ALGEBRY ROTACÍ A JEJICH APLIKACE

JAROSLAV HRDINA

ABSTRAKT. Následující text pokrývá jeden z cyklů přednášek předmětu Aplikovaná algebra pro inženýry (0AA) na FSI VUT. Text vznikl při druhém běhu tohoto předmětu ve školním roce 2013/2014 a jeho výsledná korekce proběhla ve školním roce 2014/2015.

1. Úvod

Cílem textu je motivace pro studium pokročilých partií lineární algebry. U čtenáře se předpokládá znalost na úrovni základního kurzu matematiky obvyklého na technických fakultách. Konkrétně se předpokládá znalost maticového počtu, definice a vlastností determinantů a základy geometrie vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$. Základ textu tvoří kapitoly 2, 3, 4, kapitola 5 je doplňková a ukazuje další možnou reprezentaci grupy rotací prostoru $\mathbb{R}^3$. Budeme se převážně opírat o knihy [4, 6] a částečně i o knihu [3]. Kniha [6] je matematickým úvodem do Lieovy teorie, kniha [4] je monografie o sférickém pohybu motivovaná technickou praxí. Konečně kniha [3] je dnes již klasickou literaturou dávající do souvislosti kinematiku a Lieovy grupy. Znalosti s lineární algebry si čtenář může doplnit v knize [9]. Text může spolu s článkem [2] sloužit jako úvod pro studium monografie [5]. V neposlední řadě je možné ke studiu využít i kvalifikační práce zpracované studenty matematického inženýrství na FSI VUT [1, 7, 8].

2. Grupa $SO(3)$

Motivováni inženýrskými aplikacemi pracujeme především s vektorovým prostorem $\mathbb{R}^3$. Prvky vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ budeme zapisovat jako uspořádané trojice reálných čísel (x, y, z). Operace sčítání na $\mathbb{R}^3$ je pak definována po složkách:

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

a operace násobení číslem $k \in \mathbb{R}$ předpisem:

$$k \cdot (x, y, z) = (kx, ky, kz).$$

V další kapitole uvidíme, že takto definované operace na $\mathbb{R}^3$ splňují podmínky obecné definice vektorového prostoru nad polem skalárů $\mathbb{R}$, ale obecnější úvahy

2010 *MSC.* Primární 15B10; Sekundární 11R52.

Klíčová slova. matematická robotika, teorie pohyblivého repéru, grupa $SO(3)$, algebra kvaternionů, grupa $SU(2)$.

Práce byla podporována projektem A-Math-Net – Síť pro transfer znalostí v aplikované matematice (CZ.1.07/2.4.00/17.0100).

o vektorových prostorech zatím nepotřebujeme. Pro danou konečnou množinu $M = \{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^3$ definujeme její *lineární kombinace* jako konečné kombinace sčítání vektorů z M vynásobených reálnými čísly, tj.

$$a_1v_1 + \dots + a_nv_n,\ a_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, n.$$

Vidíme, že každý prvek $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ je možné jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci prvků $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ a $(0, 0, 1)$ takto:

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1).$$

Pokud má být toto vyjádření jednoznačné, musí platit:

$$a_1v_1 + \dots + a_nv_n = b_1v_1 + \dots + b_nv_n \Rightarrow a_i = b_i,\ \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Tuto podmínku lze přepsat na stručnější podmínku:

$$c_1v_1 + \dots + c_nv_n = 0 \Rightarrow c_i = 0 \text{ (kde } c_i = b_i - a_i),$$

která v našem příkladě triviálně platí:

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = 0 \Rightarrow x = y = z = 0.$$

Množině prvků pro které platí, že jejich lineární kombinací lze jednoznačně vyjádřit každý prvek vektorového prostoru se říká *báze* a příslušným koeficientům lineární kombinace pak *souřadnice vektoru* v dané bázi. Tento pojem bude hrát zásadní roli v našich dalších úvahách. Prvky námi nalezené báze označíme

$$e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$$

a bázi $\{e_1, e_2, e_3\}$ říkáme *kanonická*. Naše notace říká, že vektory $\mathbb{R}^3$ zapisujeme řádkově a jejich souřadnice v příslušné bázi sloupcově. Vektor (x, y, z) má tedy v kanonické bázi souřadnice $(x, y, z)^T$. Jinou bází prostoru $\mathbb{R}^3$ je například množina

