

VYUŽITÍ VÍCEROZMĚRNÉ ANALÝZY ROZPTYLU V PSYCHOLOGII

MARIE BUDÍKOVÁ

ABSTRAKT. V příspěvku se zabýváme problémem, jak odhalit rozdíly v úrovni vícerozměrné normálně rozložené proměnné, jejíž hodnoty byly zjišťovány v několika skupinách objektů. Zaměřujeme se na případ, kdy variabilitu sledované vícerozměrné proměnné může ovlivňovat jeden faktor, jedná se tedy o jednofaktorovou MANOVU. Popisujeme způsob provedení MANOVY pomocí statistického programového systému STATISTICA, přičemž používáme data získaná při psychologickém výzkumu středoškolských studentů.

1. ÚVOD

V celé řadě aplikací statistiky v praxi řešíme problém, zda lze určitým faktorem (tj. nominální proměnnou A) vysvětlit variabilitu pozorovaných hodnot p -rozměrné kvantitativní proměnné $\mathbf{X}$. Např. zkoumáme, zda druh kosatce (faktor A , má tři varianty neboli úrovně: *Iris setosa*, *Iris versicolor*, *Iris virginica*) má vliv na délku a šířku kališních lístků a na délku a šířku korunních plátků, tedy v tomto případě je kvantitativní proměnná $\mathbf{X}$ čtyřrozměrná.

Pokud bychom zkoumali závislost pouze jednoho rozměru na druhu kosatce, použili bychom analýzu rozptylu jednoduchého třídění (metoda ANOVA – Analysis of Variance). Ve vícerozměrném případě se jedná o metodu MANOVA (Multivariate Analysis of Variance). Základním principem ANOVY i MANOVY je rozklad celkové variability obsažené v datech na dvě složky: meziskupinovou variabilitu, která je způsobena sledovaným faktorem a reziduální variabilitu, která není způsobena daným faktorem a považujeme ji za náhodnou nebo nepodstatnou.

Zatímco ANOVA se přednáší v kurzech statistiky a je implementována ve všech statistických programových systémech (a také v EXCELU), MANOVA zdaleka není tak rozšířena. V tomto příspěvku popíšeme způsob provádění MANOVY na reálných datech z oblasti psychologie, a to včetně ověřování předpokladů jejího použití a interpretace výsledků.

2010 MSC. Primární 62H15; Sekundární 91E99.

Klíčová slova. MANOVA, systém STATISTICA, nadaní studenti s dyslexií.

Práce byla podporována projektem A-Math-Net – Síť pro transfer znalostí v aplikované matematice (CZ.1.07/2.4.00/17.0100).

2. PROVEDENÍ MANOVY

2.1. Formální popis problému

Předpokládáme, že faktor A má $r \geq 3$ úrovní a přitom na h -té úrovni bylo provedeno n_h p -rozměrných pozorování, která považujeme za realizaci p -rozměrného náhodného výběru rozsahu n_h , $h = 1, \dots, r$. Na každé úrovni faktoru musí být provedeno více pozorování než je závisle proměnných veličin, tj. $n_h > p$, $h = 1, \dots, r$. Výsledky lze zapsat do tabulky 1:

faktor A	výsledky
úroveň 1	$x_{111}, \dots, x_{11p}$
	$x_{1n_11}, \dots, x_{1n_1p}$
...	...
úroveň r	$x_{r11}, \dots, x_{r1p}$
	$x_{rn_r1}, \dots, x_{rn_rp}$

Tabulka 1. Zápis výsledků MANOVY.

Zavedeme následující označení:

$n = \sum_{r=1}^h n_r \dots$ celkový rozsah všech r výběrů,

$M_{hj} = \frac{1}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} X_{hij} \dots$ výběrový průměr j -té proměnné v h -té skupině,
 $j = 1, \dots, p$, $h = 1, \dots, r$,

$\mathbf{M}_h = \begin{pmatrix} M_{h1} \\ \vdots \\ M_{hp} \end{pmatrix} \dots$ vektor výběrových průměrů v h -té skupině, $h = 1, \dots, r$,

$\mathbf{M} = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^r n_h \mathbf{M}_h \dots$ vektor celkových průměrů,

$\mathbf{S}_h = \frac{1}{n_h - 1} \sum_{i=1}^{n_h} (\mathbf{X}_{hi} - \mathbf{M}_h)(\mathbf{X}_{hi} - \mathbf{M}_h)^T \dots$ výběrová varianční matice v h -té skupině, $h = 1, \dots, r$,

$\mathbf{S}_* = \frac{1}{n-r} \sum_{h=1}^r (n_h - 1) \mathbf{S}_h \dots$ vážený průměr výběrových variančních matic.

