



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Předmluva ke čtvrtému číslu časopisu Kvaternion

Vážení čtenáři, v pořadí již čtvrté číslo časopisu Kvaternion přináší pět zajímavých výsledků z různých oblastí matematiky. Hlavním cílem tohoto časopisu je seznámit čtenáře s moderními matematickými metodami pro řešení problémů různých oblastí praxe, s konkrétními aplikacemi matematiky a také s problematikou týkající se vzdělávání v matematice. I toto číslo jistě zaujme odborníky i studenty, kteří se zabývají různými oblastmi aplikované matematiky, a může tak být motivací pro další výzkumnou práci.

Příspěvky „Navier-Stokesovy rovnice: slabé řešení, jeho jednoznačnost a regularita“ (autor Milan Pokorný) a „Hledání Wieferichových prvočísel“ (autor Petr Ležák) vycházejí z referátů přednesených na 3. workshopu Aplikovaná matematika, Horní Bečva, 28. 1.–31. 1. 2013. Tento workshop se konal v rámci projektu AMath-Net – „Síť pro transfer znalostí v aplikované matematice“ a právě časopis Kvaternion je vhodnou platformou pro prezentaci výsledků tohoto projektu. Článek „Vysvětlení jedné důkazové metody Fermatovy hypotézy užitím teorie dělitelnosti“ (autor Ladislav Skula) je reakcí na článek „Jak mohl Fermat uvažovat“ (autor Ladislav Kocanda), který byl publikován v časopise Kvaternion **1/2013**. Úvodními příspěvky jsou pak odborné články „Elementární důkaz Levinovy-Mayovy věty“ (autoři Jan Čermák a Jiří Jánský) a „Variační třídy a zobrazení ve variační posloupnosti druhého řádu: Explicitní formule“ (autor Zbyněk Urban). Jsem přesvědčena, že i v tomto čísle najdou čtenáři řadu užitečných poznatků z matematiky a jejích aplikací a inspiraci pro vlastní odbornou práci.

Brno 2. 1. 2014

Ivana Horová
Ústav matematiky a statistiky
PřF MU Brno

ELEMENTÁRNÍ DŮKAZ LEVINOVY-MAYOVY VĚTY

JAN ČERMÁK A JIŘÍ JÁNSKÝ

Autoři tento příspěvek věnují prof. RNDr. Alexandru Ženíškovi, DrSc., bývalému řediteli Ústavu matematiky a Otci zakladateli oboru Matematické inženýrství na FSI VUT v Brně.

ABSTRAKT. Článek se zabývá problematikou lokalizace kořenů polynomu obecného stupně s obecnými reálnými koeficienty. Vedle vlastního teoretického přínosu je tato otázka důležitá především v souvislosti s analýzou stability některých diferenciálních a diferenčních rovnic. Hlavním výsledkem článku je originální důkazová metoda, formulující nutné a postačující podmínky pro to, aby všechny kořeny daného polynomu měly velikost menší než jedna. Tato metoda umožňuje odvodit dosud známé výsledky efektivněji, než je tomu v případě standardních důkazových postupů. Navíc je také aplikovatelná i na dosud nezkoumané typy polynomů.

1. VYMEZENÍ PROBLEMATIKY

Jednou z významných otázek tradičně diskutovaných v souvislosti s vyšetřováním polynomu k -tého stupně s reálnými koeficienty

$$P(\lambda) = \lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + \cdots + p_{k-1} \lambda + p_k, \quad p_i \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

je problém lokalizace jeho kořenů. Přesněji vyjádřeno, podstatou problému je formulace podmínek zaručujících, že všech k kořenů polynomu $P(\lambda)$ leží uvnitř předem vymezené části komplexní roviny. Tímto problémem se zabývala a dosud zabývá řada významných matematiků, a to především pro dva typy oblastí: levou polorovinu v komplexní rovině (tedy množinu všech komplexních čísel se zápornou reálnou částí) a jednotkový kruh v komplexní rovině (tedy množinu všech komplexních čísel, jejichž velikost je menší než jedna). Přesná znění odpovídajících problémů jsou pak tato:

Problém 1: Formulujte nutné a postačující podmínky pro parametry polynomu $P(\lambda)$ zaručující, že všechny jeho kořeny mají zápornou reálnou část.

Problém 2: Formulujte nutné a postačující podmínky pro parametry polynomu $P(\lambda)$ zaručující, že všechny jeho kořeny mají velikost menší než jedna.

Hlavním důvodem, proč jsou významné právě tyto dvě oblasti, je jejich souvislost s analýzou stability lineárních diferenciálních a diferenčních rovnic vyšších řádů. V další kapitole ukážeme, že otázka optimálních podmínek asymptotické

2010 MSC. Primární 12D10, 39A30.

Klíčová slova. Polynom, lokalizace kořenů, lineární diferenční rovnice, asymptotická stabilita.

Práce byla podporována projektem A-Math-Net – Síť pro transfer znalostí v aplikované matematice (CZ.1.07/2.4.00/17.0100).

stability pro tyto typy rovnic je ekvivalentní výše formulovaným problémům, kde polynom $P(\lambda)$ hraje roli odpovídajícího charakteristického polynomu.

Odpovědi na oba uvedené problémy jsou známy a spojené se jmény významných matematiků. Připomeneme je v jejich klasické podobě.

Věta 1.1 (Routh-Hurwitz). *Označme*

$$d(n) = \begin{pmatrix} p_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{2n-1} & p_{2n-2} & p_{2n-3} & p_{2n-4} & \cdots & \cdots & p_n \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots, k,$$

kde prvek p_m nahradíme nulou pro $m > k$. Pak všechny kořeny $P(\lambda)$ mají zápornou reálnou část právě tehdy, když

$$d(1) > 0, d(2) > 0, \dots, d(k) > 0.$$

Věta 1.2 (Schur-Cohn). *Označme*

$$D(n) = \det \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ B_n & A_n \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots, k-1,$$

kde

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ p_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ p_{n-1} & \cdots & p_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & p_k \\ \vdots & \ddots & \ddots & p_{k-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ p_k & p_{k-1} & \cdots & p_{k-n+1} \end{pmatrix}.$$

Pak všechny kořeny $P(\lambda)$ mají velikost menší než jedna právě tehdy, když

$$P(1) > 0, \quad (-1)^k P(-1) > 0 \quad (1.2)$$

a zároveň

$$D(1) > 0, D(2) > 0, \dots, D(k-1) > 0. \quad (1.3)$$

Poznámka 1.3. V literatuře je známo několik variant Schurova-Cohnova kritéria. Formulace Věty 1.2 vychází ze znění uvedeného v monografii [11], s přihlédnutím k náhradě podmínky $D(k) > 0$ nerovnostmi (1.2) (viz [7, str. 87]).

Mohlo by se tedy zdát, že oba problémy jsou úspěšně vyřešeny, a nemá proto smysl se jimi nadále zabývat. To je však pravda pouze částečná. Obě kritéria sice dávají odpověď na otázku, zda všechny kořeny daného polynomu $P(\lambda)$ náleží do vymezených oblastí, ovšem pouze pro polynomy s pevně zvoleným stupněm k a s konkrétně specifikovanými koeficienty p_i . Pokud bychom chtěli získat explicitní a efektivní podmínky na lokalizaci kořenů polynomu $P(\lambda)$ obecného stupně k a s obecnými koeficienty p_i , pak uvedená kritéria nejsou dostačující. Co je tím přesně míněno, vysvětlíme na následujících příkladech. Omezíme se v nich (jako i v celém dalším textu) pouze na Problém 2, tedy na otázku lokalizace všech kořenů $P(\lambda)$ uvnitř jednotkového kruhu.

Příklad 1.4. Uvažujme kvadratický polynom

$$P_2(\lambda) = \lambda^2 + p_1\lambda + p_2. \quad (1.4)$$

Z podmínek (1.2) a (1.3) Schurova-Cohnova kritéria vyplývá, že oba kořeny $P_2(\lambda)$ mají velikost menší než jedna právě tehdy, když platí

$$\begin{aligned} P(1) &= 1 + p_1 + p_2 > 0, & (-1)^2 P(-1) &= 1 - p_1 + p_2 > 0, \\ D(1) &= \det \begin{pmatrix} 1 & p_2 \\ p_2 & 1 \end{pmatrix} = 1 - p_2^2 > 0. \end{aligned}$$

Můžeme tedy shrnout, že oba kořeny kvadratického polynomu $P_2(\lambda)$ mají velikost menší než jedna právě tehdy, když

$$|p_1| < 1 + p_2 < 2. \quad (1.5)$$

Příklad 1.5. Uvažujme dále kubický polynom

$$P_3(\lambda) = \lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3.$$

V tomto případě Schurovo-Cohnovo kritérium implikuje tyto podmínky:

$$P(1) = 1 + p_1 + p_2 + p_3 > 0, \quad (-1)^3 P(-1) = 1 - p_1 + p_2 - p_3 > 0$$

a

$$\begin{aligned} D(1) &= \det \begin{pmatrix} 1 & p_3 \\ p_3 & 1 \end{pmatrix} = 1 - p_3^2 > 0, \\ D(2) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p_3 \\ p_1 & 1 & p_3 & p_2 \\ 0 & p_3 & 1 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & 1 \end{pmatrix} = (1 - p_3^2)^2 - (p_2 - p_1 p_3)^2 > 0. \end{aligned}$$

Dostáváme tak nerovnosti

$$|p_1 + p_3| < 1 + p_2, \quad |p_3| < 1, \quad |p_2 - p_1 p_3| < 1 - p_3^2.$$

Tedy kubický polynom $P_3(\lambda)$ má všechny tři kořeny o velikosti menší než jedna právě tehdy, když

$$|p_1 + p_3| < 1 + p_2, \quad |p_2 - p_1 p_3| < 1 - p_3^2. \quad (1.6)$$

Již v těchto jednoduchých speciálních případech si lze povšimnout, jak silný aparát v sobě obsahuje zmíněné kritérium. V obou případech totiž existují známá vyjádření kořenů daného polynomu pomocí jeho koeficientů. Mohlo by se tedy zdát, že jednodušší bude získat podmínky (1.5) a (1.6) přímo ze vztahů pro vyjádření kořenů. Přímým výpočtem se však lze přesvědčit o tom, že již v případě kvadratického polynomu vyžaduje odvození podmínek (1.5) ze vzorce pro kořeny $\lambda_{1,2}$ jisté početní úsilí. V případě kubického polynomu je pak početní výhodnost odvození podmínek (1.6) ze Schurova-Cohnova kritéria zcela markantní. Není totiž těžké si domyslet, jaké úsilí by vyžadovalo odvození těchto podmínek přímo z Cardanových vzorců pro kořeny kubického polynomu.

Oba případy ale současně ilustrují, že takto explicitně pojatý tvar podmínek se začíná s rostoucím stupněm daného polynomu komplikovat. Např. pro polynom

$$P_4(\lambda) = \lambda^4 + p_1\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_3\lambda + p_4$$

lze výše popsaným způsobem ze Schurova-Cohnova kritéria odvodit, že $P_4(\lambda)$ má všechny své kořeny o velikosti menší než jedna právě tehdy, když

$$|p_4| < 1, \quad |p_1 + p_3| < 1 + p_2 + p_4$$

a

$$|p_2(1 - p_4) + p_4(1 - p_4^2) + p_1(p_1p_4 - p_3)| < p_2p_4(1 - p_4) + 1 - p_4^2 + p_3(p_1p_4 - p_3).$$

Je tedy evidentní, že Schurovo-Cohnovo kritérium nemůže dát pro polynom $P(\lambda)$ s obecným stupněm k podobné explicitní podmínky jako pro $P_2(\lambda)$ či $P_3(\lambda)$. Bylo tedy třeba hledat jiné metody, jak zformulovat potřebné podmínky, a to zejména v souvislosti s jistými speciálními polynomy obecného k -tého stupně, které se začaly v literatuře objevovat v souvislosti s některými diskrétními problémy. Mezi nejjednodušší polynomy tohoto typu patří

$$Q(\lambda) = \lambda^k - \lambda^{k-1} + q, \quad q \in \mathbb{R}, \quad (1.7)$$

který se poprvé objevil v článku [10] jako charakteristický polynom pro speciální lineární diferenční rovnici modelující jistý populační problém. V tomto článku byla současně zformulována jednoduchá nutná a postačující podmínka pro to, aby všech k kořenů tohoto polynomu mělo velikost menší než jedna.

Věta 1.6 (Levin-May). *Všechny kořeny polynomu $Q(\lambda)$ mají velikost menší než jedna právě tehdy, když platí*

$$0 < q < 2 \cos \frac{(k-1)\pi}{2k-1}. \quad (1.8)$$

Poznámka 1.7. Podmínka (1.8) je zcela explicitní a vyplývá z ní přímá závislost koeficientu q na stupni k daného polynomu. Tuto závislost je přitom možné chápat i v opačném smyslu, neboť ekvivalentní vyjádření podmínky (1.8) je

$$0 < q < 2, \quad k < \frac{\arccos(-q/2)}{2 \arcsin(q/2)}.$$

Hlavním cílem tohoto článku je podat jednoduchý důkaz této věty, který by umožnil i její rozšíření na obecnější typy polynomů. Námi dále navržená důkazová metoda využívá, kromě elementárních znalostí lineární algebry, také základy teorie diferenčních rovnic. Proto jsou v kapitole druhé uvedeny některé základní poznatky o těchto rovnicích, se zaměřením na ty partie, které budeme v důkazu Věty 1.6 potřebovat. Současně nám připomenutí některých základů teorie lineárních diferenčních rovnic umožní alespoň naznačit motivaci formulace Problému 2 a speciálně i Věty 1.6. Kapitola třetí je věnována navrženému alternativnímu důkazu Věty 1.6, zejména popisu jeho principu a souvisejícím výpočtům. V kapitole čtvrté budou uvedeny a komentovány některé výsledky pro obecnější typy polynomů, a to jak výsledky známé, tak i výsledky originální, vyplývající z prezentované důkazové metody.

2. NĚKOLIK POZNÁMEK O DIFERENČNÍCH ROVNICÍCH

Hlavní motivací, proč se zabývat Problémem 2, je jeho úzká souvislost s kvalitativní analýzou lineární diferenční rovnice k -tého řádu

$$y(n+k) + p_1y(n+k-1) + \cdots + p_{k-1}y(n+1) + p_ky(n) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.1)$$

kde $p_1, \dots, p_k$ jsou reálné konstanty, přičemž $p_k \neq 0$. Připomeňme proto nejprve některé základní pojmy a vlastnosti související s touto rovnicí.

Řešením rovnice (2.1) rozumíme každou posloupnost $\{y(n)\}$, $n = 0, 1, \dots$, která této rovnici po dosazení vyhovuje. K jednoznačné identifikaci jednotlivých řešení je třeba předepsat k počátečních hodnot $y(0), y(1), \dots, y(k-1)$. Všechny následující hodnoty $y(k), y(k+1), \dots$ pak obdržíme z rovnice (2.1) postupným dosazením $n = 0, 1, \dots$. Snadno nahlédneme, že množina všech řešení rovnice (2.1) tvoří vektorový prostor dimenze k . Proto k popisu všech řešení této rovnice stačí nalézt bázi tohoto prostoru, tedy k lineárně nezávislých řešení.

Způsob, jak tato řešení určit, je inspirován úvahami prováděnými při řešení odpovídajících rovnic diferenciálních. Hledejme proto řešení rovnice (2.1) ve tvaru $y(n) = \lambda^n$, kde λ je (obecně komplexní) číslo, které je třeba určit. Dosazením do (2.1) dostáváme *charakteristickou rovnici*

$$\lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + \dots + p_{k-1} \lambda + p_k = 0,$$

jejíž levá strana je právě charakteristický polynom $P(\lambda)$ - viz (1.1). Konstrukci potřebných k lineárně nezávislých řešení pomocí kořenů $P(\lambda)$ naznačíme pro $k = 2$.

V tomto případě má příslušná diferenční rovnice

$$y(n+2) + p_1 y(n+1) + p_2 y(n) = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.2)$$

charakteristický polynom (1.4) s dvojicí kořenů λ_1, λ_2 . Jsou-li tyto kořeny reálné a různé, pak bázi prostoru řešení rovnice (2.2) tvoří funkce $y_1(n) = \lambda_1^n$ a $y_2(n) = \lambda_2^n$. Má-li polynom (1.4) dvojnásobný reálný kořen λ , pak odpovídající báze prostoru řešení rovnice (2.2) je tvořena funkcemi $y_1(n) = \lambda^n$ a $y_2(n) = n\lambda^n$. Případ, kdy λ_1, λ_2 je dvojice komplexně sdružených kořenů $\alpha \pm i\beta$, vyžaduje jisté dodatečné početní obraty, jejichž cílem je převést nereálná řešení $(\alpha \pm i\beta)^n$ na dvojici reálných řešení. Komplexně sdružené kořeny je zapotřebí nejprve vyjádřit v goniometrickém tvaru

$$\lambda_{1,2} = r(\cos(\omega) \pm i \sin(\omega)),$$

kde $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ je velikost daného komplexního čísla a $0 < \omega < \pi$ vyhovuje vztahům

$$\cos(\omega) = \alpha/r, \quad \sin(\omega) = \beta/r.$$

Bázi prostoru řešení určíme v principu analogicky jako v předcházejících případech. Užitím Moivreovy věty dostáváme báze řešení

$$\tilde{y}_1(n) = r^n(\cos(\omega n) + i \sin(\omega n)), \quad \tilde{y}_2(n) = r^n(\cos(\omega n) - i \sin(\omega n)).$$

Vhodnou lineární kombinací těchto nereálných řešení pak zajistíme, že báze prostoru řešení rovnice (2.2) je tvořena reálnými funkcemi

$$y_1(n) = r^n \cos(\omega n), \quad y_2(n) = r^n \sin(\omega n). \quad (2.3)$$

Jako ilustraci výše uvedeného postupu zmíníme následující klasický problém.

Příklad 2.1. Jednou z nejznámějších úloh souvisejících s diferenční rovnicí typu (2.2) je nepochybně konstrukce tzv. Fibonacciho posloupnosti

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

Většina čtenářů jistě zná princip této posloupnosti (každý člen, druhým počínaje, je součtem dvou předcházejících), stejně jako její klasickou motivaci (modelování populace králíků za jistých specifických podmínek). Označíme-li $F(n)$ jako n -tý člen této posloupnosti, pak vzniká otázka, zda lze nalézt nějaké explicitní (přímé) vyjádření pro $F(n)$ s obecným n . Ke kladnému zodpovězení této otázky si stačí uvědomit, že musí být splněn rekurentní vztah

$$F(n+2) = F(n+1) + F(n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.4)$$

přičemž nultý a první člen této posloupnosti je předepsán jako

$$F(0) = 0, \quad F(1) = 1. \quad (2.5)$$

Jedná se tedy o diferenční rovnici typu (2.2), jejíž charakteristická rovnice

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

má dvojici reálných různých kořenů

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Lineární kombinací příslušných bázeových řešení $y_1(n) = \lambda_1^n$, $y_2(n) = \lambda_2^n$ pak dostáváme obecné řešení rovnice (2.4) ve tvaru

$$F(n) = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.6)$$

Počáteční podmínky (2.5) dosazené do (2.6) specifikují obecné konstanty C_1, C_2 jako $C_1 = 1/\sqrt{5} = -C_2$, čímž dostáváme řešení problému (2.4), (2.5), neboli explicitní vyjádření n -tého členu Fibonacciho posloupnosti ve tvaru

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right], \quad n = 0, 1, \dots$$

O této fascinující posloupnosti by se dalo uvést mnoho dalších zajímavostí, my se však vrátíme k původnímu směru úvah. Především poznamenejme, že rozšíření výše uvedené konstrukce bázeových řešení na případ obecného k je přímým zobecněním postupu popsaného pro $k = 2$ (a lze ho nalézt např. v [6]). Speciálně pak odtud vyplývá následující úvaha.

Jednou z nejdůležitějších vlastností diferenčních (a obecně dynamických) rovnic je jejich asymptotická stabilita. Zhruba vyjádřeno, tato vlastnost popisuje schopnost dané rovnice eliminovat případné poruchy vstupních dat. Přesnou definici asymptotické stability v obecném (nelineárním) případě uvádět nebudeme (její znění opět viz [6]). Pro případ lineární diferenční rovnice (2.1) lze tuto vlastnost popsat takto:

Definice 2.2. Diferenční rovnici (2.1) nazveme asymptoticky stabilní, jestliže každé její řešení $y(n)$ konverguje k nule při n rostoucím nade všechny meze.

Jestliže si znovu promyslíme princip konstrukce báze prostoru řešení rovnice (2.1), pak snadno dospějeme k tomuto závěru:

Věta 2.3. *Lineární diferenční rovnice (2.1) je asymptoticky stabilní právě tehdy, když všechny kořeny jejího charakteristického polynomu $P(\lambda)$ mají velikost menší než jedna.*

Tuto větu lze považovat za diskrétní analogii známého kritéria asymptotické stability pro lineární diferenciální rovnici

$$x^{(k)}(t) + p_1 x^{(k-1)}(t) + \cdots + p_{k-1} x'(t) + p_k x(t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (2.7)$$

s reálnými koeficienty $p_1, \dots, p_k$, které připomeneme v následujícím znění.

Věta 2.4. *Rovnice (2.7) je asymptoticky stabilní (tedy každé její řešení $x(t)$ konverguje k nule při t rostoucím nade všechny meze) právě tehdy, když všechny kořeny jejího charakteristického polynomu $P(\lambda)$ mají zápornou reálnou část.*

Jak již bylo zmíněno dříve, předcházející dvě tvrzení jsou hlavním důvodem, proč bylo úsilí řady matematiků věnováno právě řešení Problému 1 a 2.

Z příkladu diferenční rovnice (2.4) a z vyjádření jejího obecného řešení (2.6) je názorně vidět, proč tato rovnice nemůže být asymptoticky stabilní. Zatímco kořen λ_2 příslušného charakteristického polynomu má velikost menší než jedna, kořen λ_1 tuto vlastnost nemá. Pak ve vyjádření (2.6) tedy dominuje právě výraz λ_1^n , který způsobuje neohraničenost řešení.

Tento závěr je samozřejmě zcela přirozený již vzhledem k charakteru Fibonacciho úlohy. Speciálně z hlediska modelování populace králíků zde totiž chybí jakýkoliv regulující prvek (přirození nepřátelé, nedostatek potravy, či samotná přirozená úmrtnost). U složitějších modelů, kde se s těmito faktory počítá, nabývá otázka asymptotické stability velkého významu. A to i v případech nelineárních diskretních modelů, kde se různé typy rovnovážných stavů klasifikují právě pomocí asymptotické stability příslušných linearizovaných modelů. To byla také motivace článku [10] při vyšetřování asymptotické stability lineární diferenční rovnice

$$y(n+k) - y(n+k-1) + qy(n) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.8)$$

získané linearizací rovnice

$$y(n+k) - y(n+k-1) + f(y(n)) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.9)$$

která modeluje, při vhodné volbě funkce f , jistý populační problém. Z Věty 2.3 pak vyplývá, že v ekvivalentním vyjádření stačí posoudit podmínky zaručující, že charakteristický polynom $Q(\lambda)$ pro rovnici (2.8) má všechny své kořeny o velikosti menší než jedna. Formulace této podmínky, tedy vztah (1.8), byl hlavní výsledek zmíněného článku. V následující kapitole podáme jeho nový důkaz.

3. DŮKAZ LEVINOVY-MAYOVY VĚTY

Standardní důkaz Levinovy-Mayovy věty je založen na analytické diskusi kořenů polynomu $Q(\lambda)$ v závislosti na měnícím se koeficientu q . Kromě originálního článku [10] lze nalézt didakticky zdařilou formu tohoto důkazu také v monografii [6, str. 491-497], kde tvoří obsah Appendixu E.

Alternativní důkaz, který předložíme v další části textu, jde proti převažujícímu názoru o nevhodnosti Schurova-Cohnova kritéria při lokalizaci kořenů polynomu $P(\lambda)$ obecného stupně k . Podle tohoto názoru zmíněné kritérium není vhodné pro

formulaci explicitních podmínek typu (1.8), a to ani v případě formálně jednoduchých polynomů obecného stupně k (jako je např. polynom $Q(\lambda)$). V dalším ukážeme opak, tedy že Schurova-Cohnova kritéria nejen využít lze, ale navíc se tím celý důkazový proces výrazně zjednoduší.

Hlavní myšlenka naší metody má základní obrysy, možná poněkud překvapivě, společně se způsobem, jakým byla vyřešena Fibonacciho úloha. Připomeňme, že klíčem k nalezení požadovaného explicitního vyjádření hodnoty $F(n)$ pro obecné n bylo sestavení rekurentního vztahu (2.4), doplněného o podmínky (2.5). Rekurence (2.4) je přitom lineární diferenční rovnicí druhého řádu s konstantními koeficienty, jejíž explicitní řešení bylo v kapitole druhé popsáno. V případě Schurova-Cohnova kritéria tedy snadno nahlédneme, že pokud bychom znali explicitní vyjádření determinantů $D(n)$ pro obecné n , pak posouzení podmínky (1.3) tohoto kritéria by mohlo být snadné (ověření podmínek (1.2) je přitom evidentně triviální). Položme si proto tuto otázku: Je možné nalézt rekurenci pro $D(n)$, která by, při doplnění příslušných počátečních podmínek, explicitní vyjádření tvaru $D(n)$ umožnila?