$$\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\},$$

kde každý prvek (x, y, z) lze vyjádřit jako lineární kombinaci

$$(x, y, z) = (x - y)(1, 0, 0) + (y - z)(1, 1, 0) + z(1, 1, 1)$$

a vektor (x, y, z) má tedy v bázi $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ souřadnice $(x - y, y - z, z)^T$ a podmínka nezávislosti

$$c_1(1, 0, 0) + c_2(1, 1, 0) + c_3(1, 1, 1) = 0$$

vede na soustavu

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 0, \\ c_2 + c_3 &= 0, \\ c_3 &= 0, \end{aligned}$$

která má jen triviální řešení $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Poznamenejme, že operace sčítání vektorů indukuje operaci sčítání po složkách na sloupcích souřadnic v libovolné bázi, stejně tak operace násobení skalárem. Prostor souřadnic má tedy opět strukturu vektorového prostoru čehož budeme později využívat.

Definice 2.1. *Lineární transformací* na $\mathbb{R}^3$ rozumíme zobrazení $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ splňující následující vlastnosti:

$$T(v+w) = T(v) + T(w) \text{ pro všechna } v, w \in \mathbb{R}^3,$$
$$T(\alpha w) = \alpha T(w) \text{ pro všechna } w \in \mathbb{R}^3,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Přímočarým použitím těchto vlastností vidíme, že lineární transformace závisí jen na obrazech prvků báze:

$$T(xe_1 + ye_2 + ye_3) = xT(e_1) + yT(e_2) + zT(e_3). \tag{2.1}$$

Obraz každého prvku báze je opět prvek vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ a můžeme ho tedy vyjádřit jako lineární kombinaci prvků báze:

$$\begin{aligned}
T(e_1) &= m_{11}e_1 + m_{12}e_2 + m_{13}e_3,\\
T(e_2) &= m_{21}e_1 + m_{22}e_2 + m_{23}e_3,\\
T(e_3) &= m_{31}e_1 + m_{32}e_2 + m_{33}e_3.
\end{aligned}$$

Pokud toto vyjádření dosadíme do výrazu (2.1) dostáváme následující výpočet

$$\begin{aligned}
T(xe_1 + ye_2 + ze_3) &= xT(e_1) + yT(e_2) + zT(e_3)\\
&= m_{11}xe_1 + m_{12}xe_2 + m_{13}xe_3 + m_{21}ye_1 + m_{22}ye_2 + m_{23}ye_3\\
&+ m_{31}ze_1 + m_{32}ze_2 + m_{33}ze_3\\
&= (m_{11}x + m_{21}y + m_{31}z)e_1 + (m_{12}x + m_{22}y + m_{32}z)e_2\\
&+ (m_{13}x + m_{23}y + m_{33}z)e_3.
\end{aligned}$$

Nahradíme-li vektor $xe_1+ye_2+ze_3$ sloupcem jeho souřadnic $(x, y, z)^T$, pak poslední výraz není nic jiného než přepsané násobení maticí a transformace T zobrazuje vektor jehož souřadnice ve zvolené bázi jsou $(x, y, z)^T$ na vektor jehož souřadnice ve zvolené bázi jsou

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31}\\ m_{12} & m_{22} & m_{32}\\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{pmatrix} (x, y, z)^T.$$

Tato úvaha ukazuje, že každé lineární transformaci v $\mathbb{R}^3$ odpovídá ve zvolené bázi matice 3×3, která vznikne tak, že ve sloupcích máme souřadnice obrazů bázových prvků. Není těžké ověřit, že naopak násobení libovolnou maticí 3×3 funguje na souřadnicích vektorů $\mathbb{R}^3$ jako lineární transformace. Matice dané lineární transformace je dána jednoznačně (jednoznačnost je dána volbou báze). Lineární transformace na $\mathbb{R}^3$ jsou tedy v jedno jednoznačné korespondenci s maticemi 3×3, přičemž tato korespondence je dána volbou báze.