Celková variabilita obsažená v datech je vyjádřena maticí $\mathbf{T}$:

$\mathbf{T} = \sum_{h=1}^r \sum_{i=1}^{n_h} (\mathbf{X}_{hi} - \mathbf{M})(\mathbf{X}_{hi} - \mathbf{M})^T$. Matici $\mathbf{T}$ lze rozložit na součet dvou matic $\mathbf{T} = \mathbf{E} + \mathbf{B}$, kde $\mathbf{E}$ je matice reziduální variability

$\mathbf{E} = \sum_{h=1}^r \sum_{i=1}^{n_h} (\mathbf{X}_{hi} - \mathbf{M})(\mathbf{X}_{hi} - \mathbf{M})^T = \sum_{h=1}^r (n_h - 1) \mathbf{S}_h$

a $\mathbf{B}$ je matice meziskupinové variability

$$\mathbf{B} = \sum_{h=1}^r (\mathbf{M}_h - \mathbf{M})(\mathbf{M}_h - \mathbf{M})^T.$$

Vliv faktoru, který způsobuje rozpad datové matice na skupiny, se může projevit jen v matici $\mathbf{B}$. Variabilitu projevující se v matici $\mathbf{E}$ tedy považujeme za reziduální, způsobenou buď náhodnými vlivy nebo faktory, kterou nejsou z našeho hlediska podstatné.

2.2. Test hypotézy o shodě vektorů středních hodnot

Nadále budeme předpokládat, že náhodný výběr příslušející h -té úrovni faktoru A , tedy posloupnost stochasticky nezávislých p -rozměrných náhodných vektorů $\mathbf{X}_{h1}, \dots, \mathbf{X}_{hn_h}$, pochází z p -rozměrného normálního rozložení $N_p(\boldsymbol{\mu}_h, \boldsymbol{\Sigma})$, $h = 1, \dots, r$ a jednotlivé náhodné výběry jsou stochasticky nezávislé.

Na hladině významnosti α testujeme nulovou hypotézu $H_0 : \boldsymbol{\mu}_1 = \dots = \boldsymbol{\mu}_r$ proti alternativní hypotéze H_1 : aspoň jedna dvojice vektorů středních hodnot se liší. Při testování této hypotézy můžeme použít až čtyři různé testy založené na Wilksově kritériu, Lawleyově-Hotellingově kritériu, Pillaiově kritériu a na Royově kritériu [2]. Každé z těchto kritérií je určitým způsobem založeno na vlastních číslech matice $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{E}$. Označme λ_g g -té vlastní číslo této matice a s počet nenulových vlastních čísel, přičemž $s = \min(p, r - 1)$. Uvedeme vzorce pro vyjádření jednotlivých kritérií:

Wilksovo kritérium:

$$\Lambda = \frac{\det(\mathbf{E})}{\det(\mathbf{E} + \mathbf{B})} = \prod_{g=1}^s \frac{1}{1 + \lambda_g},$$

Lawleyovo-Hotellingovo kritérium:

$$T^2 = \text{tr}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{E}) = \sum_{g=1}^s \lambda_g,$$

Pillaiovo kritérium:

$$P = \text{tr}(\mathbf{B}(\mathbf{B} + \mathbf{E})^{-1}) = \sum_{g=1}^s \frac{\lambda_g}{1 + \lambda_g},$$

Royovo kritérium:

$$V = \lambda_{(1)},$$

kde $\lambda_{(1)}$ je největší vlastní číslo matice $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{E}$.

V praxi je nejpoužívanější Wilksovo kritérium. Testová statistika F_W pro test shody vektorů středních hodnot vznikne transformací Λ :

$F_W = -\left(n - \frac{p+r}{2} - 1\right) \ln \Lambda$. V případě platnosti nulové hypotézy se statistika F_W asymptoticky řídí rozložením $\chi^2(p(r-1))$. H_0 tedy zamítáme na asymptotické hladině významnosti α , když tato statistika nabude hodnoty větší nebo rovné $1 - \alpha$ kvantilu uvedeného rozložení, tj. $F_W \geq \chi_{1-\alpha}^2(p(r-1))$. Znamená to, že jsme s rizikem omylu nejvýše $100\alpha\%$ prokázali, že alespoň dvě skupiny nemají stejné vektory středních hodnot.