Uvědomíme-li si početní význam jednotlivých symbolů $D(n)$, $D(n+1)$, $\dots$, pak nalezení potřebné rekurence znamená nalezení vhodné relace mezi jednotlivými determinanty.

Aplikujme tedy nejprve Schurovo-Cohnovo kritérium na polynom (1.7). Pak pomocné matice A_n, B_n dostáváme ve tvaru

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & q \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ q & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Prvním cílem při důkazu Levinovy-Mayovy věty bude proto nalezení vhodných rekurentních vztahů pro odpovídající determinanty $D(n)$. Za tímto účelem nyní provedeme následující sloupcové úpravy v determinantu $D(n+2)$:

První sloupec příslušné matice vynásobíme výrazem $-q$ a přičteme k poslednímu sloupci. Poté předposlední sloupec vynásobíme číslem -1 a opět přičteme k poslednímu sloupci. Odtud obdržíme vyjádření

$$D(n+2) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & \boxed{A_{n+1}} & \boxed{B_{n+1}} & & \vdots \\ 0 & \boxed{A_{n+1}} & \boxed{B_{n+1}} & & \vdots \\ \vdots & \boxed{B_{n+1}} & \boxed{A_{n+1}} & & \vdots \\ \vdots & \boxed{B_{n+1}} & \boxed{A_{n+1}} & & 0 \\ 0 & & & & -1 \\ q & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2-q^2 \end{pmatrix}.$$

Nyní využitím Laplaceova rozvoje podle posledního sloupce obdržíme relaci

$$D(n+2) = (2-q^2)D(n+1) - D(n).$$

Hledané determinanty tedy lze vyjádřit jako řešení lineární diferenční rovnice

$$D(n+2) - (2 - q^2)D(n+1) + D(n) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, k-3, \quad (3.1)$$

doplněné o počáteční podmínky ve tvaru

$$D(0) = 1, \quad D(1) = 1 - q^2. \quad (3.2)$$

Vztahy (3.1), (3.2) tedy představují analogii vztahů (2.4), (2.5) z Fibonacciho úlohy. Dalším krokem je proto vyřešení problému (3.1), (3.2). Proces jeho řešení budeme provádět za předpokladu $0 < q < 2$. Podmínky (1.2), (1.3) totiž speciálně implikují nerovnosti $0 < q < 2$ pro k liché a $0 < q < 1$ pro k sudé.

Protože řešení problému (3.1), (3.2) představuje explicitní vyjádření determinantů $D(n)$ z Schurova-Cohnova kritéria, uvedeme ho v samostatném tvrzení.

Lemma 3.1. *Nechť $0 < q < 2$. Potom*

$$D(n) = \cos(\omega n) - \frac{q}{(4 - q^2)^{1/2}} \sin(\omega n), \quad n = 0, 1, \dots, k-1, \quad (3.3)$$

kde

$$\omega = \arccos \frac{2 - q^2}{2}. \quad (3.4)$$

Důkaz: Rekurence (3.1) je lineární diferenční rovnicí druhého řádu. Odpovídající charakteristická rovnice

$$\mu^2 - (2 - q^2)\mu + 1 = 0$$

má kořeny

$$\mu_{1,2} = \frac{2 - q^2}{2} \pm i \frac{q(4 - q^2)^{1/2}}{2} = \cos(\omega) \pm i \sin(\omega),$$

kde ω je dáno vztahem (3.4). Obecné řešení rovnice (3.1) je tedy podle (2.3) tvaru

$$D(n) = C_1 \cos(\omega n) + C_2 \sin(\omega n). \quad (3.5)$$

Obecné konstanty C_1, C_2 určíme dosazením počátečních podmínek (3.2) do vztahu (3.5). Odtud dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} 1 &= C_1, \\ 1 - q^2 &= C_1 \cos(\omega) + C_2 \sin(\omega), \end{aligned}$$

jejímž vyřešením a dosazením do (3.5) obdržíme vyjádření (3.3). $\square$

Nyní se vrátíme zpět k diskusi podmínky (1.3). Po dosazení (3.3) tato podmínka nabývá tvar

$$\cos(\omega n) - \frac{q}{(4 - q^2)^{1/2}} \sin(\omega n) > 0, \quad n = 0, 1, \dots, k-1. \quad (3.6)$$

Vztah (3.6) platí právě tehdy, když

$$\cos(\omega(k-1)) - \frac{q}{(4 - q^2)^{1/2}} \sin(\omega(k-1)) > 0, \quad 0 \leq (k-1)\omega < \frac{\pi}{2},$$

tedy

$$\omega(k-1) < \operatorname{arccotg} \frac{q}{(4 - q^2)^{1/2}}.$$

Odtud s využitím vztahů

$$\omega = \arccos \frac{2 - q^2}{2} = \pi - 2 \arccos \frac{q}{2}, \quad \operatorname{arccotg} \frac{q}{(4 - q^2)^{1/2}} = \arccos \frac{q}{2}$$

dostáváme podmínku (1.8). Tím je Levinova-Mayova věta dokázána.

4. ZÁVĚREČNÉ KOMENTÁŘE

Důkazová metoda uvedená v předcházející kapitole lze využít i v širších souvislostech. Jedno z možných rozšíření vychází ze skutečnosti, že Schurovo-Cohnovo kritérium lze obecněji formulovat i pro problém, kdy hledáme podmínky zaručující, aby polynom $P(\lambda)$ měl právě m kořenů (kde $0 \leq m \leq k$) ležících uvnitř jednotkového kruhu v komplexní rovině, a zbývajících $k - m$ kořenů ležících vně tohoto kruhu. Tato varianta Schurova-Cohnova kritéria se využila v článku [2], jehož cílem bylo popsat potřebné explicitní podmínky na parametry k a q polynomu $Q(\lambda)$, a podat tedy úplnou charakterizaci všech možných rozložení jeho k kořenů vzhledem k jednotkovému kruhu v komplexní rovině. Levinovo-Mayovo kritérium pak odtud vyplývá jako speciální případ příslušného tvrzení.

Významnější a zajímavější zobecnění této důkazové metody přináší v případě, uvažujeme-li obecnější polynomy k -tého stupně, než je $Q(\lambda)$. Jestliže nahradíme ve vyjádření $Q(\lambda)$ koeficient mínus jedna obecným parametrem p , pak dostáváme polynom

$$\tilde{Q}(\lambda) = \lambda^k + p\lambda^{k-1} + q, \quad p, q \in \mathbb{R}.$$

Za příslušné zobecnění Levinovy-Mayovy podmínky (1.8) pro tento polynom je obvykle považováno následující tvrzení, poprvé publikované v článku [9].

Věta 4.1. *Nechť $p \neq 0$ a q jsou reálná čísla a $k \geq 2$. Pak všechny kořeny $\tilde{Q}(\lambda)$ mají velikost menší než jedna právě tehdy, když $|p| < k/(k-1)$ a*

$$\begin{aligned} |p| - 1 < q < (p^2 + 1 - 2|p| \cos \phi)^{1/2} & \quad \text{pro } k \text{ sudá,} \\ |p + q| < 1 \quad \text{a} \quad |q| < (p^2 + 1 - 2|p| \cos \phi)^{1/2} & \quad \text{pro } k \text{ lichá,} \end{aligned}$$

kde $\phi \in (0, \pi/k)$ je kořen rovnice $\sin[(k-1)x]/\sin(kx) = 1/|p|$.

Z uvedeného vyjádření je patrné, že toto kritérium sice dává systém nutných a postačujících podmínek pro požadovanou vlastnost kořenů polynomu $\tilde{Q}(\lambda)$, avšak tento systém podmínek není zcela explicitní. Zejména si povšimněme, že vyžaduje řešení jisté nelineární rovnice, což představuje překážku pro jeho efektivní využití.

Formálně velmi podobný systém podmínek byl odvozen v článku [5] i pro případ polynomu $\lambda^k + p\lambda + q$. Přímým zobecněním obou těchto typů je pak polynom

$$\widehat{Q}(\lambda) = \lambda^k + p\lambda^\ell + q, \quad p, q \in \mathbb{R}, \quad k, \ell \in \mathbb{Z}^+, \quad k > \ell,$$

pro který byly požadované podmínky, lokalizující všechny kořeny $\widehat{Q}(\lambda)$ uvnitř jednotkového kruhu, formulovány v článku [4]. Zde uvedený systém podmínek pro danou lokalizaci kořenů je zobecněním Věty 4.1 a je již poměrně komplikovaný (lze ho nalézt rovněž v monografii [6, str. 250-251]). Alternativní, nikoliv však explicitní systémy podmínek byly později odvozeny v článcích [3] a [8].

Velká přednost metody popsané v předcházející kapitole spočívá v tom, že její aplikací (v kombinaci s dalšími důkazovými technikami) je možné získat podmínky

explicitní, a to pro všechny výše zmíněné polynomy. Příslušné tvrzení zformulujeme bez důkazu pro případ nejobecnějšího z nich, tedy polynomu $\widehat{Q}(\lambda)$. Ten je zajímavý především tím, že jde o obecný tříčlenný polynom (pokud u koeficientu q vystupuje člen λ^m , $m \in \mathbb{Z}^+$, $m < \ell$, pak jeho vytknutím převedeme triviálně tento případ na tvar $\widehat{Q}(\lambda)$). Zdůrazněme také ještě, že následující tvrzení dosud nebylo jinde publikováno.

Věta 4.2. *Nechť p, q jsou reálná čísla a necht' k, ℓ jsou nesoudělná přirozená čísla s vlastností $k - \ell \geq 2$.*

- (i) *Nechť $(-p)^k(-q)^{k-\ell} \geq 0$. Pak všechny kořeny $\widehat{Q}(\lambda)$ mají velikost menší než jedna právě tehdy, když*

$$|p| + |q| < 1.$$

- (ii) *Nechť $(-p)^k(-q)^{k-\ell} < 0$. Pak všechny kořeny $\widehat{Q}(\lambda)$ mají velikost menší než jedna právě tehdy, když*

$$|p| + |q| \leq 1,$$

nebo

$$p^2 + q^2 < 1 < |p| + |q|, \quad \ell \arccos \frac{1 + p^2 - q^2}{2|p|} + (k - \ell) \arccos \frac{1 - p^2 - q^2}{2|pq|} < \pi.$$

Poznámka 4.3. Z Věty 4.2 vyplývá několik zajímavých skutečností. Především si všimněme, že typ podmínek závisí na znaménku koeficientů p, q a paritě mocnin k, ℓ . Bez ohledu na tyto hodnoty, všechny kořeny polynomu $\widehat{Q}(\lambda)$ mají velikost menší než jedna, jestliže jeho koeficienty p, q leží uvnitř čtverce $|p| + |q| < 1$ (přitom na hodnoty mocnin k, ℓ není kladeno žádné další omezení). V případě (i) je tato podmínka současně i podmínkou nutnou. Předpokládáme-li však platnost (ii), vyšetřovaná kořenová vlastnost platí nejen na hranici, ale dokonce i vně tohoto čtverce; v každém případě však p, q musí ležet uvnitř kruhu, který je tomuto čtverci opsán. V tomto případě současně nastupuje také omezení na mocniny k, ℓ obsažené v $\widehat{Q}(\lambda)$. I toto omezení má zajímavou interpretaci, jestliže si uvědomíme rozsah funkčních hodnot příslušných cyklometrických funkcí obsažených v tomto omezení.

Případ $k - \ell = 1$ nebudeme blíže komentovat, od výše diskutovaného se liší pouze v několika detailech.

Je třeba zdůraznit, že aplikace výše popsané důkazové metody se stává výrazně početně náročnější, než byla při odvození Levinovy-Mayovy věty, a to již i ve zmíněných speciálních případech polynomu $\widehat{Q}(\lambda)$. Ačkoliv hlavní myšlenka této metody zůstává stejná, její případná rozšíření na další typy polynomů (speciální čtyřčlenný polynom byl diskutován v článku [1]) bude nepochybně vyžadovat další inspirující nápady. Hlavním problémem se přitom ukazuje být sestavení potřebné rekurence mezi determinanty $D(n)$ z Schurova-Cohnova kritéria, tedy nalezení rozšířené analogie vztahů (3.1), (3.2). Tento problém se týká například polynomu $\lambda^k - \lambda^{k-1} + p\lambda^\ell + q$, který tvarově zobecňuje $Q(\lambda)$ i $\widehat{Q}(\lambda)$. Formulace explicitních nutných a postačujících podmínek, které by zaručily, že všechny kořeny tohoto polynomu mají velikost menší než jedna, je známý otevřený problém. K odpovědi

na tento problém by mohla napomoci i metoda, která byla popsána v třetí kapitole tohoto článku.

Poznámka 4.4. Pokud bychom pro polynom $\hat{Q}(\lambda)$ řešili Problém 1, tedy otázku podmínek zaručujících, že všechny jeho kořeny mají zápornou reálnou část, pak na rozdíl od výše komentovaného Problému 2 je tato otázka v případě $\hat{Q}(\lambda)$ téměř triviální. Přímou z Routhova-Hurwitzova kritéria totiž jednoduše plynou podmínky $k = 2$, $\ell = 1$, $p, q > 0$.

Na závěr poznamenejme, že uvedené výsledky byly dosaženy v rámci výzkumu, který na Ústavu matematiky FSI VUT probíhá několik posledních let. Kromě autorů tohoto příspěvku se na některých dosažených výsledcích podílel také Petr Tomášek, který je, podobně jako jeden z autorů tohoto textu, absolventem studijního oboru Matematické inženýrství na FSI VUT. Lze tedy říci, že s výrazným přispěním absolventů tohoto oboru, jejich nápadů a postřehů, se podařilo objevit nové výsledky v oblasti, která je považována za klasickou a jejíž výzkum je spojen s řadou významných matematiků minulosti a současnosti.

Případné poznámky, náměty či dotazy k výše uvedené problematice jsou vítány a je možné se s nimi obrátit na kteréhokoliv z autorů tohoto textu.

REFERENCE

- [1] J. Čermák, J. Jánský, P. Kunderát: *On necessary and sufficient conditions for the asymptotic stability of higher order linear difference equations*, J. Difference Equ. Appl. **18** (2012), No. 11, 1781–1800.
- [2] J. Čermák, J. Jánský: *On a generalization of the Levin-May Theorem*, Carpathian J. Math. **30** (2014), No. 1, 51–58.
- [3] S. S. Cheng, S. Y. Huang: *Alternate derivations of the stability region of a difference equation with two delays*, Appl. Math. E-Notes **9** (2009), 225–253.
- [4] F. M. Dannan: *The asymptotic stability of $x(n+k) + ax(n) + bx(n-l) = 0$* , J. Difference Equ. Appl. **10** (2004), No. 6, 589–599.
- [5] F. M. Dannan, S. Elaydi: *Asymptotic stability of linear difference equation of advanced type*, J. Comput. Anal. Appl. **6** (2004), No. 2, 423–428.
- [6] S. Elaydi: *An Introduction to Difference Equations*, 3rd ed., Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 2005.
- [7] E. I. Jury: *Theory and Application of The Z-Transform Methods*, Wiley, New York, 1964.
- [8] M. M. Kipnis, R. M. Nigmatullin: *Stability of the trinomial linear difference equations with two delays*, Autom. Remote Control **65** (2004), No. 11, 1710–1723.
- [9] S. A. Kuruklis: *The asymptotic stability of $x_{n+1} - ax_n + bx_{n-k} = 0$* , J. Math. Anal. Appl. **188** (1994), 719–731.
- [10] S. A. Levin, R. May: *A note on difference-delay equations*, Theor. Popul. Biol. **9** (1976), 178–187.
- [11] M. Marden: *Geometry of Polynomials*, Mathematical Surveys and Monographs, No. 3, Providence, 1966.

Jan Čermák, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: cermak.j@fme.vutbr.cz

Jiří Jánský, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: jiri.jansky@unob.cz

VARIAČNÍ TŘÍDY A ZOBRAZENÍ VE VARIAČNÍ POSLOUPNOSTI DRUHÉHO ŘÁDU: EXPLICITNÍ FORMULE

ZBYNĚK URBAN

ABSTRAKT. Třídy diferenciálních forem, reprezentující základní variační objekty (Lagrangian, Eulerova-Lagrangeova forma, Helmholtzova forma), a variační morfismy (Eulero-Lagrangeovo zobrazení, Helmholtzovo zobrazení) jsou studovány jako objekty variační posloupnosti ve fibrované mechanice. Jsou odvozeny explicitní formule pro variační třídy a morfismy ve variační posloupnosti druhého řádu v kanonických souřadnicích, umožňující přímé použití v lokálním a globálním inverzním variačním problému.

1. ÚVOD

Koncept variační posloupnosti, kterou v této práci uvažujeme na fibrovaných varietách s 1-rozměrnou bází („fibrovaná mechanika“), zavedl D. Krupka [1] za účelem studia lokálních a globálních charakteristik *Eulerova-Lagrangeova zobrazení* variačního počtu na *konečných* jetových prodlouženích fibrovaných variet, s návazností na myšlenku P. Dedeckera o konstrukci podobného komplexu, jakým je De Rhamův komplex diferenciálních forem, v němž by jedním z morfismů bylo Eulerovo-Lagrangeovo zobrazení. Základními problémy, které jsou studovány v teorii variační posloupnosti, jsou lokální a globální inverzní problém variačního počtu a s ním související struktura Helmholtzových podmínek variačnosti. Je-li zadán systém funkcí (resp. diferenciálních rovnic), pak řešení inverzního variačního problému spočívá v nalezení podmínek, za jakých tento systém splývá s Eulerovými-Lagrangeovými výrazy (resp. rovnicemi) Lagrangeovy funkce, lokálně či globálně definované, kterou hledáme.

Za stejným účelem vznikla teorie variačního bikomplexu různých autorů (Vinogradov, Dedecker a Tulczyjew, Takens, Anderson a Duchamp, Saunders, Olver, aj.) v různých verzích na *nekonečných* jetových prodlouženích fibrovaných variet. Částečné srovnání těchto přístupů lze nalézt v článcích Krupka [4] a Vitolo [13].

Variační posloupnost je konstruována jako faktorová posloupnost De Rhamovy posloupnosti podle její exaktní podposloupnosti *kontaktních* forem. Hlavní význam této posloupnosti spočívá v tom, že její morfismy, mající význam variačních zobrazení (Eulero-Lagrangeovo zobrazení, Helmholtzovo zobrazení, atd.), lze zcela

2010 MSC. Primární 49Q99, 58E30, 58A20; Sekundární 70G75.

Klíčová slova. Variační posloupnost, Lagrangian, Eulerovy-Lagrangeovy výrazy, Helmholtzovy podmínky, kontaktní diferenciální forma, jet, fibrovaná varieta.

Práce byla podpořena grantem č. CZ.1.07/2.3.00/30.0058 MŠMT ČR na Univerzitě Pardubice a projektem A-Math-Net – Síť pro transfer znalostí v aplikované matematice (CZ.1.07/2.4.00/17.0100).

popsat bez ohledu na variační funkcionály, a lze navíc charakterizovat jejich lokální a globální aspekty pomocí kohomologických grup podkladových variet.

Cílem této práce je odvodit základní souřadnicové formule pro variační třídy a zobrazení ve variační posloupnosti druhého řádu pro účely aplikací, zejména pak Helmholtzovy variační podmínky. Zároveň lze text chápat jako úvod do teorie variačních posloupností na fibrovaných varietách. Variační posloupnosti na fibrovaných varietách byly dále studovány v pracích Krupka [2, 3], Musilová [8], Krupka a Šeděnková [6], Vitolo [13] (viz. také reference), Krupka, Urban a Volná [7], a na kontaktních elementech Urban a Krupka [11], Urban [10].

V této práci používáme Ehresmannovu teorii jetů. Podrobný výklad podkladových struktur lze nalézt v monografiích Krupka [5] a Saunders [9].

V celém článku Y označuje fibrovanou varietu nad 1-rozměrnou bází X s projekcí $\pi : Y \rightarrow X$ („fibrovaná mechanika“). Nechť $m = \dim Y - 1$. Připomeňme, že podle definice je π surjektivní submerze. Jsou tedy splněny následující dvě ekvivalentní podmínky v každém bodě $y \in Y$: (i) tečné zobrazení k projekci π v bodě y , $T_y\pi : T_yY \rightarrow T_{\pi(y)}X$, je surjektivní, (ii) v bodě y existuje souřadnicový systém (V, ψ) , $\psi = (s, q^\sigma)$, $1 \leq \sigma \leq m$, a v bodě $\pi(y) \in X$ souřadnicový systém (U, φ) , $\varphi = (t)$, takové, že $U = \pi(V)$ a $t \circ \pi = s$. Souřadnicový systém (V, ψ) na Y z podmínky (ii) nazýváme *fibrovaný souřadnicový systém*. Při označení *fibrovaných souřadnic* používáme konvenci $s = t$, tedy píšeme $\psi = (t, q^\sigma)$. Souřadnicový systém (U, φ) na bázi X je podmínkou (ii) určen jednoznačně a nazývá se *asociovaný* k fibrovanému souřadnicovému systému (V, ψ) . Řezem fibrované variety $\pi : Y \rightarrow X$ nazýváme zobrazení $\gamma : U \rightarrow Y$ definované na nějaké otevřené podmnožině $U \subset X$ a takové, že $\pi \circ \gamma = \text{id}_U$, kde id_U je identické zobrazení množiny U .

Nechť $r \geq 1$ je celé číslo. Označme J^rY r -té *jetové prodloužení* fibrované variety Y . Prvek $J_x^r\gamma \in J^rY$, nazývaný r -jet řezu γ v bodě $x \in X$, je definován jako třída relace ekvivalence na množině hladkých řezů γ fibrované variety $\pi : Y \rightarrow X$, definovaných na okolí bodu x s hodnotami v bodě $y = \gamma(x)$: „ $\gamma_1 \sim \gamma_2$, existuje-li fibrovaný souřadnicový systém (V, ψ) , $\psi = (t, q^\sigma)$, v bodě $y = \gamma_1(x) = \gamma_2(x)$ takový, že $D^l(q^\sigma \gamma_1 \varphi^{-1})(\varphi(x)) = D^l(q^\sigma \gamma_2 \varphi^{-1})(\varphi(x))$ pro každé $l = 1, 2, \dots, r$.“ Pokud $\gamma_1 \sim \gamma_2$, pak podle pravidla o derivaci složeného zobrazení snadno ukážeme, že pro libovolný fibrovaný souřadnicový systém $(\bar{V}, \bar{\psi})$, $\bar{\psi} = (\bar{t}, \bar{q}^\sigma)$, v bodě $y = \gamma_1(x) = \gamma_2(x)$ platí $D^l(\bar{q}^\sigma \gamma_1 \bar{\varphi}^{-1})(\bar{\varphi}(x)) = D^l(\bar{q}^\sigma \gamma_2 \bar{\varphi}^{-1})(\bar{\varphi}(x))$ pro každé $l = 1, 2, \dots, r$. Na množině J^rY definujeme *kanonické jetové projekce* $\pi^{r,s} : J^rY \rightarrow J^sY$, $0 \leq s \leq r$, a $\pi^r : J^rY \rightarrow X$ formulami $\pi^{r,s}(J_x^r\gamma) = J_x^s\gamma$, $\pi^r(J_x^r\gamma) = x$. Je-li $\gamma : U \rightarrow Y$ hladký řez fibrované variety Y na otevřené množině $U \subset X$, pak hladké zobrazení $J^r\gamma : U \rightarrow J^rY$, definované vztahem $J^r\gamma(x) = J_x^r\gamma$, nazýváme *r -jetové prodloužení řezu γ* .

Hladká struktura na Y indukují *asociovanou* strukturu hladké variety na J^rY následovně. Je-li (V, ψ) , $\psi = (t, q^\sigma)$, fibrovaný souřadnicový systém na Y , (U, φ) , $\varphi = (t)$, asociovaný souřadnicový systém na X , pak dvojice (V^r, ψ^r) , kde $V^r = (\pi^{r,0})^{-1}(V)$ a $\psi^r = (t, q^\sigma, q_1^\sigma, q_2^\sigma, \dots, q_r^\sigma)$, s reálnými funkcemi $q_l^\sigma : V^r \rightarrow \mathbf{R}$ danými vztahem $q_l^\sigma(J_x^r\gamma) = D^l(q^\sigma \gamma \varphi^{-1})(\varphi(x))$, tvoří souřadnicový systém na J^rY , nazývaný *asociovaný fibrovaný souřadnicový systém*. Pro $r \leq 3$ píšeme $\dot{q}^\sigma = q_1^\sigma$, $\ddot{q}^\sigma = q_2^\sigma$, $\dot{\dot{q}}^\sigma = q_3^\sigma$. Tvoří-li fibrované souřadnicové systémy (V, ψ) hladký atlas

na Y , pak asociované fibrované souřadnicové systémy (V^r, ψ^r) tvoří hladký atlas a generují hladkou strukturu variety na $J^r Y$ s dimenzí $\dim J^r Y = m(r+1) + 1$.