Jako další krok definujeme na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ *skalární součin* jako zobrazení

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}.$$

následujícím předpisem v souřadnicích zvolené báze

$$\langle (x_1, y_1, z_1)^T, (x_2, y_2, z_2)^T \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Na vektorových prostorech se skalárním součinem jsou pojmy jako velikost vektoru (norma) a odchylka mezi vektory zavedeny právě pomocí skalárního součinu následovně:

$$\parallel u \parallel = \sqrt{\langle u, u\rangle}, \quad \cos\varphi = \frac{\langle u, v\rangle}{\parallel u \parallel \parallel v \parallel}.$$

Hledáme lineární transformace, které zachovávají délky a úhly, takovým transformacím se říká *transformace pevného tělesa* a jsou to právě ty transformace, které zachovávají skalární součin. Všimněme si, že maticově můžeme skalární součin zapsat jako $\langle u, v\rangle = u^T v$ jak vidíme z následujícího výpočtu:

$$\begin{aligned}\langle (x_1, y_1, z_1)^T, (x_2, y_2, z_2)^T\rangle := (x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2)^T = (x_1, y_1, z_1)\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \\ = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.\end{aligned}$$

Nás tedy zajímají lineární transformace, které jsou reprezentované maticí A zachovávající skalární součin, který je na souřadnicích vektorů ve zvolené bázi indukovaný předpisem

$$\langle u, v\rangle = u^T v$$

a můžeme z následujícího výpočtu odvodit podmínku na matici A. Z výrazu

$$(Au)^T(Av) = u^T A^T Av = u^T v$$

dostáváme $A^T A = E$, protože předpokládáme $(Au)^T(Av) = u^T v$. Dostáváme tak množinu matic zachovávajících skalární součin

$$O(3) = \{A \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{R}) |\ A^T A = E\}.$$

Na množině $O(3)$ můžeme definovat operaci násobení jako násobení dvou matic $A, B \in O(3) \subset \mathrm{Mat}(3, \mathbb{R})$, protože výsledná matice po vynásobení nevypadne z $O(3)$:

$$(AB)^T(AB) = B^T(A^T A)B = B^T B = E.$$

Ukážeme, že prvky množiny $O(3)$ mají inverzi, která leží v $O(3)$, protože prvky A a A^T komutují, neboť

$$(AA^T - A^T A)A = (AA^T - E)A = (A - A) = 0 \Rightarrow AA^T - A^T A = 0.$$

Poslední implikace je důsledkem toho, že matice A je invertibilní, protože determinant matice A je nenulový. Proto platí

$$(A^T)^T A^T = A^T(A^T)^T = A^T A = E,$$

a tedy $A^T \in O(3)$, kde jednička je jednotková matice

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pro kterou identita $E^T E = E$ platí triviálně. Množině s jednou binární operací $(M, \cdot)$, která je asociativní, tj.

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \ \ \forall a, b, c \in M,$$

(násobení matic obecně je asociativní a protože se jedná o identitu je vlastnost asociativity indukována i na její podmnožiny), obsahuje jedničku a každý prvek má inverzi, říkáme *grupa*. Dvojice $(O(3), \cdot)$ tedy tvoří grupu, kterou nazýváme *ortogonální grupa*.

Další zajímavou vlastností je, že prvky množiny $O(3)$ mají determinant ± 1. Protože determinant součinu je součin determinantů a determinant transponované matice A^T je stejný jako determinant matice A, dostaneme

$$1 = \det(E) = \det(A^T A) = \det(A^T)\det(A) = (\det(A))^2,$$

a tedy $\det(A) = \pm 1$. Protože $\det(A) = \pm 1$, grupa $O(3)$ se rozpadá na dvě podmnožiny, množinu $SO(3)$ matic s determinantem jedna a množinu $O_-(3)$ matic s determinantem minus jedna. Součin dvou matic s determinantem jedna je opět matice s determinantem jedna, množina $SO(3)$ je tedy uzavřená na násobení. Protože transpozice determinant nemění a jednotková matice má determinant jedna, tvoří množina $SO(3)$ opět grupu (asociativitu dokazovat nemusíme, protože se jedná opět o násobení matic). Množina $O_-(3)$ neobsahuje jedničku a není uzavřená na násobení.