2.3. Simultánní testy o složkách vektorů středních hodnot

Prokážeme-li na zvolené hladině významnosti α rozdíl mezi vektory středních hodnot, budeme dále zjišťovat, které ze sledovaných p kvantitativních proměnných $X_1, \dots, X_p$ způsobují rozdíl mezi skupinami. Provedeme tedy tzv. simultánní testy. Ty odhalí, které jednotlivé proměnné jsou závislé na faktoru A. Současně tedy testujeme p hypotéz

$$H_{01} : \mu_{11} = \dots = \mu_{1r}, \dots, H_{0p} : \mu_{p1} = \dots = \mu_{pr}.$$

Použijeme testovou statistiku založenou na Wilksově kritériu:

$K_j = -\left(n - \frac{p+r}{2} - 1\right) \ln \frac{e_{jj}}{t_{jj}}$, kde e_{jj} resp. t_{jj} je j -tý diagonální prvek matice $\mathbf{E}$ resp. $\mathbf{T}$, $j = 1, \dots, p$. V případě platnosti nulové hypotézy se statistika K_j asymptoticky řídí rozložením $\chi^2(p(r-1))$. H_{0j} tedy zamítáme na asymptotické hladině významnosti α , když $K_j \geq \chi_{1-\alpha}^2(p(r-1))$.

Může však nastat situace, kdy hypotéza o shodě vektorů středních hodnot byla na hladině významnosti α zamítnuta, avšak simultánní testy neprokáží žádný rozdíl mezi složkami vektorů středních hodnot. V takovém případě jsou rozdíly mezi skupinami způsobeny nějakou kombinací sledovaných p proměnných.

2.4. Vícerozměrná obdoba mnohonásobného porovnávání

Dalším krokem, který následuje po zamítnutí hypotézy o shodě vektorů středních hodnot, je provedení vícerozměrné obdoby mnohonásobného porovnávání. Chceme totiž zjistit, které dvojice vektorů středních hodnot se liší na zvolené hladině významnosti α . Budeme tedy pro všechny indexy $h, h^* = 1, \dots, r, h \neq h^*$ testovat hypotézu $H_0 : \boldsymbol{\mu}_h = \boldsymbol{\mu}_{h^*}$ proti $H_1 : \boldsymbol{\mu}_h \neq \boldsymbol{\mu}_{h^*}$. Těchto testů je $\binom{r}{2}$. Nulovou hypotézu zamítneme na hladině významnosti α , když testová statistika (založená na Lawleyově-Hotellingově kritériu)

$$\frac{n-r-p+1}{(r-1)p} \cdot \frac{n_h n_{h^*}}{n_h + n_{h^*}} (\mathbf{M}_h - \mathbf{M}_{h^*})^T \mathbf{E}^{-1} (\mathbf{M}_h - \mathbf{M}_{h^*})$$

nabude hodnoty aspoň $F_{1-\alpha}(\nu_1, \nu_2)$, kde $\nu_1 = \frac{(r-1)p(n-r-p)}{n-2-(r-1)p}$,

$\nu_2 = n - r - p + 1$. Pak jsme s rizikem omylu nejvýše $100\alpha\%$ prokázali, že h -tá a h^* -tá skupina nemají stejné vektory středních hodnot.

2.5. Simultánní testy v mnohonásobném porovnávání

Provedení MANOVY uzavřeme tím, že odhalíme případné rozdíly mezi jednotlivými proměnnými v rámci dvojic skupin. Pro všechny indexy $h, h^*, h \neq h^*$ a všechny indexy $j = 1, \dots, p$ testujeme na hladině významnosti α hypotézu $H_0 : \mu_{hj} = \mu_{h^*j}$ proti $H_1 : \mu_{hj} \neq \mu_{h^*j}$. Zajímá nás tedy rozdíl mezi středními hodnotami j -té proměnné v h -té a h^* -té skupině. Těchto testů je $\frac{pr(r-1)}{2}$. Testová statistika má tvar:

$$\frac{n - r - p + 1}{(r - 1)p(n - r)} \cdot \frac{n_h n_{h^*}}{n_h + n_{h^*}} \cdot \frac{(M_{hj} - M_{h^*j})^2}{S_{*j}^2}$$

(S_{*j}^2 je j -tý diagonální prvek matice $\mathbf{S}_*$). V případě platnosti nulové hypotézy se tato statistika asymptoticky řídí rozložením $F(\nu_1, \nu_2)$. Hypotézu o shodě j -tých složek vektorů středních hodnot v h -té a h^* -té skupině zamítneme na hladině významnosti α , když tato testová statistika nabude hodnoty větší nebo rovné kvantilu $F_{1-\alpha}(\nu_1, \nu_2)$.

Upozornění: Vícerozměrnou obdobu mnohonásobného porovnávání ani simultánní testy v mnohonásobném porovnávání systém STATISTICA neposkytuje. Pro-blém lze vyřešit tím, že na zvolenou hladinu významnosti α aplikujeme Bonferroniho korekci [2].