Pro libovolnou otevřenou podmnožinu W ve fibrované varietě Y klademe $W^r = (\pi^{r,0})^{-1}(W)$. Symbolem $\Omega_0^r W$ značíme okruh hladkých funkcí a symbolem $\Omega_k^r W$ $\Omega_0^r W$ -modul hladkých diferenciálních forem, definovaných na $W^r \subset J^r Y$. Vnější algebru hladkých diferenciálních forem, definovaných na W^r , značíme $\Omega^r W$.

2. KONTAKTNÍ FORMY A KANONICKÝ ROZKLAD FOREM

V této části definujeme pojem kontaktní 1-formy a rozšířené kontaktní k -formy na jetovém prodloužení fibrované variety a uvádíme vlastnosti kontaktních forem, zejména rozklad forem na kontaktní komponenty. Kanonický rozklad diferenciálních forem je základním nástrojem v geometrické variační teorii na fibrovaných prostorech (Krupka [1, 3, 5]).

Diferenciální 1-forma $\rho \in \Omega_1^r W$ se nazývá *kontaktní*, je-li

$$J^r \gamma^* \rho = 0 \quad (2.1)$$

pro každý hladký řez γ fibrované variety Y , definovaný na libovolné otevřené podmnožině množiny W . Jinými slovy, kontaktní 1-forma se anuluje podél jetového prodloužení libovolného řezu fibrované variety. Ve smyslu definice (2.1) je pak každá funkce kontaktní právě tehdy, když je identicky nulová, a každá diferenciální k -forma je kontaktní pro $k \geq 2$. Lokální popis kontaktních 1-form je dán následovně.

Lemma 2.1. (a) *Nechť W je otevřená podmnožina fibrované variety Y . Pak forma $\rho \in \Omega_1^r W$ je kontaktní právě tehdy, když v každém fibrovaném souřadnicovém systému (V, ψ) , $\psi = (t, q^\sigma)$, na $W \subset Y$ má ρ vyjádření*

$$\rho = \sum_{j=0}^{r-1} B_\sigma^j \omega_j^\sigma,$$

kde

$$\omega_j^\sigma = dq_j^\sigma - q_{j+1}^\sigma dt, \quad 0 \leq j \leq r-1. \quad (2.2)$$

(b) *Jsou-li dány dva fibrované souřadnicové systémy na Y , (V, ψ) , $\psi = (t, q^\sigma)$, a $(\bar{V}, \bar{\psi})$, $\bar{\psi} = (\bar{t}, \bar{q}^\sigma)$, takové, že $V \cap \bar{V} \neq \emptyset$, pak*

$$\bar{\omega}_j^\sigma = \sum_{l=0}^j \frac{\partial \bar{q}_j^\sigma}{\partial q_l^\sigma} \omega_l^\sigma, \quad (2.3)$$

kde $\bar{\omega}_j^\sigma = d\bar{q}_j^\sigma - \bar{q}_{j+1}^\sigma d\bar{t}$, $0 \leq j \leq r-1$.

1-formy (2.2) jsou kontaktní formy a jsou lineárně nezávislé. Lze je tedy doplnit na *kontaktní bázi* 1-form definovaných na souřadnicovém okolí V^r ,

$$dt, \omega_j^\sigma, dq_r^\sigma. \quad (2.4)$$

Formule $dq_j^\sigma = \omega_j^\sigma + q_{j+1}^\sigma dt$ definuje bijektivní korespondenci mezi kontaktní bází (2.4) a kanonickou bází $dt, dq_j^\sigma, dq_r^\sigma$, $0 \leq j \leq r-1$, 1-form na V^r .

Poněvadž operace vnější derivace a pull-back diferenciálních forem komutují, z definice (2.1) vyplývá, že pro kontaktní formu $\rho \in \Omega_k^r W$, $k \geq 1$, je rovněž $d\rho$ kontaktní; pokud navíc $\eta \in \Omega_l^r W$, pak také $\rho \wedge \eta$ je kontaktní forma. Ideál

vnější algebry $\Omega^r W$ diferenciálních forem na W^r , lokálně generovaný kontaktními 1-formami (2.2), se nazývá *kontaktní ideál*. Kontaktní k -formou rozumíme libovolnou k -formu náležející do kontaktního ideálu. Transformační vlastnost (2.3) kontaktních 1-form má následující důsledek: *k -formy na W^r lokálně generované k vnějšími faktory ω_j^σ (2.2), t.j. k -formy lokálně vyjádřené ve tvaru*

$$\rho = A_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k}^{j_1 j_2 \dots j_k} \omega_{j_1}^{\sigma_1} \wedge \omega_{j_2}^{\sigma_2} \wedge \dots \wedge \omega_{j_k}^{\sigma_k}, \quad (2.5)$$

tvorí podmodul modulu diferenciálních k -forem $\Omega_k^r W$, který značíme $\Omega_{k,c}^r W$.

Kanonický rozklad diferenciálních forem na jejich kontaktní komponenty je založen na rozkladu tečných vektorů. Definujme nyní morfismus tečných vektorových prostorů $h : TJ^{r+1}Y \rightarrow TJ^rY$ nad projekcí $\pi^{r+1,r} : J^{r+1}Y \rightarrow J^rY$, nazývaný *horizontalizace*. Každému tečnému vektoru ξ k $J^{r+1}Y$ v bodě $J_x^{r+1}\gamma$ přiřadíme tečný vektor $h\xi$ k J^rY v bodě $J_x^r\gamma$ předpisem $h\xi = T_x J^r\gamma \circ T\pi^{r+1} \cdot \xi$. Tečný vektor $h\xi \in TJ^rY$ nazýváme *horizontální komponenta* vektoru ξ . Kontaktní komponentu $p\xi$ vektoru ξ definujeme předpisem $p\xi = T\pi^{r+1,r} \cdot \xi - h\xi$. Má-li tečný vektor $\xi \in TJ^{r+1}Y$ lokální vyjádření

$$\xi = \xi^0 \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=0}^{r+1} \Xi_j^\sigma \frac{\partial}{\partial q_j^\sigma},$$

pak

$$h\xi = \xi^0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=0}^r q_{j+1}^\sigma \frac{\partial}{\partial q_j^\sigma} \right), \quad p\xi = \sum_{j=0}^r (\Xi_j^\sigma - q_{j+1}^\sigma \xi^0) \frac{\partial}{\partial q_j^\sigma},$$

a

$$\begin{aligned} dt(J_x^r\gamma)(h\xi) &= \xi^0, & dt(J_x^r\gamma)(p\xi) &= 0, \\ \omega_j^\sigma(J_x^r\gamma)(h\xi) &= 0, & \omega_j^\sigma(J_x^r\gamma)(p\xi) &= \Xi_j^\sigma - q_{j+1}^\sigma \xi^0. \end{aligned}$$

Nechť $\rho \in \Omega_k^r W$ je libovolná k -forma, $k \geq 1$, a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ jsou tečné vektory k $J^{r+1}Y$ v bodě $J_x^{r+1}\gamma \in W^{r+1}$. Pak $T\pi^{r+1,r} \cdot \xi_l = h\xi_l + p\xi_l$, $1 \leq l \leq k$, přičemž všechny horizontální komponenty $h\xi_l$ náležejí do 1-rozměrného vektorového podprostoru v $T_{J_x^r\gamma}J^rY$. Dostáváme odtud

$$\begin{aligned} &(\pi^{r+1,r})^* \rho(J_x^{r+1}\gamma)(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) \\ &= \rho(J_x^r\gamma)(T_{J_x^{r+1}\gamma} \pi^{r+1,r} \cdot \xi_1, T_{J_x^{r+1}\gamma} \pi^{r+1,r} \cdot \xi_2, \dots, T_{J_x^{r+1}\gamma} \pi^{r+1,r} \cdot \xi_k) \\ &= \rho(J_x^r\gamma)(h\xi_1 + p\xi_1, h\xi_2 + p\xi_2, \dots, h\xi_k + p\xi_k) \\ &= p_{k-1}\rho(J_x^{r+1}\gamma)(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) + p_k\rho(J_x^{r+1}\gamma)(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k), \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} p_k\rho(J_x^{r+1}\gamma)(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) &= \rho(J_x^r\gamma)(p\xi_1, p\xi_2, \dots, p\xi_k), \\ p_{k-1}\rho(J_x^{r+1}\gamma)(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) &= \rho(J_x^r\gamma)(h\xi_1, p\xi_2, \dots, p\xi_k) \\ &\quad + \rho(J_x^r\gamma)(p\xi_1, h\xi_2, p\xi_3, \dots, p\xi_k) \\ &\quad + \dots + \rho(J_x^r\gamma)(p\xi_1, p\xi_2, \dots, p\xi_{k-1}, h\xi_k). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Tudíž

$$(\pi^{r+1,r})^* \rho = p_{k-1}\rho + p_k\rho. \quad (2.7)$$

Formule (2.7) se nazývá *kanonický rozklad* formy ρ na kontaktní komponenty. Formu $p_{k-1}\rho$, resp. $p_k\rho$, (2.6) na $W^{r+1} \subset J^{r+1}Y$ nazýváme $(k-1)$ -kontaktní, resp. k -kontaktní, *komponenta* formy ρ . Přesněji řečeno, jde o kanonický rozklad formy $(\pi^{r+1,r})^*\rho$. V případě 1-forem, $k=1$, značíme $h\rho = p_0\rho$ a $p\rho = p_1\rho$, tedy $(\pi^{r+1,r})^*\rho = h\rho + p\rho$.

Lemma 2.2. *Nechť (V, ψ) , $\psi = (t, q^\sigma)$, je fibrovaný souřadnicový systém na Y takový, že $V \subset W$.*

(a) *Nechť 1-forma $\rho \in \Omega_1^r W$ má v kanonické bázi vyjádření*

$$\rho = A dt + \sum_{j=0}^r B_\sigma^j dq_j^\sigma.$$

Pak

$$p\rho = \sum_{j=0}^r B_\sigma^j \omega_j^\sigma, \quad h\rho = \left(A + \sum_{j=0}^r B_\sigma^j q_{j+1}^\sigma \right) dt. \quad (2.8)$$

(b) *Je-li $f \in \Omega_0^r W$ funkce na W^r , pak*

$$(\pi^{r+1,r})^* df = hdf + pdf, \quad (2.9)$$

kde

$$hdf = \frac{df}{dt} dt, \quad pdf = \sum_{j=0}^r \frac{\partial f}{\partial q_j^\sigma} \omega_j^\sigma.$$

Analogicky jako v předchozím lemmatu lze snadno nalézt vyjádření pro $p_{k-1}\rho$ a $p_k\rho$ libovolné k -formy ρ . Je-li $p_{k-1}\rho = 0$, pak $(\pi^{r+1,r})^*\rho = p_k\rho$ je k -kontaktní k -forma tvaru (2.5). Rozklad vnější derivace funkce (2.9) a 1-formy (2.8) často potřebujeme při výpočtu tříd diferenciálních forem.

Definujeme nyní nový typ kontaktnosti pro formy stupně $k \geq 2$.

Řekneme, že k -forma $\rho \in \Omega_k^r W$, $k \geq 2$, je *rozšířená kontaktní forma*, jestliže ke každému bodu $y_0 \in W$ existuje fibrovaný souřadnicový systém (V, ψ) , $\psi = (t, q^\sigma)$, v bodě y_0 a $(k-1)$ -kontaktní $(k-1)$ -forma $\eta_V \in \Omega_{k-1,c}^r V$ tak, že

$$p_{k-1}(\rho - d\eta_V) = 0.$$

Jinými slovy, $\rho \in \Omega_k^r W$ je rozšířená kontaktní forma, má-li ρ lokální vyjádření

$$\rho = \mu + d\eta, \quad (2.10)$$

kde μ je k -kontaktní k -forma a η je $(k-1)$ -kontaktní $(k-1)$ -forma na daném souřadnicovém V .

Lemma 2.3. *Nechť $W \subset Y$ je otevřená množina a $\rho \in \Omega_k^r W$ je rozšířená kontaktní forma. Pak rozklad (2.10) formy ρ je určen jednoznačně.*

Rozšířené kontaktní k -formy na W^r tvoří vektorový podprostor vektorového prostoru k -forem $\Omega_k^r W$, který značíme $\Theta_k^r W$. Podle Lemmatu 2.3. je $\Theta_k^r W$ direktním součtem podmodulů $\Omega_{k,c}^r W$ a $\Omega_{k-1,c}^r W$. V dalším textu uvažujeme $\Theta_k^r W$ zejména se strukturou *abelovské grupy*.

3. VARIÁČNÍ POSLOUPNOST VE FIBROVANÉ MECHANICE

Nechť $W \subset Y$ je otevřená množina. Pro každé $k \geq 1$, $\Theta_k^r W$ je podgrupa abelovské grupy $\Omega_k^r W$ a dostáváme tak podposloupnost abelovských grup rozšířených kontaktních forem

$$0 \rightarrow \Theta_1^r W \rightarrow \Theta_2^r W \rightarrow \Theta_3^r W \rightarrow \cdots \rightarrow \Theta_M^r W \rightarrow 0 \quad (3.1)$$

De Rhamovy posloupnosti

$$0 \rightarrow \mathbf{R} \rightarrow \Omega_0^r W \rightarrow \Omega_1^r W \rightarrow \Omega_2^r W \rightarrow \cdots \rightarrow \Omega_N^r W \rightarrow 0, \quad (3.2)$$

kde $M = mr + 1$, $N = \dim J^r Y = m(r + 1) + 1$. (3.1) a (3.2) jsou diferenciální posloupnosti, jejichž morfismy tvoří operátor vnější derivace d . Posloupnost (3.1) se nazývá *kontaktní podposloupnost* De Rhamovy posloupnosti (3.2). Připomeňme, že diferenciální posloupnost se nazývá *exaktní*, jestliže v každém členu je obraz daného morfismu roven jádru následujícího morfismu. De Rhamova posloupnost (3.2) je tedy podle *Poincarého lemma lokálně exaktní*: nechť forma $\rho \in \Omega_k^r W$ splňuje podmínku $d\rho = 0$ (ρ je *uzavřená*), pak ke každému bodu $z \in W^r$ existuje okolí U a diferenciální $(k - 1)$ -forma η na U tak, že $\rho|_U = d\eta$.

Následující tvrzení vyplývá ze struktury rozšířených kontaktních forem.

Věta 3.1. *Kontaktní podposloupnost (3.1) De Rhamovy posloupnosti je lokálně exaktní.*

Dostáváme následující diagram,

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & 0 \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & & & \Omega_1^r W / \Theta_1^r W & \rightarrow & \Omega_2^r W / \Theta_2^r W \rightarrow \cdots \\
 & & \nearrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathbf{R} & \longrightarrow & \Omega_0^r W & \longrightarrow & \Omega_1^r W \longrightarrow \Omega_2^r W \longrightarrow \cdots \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & & & 0 & \longrightarrow & \Theta_1^r W \longrightarrow \Theta_2^r W \longrightarrow \cdots \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & & & 0 & & 0,
 \end{array}$$

v němž faktorizací De Rhamovy posloupnosti podle její exaktní kontaktní podposloupnosti vzniká faktorová posloupnost

$$\begin{aligned}
 0 \rightarrow \mathbf{R} \rightarrow \Omega_0^r W \rightarrow \Omega_1^r W / \Theta_1^r W \rightarrow \Omega_2^r W / \Theta_2^r W \\
 \rightarrow \cdots \rightarrow \Omega_M^r W / \Theta_M^r W \rightarrow \Omega_{M+1}^r W \rightarrow \cdots \rightarrow \Omega_N^r W \rightarrow 0.
 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Třídu diferenciální formy $\rho \in \Omega_k^r W$ z faktorové grupy $\Omega_k^r W / \Theta_k^r W$ ve variační posloupnosti (3.3) značíme $[\rho]$. Faktorová zobrazení v (3.3), $E : \Omega_k^r W / \Theta_k^r W \rightarrow \Omega_{k+1}^r W / \Theta_{k+1}^r W$, jsou definována vztahem

$$E([\rho]) = [d\rho]. \quad (3.4)$$

Posloupnost (3.3) se nazývá *variační posloupnost řádu r* na $W \subset Y$.

Věta 3.2. *Faktorová posloupnost (3.3) je lokálně exaktní.*

Členy variační posloupnosti jakožto faktorové grupy jsou určeny jednoznačně až na isomorfismus. To umožňuje vyjádření tříd ve variační posloupnosti pomocí různých reprezentantů. Následující tvrzení se uplatní při výpočtu reprezentantů tříd a při studiu vnoření variační posloupnosti r -tého řádu do posloupnosti $(r+1)$ -ního řádu (problém redukce řádu).

Věta 3.3. *Faktorové zobrazení $\Omega_k^r W / \Theta_k^r W \rightarrow \Omega_k^{r+1} W / \Theta_k^{r+1} W$ injekce $\Omega_k^r W \ni \rho \rightarrow (\pi^{r+1,r})^* \rho \in \Omega_k^{r+1} W$ je injektivní.*

Variační posloupnost (3.3) lze formulovat také v případě, kdy podkladové prostory jsou *svazky* diferenciálních forem na r -jetovém prodloužení $J^r Y$. Ukazuje se, že pro odpovídající komplex globálních řezů lze aplikovat abstraktní De Rhamův teorém, umožňující vyšetřovat lokální a globální aspekty morfismů ve variační posloupnosti pomocí kohomologických grup fibrované variety Y ; viz. Poznámka 4.5.

4. VARIAČNÍ TŘÍDY A ZOBRAZENÍ VE VARIAČNÍ POSLOUPNOSTI DRUHÉHO ŘÁDU

V této části ukážeme variační význam tříd diferenciálních k -forem, kde $k = 1, 2, 3$, a jejich morfismů ve variační posloupnosti. Pro účely aplikací nalezneme explicitní formule ve variační posloupnosti *druhého* řádu. Přirozeně vzniká otázka, zda existuje kanonický reprezentant třídy forem ve variační posloupnosti. Tento *problém reprezentace* variační posloupnosti (globálně definovanými) diferenciálními formami byl studován a na fibrovaných varietách obecně řešen různými autory; komentáře ke srovnání lze nalézt v práci Volná, Urban [12].

Věta 4.1. *Nechť $W \subset Y$ je otevřená množina a (V, ψ) , $\psi = (t, q^\sigma)$, je fibrovaný souřadnicový systém W .*

(a) *Nechť $\rho \in \Omega_1^2 W$ má vyjádření v kontaktní bázi tvaru*

$$\rho = A dt + B_\sigma \omega^\sigma + B_\sigma^1 \dot{\omega}^\sigma + C_\sigma d\ddot{q}^\sigma. \quad (4.1)$$

Pak třída $[\rho]$ je prvkem $\Omega_1^2 W / \Theta_1^2 W$ a je reprezentována diferenciální formou na $W^3 \subset J^3 Y$,

$$[\rho] = (A + C_\sigma \ddot{q}^\sigma) dt. \quad (4.2)$$

(b) *Nechť $\rho \in \Omega_2^2 W$ má vyjádření v kontaktní bázi tvaru*

$$\begin{aligned} \rho = & A_\sigma \omega^\sigma \wedge dt + A_\sigma^1 \dot{\omega}^\sigma \wedge dt + B_\nu d\ddot{q}^\nu \wedge dt \\ & + \frac{1}{2} C_{\sigma_1 \sigma_2} \omega^{\sigma_1} \wedge \omega^{\sigma_2} + \frac{1}{2} C_{\sigma_1 \sigma_2}^1 \dot{\omega}^{\sigma_1} \wedge \dot{\omega}^{\sigma_2} + C_{\nu, \sigma}^{1,0} \dot{\omega}^\nu \wedge \omega^\sigma \\ & + D_{\nu, \sigma} d\ddot{q}^\nu \wedge \omega^\sigma + D_{\nu, \sigma}^1 d\ddot{q}^\nu \wedge \dot{\omega}^\sigma + \frac{1}{2} D_{\nu_1 \nu_2} d\ddot{q}^{\nu_1} \wedge d\ddot{q}^{\nu_2}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Pak třída $[\rho]$ je prvkem $\Omega_2^2 W / \Theta_2^2 W$ a je reprezentována diferenciální formou na $W^5 \subset J^5 Y$,

$$[\rho] = \varepsilon_\sigma([\rho]) \omega^\sigma \wedge dt, \quad (4.4)$$

kde

$$\varepsilon_\sigma([\rho]) = (A_\sigma - D_{\nu, \sigma} \ddot{q}^\nu) - \frac{d}{dt} (A_\sigma^1 - D_{\nu, \sigma}^1 \ddot{q}^\nu) + \frac{d^2}{dt^2} (B_\sigma - D_{\nu, \sigma} \ddot{q}^\nu). \quad (4.5)$$

(c) *Nechť $\rho \in \Omega_3^2 W$ má vyjádření v kontaktní bázi tvaru*

$$\begin{aligned} \eta = & \frac{1}{2} A_{\sigma_1 \sigma_2} \omega^{\sigma_1} \wedge \omega^{\sigma_2} \wedge dt + A_{\nu, \sigma}^1 \dot{\omega}^\nu \wedge \omega^\sigma \wedge dt + \frac{1}{2} A_{\nu_1 \nu_2}^1 \dot{\omega}^{\nu_1} \wedge \dot{\omega}^{\nu_2} \wedge dt \\ & + B_{\nu, \sigma} d\ddot{q}^\nu \wedge \omega^\sigma \wedge dt + B_{\nu, \sigma}^1 d\ddot{q}^\nu \wedge \dot{\omega}^\sigma \wedge dt + \frac{1}{2} B_{\nu_1 \nu_2} d\ddot{q}^{\nu_1} \wedge d\ddot{q}^{\nu_2} \wedge dt \\ & + \frac{1}{6} C_{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3} \omega^{\sigma_1} \wedge \omega^{\sigma_2} \wedge \omega^{\sigma_3} + \frac{1}{2} C_{\nu, \sigma_1 \sigma_2}^1 \dot{\omega}^\nu \wedge \omega^{\sigma_1} \wedge \omega^{\sigma_2} \\ & + \frac{1}{2} C_{\nu_1 \nu_2, \sigma}^1 \dot{\omega}^{\nu_1} \wedge \dot{\omega}^{\nu_2} \wedge \omega^\sigma + \frac{1}{6} C_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}^1 \dot{\omega}^{\nu_1} \wedge \dot{\omega}^{\nu_2} \wedge \dot{\omega}^{\nu_3} \\ & + \frac{1}{2} D_{\nu, \sigma_1 \sigma_2} d\ddot{q}^\nu \wedge \omega^{\sigma_1} \wedge \omega^{\sigma_2} + \frac{1}{2} D_{\nu_1 \nu_2, \sigma} d\ddot{q}^{\nu_1} \wedge d\ddot{q}^{\nu_2} \wedge \omega^\sigma \\ & + \frac{1}{6} D_{\nu_1 \nu_2 \nu_3} d\ddot{q}_2^{\nu_1} \wedge d\ddot{q}^{\nu_2} \wedge d\ddot{q}^{\nu_3} + D_{\nu, \mu, \sigma}^1 d\ddot{q}^\nu \wedge \dot{\omega}^\mu \wedge \omega^\sigma \\ & + \frac{1}{2} D_{\nu, \sigma_1 \sigma_2}^1 d\ddot{q}^\nu \wedge \dot{\omega}^{\sigma_1} \wedge \dot{\omega}^{\sigma_2} + \frac{1}{2} D_{\nu_1 \nu_2, \sigma}^1 d\ddot{q}^{\nu_1} \wedge d\ddot{q}^{\nu_2} \wedge \dot{\omega}^\sigma. \end{aligned}$$

Pak třída $[\rho]$ je prvkem $\Omega_3^2 W / \Theta_3^2 W$ a je reprezentována diferenciální formou na $W^7 \subset J^7 Y$,

$$\begin{aligned} [\rho] = & \frac{1}{2} \varepsilon_{\nu \sigma}([\eta]) \omega^\nu \wedge \omega^\sigma \wedge dt + \kappa_{\nu, \sigma}([\eta]) \dot{\omega}^\nu \wedge \omega^\sigma \wedge dt + \frac{1}{2} \kappa_{\nu \sigma}([\eta]) \ddot{\omega}^\nu \wedge \omega^\sigma \wedge dt \\ & + \tau_{\nu, \sigma}([\eta]) \dot{\omega}^\nu \wedge \omega^\sigma \wedge dt + \frac{1}{2} \tau_{\nu \sigma}([\eta]) \dot{\omega}^\nu \wedge \dot{\omega}^\sigma \wedge dt, \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\nu \sigma}([\eta]) = & A_{\nu \sigma} + D_{\mu, \nu \sigma} \dot{q}^\mu - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (A_{\nu, \sigma}^1 - A_{\sigma, \nu}^1 + (D_{\mu, \nu, \sigma}^1 - D_{\mu, \sigma, \nu}^1) \dot{q}^\mu) \\ & + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} (A_{\nu \sigma}^1 + D_{\mu, \nu \sigma}^1 \dot{q}^\mu) - \frac{1}{4} \frac{d^3}{dt^3} (B_{\nu, \sigma}^1 - B_{\sigma, \nu}^1 + (D_{\mu \nu, \sigma}^1 - D_{\mu \sigma, \nu}^1) \dot{q}^\mu) \\ & + \frac{1}{2} \frac{d^4}{dt^4} (B_{\nu \sigma} + D_{\mu \nu \sigma} \dot{q}^\mu), \\ \kappa_{\nu, \sigma}([\eta]) = & \frac{1}{2} (A_{\nu, \sigma}^1 + A_{\sigma, \nu}^1 + (D_{\mu, \nu, \sigma}^1 + D_{\mu, \sigma, \nu}^1) w_3^\mu) \\ & - \frac{d}{dw^L} (B_{\nu, \sigma} + B_{\sigma, \nu} + (D_{\mu \nu, \sigma} + D_{\mu \sigma, \nu}) w_3^\mu) \\ & + \frac{d^2}{d(w^L)^2} (B_{\nu, \sigma}^1 + B_{\sigma, \nu}^1 + (D_{\mu \nu, \sigma}^1 + D_{\mu \sigma, \nu}^1) w_3^\mu), \\ \kappa_{\nu \sigma}([\eta]) = & A_{\sigma \nu}^1 + D_{\mu, \sigma \nu}^1 w_3^\mu + (B_{\nu, \sigma} - B_{\sigma, \nu}) + (D_{\mu \nu, \sigma} - D_{\mu \sigma, \nu}) w_3^\mu \\ & + \frac{1}{2} \frac{d}{dw^L} (B_{\nu, \sigma}^1 - B_{\sigma, \nu}^1 + (D_{\mu \nu, \sigma}^1 - D_{\mu \sigma, \nu}^1) w_3^\mu) \\ & - 2 \frac{d^2}{d(w^L)^2} (B_{\nu \sigma} + D_{\mu \nu \sigma} w_3^\mu), \\ \tau_{\nu, \sigma}([\eta]) = & -\frac{1}{2} (B_{\nu, \sigma}^1 + B_{\sigma, \nu}^1 + (D_{\mu \nu, \sigma}^1 + D_{\mu \sigma, \nu}^1) w_3^\mu), \\ \tau_{\nu \sigma}([\eta]) = & B_{\nu, \sigma} + D_{\mu \nu \sigma} w_3^\mu. \end{aligned}$$

Následující tvrzení popisuje strukturu faktorových zobrazení ve variační posloupnosti druhého řádu, souvisejících se základními variačními objekty (totální derivace, Eulerovo-Lagrangeovo zobrazení, Helmholtzovo zobrazení).