Navíc platí, že násobení libovolným prvkem z $O_-(3)$ určuje jedno jednoznačnou korespondenci mezi množinami $O_-(3)$ a $SO(3)$, zvolíme-li za takový prvek třeba matici

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

můžeme každý prvek z $O_-(3)$ chápat jako kompozici prvku z $SO(3)$ a lineární transformace I. Poznamenejme, že geometrický význam transformace I je zrcadlení kolem roviny $y = 0$. V dalším uvidíme, že prvky $SO(3)$ odpovídají rotacím kolem zvolené osy v kladném směru. Pokud tedy navíc požadujeme zachování orientace (což je přirozený požadavek při transformaci pevného tělesa), dostáváme jako grupu transformaci grupu $SO(3)$, které říkáme *speciální ortogonální grupa*. Dalším pojmem, který zavedeme, je pojem vlastního čísla a vlastního vektoru.

Definice 2.2. Nechť $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je lineární transformace. Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ nazýváme *vlastní číslo* transformace T, pokud existuje $v \neq o$, $v \in \mathbb{R}^3$ takové, že $T(v) = \lambda v$, kde $o \in \mathbb{R}^3$ je nulový vektor.

Pokud máme lineární transformaci zadanou maticí A můžeme vlastní čísla a vlastní vektory vypočítat jako kořeny polynomu

$$\det(A - \lambda E),$$

kterému říkáme *charakteristický polynom matice A*. Podstatnou vlastností, kterou zde nebudeme dokazovat je, že vlastní čísla nezávisí na zvolené bázi a dává proto smysl hovořit o vlastních číslech transformace jako o vlastních číslech matice transformace ve zvolené bázi.

To plyne z následující úvahy:

$$\begin{aligned} Av &= \lambda v, \\ Av - \lambda v &= o, \\ Av - \lambda Ev &= o, \\ (A - \lambda E)v &= o, \end{aligned}$$

přičemž poslední výraz nám říká, že v je v jádru zobrazení $(A - \lambda E)$ a protože v je nenulové, musí platit, že $\det(A - \lambda E) = 0$.

Nejprve podrobněji prodiskutujeme případ $SO(2)$. Pokud má matice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ležet v $SO(2)$, musí splňovat identitu $A^T A = E$ a současně $\det(A) = 1$. Z první podmínky dostaneme:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Protože $a^2 + c^2 = 1$, můžeme v polárních souřadnicích vyjádřit $a = \cos\varphi$, $c = \sin\varphi$ a dosazením do rovnice $ab + cd = 0$ dostaneme $d = C\cos\varphi$, $b = -C\sin\varphi$. Konečně z rovnice $b^2 + d^2 = 1$ máme $C = \pm 1$ a determinant $\det(A) = C = 1$. Celkem dostáváme vyjádření obecné matice $A \in SO(2)$ jako matici rotace kolem středu o úhel φ:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

V následujícím odstavci podrobněji rozebereme případ $A \in SO(3)$. Reálné vlastní číslo matice z $SO(3)$ může být pouze ± 1, protože

$$\lambda^2 \langle v, v\rangle = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \langle Av, Av\rangle = \langle v, v\rangle.$$

Současně si všimneme, že charakteristický polynom pro libovolnou matici z grupy $SO(3)$ je stupně 3 a jeho kořeny mohou tedy být buď tři reálné, nebo jeden reálný a dva komplexně sdružené. V obou případech platí, že matice z $SO(3)$ má vždy alespoň jedno reálné vlastní číslo. Determinant matice se rovná součinu vlastních čísel včetně násobnosti (důkaz je možné nalézt například v knize [9]) a pokud je matice $A \in SO(3)$, jsou dvě možnosti $(\pm 1)(\pm 1)(\pm 1) = 1$, nebo $(\pm 1)(a + bi)(a - bi) = 1$. V prvním případě je buď jedno nebo všechna tři čísla rovna jedné, v druhém případě dostaneme $\pm 1(a^2 + b^2) = 1$ a protože $(a^2 + b^2) > 0$, musí být první vlastní číslo 1. Platí tedy, že pro matice z $SO(3)$ existuje alespoň jeden vlastní vektor s vlastním číslem 1. Předpokládejme, že v je vlastní vektor s vlastním číslem 1, pak můžeme zvolit podprostor v prostoru souřadnic zvolené báze.

$$F = \{w \in \mathbb{R}^3 | \langle v, w\rangle = 0\}.$$

Pro matici $A \in SO(3)$, pak platí $A(v) = v$ a ukážeme, že matice A zachovává F. Nechť $w \in F$, pak

$$0 = \langle w, v\rangle = \langle A(w), A(v)\rangle = \langle A(w), v\rangle.$$