V prvním případě provedeme pro každou dvojici skupin vícerozměrný dvouvýběrový t-test (tzv. Hotellingův T^2 test) a jeho vypočtenou p -hodnotu porovnáme s číslem $\alpha / \binom{r}{2}$. Je-li $p \leq \alpha / \binom{r}{2}$, považujeme rozdíl ve vektorech středních hodnot příslušných dvojic skupin za prokázaný. Ve druhém případě provedeme pro každou proměnnou a každou dvojici skupin dvouvýběrový t-test a jeho vypočtenou p -hodnotu porovnáme s $\alpha / \frac{pr(r-1)}{2}$. Je-li $p \leq \alpha / \frac{pr(r-1)}{2}$, zamítáme hypotézu o shodě středních hodnot příslušné proměnné v daných dvou skupinách.

2.6. Předpoklady v MANOVĚ a jejich ověřování

Vícerozměrná normalita: V každé z r skupin bychom měli testovat hypotézu, že proměnné $X_1, \dots, X_p$ se řídí p -rozměrným normálním rozložením. Testy na vícerozměrnou normalitu však nejsou běžnou součástí statistických programových systémů. V praxi se spokojíme s tím, že otestujeme normalitu pro každou jednotlivou proměnnou zvlášť. Výsledky těchto testů však posuzujeme jen orientačně. Menší odchylky od normality nebrání provedení MANOVY, při větším porušení používáme vhodné transformace.

Shoda variančních matic: Je-li třídění vyvážené, tj. ve všech skupinách je stejný počet pozorování, je MANOVA odolná vůči porušení předpokladu shody variančních matic. V případě nevyváženého třídění je nutné provést Boxův test shody variančních matic. Na hladině významnosti α testujeme hypotézu $H_0 : \Sigma_1 = \dots = \Sigma_r$ proti alternativní hypotéze H_1 : aspoň jedna dvojice variančních matic se liší. Testová statistika má tvar:

$$T_0 = \frac{1}{C_p} \left[(n - r) \ln |\mathbf{S}_*| - \sum_{h=1}^r (n_h - 1) \ln |\mathbf{S}_h| \right],$$

kde

$$C_p = 1 + \frac{2p^2 + 3p - 1}{6(r-1)(p+1)} \left(\sum_{h=1}^r \frac{1}{n_h - 1} - \frac{1}{n - r} \right)$$

je konstanta zlepšující aproximaci. V případě platnosti nulové hypotézy se statistika T_0 asymptoticky řídí rozložením

$$\chi^2 \left(\frac{(r-1)p(p+1)}{2} \right).$$

Pokud testová statistika nabude hodnoty aspoň

$$\chi^2_{1-\alpha} \left(\frac{(r-1)p(p+1)}{2} \right),$$

hypotézu o shodě variančních matice zamítneme na asymptotické hladině významnosti α .

Linearita vztahů: Vzhledem k tomu, že MANOVA patří do skupiny obecných lineárních modelů, předpokládá se, že v každé skupině existuje mezi závisle proměnnými veličinami přibližně lineární vztah. Tento předpoklad lze orientačně ověřit pomocí dvourozměrných tečkových diagramů. Výskyt nelineárních vztahů snižuje sílu testů v MANOVĚ.

3. APLIKACE MANOVY V PSYCHOLOGICKÉM VÝZKUMU

3.1. Informace o projektu Výkonová motivace rozumově nadaných studentů s dyslexií

Institut výzkumu dětí, mládeže a rodiny je součástí Fakulty sociálních studií Masarykovy univerzity. Vědecká činnost tohoto institutu je zaměřena na sledování psychických a sociálních charakteristik dětí, adolescentů a jejich rodin. V současné době je zde mj. řešen projekt Výkonová motivace rozumově nadaných studentů s dyslexií – základní determinanty v období adolescence a časně dospělosti. Tento projekt se zaměřuje na problematiku mimořádně nadaných adolescentů a mladých dospělých se souběžnou vývojovou poruchou učení – s dyslexií. Podle současných poznatků je právě tato skupina nadaných studentů ve značně znevýhodňující vzdělávací pozici, která jí často znemožňuje dosahovat úspěchů ve škole i v životě. Hlavním cílem projektu je sledování klíčových proměnných, které mohou být zodpovědné za tento stav.