Věta 4.2. *Nechť $W \subset Y$ je otevřená množina a (V, ψ) , $\psi = (t, q^\sigma)$, je fibrovaný souřadnicový systém na W .*

(a) *Je-li $f \in \Omega_0^2 W$, pak $E(f) = (df/dt)dt$.*

(b) *Nechť $\rho \in \Omega_1^2 W$ má vyjádření v kontaktní bázi (4.1). Pak*

$$E([\rho]) = \varepsilon_\sigma([d\rho]) \omega^\sigma \wedge dt, \quad (4.6)$$

kde

$$\begin{aligned} \varepsilon_\sigma([d\rho]) = & \frac{\partial A}{\partial w^\sigma} + \frac{\partial C_\nu}{\partial w^\sigma} \ddot{q}^{\cdot\nu} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial A}{\partial \dot{q}^\sigma} + \frac{\partial C_\nu}{\partial \dot{q}^\sigma} \dot{q}^{\cdot\nu} \right) \\ & + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial A}{\partial \ddot{q}^\sigma} + \frac{\partial C_\nu}{\partial \ddot{q}^\sigma} \ddot{q}^{\cdot\nu} \right) - \frac{d^3 C_\sigma}{dt^3}. \end{aligned}$$

(c) *Nechť $\rho \in \Omega_2^2 W$ má vyjádření v kontaktní bázi (4.3). Pak*

$$\begin{aligned} E([\rho]) = & \frac{1}{2} \varepsilon_{\nu\sigma}([d\rho]) \omega^\nu \wedge \omega^\sigma \wedge dt \\ & + \kappa_{\nu,\sigma}([d\rho]) \dot{\omega}^\nu \wedge \omega^\sigma \wedge dt + \frac{1}{2} \kappa_{\nu\sigma}([d\rho]) \ddot{\omega}^\nu \wedge \omega^\sigma \wedge dt \\ & + \tau_{\nu,\sigma}([d\rho]) \dot{\omega}^{\cdot\nu} \wedge \omega^\sigma \wedge dt + \frac{1}{2} \tau_{\nu\sigma}([d\rho]) \ddot{\omega}^{\cdot\nu} \wedge \omega^\sigma \wedge dt, \end{aligned} \quad (4.7)$$

kde

$$\begin{aligned} \tau_{\nu,\sigma}([d\rho]) = & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_\nu^1}{\partial \ddot{q}^\sigma} + \frac{\partial A_\sigma^1}{\partial \ddot{q}^\nu} - \left(\frac{\partial B_\sigma}{\partial \dot{q}^\nu} + \frac{\partial B_\nu}{\partial \dot{q}^\sigma} \right) + (D_{\nu,\sigma} + D_{\sigma,\nu}) \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial D_{\mu\nu}}{\partial \dot{q}^\sigma} + \frac{\partial D_{\mu\sigma}}{\partial \dot{q}^\nu} - \frac{\partial D_{\mu,\sigma}^1}{\partial \ddot{q}^\nu} - \frac{\partial D_{\mu\nu}^1}{\partial \ddot{q}^\sigma} \right) \dot{q}^{\cdot\mu} + \frac{d}{dt} (D_{\nu,\sigma}^1 + D_{\sigma,\nu}^1) \right), \\ \tau_{\nu\sigma}([d\rho]) = & \frac{\partial B_\sigma}{\partial \ddot{q}_2^\nu} - \frac{\partial B_\nu}{\partial \ddot{q}_2^\sigma} + D_{\nu,\sigma}^1 - D_{\sigma,\nu}^1 + \left(\frac{\partial D_{\mu\nu}}{\partial \ddot{q}_2^\sigma} - \frac{\partial D_{\mu\sigma}}{\partial \ddot{q}_2^\nu} \right) \dot{q}^{\cdot\mu} + \frac{d}{dt} (D_{\nu\sigma}), \\ \kappa_{\nu,\sigma}([d\rho]) = & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_\sigma}{\partial \dot{q}^\nu} + \frac{\partial A_\nu}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial A_\sigma^1}{\partial q^\nu} - \frac{\partial A_\nu^1}{\partial q^\sigma} - \left(\frac{\partial D_{\mu,\sigma}}{\partial \dot{q}^\nu} + \frac{\partial D_{\mu,\nu}}{\partial \dot{q}^\sigma} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial D_{\mu,\nu}^1}{\partial q^\sigma} + \frac{\partial D_{\mu,\sigma}^1}{\partial q^\nu} \right) \dot{q}^{\cdot\mu} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial A_\sigma}{\partial \ddot{q}^\nu} + \frac{\partial A_\nu}{\partial \ddot{q}^\sigma} - \left(\frac{\partial B_\sigma}{\partial q^\nu} + \frac{\partial B_\nu}{\partial q^\sigma} \right) \right. \\ & \left. - \left(\frac{\partial D_{\mu,\nu}}{\partial \ddot{q}^\sigma} + \frac{\partial D_{\mu,\sigma}}{\partial \ddot{q}^\nu} - \frac{\partial D_{\mu\sigma}}{\partial q^\nu} - \frac{\partial D_{\mu\nu}}{\partial q^\sigma} \right) \dot{q}^{\cdot\mu} \right) \\ & + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial A_\sigma^1}{\partial \ddot{q}^\nu} + \frac{\partial A_\nu^1}{\partial \ddot{q}^\sigma} - \left(\frac{\partial B_\sigma}{\partial \dot{q}^\nu} + \frac{\partial B_\nu}{\partial \dot{q}^\sigma} \right) + \left(\frac{\partial D_{\mu\nu}}{\partial \dot{q}^\sigma} + \frac{\partial D_{\mu\sigma}}{\partial \dot{q}^\nu} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial D_{\mu,\nu}^1}{\partial \ddot{q}^\sigma} - \frac{\partial D_{\mu,\sigma}^1}{\partial \ddot{q}^\nu} \right) \dot{q}^{\cdot\mu} + \frac{d}{dt^3} (D_{\nu,\sigma}^1 + D_{\sigma,\nu}^1) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{\nu\sigma}([d\rho]) &= \left(\frac{\partial A_\sigma}{\partial \ddot{q}^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial \ddot{q}^\sigma} \right) + \left(\frac{\partial A_\nu^1}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial A_\sigma^1}{\partial \dot{q}^\nu} \right) + \left(\frac{\partial B_\sigma}{\partial q^\nu} - \frac{\partial B_\nu}{\partial q^\sigma} \right) \\
&+ \left(\frac{\partial D_{\mu\nu}}{\partial q^\sigma} - \frac{\partial D_{\mu\sigma}}{\partial q^\nu} + \frac{\partial D_{\mu,\nu}}{\partial \ddot{q}^\sigma} - \frac{\partial D_{\mu,\sigma}}{\partial \ddot{q}^\nu} + \frac{\partial D_{\mu,\sigma}^1}{\partial \dot{q}^\nu} - \frac{\partial D_{\mu\nu}^1}{\partial \dot{q}^\sigma} \right) \cdot \dot{q}^{\cdot\mu} \\
&+ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial A_\sigma^1}{\partial \dot{q}^\nu} - \frac{\partial A_\nu^1}{\partial \dot{q}^\sigma} + \frac{\partial B_\sigma}{\partial \dot{q}^\nu} - \frac{\partial B_\nu}{\partial \dot{q}^\sigma} + \left(\frac{\partial D_{\mu\nu}}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial D_{\mu\sigma}}{\partial \dot{q}^\nu} \right. \right. \\
&\left. \left. + \frac{\partial D_{\mu,\nu}^1}{\partial \ddot{q}^\sigma} - \frac{\partial D_{\mu\sigma}^1}{\partial \ddot{q}^\nu} \right) \cdot \dot{q}^{\cdot\mu} \right) + \frac{3}{2} \frac{d}{dt} \left(D_{\nu,\sigma} - D_{\sigma,\nu} - \frac{d}{dt} (D_{\nu,\sigma}^1 - D_{\sigma,\nu}^1) \right) \\
&- 2 \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial B_\sigma}{\partial \ddot{q}^\nu} - \frac{\partial B_\nu}{\partial \ddot{q}^\sigma} + \left(\frac{\partial D_{\mu\nu}}{\partial \ddot{q}^\sigma} - \frac{\partial D_{\mu\sigma}}{\partial \ddot{q}^\nu} \right) \cdot \dot{q}^{\cdot\mu} \right) - 2 \frac{d^3 D_{\nu\sigma}}{dt^3}, \\
\varepsilon_{\nu\sigma}([d\rho]) &= \frac{\partial A_\sigma}{\partial q^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial q^\sigma} + \left(\frac{\partial D_{\mu,\nu}}{\partial q^\sigma} - \frac{\partial D_{\mu,\sigma}}{\partial q^\nu} \right) \cdot \dot{q}^{\cdot\mu} - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial A_\sigma}{\partial \dot{q}^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial \dot{q}^\sigma} \right. \\
&+ \left. \frac{\partial A_\sigma^1}{\partial \dot{q}^\nu} - \frac{\partial A_\nu^1}{\partial \dot{q}^\sigma} + \left(\frac{\partial D_{\mu,\nu}}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial D_{\mu,\sigma}}{\partial \dot{q}^\nu} + \frac{\partial D_{\mu,\nu}^1}{\partial q^\sigma} - \frac{\partial D_{\mu,\sigma}^1}{\partial q^\nu} \right) \cdot \dot{q}^{\cdot\mu} \right) \\
&+ \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial A_\sigma^1}{\partial \dot{q}^\nu} - \frac{\partial A_\nu^1}{\partial \dot{q}^\sigma} + \left(\frac{\partial D_{\mu,\nu}^1}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial D_{\mu,\sigma}^1}{\partial \dot{q}^\nu} \right) \cdot \dot{q}^{\cdot\mu} \right) \\
&- \frac{1}{4} \frac{d^3}{dt^3} \left(\frac{\partial A_\sigma^1}{\partial \ddot{q}^\nu} - \frac{\partial A_\nu^1}{\partial \ddot{q}^\sigma} + \frac{\partial B_\sigma}{\partial \dot{q}^\nu} - \frac{\partial B_\nu}{\partial \dot{q}^\sigma} + \left(\frac{\partial D_{\mu\nu}}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial D_{\mu\sigma}}{\partial \dot{q}^\nu} \right) \cdot \dot{q}^{\cdot\mu} \right. \\
&+ \left. (D_{\nu,\sigma} - D_{\sigma,\nu}) + \left(\frac{\partial D_{\mu,\nu}^1}{\partial \ddot{q}^\sigma} - \frac{\partial D_{\mu,\sigma}^1}{\partial \ddot{q}^\nu} \right) \cdot \dot{q}^{\cdot\mu} \right) \\
&+ \frac{1}{2} \frac{d^4}{dt^4} \left(\frac{\partial B_\sigma}{\partial \ddot{q}^\nu} - \frac{\partial B_\nu}{\partial \ddot{q}^\sigma} + \frac{1}{2} (D_{\nu,\sigma}^1 - D_{\sigma,\nu}^1) + \left(\frac{\partial D_{\mu\nu}}{\partial \ddot{q}^\sigma} - \frac{\partial D_{\mu,\sigma}}{\partial \ddot{q}^\nu} \right) \cdot \dot{q}^{\cdot\mu} \right) \\
&+ \frac{1}{2} \frac{d^5}{dt^5} (D_{\nu\sigma}).
\end{aligned}$$

Poznámka 4.3. Třidu $E([\rho])$ (4.7) z Věty 4.2, (c), lze také vyjádřit v jiné bázi a na jiném prodloužení fibrované variety následovně

$$\begin{aligned}
E([\rho]) &= \frac{1}{2} \varepsilon'_{\nu\sigma}([d\rho]) \omega^\nu \wedge \omega^\sigma \wedge dt \\
&+ \kappa'_{\nu,\sigma}([d\rho]) \omega_1^\nu \wedge \omega^\sigma \wedge dt + \frac{1}{2} \kappa'_{\nu\sigma}([d\rho]) \omega_1^\nu \wedge \omega_1^\sigma \wedge dt \\
&+ \tau'_{\nu,\sigma}([d\rho]) \omega_2^\nu \wedge \omega_1^\sigma \wedge dt + \frac{1}{2} \tau'_{\nu\sigma}([d\rho]) \omega_2^\nu \wedge \omega_2^\sigma \wedge dt.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Lze však ukázat, že $E([\rho])$ (4.8) obecně *není* (globálně definovaná) forma. Ukazuje se, že reprezentace tříd globálně definovanými diferenciálními formami souvisí s variačními objekty, známými z lokální variační teorie.

Charakterizujme nyní faktorová zobrazení $E : \Omega_1^2 W / \Theta_1^2 W \rightarrow \Omega_2^2 W / \Theta_2^2 W$ a $E : \Omega_2^2 W / \Theta_2^2 W \rightarrow \Omega_3^2 W / \Theta_3^2 W$ ve variační posloupnosti jiným způsobem. I když třídy ve variační posloupnosti jsou definovány abstraktně ((4.2), (4.4)), jsou úzce spjatý s variační teorií na fibrovaných varietách. Tím je motivována následující terminologie.

Nechť (V, ψ) , $\psi = (t, q^\sigma)$, je fibrovaný souřadnicový systém na $W \subset Y$. Mějme 1-formu $\rho \in \Omega_1^2 W$, vyjádřenou v kontaktní bázi ve tvaru $\rho = A dt + B_\sigma \omega^\sigma + B_\sigma^1 \dot{\omega}^\sigma + C_\sigma d\dot{q}^\sigma$. Definujme *Lagrangeovu funkci* formy ρ , $L : V^3 \rightarrow \mathbf{R}$, předpisem

$$L = A + C_\sigma \dot{q}^\sigma. \quad (4.9)$$

Podle Věty 4.1 představuje funkce (4.9) koeficient třídy $[\rho]$. *Eulerovy-Lagrangeovy výrazy* $E_\sigma(L) : V^5 \rightarrow \mathbf{R}$, asociované s Lagrangeovou funkcí L , jsou pak tvaru

$$E_\sigma(L) = \frac{\partial L}{\partial q^\sigma} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\sigma} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}^\sigma}. \quad (4.10)$$

Nechť $\rho \in \Omega_2^2 W$ je 2-forma, mající vyjádření (4.3). Položme

$$\varepsilon_\sigma = (A_\sigma - D_{\nu, \sigma} \dot{q}^{\nu}) - \frac{d}{dt} (A_\sigma^1 - D_{\nu, \sigma}^1 \dot{q}^{\nu}) + \frac{d^2}{dt^2} (B_\sigma - D_{\nu \sigma} \dot{q}^{\nu}). \quad (4.11)$$

Podle Věty 4.2 představuje funkce (4.11) koeficient třídy $[\rho]$, reprezentované *source* formou (4.4).

Helmholtzovy výrazy asociované s ε_μ jsou pak tvaru

$$\begin{aligned} H_{\sigma\nu}^5(\varepsilon_\mu) &= \frac{\partial \varepsilon_\sigma}{\partial q_5^\nu} + \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial q_5^\sigma}, \\ H_{\sigma\nu}^4(\varepsilon_\mu) &= \frac{\partial \varepsilon_\sigma}{\partial q_4^\nu} - \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial q_4^\sigma} - \frac{5}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varepsilon_\sigma}{\partial q_5^\nu} - \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial q_5^\sigma} \right), \\ H_{\sigma\nu}^3(\varepsilon_\mu) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varepsilon_\sigma}{\partial \dot{q}^{\nu}} + \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial \dot{q}^{\sigma}} - 2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varepsilon_\sigma}{\partial q_4^\nu} + \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial q_4^\sigma} \right) \right), \\ H_{\sigma\nu}^2(\varepsilon_\mu) &= \frac{\partial \varepsilon_\sigma}{\partial \ddot{q}^\nu} - \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial \ddot{q}^\sigma} - \frac{3}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varepsilon_\sigma}{\partial \dot{q}^{\nu}} - \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial \dot{q}^{\sigma}} \right) + \frac{5}{2} \frac{d^3}{dt^3} \left(\frac{\partial \varepsilon_\sigma}{\partial q_5^\nu} - \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial q_5^\sigma} \right), \\ H_{\sigma\nu}^1(\varepsilon_\mu) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varepsilon_\sigma}{\partial \dot{q}^\nu} + \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varepsilon_\sigma}{\partial \ddot{q}^\nu} + \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial \ddot{q}^\sigma} \right) + \frac{d^3}{dt^3} \left(\frac{\partial \varepsilon_\sigma}{\partial q_4^\nu} - \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial q_4^\sigma} \right) \right), \\ H_{\sigma\nu}^0(\varepsilon_\mu) &= \frac{\partial \varepsilon_\sigma}{\partial q^\nu} - \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial q^\sigma} - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varepsilon_\sigma}{\partial \dot{q}^\nu} - \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial \dot{q}^\sigma} \right) + \frac{1}{4} \frac{d^3}{dt^3} \left(\frac{\partial \varepsilon_\sigma}{\partial \dot{q}^{\nu}} - \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial \dot{q}^{\sigma}} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{d^5}{dt^5} \left(\frac{\partial \varepsilon_\sigma}{\partial q_5^\nu} - \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial q_5^\sigma} \right). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Následující tvrzení je podstatné pro aplikace variační posloupnosti. Ukazujeme, že Eulerovy-Lagrangeovy výrazy (4.10) a Helmholtzovy výrazy (4.12) jsou totožné s koeficienty tříd $E([\rho])$ (4.6), (4.7) ve variační posloupnosti.

Věta 4.4. *Nechť $W \subset Y$ je otevřená množina a (V, ψ) , $\psi = (t, q^\sigma)$, je fibrovaný souřadnicový systém na W .*

(a) *Nechť $\rho \in \Omega_1^2 W$ má v kontaktní bázi vyjádření (4.1). Pak*

$$E([\rho]) = \varepsilon_\sigma([d\rho]) \omega^\sigma \wedge dt,$$

přičemž

$$\varepsilon_\sigma([d\rho]) = E_\sigma(L),$$

kde L je Lagrangeova funkce (4.9) a $E_\sigma(L)$ Eulerovy-Lagrangeovy výrazy (4.10) asociované s L .

(b) *Nechť $\rho \in \Omega_2^2 W$ má v kontaktní bázi vyjádření (4.3). Pak*

$$\begin{aligned} E([\rho]) &= \frac{1}{2} \varepsilon_{\nu\sigma}([d\rho]) \omega^\nu \wedge \omega^\sigma \wedge dt \\ &\quad + \kappa_{\nu,\sigma}([d\rho]) \omega_1^\nu \wedge \omega^\sigma \wedge dt + \frac{1}{2} \kappa_{\nu\sigma}([d\rho]) \omega_2^\nu \wedge \omega^\sigma \wedge dt \\ &\quad + \tau_{\nu,\sigma}([d\rho]) \omega_3^\nu \wedge \omega^\sigma \wedge dt + \frac{1}{2} \tau_{\nu\sigma}([d\rho]) \omega_4^\nu \wedge \omega^\sigma \wedge dt, \end{aligned}$$

přičemž

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\nu\sigma}([d\rho]) &= H_{\sigma\nu}^0(\varepsilon_\mu), \quad \kappa_{\nu,\sigma}([d\rho]) = H_{\sigma\nu}^1(\varepsilon_\mu), \quad \kappa_{\nu\sigma}([d\rho]) = H_{\sigma\nu}^2(\varepsilon_\mu), \\ \tau_{\nu,\sigma}([d\rho]) &= H_{\sigma\nu}^3(\varepsilon_\mu), \quad \tau_{\nu\sigma}([d\rho]) = H_{\sigma\nu}^4(\varepsilon_\mu), \quad H_{\sigma\nu}^5(\varepsilon_\mu) = 0, \end{aligned}$$

kde ε_μ je dáno vztahem (4.11) a $H_{\sigma\nu}^l(\varepsilon_\mu)$ jsou Helmholtzovy výrazy (4.12) asociované s ε_μ .

Poznámka 4.5. Podle Věty 4.4 jsou morfismy

$$E : \Omega_1^2 W / \Theta_1^2 W \rightarrow \Omega_2^2 W / \Theta_2^2 W, \text{ resp. } E : \Omega_2^2 W / \Theta_2^2 W \rightarrow \Omega_3^2 W / \Theta_3^2 W,$$

ve variační posloupnosti druhého řádu totožné s *Eulerovým-Lagrangeovým zobrazením*, resp. *Helmholtzovým zobrazením* variačního počtu. Variační posloupnost na konečných jetových prodlouženích fibrované variety je tudíž nástrojem ke studiu lokálních a globálních aspektů variační teorie. Jádrem a obraz Eulerova-Lagrangeova zobrazení a Helmholtzova zobrazení jsou definovány a můžeme studovat kohomologické grupy odpovídajícího komplexu globálních řezů. Tím je řešen globální inverzní problém variačního počtu.

Z exaktnosti variační posloupnosti vyplývá, že pokud Helmholtzovy výrazy (4.12) jsou identicky nulové, $H_{\sigma\nu}^l(\varepsilon_\mu) = 0$, pak výrazy ε_μ (4.11) jsou *lokálně variační*: lokálně jsou ε_μ pro nějaké L tvaru

$$\varepsilon_\mu = \frac{\partial L}{\partial q^\sigma} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\sigma} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}^\sigma}. \quad (4.13)$$

Helmholtzovy podmínky $H_{\sigma\nu}^l(\varepsilon_\mu) = 0$ jsou tak *podmínky lokální variačnosti* (2-formy, systému funkcí). Z lokální variačnosti ovšem *nemusí* vyplývat globální variačnost dané 2-formy (4.4), tedy nemusí existovat globálně definovaná funkce L s vlastností (4.13). Z vlastností variačních posloupností svazků diferenciálních forem na fibrovaných varietách vyplývá, že postačující (topologickou) podmínkou existence globálního Lagrangianu $\lambda = Ldt$ je nulová druhá De Rhamova kohomologická grupa fibrované variety Y . Je-li tedy source forma (třída 2-formy) $\varepsilon = \varepsilon_{\sigma\omega}^\sigma \wedge dt$ (4.4) lokálně variační a zároveň $H^2 Y = 0$, pak ε je globálně variační.

Je-li například $Y = \mathbf{R}^m$, platí $H^k \mathbf{R}^m = 0$ pro každé k , $1 \leq k \leq m$, a tudíž lokální variačnost libovolné source formy (4.4) na $\mathbf{R}^m$ implikuje globální variačnost. Podobně, je-li Y Möbiova páska, pak lokální variačnost implikuje globální variačnost. Naopak, pokud je $Y = S^2$ sféra nebo $Y = S^1 \times S^1$ torus, platí $H^2 S^2 = H^2(S^1 \times S^1) = \mathbf{R} \neq 0$, a tudíž lokální variačnost source formy obecně neimplikuje globální variačnost.

