = \gcd(X, Y, Z)$, pak dostáváme $P = v_1 \cdot d_1 \cdot k$. Protože platí:

$$\begin{aligned} X + Y &= Z + P, \\ k \cdot x + k \cdot y &= k \cdot z + P, \end{aligned}$$

Pak $P = k \cdot (x + y - z) = k \cdot p = k \cdot v_1 \cdot d_1$. Tedy platí: Jestliže $p = v_1 \cdot d_1$, pak $\gcd(x, y, z) = 1$.

Závěr: Přirozená čísla x, y, z jsou nesoudělná právě tehdy, jestliže $p = v_1 \cdot d_1$. $\square$

3. ZÁVĚR

Důkaz známé věty, posléze nazvané Velká Fermatova věta, nebyl v pozůstalosti Pierre de Fermata objeven, ale víme, že Fermat našel důkaz pro n rovno čtyřem. Pro jiná čísla důkaz údajně nehledal. Dovoluji si vyslovit myšlenku, že Pierre de Fermat objevil podobný jednoduchý důkaz, který předkládám. Z tohoto důkazu je patrné, že platí pro všechna lichá čísla větší nebo rovná číslu 3. Proto vidím jako logické, že Fermat musel najít důkaz pro n rovno čtyřem, aby jeho důkaz byl úplný.

REFERENCE

- [1] F. Veselý: *O dělitelnosti čísel celých*, Praha, 1966.
- [2] J. Polák: *Přehled středoškolské matematiky*, SPN Praha, 1972.
- [3] W. Sierpinski: *Co víme a co nevíme o prvočíslech*, SPN Praha, 1966.
- [4] J. Sedláček: *Co víme o přirozených číslech*, Praha, 1961.

Ladislav Kocanda, Na Pískách 69/II, 391 81 Veselí nad Lužnicí, Česká republika,
e-mail: ladislav.kocanda@gmail.com