Můžeme tedy zúžit A na podprostor F a protože $A \in SO(3)$ zachovává skalární součin, zúžení $A|_F$ zachovává skalární součin na F, tedy F musí být izomorfní $SO(2)$. Pokud zvolíme bázi, kde první bázový vektor bude v a zbývající dva budou tvořit ortogonální bázi F, bude matice lineární transformace odpovídat matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Každá matice z $SO(3)$ je tedy rotací kolem osy v o zvolený úhel θ. V kanonické bázi pak rotace kolem os x, y a z o úhel θ odpovídají maticím

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Stopou matice A rozumíme součet prvků na hlavní diagonále a označujeme ji $\mathrm{Tr}(A)$. Platí, že stopa matice je nezávislá na volbě báze a pro matici $A \in SO(3)$ tedy vždy platí, že

$$Tr(A) = 1 + 2\cos(\theta).$$

Tohoto vztahu můžeme využít pro nalezení úhlu rotace:

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{Tr}(A) - 1}{2}.$$

Pokud bychom analyzovali matici $A \in Mat(3, \mathbb{R})$, tedy matici 3×3 nad reálnými čísly, postupujeme podle následujícího algoritmu:

1. Pokud platí identita $A^T A = E$, jedná se o matici zachovávající skalární součin.
2. Pokud $\det(A) = 1$, jedná se o rotaci v kladném směru.
3. Nalezneme osu rotace jako řešení systému $(A - E)(x_1, x_2, x_3)^T = 0$.
4. Určíme úhel rotace podle vzorce $\cos\theta = \frac{\mathrm{Tr}(A)-1}{2}$.

3. Metoda pohyblivého repéru

V předešlé kapitole jsme používali intuitivně pojem báze, ale pro naše další úvahy je potřeba postupovat formálněji. Poznamenejme, že pokud máme množinu s binární operací $(M, \cdot)$ pak říkáme, že operace je komutativní pokud platí

$$a \cdot b = b \cdot a, \ \ \forall a, b \in M.$$

Definice 3.1. *Vektorový prostor* (nad reálnými čísly $\mathbb{R}$) je množina $\mathbb{V}$, na které je definována operace $+ : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ taková, že dvojice $(\mathbb{V}, +)$ tvoří komutativní grupu a operace násobení skalárem $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ taková, že platí

$$\begin{aligned} a \cdot (u + v) &= a \cdot u + a \cdot v, \\ (a + b) \cdot u &= a \cdot u + b \cdot u, \\ (ab) \cdot u &= a \cdot (b \cdot u), \\ 1 \cdot u &= u, \end{aligned}$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $u, v \in \mathbb{V}$.

Báze vektorového prostoru je pak nejmenší možná množina vektorů, jejichž lineární kombinace generují celý vektorový prostor.

Příklad 3.2. Jako příklad této obecnější definice si uvedeme množinu polynomů maximálně druhého stupně $\mathbb{R}_2[x]$ spolu s operací sčítání polynomů a násobení reálnými čísly tvoří vektorový prostor. Tedy například můžeme tvořit takovéto lineární kombinace:

$$(x^2 + 2x - 3) + 2(x + 12) = (x^2 + 4x + 21).$$

Báze prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ může být například množina $\alpha = \{1, x, x^2\}$, nebo množina $\beta = \{1, 1 + x, x + x^2\}$.

Protože jedna z vlastností báze je, že každý vektor z vektorového prostoru je možné jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci jejich prvků, pro vektorový prostor $\mathbb{R}_2[x]$ a báze α a β z příkladu dostáváme jednoznačné lineární kombinace

$$(x^2 + 4x + 21) = 21(1) + 4(x) + 1(x^2),$$
$$(x^2 + 4x + 21) = 18(1) + 3(1 + x) + 1(x + x^2).$$