Podrobnější diskuse globálních aspektů variačních posloupností na fibrovaných varietách přesahuje rámec tohoto článku a lze ji nalézt v pracích Krupka [1, 2, 3].

REFERENCE

- [1] D. Krupka: *Variational sequences on finite order jet spaces*, in: D. Krupka, J. Janyška (eds.): *Diff. Geom. Appl., Proc. Conf.*, Brno, Czechoslovakia, 1989, 236–254, World Scientific, Singapore, 1990.
- [2] D. Krupka: *Lectures on Variational Sequences*, Open Education and Sciences, Opava, Czech Republic, 1995.
- [3] D. Krupka: *Variational sequences in mechanics*, *Calc. Var.* **5** (1997), 557–583.
- [4] D. Krupka: *Variational sequences and variational bicomplexes*, in: *Diff. Geom. Appl., Proc. Conf.*, Brno, August 1998, 525–531, Masaryk University in Brno, 1999.
- [5] D. Krupka: *Introduction to Global Variational Geometry*, Lepage Inst. Monograph Ser., No. 1, 2012.
- [6] D. Krupka, J. Šeděnková: *Variational sequences and Lepage forms*, in: *Diff. Geom. Appl., Proc. Conf.*, Prague, August 2004, 617–627, Charles University, Prague, 2005.
- [7] D. Krupka, Z. Urban, J. Volná: *Variational projectors in fibred manifolds*, *Miskolc Math. Notes* **14** (2013), 503–516.
- [8] J. Musilová: *Variational sequence in higher order mechanics*, in: *Diff. Geom. Appl., Proc. Conf.*, Brno, 1995, 611–624, Masaryk University in Brno, 1996.
- [9] D. J. Saunders: *The Geometry of Jet Bundles*, *Lecture Notes in Mathematics* **142**, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [10] Z. Urban: *Variational Sequences in Mechanics on Grassmann Fibrations*, Ph.D. Thesis, University of Ostrava, Czech Republic, 75 pp., 2011.
- [11] Z. Urban, D. Krupka: *Variational sequences in mechanics on Grassmann fibrations*, *Acta Appl. Math.* **112** (2010), 225–249.
- [12] J. Volná, Z. Urban: *The interior Euler-Lagrange operator in field theory*, *Math. Slovaca*, to appear.
- [13] R. Vitolo: *Variational sequences*, in: D. Krupka and D. Saunders (eds.): *Handbook of Global Analysis*, 1117–1164, Elsevier, Amsterdam, 2007.

Zbyněk Urban, Lepage Research Institute, Slatinky 186, 783 42 Slatinice, Česká republika,
 Katedra matematiky a fyziky, Fakulta elektrotechniky a informatiky, Univerzita Pardubice, Studentská 95, 532 10 Pardubice, Česká republika,
e-mail: zbynek.urban@lepageri.eu

NAVIER–STOKESOVY ROVNICE: SLABÉ ŘEŠENÍ, JEHO JEDNOZNAČNOST A REGULARITA

MILAN POKORNÝ

ABSTRAKT. Tento článek je stručným úvodem do studia vlastností slabých řešení evolučních Navier–Stokesových rovnic nestlačitelného proudění. Nejprve jsou představeny různé typy řešení a vztahy mezi nimi. Poté se článek věnuje slabému řešení, otázce jeho existence, jednoznačnosti a regularitě v různých situacích a také podmíněné regularitě (kritéria regularity). Je určen spíše pro nespecialisty v daném oboru, kteří jsou seznámeni se základy teorie slabých řešení parciálních diferenciálních rovnic.

1. ÚVOD

Nechť oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je vyplněná látkou, kterou modelujeme jako kontinuum. Pro jednoduchost předpokládejme, že tato oblast je neměnná v čase. Na základě představ mechaniky kontinua (viz např. [23]) je možno odvodit následující integrální tvary bilance hmoty a energie¹

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_B \varrho \, dx + \int_{\partial B} \varrho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS &= 0, \\ \frac{d}{dt} \int_B \varrho \mathbf{u} \, dx + \int_{\partial B} \varrho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \int_{\partial B} \mathbb{T} \mathbf{n} \, dS + \int_B \varrho \mathbf{f} \, dx. \end{aligned}$$

Zde skalární pole ϱ reprezentuje hustotu látky, vektorové pole $\mathbf{u}$ rychlostní pole, tenzor $\mathbb{T}$ je tenzor napětí (vektor $\mathbb{T} \mathbf{n}$ reprezentuje plošné síly v kontinuu) a $\mathbf{f}$ je vektor objemových sil (např. tíhová síla). Množina B je libovolná měřitelná podmnožina Ω s dostatečně hladkou hranicí, aby všechny integrály výše měly smysl.

Správně bychom měli ještě uvažovat bilanci momentu hybnosti a celkové energie. My ale budeme předpokládat, že hustota vnitřní energie je konstantní v prostoru i v čase (pak je bilance celkové energie, alespoň pro hladké funkce, důsledkem bilance hybnosti) a že látka nemá žádné vnitřní momenty hybnosti. Potom z bilance momentu hybnosti pouze plyne, že tenzor napětí $\mathbb{T}$ je symetrický.

Na základě standardních úvah (podělením $|B|$ a limitou $|B| \rightarrow 0^+$ spolu se záměnou derivace a integrálu, za předpokladu dostatečné hladkosti všech veličin) lze ze systému integrálních bilančních rovnic odvodit jejich následující diferenciální

2010 MSC. Primární 35Q30, 76D05.

Klíčová slova. Navier–Stokesovy rovnice, slabé řešení, jednoznačnost, regularita řešení.

Práce byla podporována grantem GA ČR č. 201/09/0917 a projektem A-Math-Net – Síť pro transfer znalostí v aplikované matematice (CZ.1.07/2.4.00/17.0100).

¹Poznamenejme, že všechny integrály v článku chápeme v Lebesgueově smyslu.

tvar²

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial(\varrho \mathbf{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \operatorname{div} \mathbb{T} = \varrho \mathbf{f}. \quad (1.2)$$

Později ale uvidíme, že tento postup v sobě skrývá jistý problém.

Budeme předpokládat, že daná látka je nestlačitelná, tj. objem její libovolné části se v čase nemění. To je ekvivalentní podmínce

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (1.3)$$

Budeme-li dále předpokládat, že látka je homogenní (tj. hustota je v počátečním čase konstantní v prostoru), potom hustota je rovna kladné konstantě a rovnice (1.1) se redukuje na (1.3) s tím, že hodnota ϱ v rovnici (1.2) je rovna předepsané konstantě.

Máme tedy celkem 4 rovnice pro 9 neznámých: 3 složky rychlosti a 6 složek symetrického tenzoru napětí. Proto musíme ještě něco říci o tenzoru napětí. Za předpokladu, že studujeme newtonovskou tekutinu a přijímáme princip nezávislosti na pozorovateli, vychází

$$\mathbb{T} = 2\mu \mathbb{D}(\mathbf{u}) - p\mathbb{I},$$

kde $\mu > 0$ je dynamická viskozita, p je tlak a $\mathbb{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$ je symetrická část gradientu rychlosti. Pokud ve vztahu (1.2) podělíme hustotou, přeznačíme tlak a přejdeme ke kinetické viskozitě $\nu = \mu/\varrho$, dostáváme systém rovnic

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

standardně nazývaný Navier–Stokesovy rovnice pro nestlačitelné proudění (zkráceně též nestlačitelné Navier–Stokesovy rovnice). Tento systém budeme studovat na časoprostorovém válci $I \times \Omega$, přičemž $I = (0, T)$ je časový interval.

Tento systém musíme doplnit o počáteční a okrajové podmínky. Počáteční podmínku je potřeba předepsat pro rychlost

$$\mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (1.5)$$

Problematika okrajových podmínek je komplikovanější. Není příliš zřejmé, jaké okrajové podmínky jsou fyzikálně správné, zejména v případě, kdy na části hranice tekutina vtéká a na části vytéká. Abychom si situaci zjednodušili (což je ale pravda jen částečně), budeme v tomto článku uvažovat homogenní Dirichletovu podmínku

$$\mathbf{u}(t, x) = \mathbf{0}, \quad t \in I, x \in \partial\Omega. \quad (1.6)$$

V některých případech, pokud se chceme zabývat jen samotným systémem rovnic a chceme se zcela vyhnout problémům s okrajovou podmínkou, můžeme uvažovat periodické okrajové podmínky, popř. můžeme brát $\Omega = \mathbb{R}^3$, tj. uvažovat Cauchyovu úlohu. Podmínka na chování řešení v nekonečnu (jistý pokles řešení k nule) je nahrazen slabší podmínkou konvergence jistých integrálů.

Klasickým řešením úlohy (1.4)–(1.6) nazýváme dvojici funkcí $(\mathbf{u}, p)$, přičemž vektorová funkce $\mathbf{u}$ je spojitá na $[0, T) \times \bar{\Omega}$ a má na $(0, T) \times \Omega$ spojitě druhé parciální derivace podle prostorových proměnných a první parciální derivaci podle

²Symbol $\otimes$ označuje tenzorový součin vektorů. Tedy $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j$.

času, funkce p má na $(0, T) \times \Omega$ spojitě první parciální derivace podle prostorových proměnných, obě splňují rovnosti (1.4) ve smyslu rovnosti spojitých funkcí a rovnosti (1.5), resp. (1.6) jsou splněny ve smyslu limit pro $t \rightarrow 0^+$, resp. $x \rightarrow \partial\Omega$. Jak uvidíme později, i když jsou všechna data libovolně hladká, není zaručeno, že takové řešení existuje.

Systém rovnic (1.2) byl navržen francouzským inženýrem CLAUDE-LOUISEM NAVIEREM v roce 1822 jako zobecnění Eulerových rovnic pro případ proudění viskózní tekutiny. Vzhledem ke způsobu odvození nebyl model ve své době přijat. Stalo se tak teprve po roce 1845, kdy britský matematik a fyzik irského původu GEORGE GABRIEL STOKES tento systém odvodil na základě představ mechaniky kontinua (odvodil i rovnice pro stlačitelné proudění). K intenzivnějšímu matematickému studiu tohoto systému rovnic dochází teprve ve dvacátých letech minulého století díky pracím švédského teoretického fyzika CARLA WILHELMA OSEENA ([39]). Na jeho výsledky navázal ve své doktorské práci francouzský matematik JEAN LERAY ([32], [31]). Formuloval celou řadu zajímavých problémů, některé vyřešil, jiné zůstaly otevřené po mnoho let či dokonce jsou otevřené dodnes. Z našeho pohledu je nejzajímavější studium řešitelnosti Cauchyovy úlohy v $\mathbb{R}^2$ a v $\mathbb{R}^3$. Zatímco ve dvojdimenzionálním případě se mu podařilo dokázat existenci klasických řešení, ve trojdimenzionálním případě neuspěl. Definoval proto nový typ řešení, které nazval „solution tourbulante“, jehož existenci byl schopen dokázat. Z dnešního pohledu jde vlastně o slabé řešení splňující silnou energetickou nerovnost. On sám věřil spíše v to, že klasické řešení tohoto systému obecně neexistuje, že v konečném čase se stane řešení singulární. Otázka, zda je tomu tak, je dodnes otevřená a patří mezi sedm problémů pro třetí tisíciletí, za jejichž řešení nabízí Clay Mathematical Institute odměnu milión amerických dolarů (viz [1]).

Po druhé světové válce se Jean Leray k problémům matematické mechaniky tekutin nevrátil. V jeho stopách však pokračovala celá řada světově uznávaných odborníků. Zmíňme zejména EBERHARDA HOPFA ([24]), OLGU ALEXANDROVNU LADYŽENSKOU ([29]), JAKUES-LOUISE LIONSE ([33]), PIERRE-LOUISE LIONSE ([34]) aj. Z významných českých matematiků se této problematice věnovali či věnují především JINDŘICH NEČAS ([36]) a VLADIMÍR ŠVERÁK ([43] nebo [15]).

Dříve než se podíváme na zobecnění pojmu klasického řešení, připomeňme některé prostory funkcí, které budeme v dalším potřebovat.

Lebesgueovy prostory budeme značit $L^p(\Omega)$; pro $1 \leq p \leq \infty$ jde o Banachovy prostory se standardní normou $\|\cdot\|_p$. Sobolevovy prostory značíme $W^{k,p}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$; spolu s normou $\|\cdot\|_{k,p}$ jde opět o Banachovy prostory. Prostor $W_0^{k,p}(\Omega)$ potom označuje funkce z uzávěru hladkých funkcí s kompaktním nosičem v Ω v normě $\|\cdot\|_{k,p}$. Poznamenejme jen, že pro oblasti Ω s lipschitzovskou hranicí a $p < \infty$ je prostor $W_0^{1,p}(\Omega)$ totožný s podprostorem $W^{1,p}(\Omega)$ takovým, že funkce mají na hranici Ω nulovou hodnotu ve smyslu stop. Duální prostor k $W_0^{1,p}(\Omega)$ budeme značit pro $1 < p < \infty$ $W^{-1,p'}(\Omega)$, kde $p' = \frac{p}{p-1}$ je hölderovsky sdružený exponent k p . Vektorové veličiny bude psány tučně, tenzorové veličiny pak speciálním fontem. Analogické značení budeme používat i pro příslušné prostory funkcí.

Budeme dále potřebovat prostory funkcí s nulovou divergencí. Budeme pracovat s prostorem ($1 \leq p < \infty$)

$$\mathbf{W}_{0,\text{div}}^{1,p}(\Omega) = \overline{\{\mathbf{v} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega); \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}}^{\|\cdot\|_{1,p}},$$

pro který pro oblasti s lipschitzovskou hranicí a $1 < p < \infty$ platí

$$\mathbf{W}_{0,\text{div}}^{1,p}(\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega); \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}.$$

Dále připomeňme Helmholtzův rozklad, tj. libovolnou vektorovou funkci z $\mathbf{L}^2(\Omega)$ lze psát jako

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \nabla q,$$

kde pro Ω s lipschitzovskou hranicí

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 \in \mathbf{L}_{0,\text{div}}^2(\Omega) &= \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega); \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ ve smyslu } \mathcal{D}'(\Omega); \\ &\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ na } \partial\Omega \text{ ve smyslu } W^{-\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)\} \end{aligned}$$

a $q \in W^{1,2}(\Omega)$. Navíc je tento rozklad ortogonální.

Protože studujeme evoluční úlohy, budeme pracovat s Bochnerovými prostory. Nechť X je Banachův prostor. Budeme pracovat s prostory spojitých funkcí na intervalu I s hodnotami v X , tj. $C(I; X)$, s prostory spojitých funkcí na intervalu I ve slabé topologii X značenými $C(I; X_w)$ a s prostory bochnerovsky integrovatelných funkcí přes interval I s hodnotami v X takových, že norma v X má konečnou L^p normu přes I , $L^p(I; X)$. Další informace o všech výše uvedených prostorech funkcí je možno nalézt například v [2], [19], [20] nebo v [41].

Tento článek se věnuje jen jednomu vybranému problému z velkého množství možných úloh, se kterými se můžeme setkat při matematické analýze úloh proudění tekutin. I když se omezíme jen na malou třídu modelů, tj. na matematický popis nestlačitelného proudění newtonovské tekutiny, zůstane počet zajímavých otevřených problémů stále velký. Jen tak na okraj, v minulém roce byl vyřešen jeden otevřený problém týkající se stacionárního proudění ve dvou dimenzích s nehomogenní okrajovou podmínkou za předpokladu, že hranice oblasti má více komponent, viz [26]. I tak analogický problém ve třech dimenzích zůstává otevřený. Tento článek se ale soustředí především na problematiku slabého řešení evolučních Navier–Stokesových rovnic ve prostorové dimenzi tři. I když jde ve své podstatě o nejjednodušší reálný model tekutiny a je intenzívně studován matematiky z pohledu analýzy i z pohledu numerického řešení, jsou fundamentální otázky existence a regularity (tj. hladkosti) řešení stále otevřené.

Tento systém rovnic je prototypem na první pohled relativně „jednoduchého“ nelineárního parabolického problému, kde nicméně klasické ale i různé speciální metody selhávají a nedaří se nalézt odpověď na základní otázky. A to i přesto, že se ročně objevují stovky článků, které se věnují Navier–Stokesovým rovnicím. Důvodem sepsání tohoto článku je dát českému čtenáři základní informace ohledně těchto rovnic. A to nejen výsledků, ale i metod, jak se dají dané výsledky dokázat. V některých případech je důkaz uveden celý, někdy jsou uvedeny jen základní myšlenky či je důkaz vynechán úplně. Pokud někoho tato problematika zaujme natolik, že by si chtěl přečíst něco více, v českém jazyce existuje přehledový článek [37], kromě něj potom pouze online dostupná skripta autora tohoto článku (viz [41], [42]). V anglicky psané literatuře pak existuje celá řada monografií (např. [44],

[14], [34]), pro čtenáře znalého francouzského jazyka pak doporučuji pěknou knihu [7]. Z novějších přehledových prací pak zmiňme ještě [35], tato práce se ale dívá na Navier–Stokesovy rovnice jako na speciální případ jistých newtonovských modelů (tzv. tekutiny s mocninným růstem).

2. RŮZNÉ TYPY ŘEŠENÍ NAVIER–STOKESOVÝCH ROVNIC

Výše jsme uvedli definici klasického řešení. Jak bylo zmíněno, existence klasického řešení není zřejmá v prostorové dimenzi tři ani v situacích, kdy všechna data úlohy jsou libovolně hladká. Proto je vhodné zavést jiné typy řešení a pokusit se studovat, za jakých podmínek tato řešení existují.

My se v dalších částech této práce budeme věnovat *slabému řešení*. Myšlenka jeho zavedení je následující. Pokud rovnici (1.4) vynásobíme hladkou funkcí φ s kompaktním nosičem v časoprostoru a formálně provedeme integraci per partes, resp. použijeme Gaußovu formuli, dostáváme

$$\int_0^T \int_{\Omega} \left(-\mathbf{u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} - (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) : \nabla \varphi + \nu \nabla \mathbf{u} : \nabla \varphi - p \operatorname{div} \varphi - \mathbf{f} \cdot \varphi \right) dx dt = 0.$$

Nevýhodou je, že nám ve formulaci zůstává tlak. Proto budeme předpokládat, že máme $\operatorname{div} \varphi = 0$. Navíc místo integrace per partes u časové derivace nahradíme integrál přes prostor vhodným funkcionálem a dostáváme následující formulaci:

Definice 2.1. Necht $\mathbf{f} \in L^2(0, T; \mathbf{W}^{-1,2}(\Omega))$, $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{L}_{0,\operatorname{div}}^2(\Omega)$. Funkci $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; \mathbf{W}_{0,\operatorname{div}}^{1,2}(\Omega))$ takovou, že její slabá derivace podle času $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L^q(0, T; (\mathbf{W}_{0,\operatorname{div}}^{1,2}(\Omega))^*)$ pro jisté $q \geq 1$, nazýváme *slabým řešením* úlohy (1.2)–(1.5), jestliže

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \varphi \right\rangle_{(\mathbf{W}_{0,\operatorname{div}}^{1,2}(\Omega))^*, \mathbf{W}_{0,\operatorname{div}}^{1,2}(\Omega)} + \int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \varphi + \nu \nabla \mathbf{u} : \nabla \varphi) dx \\ = \langle \mathbf{f}, \varphi \rangle_{\mathbf{W}^{-1,2}(\Omega), \mathbf{W}_{0,\operatorname{div}}^{1,2}(\Omega)} \end{aligned}$$

pro všechna $\varphi \in \mathbf{W}_{0,\operatorname{div}}^{1,2}(\Omega)$ a s.v. $t \in (0, T)$ a počáteční podmínka je splněna ve smyslu

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} \mathbf{u}(t, \cdot) \cdot \mathbf{w} dx = \int_{\Omega} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{w} dx \quad (2.1)$$

pro všechna $\mathbf{w} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$.

Poznamenejme, že splnění počáteční podmínky (2.1) souvisí s tím, že funkce $\mathbf{u}$ patří do prostorů uvedených v definici výše je po změně na množině míry nula z prostoru $C([0, T]; \mathbf{L}_w^2(\Omega))$, a proto má limita smysl.

Pokud bychom formálně vzali za testovací funkci $\varphi := \mathbf{u}$ a předpokládali, že tato funkce je dostatečně hladká, dostali bychom po integraci přes časový interval $(0, t) \subset (0, T)$ tzv. *energetickou rovnost*

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{u}(t, \cdot)|^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx d\tau = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{u}_0|^2 dx + \int_0^t \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle d\tau.$$

K získání této rovnosti jsme použili rovnost

$$\int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla |\mathbf{u}|^2 dx = 0. \quad (2.2)$$

Ta ale platí pouze pro dostatečně hladké funkce, aby se uvedená aplikace Gaußovy věty dala ospravedlnit díky aproximaci sobolevovských funkcí s nulovou stopou pomocí funkcí hladkých s kompaktním nosičem. V této souvislosti zmiňme, že obecně nemůžeme použít řešení jako testovací funkci ve slabé formulaci, tedy nevíme, zda je energetická rovnost splněna. Na druhou stranu, jak uvidíme v další části, můžeme získat energetickou rovnost pro jistou aproximaci naší úlohy a limitním přechodem získáme místo rovnosti nerovnost. Dostáváme tedy:

Definice 2.2. Slabé řešení Navier–Stokesových rovnic splňuje *silnou energetickou nerovnost*, jestliže

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{u}(t, \cdot)|^2 dx + \int_s^t \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx d\tau \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{u}(s, \cdot)|^2 dx + \int_s^t \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle d\tau \quad (2.3)$$

pro s.v. $s \geq 0$ (včetně $s = 0$) a všechna $t \in (s, T]$. Slabé řešení splňuje *energetickou nerovnost*, jestliže je (2.3) splněno pro $s = 0$ a s.v. $t \in (0, T)$. Slabé řešení, které splňuje energetickou nerovnost, budeme nazývat *Leray–Hopfovou slabé řešení*.

Poznamenejme, že zde není terminologie jednotná a někdy se Leray–Hopfovým řešením nazývá slabé řešení splňující silnou energetickou nerovnost.

Všimněme si, že slabou formulaci jsme formálně získali z klasické formulace; ta vyplynula z bilančních rovnic v integrálním tvaru za předpokladu, že řešení je dostatečně hladké. Zdánlivě jsme tedy odvodili slabou formulaci za předpokladu, že řešení má takovou hladkost, že existuje klasické řešení, tj. pokud klasické řešení neexistuje, nemá smysl ani slabá formulace. Naštěstí lze slabou formulaci odvodit přímo z integrálních bilančních rovnic. Toho si všiml již C.W. Oseen ve své knize [39], kde ovšem místo Lebesgueova integrálu pracoval s vícerozměrným integrálem Riemannovým. Tím jsou jeho podmínky na řešení o něco silnější, než kolik je třeba při použití Lebesgueova integrálu.

V příští kapitole naznačíme důkaz existence Leray–Hopfova slabého řešení a v dalších částech si řekneme něco o jeho vlastnostech. Všimněme si též, že slabým řešením je pouze pole rychlosti, musíme tedy také ukázat, jak z jeho znalosti získat tlak. Nejprve ale uveďme ještě další tři definice řešení Navier–Stokesových rovnic.

Prvním bude tzv. *vhodné slabé řešení* („suitable weak solution“). Tento pojem pochází z článku [8] autorů LUISE CAFFARELLIHO, ROBERTA KOHNA a LOUISE NIRENBERGA, kteří na základě předchozích prací VLADIMIRA SCHEFFERA tento pojem zavedli za účelem studia lokální regularity řešení Navier–Stokesových rovnic. Přesněji:

Definice 2.3. Nechť $\mathbf{f} \in L^2(0, T; \mathbf{L}^{\frac{6}{5}}(\Omega))$, $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{L}_{0,\text{div}}^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Dvojice $(\mathbf{u}, p)$ je vhodným slabým řešením naší úlohy (1.2)–(1.5), jestliže

- $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; \mathbf{W}_{0,\text{div}}^{1,2}(\Omega))$
- $p \in L^{\frac{3}{2}}((0, T) \times \Omega)$
- dvojice $(\mathbf{u}, p)$ je distributivním řešením systému (1.2)
- počáteční podmínka je splněna ve smyslu (2.1)

- je splněna zobecněná energetická nerovnost, tj. pro každé $\Phi \in C_0^\infty((0, T) \times \Omega)$, $\Phi \geq 0$ a s.v. $t \in (0, T)$, platí

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{u}(t, \cdot)|^2 \Phi(t, \cdot) \, dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 \Phi \, dx \, d\tau &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Delta \Phi \right) \, dx \, d\tau \\ &+ \int_0^t \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + p \right) \mathbf{u} \cdot \Phi \, dx \, dt + \int_0^t \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \Phi \, dx \, d\tau. \end{aligned}$$

Zobecněná energetická nerovnost se ve formě rovnosti dostane formálně testováním (1.4) funkcí $\mathbf{u}\Phi$ a integrací přes $(0, t)$. Díky konstrukci řešení pomocí vhodné aproximace a následným limitním přechodem se dostane místo rovnosti nerovnost. Podobně jako u slabého řešení totiž není jasné, že můžeme pro distributivní řešení splňující pouze předpoklady o hladkosti z Definice 2.3 zobecněnou energetickou nerovnost získat. Dále poznamenejme, že díky vlastnostem $\mathbf{u}$ a p je možno dostat odhad na časovou derivaci $\mathbf{u}$, rychlost je tedy slabě spojitá a splnění počáteční podmínky má smysl. Zřejmě vhodné slabé řešení je řešením slabým, lze pak ukázat, že je dokonce i Leray–Hopfovým. Na druhou stranu, při dodatečném předpokladu na počáteční podmínku a hladkost oblasti je možno ukázat, že tlak příslušný slabému řešení patří do $L^{\frac{5}{3}}((0, T) \times \Omega)$. Pro slabé řešení (i když splňuje energetickou nerovnost) ale obecně nevíme, zda je splněna zobecněná energetická nerovnost. Obecně tedy slabé řešení nemusí být vhodným slabým řešením. Nakonec poznamenejme, že vhodné slabé řešení existuje za vhodných předpokladů na $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{f}$ a Ω , které jsou restriktivnější než podmínky uvedené v definici výše, viz např. [8] nebo [30]. V češtině je potom možno si něco o tomto typu řešení jakož i o některých aplikacích přečíst v online dostupných skriptech [42].