V rámci projektu byly vyšetřeny řádově stovky studentů. V tomto příspěvku se zaměříme na data o 166 studentech bez dyslexie a s diagnostikovanou dyslexií, u nichž byla změřena inteligence Ravenovým testem (maximální skóre je 60 bodů, za nadané jsou považováni studenti se skóre aspoň 56 bodů) a kteří vyplnili dotazník zaměřený na tyto aspekty:

- **vědomí vlastní účinnosti** (přesvědčení jedince, že dokáže úspěšně realizovat chování, které je potřebné k dosažení specifických cílů), výsledky jsou zaznamenány v proměnné skóre H, která může nabývat hodnot od 10 do 40;

- **osobní standardy** (tendence dávat si vysoké cíle a hodnotit se v závislosti na jejich dosažení), výsledky jsou obsaženy v proměnné skóre PS, minimální hodnota může být 7, maximální 35;
- **organizovanost** (ukazuje na schopnost udržovat pořádek a řád ve vlastních věcech), výsledky jsou shrnuty v proměnné skóre O, může nabývat hodnot mezi 6 až 30;
- **potřeba poznávat**, výsledky jsou zaznamenány v proměnné skóre G, která se může pohybovat v mezích -64 až 64.

Celý výzkumný soubor 166 studentů je rozčleněn na čtyři skupiny:

- nadaní studenti s dyslexií ($n_1 = 16$, označení ND),
- nadaní studenti bez dyslexie ($n_2 = 40$, označení NnD),
- průměrní studenti s dyslexií ($n_3 = 22$, označení PD),
- průměrní studenti bez dyslexie ($n_4 = 88$, označení PnD).

Metodami MANOVY zjistíme, zda na hladině významnosti 0,05 existují významné rozdíly mezi uvedenými čtyřmi skupinami studentů a identifikujeme proměnné, které tyto rozdíly způsobují. Ke zpracování použijeme systém STATISTICA Cz 12, a to především modul GLM, jehož součástí je rovněž ANOVA/MANOVA.

3.2. Ověřování předpokladů MANOVY

Nejprve pomocí Shapirova-Wilkova testu ověříme předpoklad o normalitě rozložení proměnných skóre H, skóre PS, skóre O, skóre G (viz 3.1) ve všech čtyřech skupinách:

proměnná	skupina	rozsah	W	p-hodnota
skóre H	ND	16	0,943706	0,396906
skóre PS	ND	16	0,920708	0,173164
skóre O	ND	16	0,974538	0,905670
skóre G	ND	16	0,984604	0,989658
skóre H	NnD	40	0,981282	0,736977
skóre PS	NnD	40	0,947461	0,062032
skóre O	NnD	40	0,950792	0,080743
skóre G	NnD	40	0,927833	0,013694
skóre H	PD	22	0,981058	0,931731
skóre PS	PD	22	0,979518	0,908287
skóre O	PD	22	0,979293	0,904593
skóre G	PD	22	0,960403	0,497479
skóre H	PnD	88	0,983965	0,350405
skóre PS	PnD	88	0,971554	0,049792
skóre O	PnD	88	0,968818	0,032215
skóre G	PnD	88	0,989775	0,728066

Tabulka 2. Výsledky S-W testů normality.

Vidíme, že S-W test zamítá na hladině významnosti 0,05 hypotézu o normalitě skóre G u nadaných nedyslektiků a dále zamítá hypotézu o normalitě skóre PS a skóre O u průměrných nedyslektiků. Normalita je však porušena jen mírně. Nedopustíme se závažné chyby, budeme-li předpokládat, že každá ze čtyř částí datové matice je realizací výběru ze čtyřrozměrného normálního rozložení.

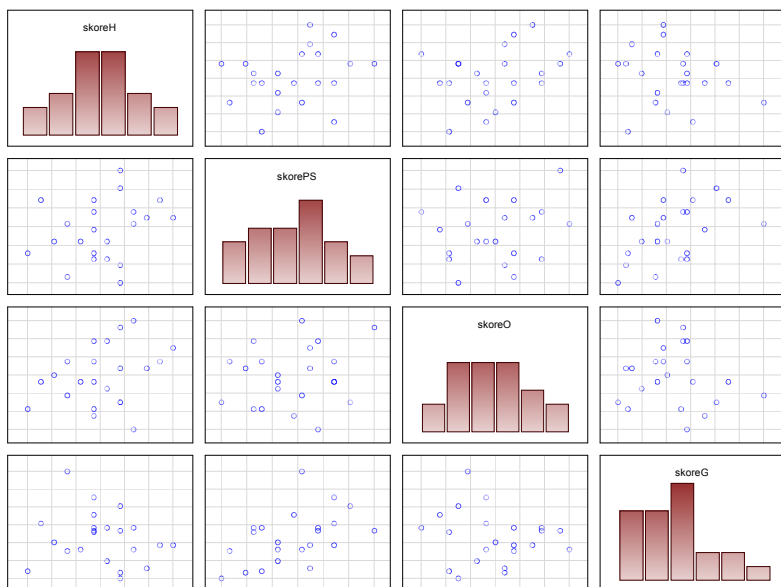
Hypotézu o shodě variančních matic otestujeme Boxovým testem:

	Boxovo M	Chí-kv.	SV	p -hodnota
Boxovo M	39,90594	37,13662	30	0,173196

Tabulka 3. Výsledky Boxova testu homogenity variančních matic.