Obecně pevně zvolená báze vektorového prostoru každému vektoru jednoznačně přiřazuje jednoznačnou n-tici reálných čísel, kterým říkáme *souřadnice vektoru v dané bázi.* Volba báze tedy určuje izomorfismus mezi vektorovým prostorem a $\mathbb{R}^n$ (v našem případě $\mathbb{R}^3$). Souřadnice vektoru v v bázi γ se pak označuje $[v]_\gamma$ a pro vektorový prostor $\mathbb{R}_2[x]$ a báze α a β z příkladu dostáváme

$$[x^2 + 4x + 21]_\alpha = \begin{pmatrix} 21 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$[x^2 + 4x + 21]_\beta = \begin{pmatrix} 18 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

V předešlé kapitole jsme pracovali s vektorovým prostorem $\mathbb{R}^3$ a takzvanou kanonickou bází $\alpha = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Příslušná matice transformace T pak je maticí transformace v bázi α a píšeme $[T]_\alpha$. Série úvah provedená v minulé kapitole ale na této volbě nezávisí. Volba báze jednoznačně přiřazuje každé lineární transformaci $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ matici 3×3, která pak funguje jako stejná lineární transformace na souřadnicích v této bázi.

Definice 3.3. Nechť $\mathbb{V}$ je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, a nechť $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ je lineární transformace. Pro pevně zvolenou bázi β vektorového prostoru $\mathbb{V}$ je matice $[T]_\beta$ *maticí lineární transformace* v bázi β právě tehdy, když

$$[T(v)]_\beta = [T]_\beta [v]_\beta.$$

Nalezení matice $[T]_\beta$ se provede tak, že se obrazy bázových prvků báze β vyjádří v souřadnicích báze β a tvoří pak sloupce matice $[T]_\beta$. Definici můžeme ještě zobecnit tak, že na vektorovém prostoru $\mathbb{V}$ zvolíme dvě báze α, β a uvažujeme matici $[T]_{\alpha\to\beta}$ jako matici splňující

$$[T(v)]_\beta = [T]_{\alpha\to\beta} [v]_\alpha.$$

Na vstupu tedy máme souřadnice vektoru v v bázi α a na výstupu obrazy vektorů v souřadnicích báze β. Vlastní výpočet se pak provede analogicky tak, že se obrazy bázových vektorů báze α vyjádří v souřadnicích báze β a tyto souřadnice pak tvoří sloupce matice $[T]_{\alpha\to\beta}$.

Příklad 3.4. Pokračujeme v Příkladu 2.3 a na vektorovém prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ zavedeme operaci derivace algebraicky takto

$$\partial(ax^2 + bx + c) = 2ax + b.$$

Na $\mathbb{R}_2[x]$ zavedeme dvě báze $\alpha = \{1, x, x^2\}$, $\beta = \{1, 1+x, x+x^2\}$ a vypočteme matici $[\partial]_{\alpha\to\beta}$. Vezmeme tedy vektory báze α, zderivujeme je

$$\begin{aligned}\partial 1 &= 0\\ \partial x &= 1\\ \partial x^2 &= 2x\end{aligned}$$

a souřadnice výsledných vektorů v bázi β jsou pak

$$\begin{aligned}[0]_\beta &= 0(1) + 0(1+x) + 0(x+x^2),\\ [1]_\beta &= 1(1) + 0(1+x) + 0(x+x^2),\\ [2x]_\beta &= -2(1) + 2(1+x) + 0(x+x^2).\end{aligned}$$

Tedy matice $[\partial]_{\alpha\to\beta}$ je v následujícím tvaru:

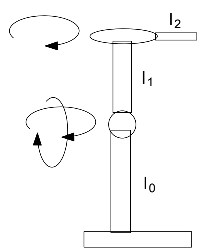
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Pokud například vezmeme jako lineární transformaci identitu, bude příslušná matice transformace $[id]_{\alpha\to\beta}$ přepočítávat souřadnice vektorů báze α do souřadnic vektorů báze β.

Definice 3.5. Nechť α a β jsou dvě báze vektorového prostoru $\mathbb{V}$ a matice $[P]_{\alpha\to\beta}$ splňuje

$$[\mathbf{v}]_\beta = [P]_{\alpha\to\beta}[\mathbf{v}]_\alpha$$

(jedná se vlastně o matici transformace P, kde $P = \text{id}$ je identické zobrazení). Pak matici $[P]_{\alpha\to\beta}$ říkáme *matice přechodu* od báze α k bázi β.



Obrázek 1. Robot se dvěma kinematickými dvojicemi.