Další typ řešení, o kterém se stručně zmíníme, se v anglicky psané literatuře nazývá „mild solution“ a byl zaveden v práci [18]. Pokud víme, adekvátní český překlad neexistuje, snad by se dalo mluvit o „jemném“ či „mírném“ řešení, ale ani jeden překlad nám nepřipadá vhodný. Jeho myšlenka spočívá v tom, že si konvektivní člen přesuneme na pravou stranu a pomocí Duhamelovy formule zapíšeme řešení příslušného lineárního problému, tj. dostáváme následující integrální identitu

$$\mathbf{u}(t, x) = e^{tA} \mathbf{u}_0 - \int_0^t e^{(t-s)A} P \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \, ds,$$

kde e^{tA} označuje příslušnou Stokesovu semigrupu. Tento typ řešení je vhodný pro studium řešení, které je lokální v čase nebo odpovídá malým datům v různých funkčních prostorech, obecnějších než těch, které připouštíme u slabého řešení. Na druhou stranu, díky způsobu důkazu existence, který je založen na aplikaci Banachovy věty o pevném bodu v prostorech typu $C([0, T]; X)$ pro vhodný Banachův prostor X , není možno dokázat existenci globálního řešení v čase bez omezení na velikost dat v nějakém prostoru. My se nadále tímto typem řešení nebudeme zabývat.

Posledním typem řešení je velmi slabé řešení, viz např. [3], [16]. Jeho definice je založena na tom, že ve slabé formulaci se všechny prostorové a časové derivace pomocí aplikace Gaußova vzorce převedou na testovací funkce a předpokládá se lepší integrovatelnost $\mathbf{u}$ přes časoprostor. Tento typ řešení je zajímavý spíše pro nehomogenní okrajovou podmínku či nenulovou divergenci, takže ho nebudeme dále zmiňovat.

3. EXISTENCE SLABÉHO ŘEŠENÍ

V této kapitole si ukážeme existenci slabého řešení, a dokonce i Leray–Hopfova řešení, pro omezené oblasti v $\mathbb{R}^N$, $N = 2, 3$. Vzhledem k tomu, že důkaz je poměrně dobře znám a je z pohledu teorie parabolických rovnic relativně standardní, omezíme se na hlavní kroky důkazu a na případně rozdíly vůči důkazu pro nelineární parabolickou rovnici. Na případné další detaily odkazujeme čtenáře na [41] či na standardní monografie [34] či [44].

Máme následující tvrzení:

Věta 3.1. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N = 2, 3$, je omezená oblast, $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{L}_{0,\text{div}}^2(\Omega)$, $\mathbf{f} \in L^2(0, T; \mathbf{W}^{-1,2}(\Omega))$. Potom existuje alespoň jedno Leray–Hopfovo slabé řešení úlohy (1.2)–(1.5). Navíc, toto řešení splňuje*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|\mathbf{u}(t, \cdot) - \mathbf{u}_0\|_2 = 0.$$

Poznámka 3.2. Tvrzení Věty 3.1 platí i pro $\mathbf{f} \in L^2(0, T; (\mathbf{W}_{0,\text{div}}^{1,2}(\Omega))^*)$. Potíže ale nastanou v okamžiku, kdy se budeme snažit zrekonstruovat tlak (viz Kapitola 4), obecně v tomto případě nemusí existovat. Proto budeme uvažovat silnější podmínku na pravou stranu.

Idea důkazu Věty 3.1. Nejprve si uvědomme, že splnění počáteční podmínky v silném smyslu je důsledkem slabé spojitosti a energetické nerovnosti. Přesněji, slabá spojitost nám dává

$$\liminf_{t \rightarrow 0^+} \|\mathbf{u}(t, \cdot)\|_2 \leq \|\mathbf{u}_0\|_2,$$

zatímco energetická nerovnost implikuje

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \|\mathbf{u}(t, \cdot)\|_2 \geq \|\mathbf{u}_0\|_2.$$

Protože

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbf{u}(t, \cdot) = \mathbf{u}_0$$

slabě v $\mathbf{L}^2(\Omega)$, plyne odsud a z vlastností Hilbertových prostorů silná konvergence. Dále připomeňme, že v důsledku toho, v jakých prostorech leží $\mathbf{u}$ a její časová derivace, je nutně $\mathbf{u}$ slabě spojitá v $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Stačí tedy dokázat existenci slabého řešení, patřícího do příslušných prostorů, takového, že nabývá počáteční podmínku $\mathbf{u}_0$ a splňuje energetickou nerovnost.

Aproximativní řešení budeme konstruovat pomocí Galerkinovy metody. Nechť $\{\mathbf{w}^i\}_{i=1}^\infty$ tvoří úplný ortogonální systém v prostoru $\mathbf{W}_{0,\text{div}}^{1,2}(\Omega)$ a nechť tento systém je ortonormální v $\mathbf{L}_{0,\text{div}}^2(\Omega)$. Příkladem takového systému jsou vhodně nanormované vlastní funkce Stokesova operátoru. Hledejme pro každé $n \in \mathbb{N}$ funkci

$$\mathbf{u}^n(t, x) = \sum_{i=1}^n c_i^n(t) \mathbf{w}^i(x)$$

tak, že pro každé $j = 1, 2, \dots, n$ platí

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^n}{\partial t} \cdot \mathbf{w}^j + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n) \cdot \mathbf{w}^j + \nu \nabla \mathbf{u}^n : \nabla \mathbf{w}^j \right) dx \\ = \langle \mathbf{f}, \mathbf{w}^j \rangle_{\mathbf{W}^{-1,2}(\Omega), \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)}, \\ \mathbf{u}^n(0, x) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{w}^i, \quad a_i = \int_{\Omega} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{w}^i dx. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Systém (3.1) je vlastně systémem obyčejných diferenciálních rovnic pro neznámé funkce $c_j^n(t)$, $j = 1, \dots, n$, a na základě Carathéodoryho teorie dostáváme existenci (lokálně v čase) zobecněného řešení. Toto řešení bude globální v čase, pokud se nám podaří ukázat jisté apriorní odhady.

Všimněme si, že když vynásobíme j -tou rovnicí funkcí $c_j^n(t)$ a sečteme pro j od 1 do n , dostáváme díky tomu, že konvektivní člen je nulový (viz (2.2)), rovnost

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\mathbf{u}^n(t, \cdot)|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}^n|^2 dx = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}^n \rangle.$$

Odsud plyne nejen to, že řešení existuje na maximálním možném intervalu $(0, T)$, ale také to, že

$$\|\mathbf{u}^n\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} + \|\mathbf{u}^n\|_{L^2(0,T;\mathbf{W}^{1,2}(\Omega))} \leq C(\mathbf{u}_0, \mathbf{f})$$

a je splněna aproximativní energetická rovnost

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{u}^n(t, \cdot)|^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}^n|^2 dx d\tau = \int_0^t \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}^n \rangle d\tau + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{u}^n(0, \cdot)|^2 dx.$$

Nyní, přímo z definice a z rovnosti (3.1), můžeme získat následující duální odhad časové derivace

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial \mathbf{u}^n}{\partial t} \right\|_{L^q(0,T;(\mathbf{W}_{0,\text{div}}^{1,2}(\Omega))^*)} \\ & \leq C \sup_{\varphi \in L^{q'}(0,T;\mathbf{W}_{0,\text{div}}^{1,2}(\Omega)); \|\varphi\| \leq 1} \int_0^T \int_{\Omega} \left(\nabla \mathbf{u}^n \nabla \varphi + (\mathbf{u}^n \otimes \mathbf{u}^n) : \nabla \varphi \right) dx dt + C(\mathbf{f}). \end{aligned}$$

Použitím odhadu

$$\|\mathbf{u}^n\|_4^2 \leq \begin{cases} \|\mathbf{u}^n\|_2^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}^n\|_{1,2}^{\frac{3}{2}}, & N = 3 \\ \|\mathbf{u}^n\|_2 \|\mathbf{u}^n\|_{1,2}, & N = 2, \end{cases}$$

pak dostáváme (hlavní omezení pochází z konvektivního členu) že pro $N = 3$ můžeme brát $q = \frac{4}{3}$, zatímco pro $N = 2$ máme dokonce $q = 2$, přičemž posloupnost $\frac{\partial \mathbf{u}^n}{\partial t}$ je omezená v prostoru $L^q(0,T;(\mathbf{W}_{0,\text{div}}^{1,2}(\Omega))^*)$. Nyní můžeme přistoupit k limitním přechodům. Z apriorních odhadů dostáváme, že vybraná podposloupnost slabých řešení konverguje slabě k jisté funkci $\mathbf{u}$ v prostoru $L^2(0,T;\mathbf{W}_{0,\text{div}}^{1,2}(\Omega))$ a slabě $*$ v prostoru $L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$. Dále časová derivace konverguje slabě k $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ v prostoru $L^q(0,T;(\mathbf{W}_{0,\text{div}}^{1,2}(\Omega))^*)$. To ale k limitnímu přechodu nestačí, potřebujeme silnou konvergenci k limitnímu přechodu v nelineárním členu. Ta je důsledkem tzv. Aubin–Lionsova lemmatu (viz např. [41]), díky odhadu v prostorových proměnných v „lepší prostoru“ a alespoň nějakého odhadu časové derivace dostáváme silnou konvergenci v $L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$, což nám umožňuje přejít nejenom

v rovnici, ale i v energetické nerovnosti. Nakonec se ukáže, že naše konstrukce aproximativního řešení, viz (3.1)₂, zaručuje splnění počáteční podmínky $\mathbf{u}_0$ ve slabém smyslu. Důkaz je hotov. $\square$

4. EXISTENCE TLAKU

Cílem je zjistit, zda slabá formulace nezničila informaci o tlaku, tj. zda existuje pro každé $t \in (0, T)$ distribuce $p(t, \cdot) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (popř. hladší) tak, že

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \boldsymbol{\varphi} \right\rangle + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx + \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \boldsymbol{\varphi} \, dx + \langle \nabla p, \boldsymbol{\varphi} \rangle = \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle$$

$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega) \text{ a s.v. } t \in (0, T).$$

Pro obecnou situaci, kdy naše řešení z předchozí kapitoly je zkonstruované Galerkinovou metodou, máme pouze

Věta 4.1. *Nechť $\mathbf{u}$ je slabé řešení Navier–Stokesových rovnic zkonstruované Galerkinovou metodou, $\Omega \in C^{0,1}$, $N = 2, 3$.*

Potom existuje $P : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tak, že $P(t) \in L^2(\Omega)$, $\forall t \in (0, T)$, a splňuje

$$\int_0^t \left(-\nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \boldsymbol{\chi} \, dx - \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\chi} \, dx + \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\chi} \rangle \right) d\tau$$

$$= \int_{\Omega} P(t) \operatorname{div} \boldsymbol{\chi} \, dx + \int_{\Omega} \mathbf{u}(t) \cdot \boldsymbol{\chi} \, dx - \int_{\Omega} \mathbf{u}_0 \cdot \boldsymbol{\chi} \, dx, \quad \forall \boldsymbol{\chi} \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega).$$

Důkaz je možno nalézt např. v [21] či v [42].

Poznámka 4.2. Obecně není ale pravda, že $P(t) = \int_0^t p(\tau) \, d\tau$, není zřejmé, že náš „tlak“ je skutečně primitivní funkcí k hledanému tlaku. Tedy získaný výsledek není příliš uspokojivý.

Pro případ, kdy je oblast Ω hladká, je možné předchozí výsledek zesílit:

Věta 4.3. *Nechť $\Omega \in C^2$, $\mathbf{u} \in L^q(0, T; \mathbf{L}^s(\Omega))$, $\mathbb{H}_i \in L^{q_i}(0, T; \mathbb{L}^{s_i}(\Omega))$, $i = 1, 2$, jsou takové, že*

$$-\int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} \, dx \, dt = \int_0^T \int_{\Omega} (\mathbb{H}_1 + \mathbb{H}_2) : \nabla \boldsymbol{\varphi} \, dx \, dt$$

pro všechna $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{C}_0^\infty((0, T) \times \Omega)$ s $\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} = 0$. Potom existují skalární funkce $p_i \in L^{q_i}(0, T; L^{s_i}(\Omega))$, $i = 1, 2$, a skalární harmonická funkce $p_h \in L^q(0, T; L^{s^}(\Omega))$ s $\nabla p_h \in L^q(0, T; \mathbf{L}^s(\Omega))$, $s^* = \frac{Ns}{N-s}$ pro $s < N$, $s^* \in [1, \infty)$ pro $s = N$ a $s^* \in [1, \infty]$ pro $s > N$ taková, že*

$$-\int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} \, dx \, dt = \int_0^T \int_{\Omega} (\mathbb{H}_1 + \mathbb{H}_2) : \nabla \boldsymbol{\varphi} \, dx \, dt$$

$$+ \int_0^T \int_{\Omega} (p_1 + p_2) \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla p_h \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} \, dx \, dt$$

pro všechna $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{C}_0^\infty((0, T) \times \Omega)$. Navíc

$$\|p_i\|_{L^{q_i}(0, T; L^{s_i}(\Omega))} \leq C \|\mathbb{H}_i\|_{L^{q_i}(0, T; \mathbb{L}^{s_i}(\Omega))}, \quad i = 1, 2,$$

$$\|\nabla p_h\|_{L^q(0, T; \mathbf{L}^s(\Omega))} \leq C \|\mathbf{u}\|_{L^q(0, T; \mathbf{L}^s(\Omega))}.$$

Poznámka 4.4. Tuto větu lze použít tak, že za $\mathbb{H}_1$ vezmeme $\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ a za $\mathbb{H}_2$ funkci $-\nu \nabla \mathbf{u} - \mathbb{F}$, $\mathbf{f} = \operatorname{div} \mathbb{F}$. Význam této věty spočívá v tom, že umožňuje uvažovat poměrně obecnou pravou stranu, na druhou stranu ale ukazuje, že tlak se obecně nechová tak, jak bychom mohli naivně očekávat. Konkrétně, harmonická část tlaku p_h , která je hladká v prostoru, ale nikoliv v čase, je tím problematickým členem.

Důkaz je možno opět nalézt v [41].

Nakonec si ukažme jinou možnost rekonstrukce tlaku, založenou na vlastnostech řešení jednoho lineárního problému, nestacionárního Stokesova problému

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{g} & \text{v } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 & \text{v } (0, T) \times \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} & \text{na } (0, T) \times \partial \Omega, \\ \mathbf{u}(0) &= \mathbf{u}_0 & \text{v } \Omega. \end{aligned}$$

Slabá formulace je analogická slabé formulaci pro Navier–Stokesovy rovnice, proto ji nebudeme uvádět. Existence slabého řešení se ukáže stejně jako v případě Navier–Stokesových rovnic, jen máme ušetřenou práci s kompaktností posloupnosti aproximativního řešení a dostaneme okamžitě silnou spojitost v čase. Pokud bychom nyní uvažovali pravou stranu ve tvaru divergence nějaké integrovatelné funkce, dostali bychom opět problém s harmonickou částí tlaku. Proto budeme předpokládat, že pravá strana $\mathbf{f}$ leží v jistém Lebesgueově prostoru.

Pro tento případ máme:

Věta 4.5. *Nechť je počáteční podmínka dostatečně hladká, $\Omega \in C^2$, nechť $\mathbf{g} \in L^t(0, T; \mathbf{L}^s(\Omega))$.*

Potom jediné řešení také splňuje $\nabla^2 \mathbf{u}$, $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$, $\nabla p \in L^t(0, T; \mathbf{L}^s(\Omega))$ a platí

$$\begin{aligned} \|\nabla^2 \mathbf{u}\|_{L^t(0, T; \mathbf{L}^s(\Omega))} + \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\|_{L^t(0, T; \mathbf{L}^s(\Omega))} + \|\nabla p\|_{L^t(0, T; \mathbf{L}^s(\Omega))} \\ \leq C(\mathbf{u}_0, \|\mathbf{g}\|_{L^t(0, T; \mathbf{L}^s(\Omega))}). \end{aligned}$$

Důkaz této věty je možno nalézt v [22].

Pokud si vezmeme $\mathbf{g} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{f}$, dostáváme z předchozí věty:

Věta 4.6. *Nechť $\mathbf{u}$ je slabé řešení Navier–Stokesových rovnic a nechť $\Omega \in C^2$, $\mathbf{f}$ a $\mathbf{u}_0$ jsou dostatečně hladké.*

Potom existuje tlak a Navier–Stokesovy rovnice jsou splněny skoro všude na časoprostoru. Navíc

$$\nabla^2 \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \nabla p \in L^t(0, T; \mathbf{L}^s(\Omega)), \quad 1 < s < \frac{N}{N-1}, \quad \frac{2}{t} + \frac{N}{s} = N + 1, \quad N = 2, 3.$$

Podívejme se, jakou informaci nám to dává pro samotný tlak ve třídimenzionálním případě. Pro zajištění jednoznačnosti budeme předpokládat, že $\int_{\Omega} p(t, \cdot) dx = 0$ pro s.v. $t \in (0, T)$. Dostáváme

$$p \in L^t(0, T; L^{s^*}(\Omega)), \quad \frac{2}{t} + \frac{3}{s} = N.$$

Pokud požadujeme, aby $t = s^*$, dostáváme ve trojdimenzionálním případě $p \in L^{\frac{5}{3}}((0, T) \times \Omega)$. Ve dvojdimenzionálním případě potom $p \in L^q((0, T) \times \Omega)$ pro libovolné $q < 2$.

5. JEDNOZNAČNOST A REGULARITA ŘEŠENÍ VE DVOJROZMĚRNÉM PŘÍPADĚ

Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, pak je možno ukázat, že řešení se chová tak, jak bychom si představovali, úloha je korektní („well posed“) ve smyslu Hadamarda. Tedy, řešení (slabé) je jednoznačné, spojitě závislé na datech a tak hladké, jak umožňují data úlohy. Ukažme nejprve

Věta 5.1. *Slabé řešení je ve dvojrozměrném případě jednoznačné.*

Důkaz. Nejprve si uvědomme, že díky tomu, že $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L^2(0, T; (\mathbf{W}_{0,\text{div}}^{1,2}(\Omega))^*)$ a $\mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathbf{W}_{0,\text{div}}^{1,2}(\Omega))$, je $\mathbf{u} \in C(0, T; \mathbf{L}_{0,\text{div}}^2(\Omega))$ (a též patří do $C([0, T]; \mathbf{L}^2(\Omega))$) a platí

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{u} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 dx.$$

Proto můžeme použít řešení jako testovací funkci ve slabé formulaci. Předpokládáme-li, že $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ jsou dvě slabá řešení odpovídající týmž datům a označíme-li $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ jejich rozdíl, pak dostáváme použitím rovnosti typu (2.2)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\mathbf{w}|^2 dx + \nu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{w}|^2 dx = - \int_{\Omega} (\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w} dx.$$

Pravou stranu můžeme odhadnout pomocí

$$\left| \int_{\Omega} (\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w} dx \right| \leq \|\mathbf{w}\|_4^2 \|\nabla \mathbf{u}\|_2 \leq \frac{1}{2} \nu \|\nabla \mathbf{w}\|_2^2 + C(\nu) \|\mathbf{w}\|_2^2 \|\nabla \mathbf{u}\|_2^2$$

a díky nulové počáteční podmínce plyne použitím Gronwallova lematu, že $\mathbf{w}$ je nulové, tj. řešení je jednoznačné. $\square$

Díky předchozí větě stačí ukázat regularitu pro řešení, zkonstruované libovolným způsobem. Ukažme ji pro řešení, které jsme již dříve získali Galerkinovou metodou.

Věta 5.2. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená oblast třídy C^2 , $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2((0, T) \times \Omega)$, $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{L}_{0,\text{div}}^2(\Omega)$. Potom libovolné slabé řešení patří navíc do prostorů $L^2(\varepsilon, T; \mathbf{W}^{2,2}(\Omega)) \cap L^\infty(\varepsilon, T; \mathbf{W}^{1,2}(\Omega))$ a $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L^2(\varepsilon, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ pro libovolné $\varepsilon > 0$. Jestliže $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{W}_{0,\text{div}}^{1,2}(\Omega)$, je možno brát $\varepsilon = 0$.*

Důkaz. Díky regularitě řešení stacionárního Stokesova problému je $\|P\Delta \mathbf{u}\|_2$ pro funkce z $\mathbf{W}_{0,\text{div}}^{1,2}(\Omega)$ ekvivalentní s $\|\mathbf{u}\|_{2,2}$, přičemž P je Helmholtzova projekce vektorových funkcí z $\mathbf{L}^2(\Omega)$ do $\mathbf{L}_{0,\text{div}}^2(\Omega)$. Pokud použijeme ke konstrukci řešení bázi složenou s vlastních funkcí Stokesova operátoru a budeme testovat $P\Delta \mathbf{u}^n$ ve smyslu, že j -tou rovnici vynásobíme $\lambda_j c_j^n(t)$ a sečteme přes j , dostaneme identitu

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{u}^n(t)\|_2^2 + \nu \|P\Delta \mathbf{u}^n\|_2^2 = \int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n) \cdot P\Delta \mathbf{u}^n dx. \quad (5.1)$$

Pravou stranu můžeme odhadnout použitím Hölderovy a Youngovy nerovnosti a interpolačních nerovností pomocí

$$\|P\Delta \mathbf{u}^n\|_2 \|\nabla \mathbf{u}^n\|_4 \|\mathbf{u}^n\|_4 \leq \frac{\nu}{2} \|P\Delta \mathbf{u}^n\|_2^2 + C(\nu) \|\nabla \mathbf{u}^n\|_4^4 \|\mathbf{u}^n\|_2^2.$$

Analogicky můžeme rovnici testovat časovou derivací aproximativního řešení a tím nám přibude na levé straně (5.1) i L^2 -norma časové derivace. Je-li počáteční podmínka $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{W}_{0,\text{div}}^{1,2}(\Omega)$, plyne tvrzení z Gronwallovy nerovnosti. Pokud je pouze v $\mathbf{L}_{0,\text{div}}^2(\Omega)$, pak výše získanou nerovnost násobíme seřezávací funkcí času, která je nulová kolem hodnoty 0, od hodnoty ε je jedna a je hladká mezi těmito hodnotami. Tvrzení pak opět plyne z Gronwallovy nerovnosti. $\square$

Použitím metody postupného vylepšování regularity je možno ukázat, že za předpokladu hladkosti pravé strany a oblasti Ω je řešení hladké na $(0, T) \times \bar{\Omega}$. Na hladkost až do počátečního času bychom kromě hladkosti počáteční podmínky potřebovali i jisté podmínky kompatibility.

6. TROJROZMĚRNÝ PŘÍPAD: LOKÁLNĚ HLADKÉ ŘEŠENÍ, JEDNOZNAČNOST TYPU SILNÉ = SLABÉ A PODMÍNĚNÁ REGULARITA

V poslední části se budeme věnovat otázce dalších vlastností slabých řešení pro $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Nejprve uvedme jednu pomocnou větu, která má ale význam i sama o sobě. Ukazuje totiž, že i když obecně nevíme, zda slabé řešení je pro hladká data hladké, víme alespoň, že je hladké na krátkém čase, popř. globálně, pokud jsou data úlohy dostatečně malá.