Test shody čtyř variančních matic poskytl p -hodnotu 0,1732, tedy nadále budeme varianční matice považovat za shodné.

Linearitu vztahů mezi sledovanými proměnnými v daných čtyřech skupinách orientačně posoudíme pomocí tečkových diagramů. Uvedeme zde výsledky jen pro skupinu průměrných dyslektiků, neboť vzhled tečkových diagramů v ostatních skupinách je podobný.



Obrázek 1. Tečkové diagramy dvojic proměnných pro skupinu průměrných dyslektiků.

Výrazné nelinearity se zde neprojevují.

Můžeme konstatovat, že základní předpoklady MANOVY jsou vcelku uspokojivě splněny.

3.3. Provedení MANOVY

Před testováním hypotéz posoudíme úroveň a variabilitu sledovaných proměnných v daných čtyřech skupinách:

proměnná	skupina	rozsah	průměr	sm. odch.
skóre H	ND	16	28,6	3,6
skóre PS	ND	16	22,4	5,2
skóre O	ND	16	17,3	3,2
skóre G	ND	16	18,1	14,2
skóre H	NnD	40	27,3	4,9
skóre PS	NnD	40	20,0	4,5
skóre O	NnD	40	17,7	3,0
skóre G	NnD	40	3,1	20,4
skóre H	PD	22	27,6	2,8
skóre PS	PD	22	20,9	5,0
skóre O	PD	22	15,9	4,3
skóre G	PD	22	7,3	18,0
skóre H	PnD	88	28,3	4,2
skóre PS	PnD	88	20,9	4,4
skóre O	PnD	88	18,5	2,8
skóre G	PnD	88	0,2	19,1

Tabulka 4. Průměry a směrodatné odchylky proměnných v daných čtyřech skupinách.

Z tabulky 4 můžeme vyčíst, že průměry proměnných skóre H a skóre PS se u různých skupin příliš neliší. Průměr skóre O je poněkud nižší ve skupině průměrných dyslektiků. Největší rozdíly mezi průměry jsou pozorovatelné u skóre G, kde se velmi výrazně odlišují nadaní dyslektici a průměrní studenti bez dyslexie.

Z hlediska variability se nejvyrovnanější jeví průměrní dyslektici ve vědomí vlastní účinnosti (skóre H), naopak největší proměnlivost pozorujeme u nadaných nedyslektiků v potřebě poznání (skóre G).

Nyní podle podkapitoly 2.2 provedeme všechny čtyři testy hypotézy o shodě vektorů středních hodnot.

Všechny čtyři testy zamítají na hladině významnosti 0,05 hypotézu, že střední hodnoty proměnných skóre H, skóre PS, skóre O, skóre G jsou ve všech čtyřech skupinách shodné. S rizikem omylu nejvýše 5 % jsme tedy prokázali, že aspoň mezi dvěma skupinami studentů existuje rozdíl z hlediska sledovaných psychologických skóre.

Test	Hodnota	F	Efekt SV	Chyby SV	p -hodnota
Wilksův	0,82122	2,711	12	420,9660	0,001535
Pillaiův	0,18498	2,645	12	483,0000	0,001932
Hotellingův	0,21022	2,762	12	473,0000	0,001213
Royův	0,16843	6,779	4	161,0000	0,000046

Tabulka 5. Výsledky testů o shodě vektorů středních hodnot.

Dále se pomocí simultánních testů pokusíme odhalit, které proměnné způsobují rozdíly mezi skupinami studentů. Simultánní testy STATISTICA neposkytuje. Můžeme však s její pomocí vypočítat matici **E** reziduální variability (viz tabulka 6) a matici **T** celkové variability (viz tabulka tabulka 7). Z těchto matic použijeme diagonální prvky pro výpočet všech čtyř testových statistik (založených na Wilkově kritériu), které jsou uvedeny v podkapitole 2.3.

	skóre H	skóre PS	skóre O	skóre G
skóre H	2788,239	1271,375	265,557	4037,19
skóre PS	1271,375	3433,392	702,182	6882,11
skóre O	265,557	702,182	1596,589	1464,28
skóre G	4037,193	6882,108	1464,277	57782,26

Tabulka 6. Matice **E** reziduální variability.

	skóre H	skóre PS	skóre O	skóre G
skóre H	2826,946	1313,458	298,530	4081,61
skóre PS	1313,458	3502,578	695,301	7257,08
skóre O	298,530	695,301	1731,928	959,94
skóre G	4081,608	7257,084	959,940	62485,28

Tabulka 7. Matice **T** celkové variability.