Věta 6.1. *Předpokládejme, že $\mathbf{f} \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ a $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{W}_{0,\text{div}}^{1,2}(\Omega)$. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Potom existuje $T^* > 0$ takové, že existuje slabé řešení Navier–Stokesových rovnic odpovídající daným datům $\mathbf{u} \in L^2(0, T^*; \mathbf{W}^{2,2}(\Omega)) \cap L^\infty(0, T^*; \mathbf{W}^{1,2}(\Omega))$ a $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L^2(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega))$. Je-li počáteční podmínka dostatečně malá, je možno brát $T^* = \infty$.*

Důkaz. Pro jednoduchost předpokládejme $\mathbf{f} = \mathbf{0}$. Podobně jako v případě prostorové dimenze dva získáme pro galerkinovskou aproximaci rovnost (5.1). Nyní nejprve použijeme odhad

$$\left| \int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n) \cdot P \Delta \mathbf{u}^n \, dx \right| \leq \|P \Delta \mathbf{u}^n\|_2 \|\nabla \mathbf{u}^n\|_3 \|\mathbf{u}^n\|_6 \leq \frac{\nu}{2} \|P \Delta \mathbf{u}^n\|_2^2 + C(\nu) \|\nabla \mathbf{u}^n\|_6^6,$$

který vede na diferenciální nerovnost

$$y' \leq C y^3.$$

Díky lokálnímu existenčnímu výsledku pro příslušnou obyčejnou diferenciální rovnici dostáváme lokální existenci řešení s omezenou L^2 -normou gradientu, což podobně jako ve dvojdimenzionálním případě implikuje hladkost výše. Pokud konjektivní člen odhadneme

$$\left| \int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n) \cdot P \Delta \mathbf{u}^n \, dx \right| \leq \|P \Delta \mathbf{u}^n\|_2 \|\nabla \mathbf{u}^n\|_6 \|\mathbf{u}^n\|_3 \leq C_0 \|P \Delta \mathbf{u}^n\|_2^2 \|\nabla \mathbf{u}^n\|_2^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}^n\|_2^{\frac{1}{2}}$$

a připomeneme, že díky konstrukci platí energetická rovnost, tj.

$$\|\mathbf{u}^n(t, \cdot)\|_2 \leq \|\mathbf{u}^n(0, \cdot)\|_2 \leq \|\mathbf{u}_0\|_2,$$

pak za předpokladu, že v počátečním čase platí

$$C_0 \|\nabla \mathbf{u}_0\|_2^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}_0\|_2^{\frac{1}{2}} \leq \nu, \quad (6.1)$$

máme

$$\|\nabla \mathbf{u}^n(t, \cdot)\|_2 \leq \|\nabla \mathbf{u}^n(0, \cdot)\|_2 \leq \|\nabla \mathbf{u}_0\|_2.$$

Proto nerovnost (6.1) platí na celém intervalu existence slabého řešení, což dává regularitu. $\square$

Výše uvedená lokální existence je důležitá mimo jiné v následující souvislosti. Níže ukážeme, že hladká řešení jsou jednoznačná na třídě Leray–Hopfových řešení. Pokud máme Leray–Hopfovo řešení odpovídající hladkým datům, víme, že výše zkonstruované hladké řešení se na svém intervalu existence shoduje s Leray–Hopfovým řešením, a proto je Leray–Hopfovo řešení lokálně v čase hladké.

Budeme ještě potřebovat jedno tvrzení:

Lemma 6.2. *Nechť dané slabé řešení Navier–Stokesových rovnic $\mathbf{u}$ patří do $\mathbf{L}^4((0, T) \times \Omega)$. Potom toto slabé řešení splňuje dokonce energetickou rovnost.*

Důkaz je založen na tom, že se ukáže, že časová derivace takového slabého řešení nutně patří do $L^2(0, T; (\mathbf{W}_{0,\text{div}}^{1,2})^*)$, proto je možno použít řešení jako testovací funkci ve slabé formulaci. Zmíníme pouze, že jiné podmínky na řešení, které zaručují splnění energetické nerovnosti, lze nalézt např. v [12] či v [17].

Můžeme tedy přistoupit k formulaci avizovaného tvrzení o jednoznačnosti.

Věta 6.3. *Nechť $\mathbf{u}$ je Leray–Hopfovo slabé řešení na $(0, T)$ a nechť $\mathbf{v}$ je slabé řešení odpovídající týmž datům, pro které navíc platí, že*

$$\mathbf{v} \in L^t(0, T; \mathbf{L}^s(\Omega)), \quad \frac{2}{t} + \frac{3}{s} = 1, \quad 3 \leq s \leq \infty.$$

Potom $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ s.v. na $(0, T) \times \Omega$.

Důkaz. Naznačíme ideu důkazu pro případ $s > 3$. Případ $s = 3$ je možno nalézt v [27]. Uvědomme si, že funkci $\mathbf{u}$ nelze použít jako testovací funkci pro slabou formulaci pro $\mathbf{u}$. Máme ale k dispozici energetickou nerovnost. Dále není těžké pomocí předchozího tvrzení ukázat, že můžeme použít jako testovací funkci pro $\mathbf{v}$ jak $\mathbf{u}$ tak i $\mathbf{v}$ a konečně, analogickými úvahami lze ukázat, že $\mathbf{v}$ je dobrá testovací funkce pro $\mathbf{u}$. Celkem tedy, podobně jako v dimenzi dva, dostaneme pro $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\mathbf{w}|^2 dx + \nu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{w}|^2 dx \leq \int_{\Omega} (\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} dx.$$

Pomocí Gaußova vzorce převedeme derivaci na $\mathbf{w}$ a odhadneme člen na pravé straně použitím lepší integrability $\mathbf{v}$ jako

$$\frac{\nu}{2} \|\nabla \mathbf{w}\|_2^2 + C(\nu) \|\mathbf{v}\|_s^t \|\mathbf{u}\|_2^2$$

a jednoznačnost plyne z Gronwallova lematu. $\square$

Velmi podobným způsobem, tj. kombinací odhadů výše a věty o regularitě pro $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, lze dokázat následující větu:

Věta 6.4. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je omezená oblast třídy C^2 , $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2((0, T) \times \Omega)$, $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{L}_{0,\text{div}}^2(\Omega)$. Nechť slabé řešení patří navíc do $L^t(0, T; \mathbf{L}^s(\Omega))$, $\frac{2}{s} + \frac{3}{t} = 1$, $s > 3$. Potom toto slabé řešení patří do $L^2(\varepsilon, T; \mathbf{W}^{2,2}(\Omega)) \cap L^\infty(\varepsilon, T; \mathbf{W}^{1,2}(\Omega))$ a $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L^2(\varepsilon, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ pro všechna $\varepsilon > 0$. Je-li $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{W}_{0,\text{div}}^{1,2}(\Omega)$, pak je možno brát $\varepsilon = 0$.*

Stejně jako pro dvojrozměrnou úlohu, metodou postupného vylepšování hladkosti můžeme ukázat, že řešení je tak hladké, jak umožňují data úlohy.

Tento článek zakončíme pouze výčtem několika dalších vybraných případů, kdy je slabé řešení splňující energetickou nerovnost hladké. Pro jednoduchost se budeme zabývat trochu jinou úlohou, úlohou Cauchyovou na celém $\mathbb{R}^3$ a budeme předpokládat, že pravá strana $\mathbf{f}$ je nulová. Přesněji

Definice 6.5. Necht $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{L}_{\text{div}}^2(\mathbb{R}^3)$. Potom funkci $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(0, T; \mathbf{W}_{\text{div}}^{1,2}(\mathbb{R}^3))$, jejíž slabá časová derivace $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L^q(0, T; (\mathbf{W}_{\text{div}}^{1,2}(\mathbb{R}^3))^*)$ pro jisté $q \geq 1$, nazýváme *slabým řešením Cauchyovy úlohy*, jestliže

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \boldsymbol{\varphi} \right\rangle_{(\mathbf{W}_{\text{div}}^{1,2}(\mathbb{R}^3))^*, \mathbf{W}_{\text{div}}^{1,2}(\mathbb{R}^3)} + \int_{\mathbb{R}^3} ((\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varphi} + \nu \nabla \mathbf{u} : \nabla \boldsymbol{\varphi}) \, dx = 0$$

pro všechna $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}_{\text{div}}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ a s.v. $t \in (0, T)$ a počáteční podmínka je splněna ve smyslu

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{u}(t, \cdot) \cdot \mathbf{w} \, dx = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{u}_0(\cdot) \cdot \mathbf{w} \, dx$$

pro všechna $\mathbf{w} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$.

Existenci dokonce Leray–Hopfova slabého řešení Cauchyovy úlohy můžeme dokázat pomocí následující metody. Vezměme si $\Omega_n = B_n(0)$ posloupnost koulí postupně vyplňujících celý prostor a posloupnost $\mathbf{u}_0^n$ hladkých funkcí s nosičem v $B_n(0)$ takových, že mají nulovou divergenci a konvergují v $\mathbf{L}^2$ -normě k $\mathbf{u}_0$. Na každé kouli existuje řešení podle Věty 3.1. Toto řešení splňuje stejnoměrné odhady v příslušných prostorech a stejně jako při důkazu existence získáme příslušné slabě konvergentní podposloupnosti. Jediný problém je, že tyto podposloupnosti nekonvergují silně na celém $\mathbb{R}^3$, ale jen na omezených podmnožinách. Proto můžeme provést limitní přechod (pomocí diagonálního výběru) jen pro testovací funkce s kompaktním nosičem. Takové funkce jsou ale husté ve $\mathbf{W}_{\text{div}}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, odkud plyne existence slabého řešení. Věta o jednoznačnosti silné = slabé se dokazuje podobně jako pro omezené množiny s homogenní Dirichletovou podmínkou, stejně tak příslušné věty o podmíněné regularitě a o lokální existenci hladkých řešení pro hladká data.

Obecné schéma důkazu kritérií regularit je tedy následující. Pro hladké řešení ukážeme apriorní odhady, které jsou nezávislé na čase a tudíž vylučují vznik singularit. Proto je řešení hladké na maximálním možném intervalu. Budeme vždy předpokládat, že studujeme Cauchyovu úlohu na $\mathbb{R}^3$ a naše řešení splňuje energetickou nerovnost. Stejně výsledky by platily i pro úlohu s periodickou okrajovou podmínkou, některá níže uvedená kritéria fungují i na omezených oblastech s vhodnou okrajovou podmínkou, to ale pro nás nebude důležité. Jen zmiňme, že důvod, proč je Cauchyova úloha či periodické okrajové podmínky jednodušší, je to, že můžeme bez problémů integrovat per partes (používat Gaußovu větu) a nevzniknou nám žádné hraniční členy, které bychom museli kontrolovat.

Omezíme se pouze na přehled základních výsledků. Nejprve připomeňme, že pro

$$\mathbf{u} \in L^t(0, T; \mathbf{L}^s(\mathbb{R}^3)), \quad \frac{2}{t} + \frac{3}{s} = 1, \quad s > 3, \quad (6.2)$$

je řešení hladké, viz Věta 6.3. Regularita se dá ukázat i pro případ $s = 3$ (tj. $t = \infty$), viz [15], důkaz je ale mnohem technicky obtížnější. Poznamenejme jen, že pro případ, kdy je podmínka (6.2) splněna pouze pro dvě složky rychlosti, lze díky nulové divergenci také dokázat regularitu.

Analogická podmínka na gradient rychlosti je

$$\nabla \mathbf{u} \in L^t(0, T; \mathbb{L}^s(\mathbb{R}^3)), \quad \frac{2}{t} + \frac{3}{s} = 2, \quad s \geq \frac{3}{2}. \quad (6.3)$$

Hodnoty $s > \frac{3}{2}$ pochází z článku [4], případ $s = \frac{3}{2}$ je pak důsledkem věty o vnoření a práce [15]. Opět poznamenejme, že máme-li informaci o lepší integrabilitě gradientu dvou složek rychlosti (splňující (6.3)) je opět relativně jednoduché díky nulové divergenci rychlosti dokázat, že řešení je hladké. Dále, protože pro $1 < p < \infty$ je $\mathbf{L}^p$ -norma vorticity $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{u}$ díky nulové divergenci ekvivalentní $\mathbf{L}^p$ -normě gradientu rychlosti, je důkaz regularity pro vorticitu splňující (6.3) pro $\frac{3}{2} \leq s < \infty$ zřejmý. O něco zajímavější je, že i v případě, kdy pouze dvě složky vorticity splňují (6.3), platí regularita, viz [11]. Podobně, je-li

$$p \in L^t(0, T; L^s(\mathbb{R}^3)), \quad \frac{2}{t} + \frac{3}{s} = 2, \quad s > \frac{3}{2},$$

kde p je tlak příslušný danému slabému řešení, je toto slabé řešení hladké, viz [6].

O něco komplikovanější je situace, kdy je lepší integrovatelnost známa pouze o jedné složce rychlosti. První výsledek v tomto směru, tj. omezenost u_1 v časoprostoru implikuje hladkost řešení naší úlohy, byl dokázán v [38]. Po několika vylepšeních je v současnosti známo, že pro

$$u_1 \in L^t(0, T; L^s(\mathbb{R}^3)), \quad \frac{2}{t} + \frac{3}{s} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2s}, \quad s \geq \frac{10}{3},$$

je řešení hladké (případ $s > \frac{10}{3}$ viz [46], hraniční hodnota $s = \frac{10}{3}$ potom viz [25]). Pro gradient jedné složky rychlosti se ví, že když

$$\nabla u_1 \in L^t(0, T; \mathbf{L}^s(\mathbb{R}^3)), \quad \frac{2}{t} + \frac{3}{s} = \frac{23}{12}, \quad s \in [2, 3],$$

potom řešení je hladké, viz [47]. Analogický výsledek pouze pro jednu složku vorticity není známý.

Je zajímavé, že pro derivaci rychlostního pole v jednom směru je situace lepší. Přesněji, pro

$$\partial_1 \mathbf{u} \in L^t(0, T; \mathbf{L}^s(\mathbb{R}^3)), \quad \frac{2}{t} + \frac{3}{s} = 2, \quad s \geq \frac{27}{16},$$

je řešení hladké, viz [28] a [9]. V práci [40] bylo mimo jiné ukázáno, že pro hladkost slabého řešení stačí místo celého gradientu kontrolovat jen dvě složky, tj.

$$\partial_1 u_1, \partial_2 u_2 \in L^t(0, T; L^s(\mathbb{R}^3)), \quad \frac{2}{t} + \frac{3}{s} = 2, \quad s > \frac{3}{2}.$$

Konečně, v práci [10] bylo ukázáno, že jistá hladkost pouze jedné složky gradientu rychlosti zaručuje hladkost slabého řešení (první takový výsledek byl ukázán v [40]), tedy stačí vědět buď

$$\partial_i u_j \in L^t(0, T; L^s(\mathbb{R}^3)), \quad \frac{2}{t} + \frac{3}{s} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2s}, \quad s > 3, \quad i \neq j,$$

nebo

$$\partial_i u_i \in L^t(0, T; L^s(\mathbb{R}^3)), \quad \frac{2}{t} + \frac{3}{s} = \frac{3}{4} + \frac{3}{2s}, \quad s > 2.$$

Z dalších výsledků pak zmiňme [43], kde autoři ukázali, že pro hladkost řešení Cauchyovy úlohy stačí vědět, že tlak je omezený zdola a výsledky zaručující hladkost řešení, pokud je směr vorticity či rychlosti dostatečně hladký ([13], [5], [45]). Existuje celá řada dalších výsledků, které pro zaručení hladkosti využívají vyšší hladkost v Běsovových prostorech, popř. kombinují odhady různých veličin, ale tyto výsledky nepokládám za příliš zajímavé z pohledu lepšího pochopení případného vzniku singularity či zachování regularity řešení začínajícího z hladké počáteční podmínky.

7. ZÁVĚR

Tato práce se zabývala klasickými i novějšími výsledky souvisejícími s problémem regularity slabých řešení nestlačitelných Navier–Stokesových rovnic. Po představení modelu a formulaci různých typů řešení byla ukázána existence Leray–Hopfova slabého řešení a jeho dodatečné vlastnosti (jednoznačnost, regularita ve dvojrozměrném případě, jednoznačnost typu silné = slabé a podmíněná regularita (Prodi–Serrinovy podmínky) ve trojrozměrném případě). Konečně, pro Cauchyovu úlohu bylo představeno několik podmínek na různé veličiny, které zaručují hladkost řešení.

REFERENCE

- [1] http://www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equations/.
- [2] R. A. Adams: *Sobolev spaces*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 65, Academic Press, New York-London, 1975.
- [3] H. Amann: *On the strong solvability of the Navier-Stokes equations*, J. Math. Fluid Mech. **2** (2000), 16–98.
- [4] H. Beirão da Veiga: *A new regularity class for the Navier–Stokes equations in R^n* , Chin. Ann. Math. Ser. B **16** (1995), 407–412.
- [5] L. Berselli, H. Beirão da Veiga: *On the regularizing effect of the vorticity direction in incompressible viscous flows*, Differential Integral Equations **15** (2002), 345–356.
- [6] L. Berselli, G. P. Galdi: *Regularity criteria involving the pressure for the weak solutions to the Navier-Stokes equations*, Proc. Am. Math. Soc. **130** (2002), 3585–3595.
- [7] F. Boyer, P. Fabrie: *Éléments d'analyse pour l'étude de quelques modèles découlements de fluides visqueux incompressibles*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.
- [8] L. Caffarelli, R. Kohn, L. Nirenberg: *Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations*, Commun. Pure Appl. Math. **35** (1982), 771–831.
- [9] C. Cao: *Sufficient conditions for the regularity to the 3D Navier-Stokes equations*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **26** (2010), 1141–1151.
- [10] C. Cao, E. S. Titi: *Global regularity criterion for the 3D Navier-Stokes equations involving one entry of the velocity gradient tensor*, Arch. Ration. Mech. Anal. **202** (2011), 919–932.
- [11] D. Chae, H. J. Choe: *Regularity of solutions to the Navier–Stokes equation*, Electron. J. Differ. Equ. **5** (1999), 1–7.
- [12] A. Cheskidov, S. Friedlander, R. Shvydkoy: *On the energy equality and weak solutions of the 3D Navier–Stokes equations*, Advances in Mathematical Fluid Mechanics, 171–175, Springer, Berlin, 2010.
- [13] P. Constantin, C. Fefferman: *Direction of vorticity and the problem of global regularity for the Navier-Stokes equations*, Indiana Univ. Math. J. **42** (1993), 775–789.

- [14] P. Constantin, C. Foias: *Navier-Stokes Equations*, Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1988.
- [15] L. Eskauriaza, G. Seregin, V. Šverák: $L^{3,\infty}$ -solutions of Navier-Stokes equations and backward uniqueness, *Uspekhi Mat. Nauk* **58** (2003), 3–44; translation in *Russian Math. Surveys* **58** (2003), 211–250.
- [16] R. Farwig, H. Kozono, H. Sohr: *Very weak, weak and strong solutions to the instationary Navier-Stokes system*, *Topics on Partial Differential Equations*, 1–54, Jindřich Nečas Cent. Math. Model. Lect. Notes, 2, Matfyzpress, Prague, 2007.
- [17] R. Farwig, Y. Taniuchi: *On the energy equality of Navier-Stokes equations in general unbounded domains*, *Arch. Math. (Basel)* **95** (2010), 447–456.
- [18] H. Fujita, T. Kato: *On the Navier-Stokes initial value problem I*, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **16** (1964), 269–315.
- [19] H. Gajewski, K. Gröger, K. Zacharias: *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen*, Akademie-Verlag Berlin, 1974.
- [20] G. P. Galdi: *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations. Steady-state Problems*, 2nd ed., Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2011.
- [21] G. P. Galdi: *An introduction to the Navier-Stokes initial-boundary value problem*, G. P. Galdi et al. (eds.), *Fundamental Directions in Mathematical Fluid Mechanics*, Basel: Birkhäuser, 1–70, 2000.
- [22] Y. Giga, H. Sohr: *Abstract L^p estimates for the Cauchy problem with applications to the Navier-Stokes equations in exterior domains*, *J. Funct. Anal.* **102** (1991), 72–94.
- [23] M. E. Gurtin: *An Introduction to Continuum Mechanics*, Academic Press, 1981.
- [24] E. Hopf: *Über die Anfangswertaufgabe für die Hydrodynamischen Gleichungen*, *Math. Nachrichten* **4** (1951), 213–231.
- [25] X. Jia, Y. Zhou: *Remarks on regularity criteria for the Navier-Stokes equations via one velocity component*, to appear in *Nonlinear Analysis: Real Worlds Applications*.
- [26] M. V. Korobkov, K. Pileckas, R. Russo: *Solution of Leray’s problem for stationary Navier-Stokes equations in plane and axially symmetric spatial domains*, *ArXiv:1302.0731*.
- [27] H. Kozono, H. Sohr: *Remark on uniqueness of weak solutions to the Navier-Stokes equations*, *Analysis* **16** (1996), 255–271.
- [28] I. Kukavica, M. Ziane: *Navier-Stokes equations with regularity in one direction*, *J. Math. Phys.* **48** (2007), 10 pp.
- [29] O. A. Ladyzhenskaya: *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Fluid*, Gordon and Breach, 1969.
- [30] O. A. Ladyzhenskaya, G. A. Seregin: *On partial regularity of suitable weak solutions to the three-dimensional Navier-Stokes equations*, *J. Math. Fluid Mech.* **1** (1999), 356–387.
- [31] J. Leray: *Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes de l’hydrodynamique*, *Journ. de Math.* **12** (1933), 1–82.
- [32] J. Leray: *Sur le mouvement d’un liquide visqueux emplissant l’espace*, *Acta Math.* **63** (1934), 193–248.
- [33] J.-L. Lions: *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris, 1969.
- [34] P.-L. Lions: *Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Volume I: Incompressible Models*, Clarendon Press, Oxford, 1996.
- [35] J. Málek, K. R. Rajagopal: *Mathematical issues concerning the Navier-Stokes equations and some of its generalizations*, In: *Evolutionary equations. Vol. II*, 371–459, *Handb. Differ. Equ.*, Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2005.
- [36] J. Nečas, M. Růžička, V. Šverák: *On Leray’s self-similar solutions of the Navier-Stokes equations*, *Acta Math.* **176** (1996), 283–294.
- [37] J. Neustupa: *Navierovy–Stokesovy rovnice: regularita nebo „blow-up“?*, *Pokroky Mat. Fyz. Astron.* **51** (2006), 187–197.
- [38] J. Neustupa, P. Penel: *Regularity of a suitable weak solution to the Navier–Stokes Equations as a consequence of regularity of one velocity component*, in: J. F. Rodrigues, A. Sequeira, J. Videman (eds.), *Applied Nonlinear Analysis*, Kluwer-Plenum 1999, 391–402.

- [39] C. W. Oseen: *Neuere Methoden in der Hydrodynamik*, Akad. Verlagsgesellschaft M.B.H., Leipzig, 1927.
- [40] P. Penel, M. Pokorný: *Some new regularity criteria for the Navier-Stokes equations containing the gradient of velocity*, Appl. Math. **49** (2004), 483–493.
- [41] M. Pokorný: *Navier-Stokesovy rovnice*,
<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~pokorny/NS.html>.
- [42] M. Pokorný: *Regularita řešení Navier-Stokesových rovnic*,
http://www.karlin.mff.cuni.cz/~pokorny/regularita_NS.html.
- [43] G. Seregin, V. Šverák: *Navier-Stokes equations with lower bounds on the pressure*, Arch. Ration. Mech. Anal. **163** (2002), 65–86.
- [44] R. Temam: *Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis*, Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2001.
- [45] A. Vasseur: *Regularity criterion for 3D Navier-Stokes equations in terms of the direction of the velocity*, Appl. Math. **54** (2009), 47–52.
- [46] Y. Zhou, M. Pokorný: *On a regularity criterion for the Navier-Stokes equations involving gradient of one velocity component*, J. Math. Phys. **50** (2009), 11 pp.
- [47] Y. Zhou, M. Pokorný: *On the regularity of the solutions of the Navier-Stokes equations via one velocity component*, Nonlinearity **23** (2010), 1097–1107.

Milan Pokorný, Matematický ústav Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy v Praze, Sokolovská 83, 186 75 Praha, Česká republika,
e-mail: pokorny@karlin.mff.cuni.cz

HLEDÁNÍ WIEFERICHOVÝCH PRVOČÍSEL

PETR LEŽÁK

ABSTRAKT. Článek pojednává o současném stavu hledání Wieferichových prvočísel. Jsou zde navrženy metody, jak toto hledání urychlit, a tyto metody jsou implementovány v software na jejich hledání. Tento software byl pak použit na vyhledání Wieferichových prvočísel o základu $2 - 9999$ menších než $3,5 \cdot 10^{10}$ a výsledky jsou v článku prezentovány. Dále je v článku navržen pravděpodobnostní model pro odhad hustoty Wieferichových prvočísel a tento model je porovnán s reálnými daty.

1. ÚVOD

Podle malé Fermatovy věty platí pro každé prvočíslo p a přirozené číslo a nedělitelné p rovnice (1.1), jak je uvedeno například v [1]. Wieferichovo prvočíslo o základu a navíc splňuje rovnici (1.2), viz [2].

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \quad (1.1)$$

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2} \quad (1.2)$$

Není-li uvedeno jinak, tak se většinou uvažují Wieferichova prvočísla o základu $a = 2$, pro něž jsou známa jen dvě řešení rovnice (1.2): $p = 1093$ a $p = 3511$. Tabulka 1 ukazuje, jak se v průběhu let podařilo rozšířit prozkoumaný interval čísel. Údaje jsou převzaty z [2] a [3]. Přesto se dosud nepodařilo najít třetí Wieferichovo prvočíslo. Důvody tohoto neúspěchu jsou prodiskutovány v sekci 8, kde je navržen pravděpodobnostní model hustoty Wieferichových prvočísel.