Diagonální prvky těchto dvou matic použijeme k výpočtu testových statistik, jejichž realizace jsou zaznamenány v tabulce 8:

K1	K2	K3	K4
2,2197	3,2120	13,0999	12,5981

Tabulka 8. Výsledky simultánních testů o složkách vektorů středních hodnot.

Kritický obor je $\langle \chi^2_{1-\alpha}(p(r-1)), \infty \rangle = \langle \chi^2_{0,95}(12), \infty \rangle = \langle 21,0261; \infty \rangle$. Vidíme, že ani jedna ze čtyř statistik se nerealizuje v kritickém oboru. Vzhledem k tomu,

že hypotéza o shodě vektorů středních hodnot byla na hladině významnosti 0,05 zamítnuta, ale simultánní testy jsou nevýznamné, musí být rozdíly mezi skupinami zapříčiněny nějakou lineární kombinací sledovaných čtyř proměnných.

Nyní provedeme vícerozměrnou analogii mnohonásobného porovnávání, tj. zjistíme, mezi kterými dvojicemi skupin existuje onen významný rozdíl, který byl odhalen při testování hypotézy o shodě vektorů středních hodnot. Jak již bylo uvedeno výše, vícenásobnou obdobu mnohonásobného porovnávání STATISTICA neposkytuje. Problém vyřešíme tak, že provedeme všech šest porovnání (1-2, 1-3, 1-4, 2-3, 2-4, 3-4) pomocí vícerozměrného dvouvýběrového t-testu založeného na Hotellingově statistice T^2 a získané p -hodnoty porovnáme s hladinou významnosti korigovanou podle Bonferroniho, tj. s číslem $\alpha / \binom{r}{2} = \alpha / \binom{4}{2} = \frac{0,05}{6} = 0,0083$. Získané p -hodnoty jsou uvedeny v tabulce 9:

	ND	NnD	PD	PnD
ND	-	0,11150	0,28093	0,00077
NnD		-	0,29168	0,14690
PD			-	0,00236
PnD				-

Tabulka 9. p -hodnoty vícerozměrných dvouvýběrových t-testů.

Z této tabulky plyne, že s rizikem omylu nejvýše 5 % se odlišují nadaní dyslektici a průměrní studenti bez dyslexie a také průměrní studenti bez dyslexie a s dyslexií.

Poslední úkol spočívá ve zjištění, které proměnné se podílejí na významných rozdílech mezi dvojicemi skupin. Posouzení rozdílů mezi jednotlivými proměnnými v rámci skupin STATISTICA neumožňuje. Pro každou proměnnou tedy provedeme dvouvýběrový t-test, abychom ji porovnali ve dvojicích skupin 1-2, 1-3, 1-4, 2-3, 2-4, 3-4. Následně zjistíme, zda vypočtené p -hodnoty jsou menší nebo rovný korigované hladině významnosti $\alpha / \frac{pr(r-1)}{2} = 0,05 / 24 = 0,0021$. Vypočtené p -hodnoty obsahuje tabulka 10:

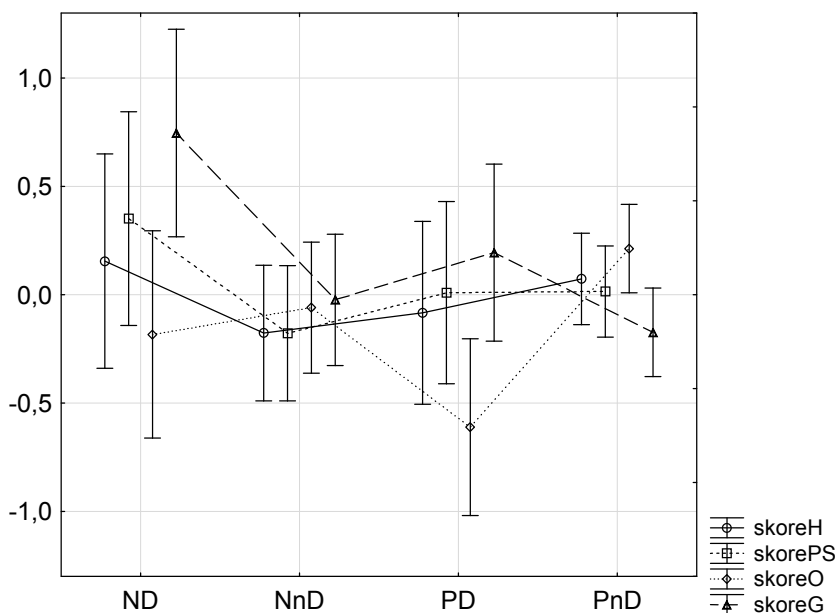
	skóre H	skóre PS	skóre O	skóre G
ND x NnD	0,3109	0,0861	0,6592	0,0096
ND x PD	0,3469	0,3508	0,2839	0,0554
ND x PnD	0,7597	0,2118	0,1058	0,0006
NnD x PD	0,7330	0,4920	0,0604	0,4176
NnD x PnD	0,2191	0,2996	0,1116	0,4347
PD x PnD	0,4914	0,9833	0,0006	0,1149

Tabulka 10. p -hodnoty dvouvýběrových t-testů pro jednotlivé proměnné.

Na základě této tabulky můžeme konstatovat, že:

- nadaní dyslektici a průměrní nedyslektici se liší ve skóre G (nadaní dyslektici vykazují vyšší potřebu poznání než průměrní studenti bez dyslexie),
- průměrní dyslektici a průměrní nedyslektici se liší ve skóre O (průměrní dyslektici mají nižší schopnost udržovat pořádek a řád ve vlastních věcech než průměrní studenti bez dyslexie).

Grafické znázornění rozdílů mezi proměnnými skóre H, skóre PS, skóre O, skóre G v rámci skupin nadaných dyslektiků, nadaných studentů bez dyslexie, průměrných dyslektiků a průměrných studentů bez dyslexie vidíme na obrázku 2, kde body značí průměry a svislé čáry meze 95% intervalů spolehlivosti. Data jsou standardizovaná, aby bylo možno lépe porovnat úroveň jednotlivých proměnných, které mají různou škálu.



Obrázek 2. Porovnání čtyř skupin studentů pro standardizované hodnoty proměnných.

Legenda:

ND – nadaní dyslektici, NnD – nadaní studenti bez dyslexie, PD – průměrní dyslektici, PnD – průměrní studenti bez dyslexie

skóre H – vědomí vlastní účinnosti, skóre PS – osobní standardy, skóre O – organizovanost, skóre G – potřeba poznání

Z obrázku 2 je zřejmé, že vědomí vlastní účinnosti a osobní standardy se v jednotlivých skupinách studentů liší jen málo, zatímco u organizovanosti jsou rozdíly poněkud větší a u potřeby poznání jsou rozdíly dosti výrazné.

4. ZÁVĚR

Cílem tohoto příspěvku bylo vysvětlit základní principy vícerozměrné jednofaktorové analýzy rozptylu a ukázat, jak se MANOVA provádí s využitím systému STATISTICA. Vzhledem k tomu, že některé postupy nejsou v tomto systému implementovány, je naznačen způsob, jak získat potřebné výsledky s využitím Bonferroniho korekce hladiny významnosti.

Aplikace MANOVY na data, která byla získána při psychologickém vyšetření jak nadaných, tak průměrných studentů s dyslexií a bez dyslexie, ukázala, že průměrní dyslektici mají nižší schopnost udržovat pořádek a řád ve vlastních věcech než průměrní studenti bez dyslexie a že nadaní dyslektici vykazují vyšší potřebu poznání než průměrní studenti bez dyslexie. Tyto poznatky by mohly být užitečné pro učitele, kteří se ve své každodenní praxi setkávají s dyslektickými studenty.

Za poskytnutí dat patří díky doc. PhDr. Šárce Portešové, Ph.D. z Institutu výzkumu dětí, mládeže a rodiny.

REFERENCE

- [1] K. Drápela: *Vícerozměrná analýza rozptylu (MANOVA) – její předpoklady a využití*, dostupné z http://user.mendelu.cz/drapela/Statisticke_metody/Tutorialy/MANOVA.doc.
- [2] P. Hebák, J. Hustopecký, E. Jarošová, I. Pecáková: *Vícerozměrné statistické metody (1)*, INFORMATORIUM, Praha, 2004.
- [3] StatSoft, Inc. (2013), STATISTICA (data analysis software system), version 12, www.statsoft.com.
- [4] *Projekt Výkonová motivace rozumově nadaných studentů s dyslexií – základní determinanty v období adolescence a časně dospělosti*, <http://www.muni.cz/research/projects/13707?lang=cs>.

Marie Budíková, Ústav matematiky a statistiky, Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Kotlářská 2, 611 37 Brno, Česká republika,
e-mail: budikova@math.muni.cz