Cílem výzkumu bylo nalezení prvního a druhého Wieferichova prvočísla o základu $2 \leq a \leq 9999$. V současnosti není znám lepší algoritmus hledání Wieferichových prvočísel, než je prosté dosazování prvočísel do rovnice (1.2) a ověření její platnosti. Problémem tedy není, jak Wieferichova prvočísla hledat, ale jak je hledat co nejrychleji.

Protože obecné knihovny pro výpočty s velkými čísly jsou pomalé, tak bylo nutné vytvořit knihovnu optimalizovanou pro danou úlohu. Dále byl v prohledávání využit fakt, že hledáme Wieferichova prvočísla z velkého rozsahu základů.

2010 MSC. Primární 11A41.

Klíčová slova. Wieferich, prvočíslo, algoritmus, reprezentace.

Práce byla podporována projektem A-Math-Net – Síť pro transfer znalostí v aplikované matematice (CZ.1.07/2.4.00/17.0100).

Rok	Hranice	Vědec nebo organizace
1940	1.6×10^4	Beeger
1960	1×10^5	Kravitz
1964	5×10^5	Riesel
1971	3×10^9	Brillhart, Tonascia, Weinberger
1981	6×10^9	Lehmer
1996	6.1×10^{10}	Clark
1997	4×10^{12}	Crandall, Dilcher, Pomerance
2001	4.6×10^{13}	Brown, McIntosh
2005	1.25×10^{15}	Knauer, Richstein
2013	1.07×10^{17}	PrimeGrid

Tabulka 1. Prozkoumaný interval.

2. VÝPOČET WIEFERICHOVÝCH PRVOČÍSEL S RŮZNÝMI ZÁKLADY

Wieferichova prvočísla se stejným exponentem jsou vždy hledána v jednom kroku. Lze tak využít různé optimalizace. Zavedeme-li označení (2.1) představující levou stranu rovnice (1.2), lze ukázat, že platí rovnice (2.2).

$$e(a, p) = a^{p-1} \bmod p^2 \quad (2.1)$$

$$e(ab, p) \equiv (ab)^{p-1} \equiv a^{p-1}b^{p-1} \equiv e(a, p) \cdot e(b, p) \pmod{p^2} \quad (2.2)$$

Díky ní je nutné vypočítat hodnoty $e(a, p)$ modulárním umocňováním jen pro prvočíselné základy a , hodnoty $e(a, p)$ pro složené základy a lze dopočítat mnohem rychleji pomocí modulárního násobení. Důsledkem rovnice (2.2) je i fakt, že je-li p Wieferichovo prvočísl o základu a , pak je p také Wieferichovo prvočísl o základu a^n .

K testování prvočíselnosti je využito Eratosthenovo síto, viz [4]. Protože je prosívání pomocí velkých prvočísel neefektivní (prvočísl 2 odstraní každé druhé složené číslo, zatímco prvočísl 997 zhruba každé tisícé), tak se prohledávaný interval prosívá jen prvočísl do určité velikosti. Výstupem tohoto kroku jsou proto tzv. pseudoprvočísla - tedy všechna prvočísla a některá složená čísla, která prošla sítím. Dále lze ukázat, že z platnosti $p \mid p^2$, plyne rovnice (2.3).

$$(x \bmod p^2) \bmod p = (x + n_1 \cdot p^2) + n_2 \cdot p = x + (n_1 p + n_2) \cdot p = x \bmod p \quad (2.3)$$

Toho lze využít k provedení Fermatova testu prvočíselnosti téměř bez dodatečné režie. Hodnotu $e(a, p) = a^{p-1} \bmod p^2$ spočítáme při testování Wieferichova prvočísla. Pokud se ukáže, že $e(a, p) \bmod p \neq 1$, pak není splněna rovnice (1.1) a p proto není prvočísl. Nebudeme proto dále počítat $e(a, p)$ pro ostatní základy a a přejdeme k dalšímu pseudoprvočíslu p . Takto lze závčas rozpoznat složená čísla, která prošla Eratosthenovým sítím, dříve, než jim věnujeme příliš mnoho strojového času, a přitom tento test nás prakticky nic nestojí.

3. MODULÁRNÍ UMOCŇOVÁNÍ

Pro ověření platnosti rovnice (1.2) je nutné provádět modulární umocňování. Před zahájením výpočtu jsou vypočítány mocniny

$$m(a, x) = a^x = a \cdot a^{x-1} = a \cdot m(a, x-1); m(a, 0) = 1$$

pro všechny prvočíselné základy a a pro $m(a, x) < 2^{64}$.

Mocnina je pak spočítána podle rovnice (3.1), přičemž n se rozloží podle vztahu (3.2) na součet skupin bitů x_i začínajících na bitech s indexem s_i . Skupiny bitů x_i jsou voleny tak, aby $m(a, x_i) < p$. Tento algoritmus vychází z [5].

$$a^n \equiv \prod_{i=1}^k (m(a, x_i))^{2^{s_i}} \pmod{c} \quad (3.1)$$

$$n = \sum_{i=1}^k x_i \cdot 2^{s_i}; s_1 = 0, s_i < s_{i+1} \quad (3.2)$$

Důkaz platnosti rovnice (3.1):

$$a^n \equiv a^{\sum_{i=1}^k x_i \cdot 2^{s_i}} \equiv \prod_{i=1}^k a^{x_i \cdot 2^{s_i}} \equiv \prod_{i=1}^k (a^{x_i})^{2^{s_i}} \equiv \prod_{i=1}^k (m(a, x_i))^{2^{s_i}} \pmod{c}$$

Rovnici (3.1) lze přepsat iterativně, což vede k efektivnějšímu výpočtu:

$$\begin{aligned} r_k &= m(a, x_k) \\ r_{i-1} &= (r_i)^{2^{s_i - s_{i-1}}} \cdot m(a, x_k) \pmod{c} \\ a^n \pmod{c} &= r_1 \end{aligned}$$

Výpočet $(r_i)^{2^{s_i - s_{i-1}}}$ je realizován pomocí $s_i - s_{i-1}$ modulárního umocňování nad druhou.

4. REPREZENTACE VELKÝCH ČÍSEL A MODULÁRNÍ NÁSOBENÍ

Budeme předpokládat, že vytvořený program poběží na 64-bitovém procesoru, protože prakticky všechny nové osobní počítače mají 64-bitový procesor. Pro uložení maximálního prozkoumaného prvočísla p je podle tabulky 1 nutné použít 54 bitů. Pokud pro uložení prvočísla p použijeme 64 bitový registr, budeme pracovat s dostatečnou rezervou. Zbytek po dělení p^2 je pak nutné reprezentovat pomocí 128 bitů, tedy dvou registrů.

Pro implementaci modulárního umocňování je třeba mít k dispozici algoritmus modulárního násobení čísel. Proto zvolená reprezentace musí být taková, aby modulární násobení bylo pokud možno co nejefektivnější. Přirozeně lze zbytek po dělení reprezentovat dvěma číslicemi x_0 a x_1 čísla v soustavě o základu 2^{64} . Lepší je ale pracovat v soustavě o základu p . Libovolné číslo $0 \leq x < p^2$ lze pak reprezentovat podle rovnice (4.1).

$$x = x_1 p + x_0; 0 \leq a, b < p \quad (4.1)$$

Výpočet $z = x \cdot y \bmod p^2$ popisuje rovnice (4.2).

$$\begin{aligned} z &= x \cdot y \equiv (x_1p + x_0) \cdot (y_1p + y_0) \equiv x_1y_1p^2 + (x_1y_0 + x_0y_1)p + x_0y_0 \\ &\equiv (x_1y_0 + x_0y_1)p + x_0y_0 \equiv (x_1y_0 + x_0y_1 + k - lp) \cdot p + (x_0y_0 - kp) \pmod{p^2}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

kde

$$k = \left\lfloor \frac{x_0y_0}{p} \right\rfloor, l = \left\lfloor \frac{x_1y_0 + x_0y_1 + k}{p} \right\rfloor.$$

Rovnici (4.2) lze implementovat pomocí následujícího algoritmu výpočtu:

- Vstup: $x = x_1p + x_0; y = y_1p + y_0; p$
- Výstup: $z = z_1p + z_0 = x \cdot y$
- $t_1 = x_0y_0$
- $k = \left\lfloor \frac{t_1}{p} \right\rfloor$
- $z_0 = t_1 - kp$
- $t_2 = x_1y_0 + x_0y_1 + k$
- $l = \left\lfloor \frac{t_2}{p} \right\rfloor$
- $z_1 = t_2 - lp$

Srovnáme-li algoritmus s modulárním násobením čísel reprezentovaných v soustavě o základu 2^{64} , tak odpadne jeden člen při násobení a stačí jen dvě dělení p oproti redukci modulo p^2 .

5. REDUKCE

Jak bylo popsáno v sekci 4, tak pro modulární násobení je třeba provádět dělení čísla o velikosti nejvýše 128 bitů číslem p o velikosti nejvýše 64 bitů. Na současných procesorech je však dělení cca 14x pomalejší než násobení, viz [6]. Proto je vhodné využít algoritmus, který dělení nahradí i několika násobeními. Jedna z možností je využít Barrettův algoritmus, který je detailně popsán v [7]. Algoritmus je vhodný tehdy, pokud je třeba provést mnoho dělení se stejným dělitelem p . Vychází z myšlenky, že dělení lze nahradit násobením převrácenou hodnotou čísla, toto násobení je ale třeba uzpůsobit aritmetice celých čísel.

Nejdříve se pro dané p předpočítá $\mu = \left\lfloor \frac{2^{128}}{p} \right\rfloor$. Dělení se pak provádí podle rovnice (5.1).

$$\left\lfloor \frac{a}{p} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\mu \cdot a}{2^{128}} \right\rfloor + k \quad (5.1)$$

První člen rovnice (5.1) představuje odhad podílu a korekce k je odchylka od skutečné hodnoty podílu. Čísla μ a a mají velikost 128 bitů, každé je tedy reprezentováno dvěma registry o velikosti 64 bitů. Rovnice (5.2) určuje způsob výpočtu prvního členu rovnice (5.1).

$$\left\lfloor \frac{\mu \cdot a}{2^{128}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(2^{64}\mu_1 + \mu_0) \cdot (2^{64}a_1 + a_0)}{2^{128}} \right\rfloor \approx \mu_1a_1 + \left\lfloor \frac{\mu_1a_0 + \mu_0a_1}{2^{64}} \right\rfloor \quad (5.2)$$

Jedno dělení se tak nahradí třemi násobeními a následně ještě jedním násobením p pro výpočet zbytku po dělení. Korekce k se dopočítá ve smyčce po dělení tak, aby

zbytek dělení $r = a - p \cdot \left\lfloor \frac{a}{p} \right\rfloor$ splňoval podmínku $0 \leq r < p$. Barettův algoritmus zaručuje, že $-1 \leq k \leq 2$.

6. CELKOVÝ ALGORITMUS

Nyní všechny uvedené dílčí kroky sestavíme do algoritmu pro hledání Wieferichových prvočísel.

- Předpočítej hodnoty $m(a, x)$ pro prvočíselná a a pro $m(a, x) < 2^{64}$.
- Rozděl prohledávaný interval na intervaly konstantní délky. V nich vyhledej pseudoprvočísla Erastothénovým sítím.
- Pro každé pseudoprvočíslu p dělej:
 - Pro každý prvočíselný základ $a < p$ vypočítej $e(a, p) = a^{p-1} \bmod p^2$, pokud pro některý prvočíselný základ a platí $e(a, p) \bmod p \neq 1$, tak další hodnoty $e(a, p)$ již nepočítej a přejdi k dalšímu pseudoprvočíslu p .
 - Každý složený základ $a < p$ rozlož na součin 2 čísel $a = b \cdot c$ a vypočítej $e(a, p) = e(b, p) \cdot e(c, p) \bmod p^2$, postupuj od nejnižšího základu k nejvyššímu.
 - Pokud $e(a, p) = 1$, tak zapiš $[a, p]$ do výsledků.

Hodnoty základů $a \geq p$ nemohou být tímto algoritmem spočítány, protože by docházelo k chybnému modulárnímu umocňování, proto byly spočítány s využitím standardních knihoven pro práci s velkými čísly. Je jich relativně malé množství, proto pomalejší výpočet nebyl na škodu.

7. DOSAVADNÍ VÝSLEDKY

Nalezená Wieferichova prvočísla jsou umístěna na stránce [8] na záložce files v souboru results/table.txt. V tabulce 7 je výběr některých z nich. V intervalu 2 až $3,5 \cdot 10^{10}$ nebylo nalezeno žádné Wieferichovo prvočíslu pro celkem 433 základů. Nejvyšší nalezené Wieferichovo prvočíslu je $a = 4795, p = 34974531887$. Na uvedené stránce jsou i kompletní zdrojové kódy vytvořeného programu volně ke stažení.

8. HUSTOTA WIEFERICHOVÝCH PRVOČÍSEL

Mohlo by nás zajímat, kolik Wieferichových prvočísel bychom měli ve zkoumaném intervalu najít. Uvažujme hodnotu $e(a, p) = a^{p-1} \bmod p^2$ jako náhodný pokus. Výsledek modulo p^2 může nabývat celkem p^2 různých hodnot. Pouze každá p -tá hodnota ale zároveň vyhovuje rovnici (1.1). Pravděpodobnost, že prvočíslu p je Wieferichovo, je proto určena rovnicí (8.1).

$$P(a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}) = \frac{1}{p} \quad (8.1)$$

Protože je hustota prvočísel rovna $\frac{1}{\ln(p)}$, tak je celkový počet prvočísel v intervalu $p_1 \leq p < p_2$ popsán rovnicí (8.2), N zde představuje počet základů a .

a	p
2	1093, 3511
3	11, 1006003
4	1093, 3511
5	2, 20771, 40487, 53471161, 1645333507, 6692367337
6	66161, 534851, 3152573
7	5, 491531
8	3, 1093, 3511
9	2, 11, 1006003
10	3, 487, 56598313
11	71
9996	72461
9997	2, 7, 15973
9998	3, 31
9999	5, 25763597

Tabulka 2. Vybraná Wieferichova prvočísla.

$$n = N \sum_{p=p_1}^{p_2-1} \frac{1}{p \cdot \ln(p)} \approx N \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p \cdot \ln p} = N (\ln |\ln p_2| - \ln |\ln p_1|) \quad (8.2)$$

V této rovnici byla suma aproximována určitým integrálem. Dosadíme do této rovnice $p_1 = 10^k$, $p_2 = 10^{k+1}$ a získáme tak počet čísel v k -té dekádě:

$$n(k) = N \ln \left(\frac{\ln p_2}{\ln p_1} \right) = N \ln \left(\frac{\log 10^{k+1}}{\log 10^k} \right) = N \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$$

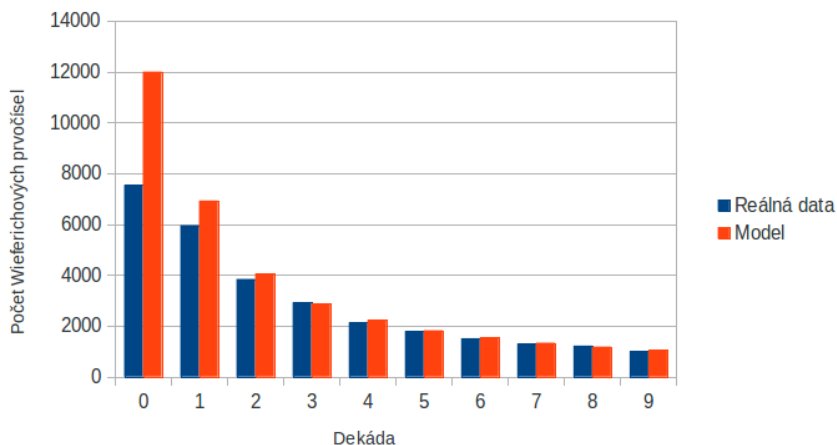
Povšimněme si, že $\lim_{n \rightarrow \infty} n(k) = N \ln 1 = 0$, s rostoucím číslem dekády k tak klesá počet Wieferichových prvočísel v ní obsažených. Přestože tedy budeme vynakládat stále větší úsilí (počet prvočísel v dekádě, která je nutné prozkoumat, roste), budeme nacházet stále méně Wieferichových prvočísel.

Obrázek 1 zobrazuje předpokládaný a nalezený počet Wieferichových prvočísel v jednotlivých dekádách. Povšimněme si, že kromě prvních 2 dekád, kde je počet prvočísel p relativně malý, a nejsou tak splněny předpoklady použité pro odvození modelu, model prakticky koresponduje s reálnými daty.

9. ZÁVĚR

Na základě uvedeného výzkumu byla publikována tabulka obsahující nalezená Wieferichova prvočísla. Ukázalo se, že hledání Wieferichových prvočísel s N základy současně je mnohem méně náročné, než prohledávání jednotlivých základů odděleně. Vytvořený software je publikován v [8].

Dalšího rozšíření intervalu p je možné dosáhnout distribucí výpočtu na mnoho počítačů. Na tomto problému aktuálně pracuji a nalezené výsledky budu v budoucnu publikovat.



Obrázek 1. Četnost Wieferichových prvočísel.

REFERENCE

- [1] A. Manindra: *Primality tests based on Fermats little theorem*, <http://www.cse.iitk.ac.in/users/manindra/survey/FLTBasedTests.pdf>, 7 pp.
- [2] F. G. Dorais, D. Klyve: *A Wieferich Prime Search up to 6.7×10^{15}* , Journal of Integer Sequences 14 (2011), 14 pp, <https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL14/Klyve/klyve3.pdf>.
- [3] PrimeGrid's PRPNet: *Wieferich Prime Search*, <http://prpnet.mine.nu:13000/>.
- [4] M. E. O'Neill: *The Genuine Sieve of Eratosthenes*, <http://www.cs.hmc.edu/~oneill/papers/Sieve-JFP.pdf>, 12 pp.
- [5] N. Smart: *Cryptography: An Introduction*, 3rd ed., http://www.cs.bris.ac.uk/~nigel/Crypto_Book/.
- [6] Advanced Micro Devices, Inc.: *Software Optimization Guide for AMD64 Processors*, http://support.amd.com/us/Processor_TechDocs/25112.PDF, 384 pp.
- [7] D. Hankerson, A. Menezes, S. Vanstone: *Guide to Elliptic Curve Cryptography*, New York, Springer, 2004.
- [8] P. Ležák: *SourceForge: Wieferich*, <https://sourceforge.net/projects/wieferich/>.

Petr Ležák, Ústav telekomunikací, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Vysoké učení technické v Brně, Technická 3082/12, 616 00, Brno, Česká republika,
e-mail: petr.lezak@email.cz

VYSVĚTLENÍ JEDNÉ DŮKAZOVÉ METODY FERMATOVY HYPOTÉZY UŽITÍM TEORIE DĚLITELNOSTI

LADISLAV SKULA

ABSTRAKT. V článku je podáno vysvětlení možného použití teorie dělitelnosti pro důkaz Fermatovy hypotézy v článku L. Kocandy [1], ve kterém se autor dopustil chyby. Účelem tohoto příspěvku je podat podrobnější vysvětlení tohoto nedostatku.

1. ÚVOD

Fermatova hypotéza v současné matematické terminologii je následující tvrzení:
Rovnice

$$x^n + y^n = z^n, \quad (1.1)$$

kde n je přirozené číslo ≥ 3 , nemá žádné řešení v přirozených číslech x, y, z .

Pierre de Fermat (1601–1665) dokázal tuto hypotézu pro $n = 4$. Z tohoto důvodu stačí při důkazu Fermatovy hypotézy omezit se jen na liché prvočíselné exponenty n . Dále pro eventuelní řešení této hypotézy je možno předpokládat:

$$\text{přirozená čísla } x, y, z \text{ jsou po dvou nesoudělná.} \quad (1.2)$$

Předpokládejme, že x, y, z jsou přirozená čísla splňující rovnici (1.1) a n je liché přirozené číslo ≥ 3 . Jestliže $z \geq x + y$, pak $z^n \geq (x + y)^n > x^n + y^n = z^n$, což je spor. Tudíž platí

$$z > x, \quad z > y, \quad x + y > z. \quad (1.3)$$

Jelikož platí

$$z^n = x^n + y^n = (x + y) \cdot \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} x^{n-k} y^{k-1}, \quad (1.4)$$

můžeme o číslech x, y, z ještě předpokládat:

$$\gcd\{x + y, z\} > 1. \quad (1.5)$$

Podmínku (1.5) můžeme také nahradit silnější podmínkou

$$\text{jestliže } \pi \text{ je prvočíslo, které dělí číslo } x + y, \text{ pak } \pi \text{ dělí číslo } z. \quad (1.6)$$

2010 MSC. Primární 11D41; Sekundární 11A05.

Klíčová slova. Fermatova hypotéza.

Práce byla podporována projektem A-Math-Net – Síť pro transfer znalostí v aplikované matematice (CZ.1.07/2.4.00/17.0100).

Označní 1.1. Z důvodu jednoduchosti budeme největšího společného dělitele dvou přirozených čísel ξ, η značit symbolem

$$(\xi, \eta) := \gcd\{\xi, \eta\}.$$

2. PŘIROZENÁ ČÍSLA x, y, z

Budeme v dalším předpokládat, že x, y, z jsou přirozená čísla splňující podmínky (1.2), (1.3), tedy

$$(x, y) = (x, z) = (y, z) = 1, \quad z > x, \quad z > y, \quad x + y > z.$$

Zřejmě platí

Tvrzení 2.1. Číslo $x + y - z$ je přirozené číslo a čísla $(x, z - y)$, $(y, z - x)$ jsou nesoudělná a dělí číslo $x + y - z$.

Označní 2.2. Položíme

$$c := c(x, y, z) = \frac{x + y - z}{(x, z - y) \cdot (y, z - x)}.$$

Podle Tvrzení 2.1 je číslo $c = c(x, y, z)$ přirozené číslo a dále platí:

Tvrzení 2.3. Jestliže čísla x, y, z splňují podmínku (1.5), pak

$$c = c(x, y, z) \geq 2.$$

Důkaz. Předpokládejme, že čísla x, y, z splňují podmínku (1.5). Pak existuje prvočíslo π , které dělí čísla $x + y, z$. Jestliže $c = 1$, pak $(x, z - y) \cdot (y, z - x) = x + y - z$. Tudíž $\pi | (x, z - y)$ nebo $\pi | (y, z - x)$ a pak $\pi | x$ nebo $\pi | y$, což je spor s nesoudělností těchto čísel s číslem z . $\square$

Uvedený výsledek v Tvrzení 2.3 vede k otázce, zdali pro některé trojice x, y, z může být $c(x, y, z) > 1$. Jestliže by se totiž ukázalo, že vždy máme $c(x, y, z) = 1$, pak bychom dostali úplný důkaz Fermatovy hypotézy.

M. Kureš našel dvě trojice čísel x, y, z , pro které platí $c(x, y, z) > 1$. Jsou to trojice $x = 3, y = 7, z = 8$ a $x = 5, y = 7, z = 8$. Jak se snadno nahlédne, máme $c(3, 7, 8) = 2$ a $c(5, 7, 8) = 4$. Podle výpočtu je počet takových trojic pro $z \leq 15$ s podmínkou $x < y$ roven 19. Následující tabulka udává všechny tyto trojice x, y, z , $x < y$ se silnější podmínkou (δ) na čísla x, y, z . Tyto trojice jsou vybrané z předcházejících trojic.

x	y	z	c
7	9	10	2
5	11	12	4
7	11	12	6
3	13	14	2
5	11	14	2
11	14	15	5
13	14	15	6

Tabulka 1

3. VÝSLEDKY ČLÁNKU L. KOCANDY

Ve svém článku [1] L. Kocanda předpokládá existenci přirozených čísel x, y, z s vlastnostmi (1.2), (1.3), (1.5) a prezentuje spor s jejich existencí. Spor je založen na chybném tvrzení, že číslo $c(x, y, z) = 1$. V tomto případě se pak skutečně dochází ke sporu (ve Tvrzení 2.2). Tato rovnost ale neplatí, jak ukazují citované trojice nalezené M. Kurešem a trojice v Tabulce 1.

Pro kontrolu uvedeme jen jiné označení v článku [1]:

$$\begin{aligned} z - y = d, \quad z - x = v, \quad (x, z - y) = (x, d) = d_1, \\ (y, z - x) = (y, v) = v_1, \quad x + y - z = p. \end{aligned}$$

4. DALŠÍ MOŽNOSTI

Další možnosti spočívají v získání ze vztahu (1.4) nějaké vlastnosti čísel x, y, z týkající se dělitelnosti. Například podmínka (1.6) by se mohla nahradit ještě silnější podmínkou

existuje přirozené číslo $n \geq 3$ takové, že číslo $x + y$ dělí z^n .

REFERENCE

- [1] L. Kocanda: *Jak mohl Fermat uvažovat*, Kvaternion **1** (2013), 51–54.
- [2] P. Ribeneboim: *13 Lectures on Fermat's Last Theorem*, Springer Verlag, New York, 1979.

Ladislav Skula, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: skula@fme.vutbr.cz