Metoda pohyblivého repéru (báze) je způsob jak sestavit kinematický řetězec. Jako příklad volíme robotické rameno (Obrázek 1.) se dvěma kinematickými dvojicemi, první sférickou a druhou cylindrickou. Zavedeme si tři bázové systémy. První je spojený s patou systému a další dva odpovídají příslušným kinematickým dvojicím. Cílem je vyjádření koncového bodu v souřadnicích prvního bázového systému v závislosti na parametrech kinematických dvojic. Označíme si příslušné bázové systémy jako

$$\mathcal{B}_0 = (P_0, x_0, y_0, z_0),\ \mathcal{B}_1 = (P_1, x_1, y_1, z_1),\ \mathcal{B}_2 = (P_2, x_2, y_2, z_2),$$

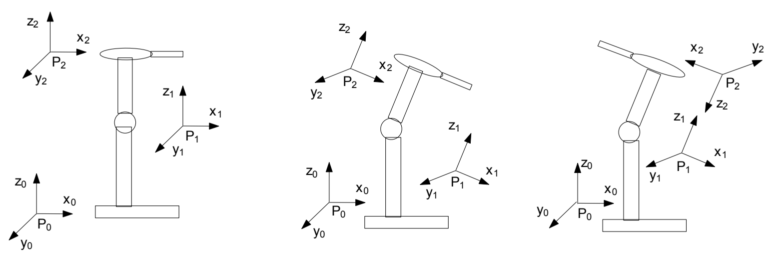
kde P_i jsou body počátku souřadného systému a množiny $\{x_i, y_i, z_i\}$ báze $\mathbb{R}^3$. Příslušné délky ramen jsou pak obecně l_0, l_1 a l_2. Sférickou kinematickou dvojici popíšeme jako složení dvou cylindrických, a to nejprve v ose z_1 a pak v ose y_1, tedy

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & 0 & -\sin\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cylindrickou dvojici pak realizujeme jako rotaci v ose z_2, tedy

$$A_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice přechodu z báze $\mathcal{B}_1$ k bázi $\mathcal{B}_0$ je A_1, matice přechodu z báze $\mathcal{B}_2$ k bázi $\mathcal{B}_1$ je A_2 a matice přechodu z báze $\mathcal{B}_2$ k bázi $\mathcal{B}_0$ je pak A_1A_2. Nechť Q je koncový



Obrázek 2. Metoda pohyblivého repéru.

bod systému (chapadlo). Poloha vektoru (P_iQ) v souřadném systému $\mathcal{B}_i$ je určená sloupcem souřadnic $[P_iQ]_{\mathcal{B}_i}$. Konkrétně v souřadném systému $\mathcal{B}_2$ je poloha určena vektorem

$$[P_2Q]_{\mathcal{B}_2} = (l_2, 0, 0)^T.$$

Dalším krokem je určení polohy P_1Q v souřadném systému $\mathcal{B}_1$ tedy

$$[P_1Q]_{\mathcal{B}_1} = [P_1P_2]_{\mathcal{B}_1} + [P_2Q]_{\mathcal{B}_1} = (0,0,l_1)^T + A_2(l_2,0,0)^T$$

a konečně P_0Q v souřadném systému $\mathcal{B}_0$

$$[P_0Q]_{\mathcal{B}_0} = [P_0P_1]_{\mathcal{B}_0} + [P_1Q]_{\mathcal{B}_0} = (0,0,l_0)^T + A_1(0,0,l_1)^T + A_1A_2(l_2,0,0)^T.$$

Rozepíšeme si to maticově

$$[P_0Q]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & 0 & -\sin\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & 0 & -\sin\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a dostaneme systém rovnic závislý na třech parametrech $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \langle 0, 2\pi \rangle$, který odpovídá kinematice zvoleného robota. Volbou parametrů θ_i měníme natočení v jednotlivých kloubech a $[P_0Q]_{\mathcal{B}_0}$ pak určuje souřadnice vektoru mezi patou systému a chapadlem v bázi paty systému, kterou jsme zvolili jako referenční.

4. Algebra kvaternionů $\mathbb{H}$

Nejprve připomeňme, že komplexními čísly $\mathbb{C}$ rozumíme dvojice reálných čísel $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ spolu se dvěma binárními operacemi

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d),$$
$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Je lehké ověřit, že takto definovaná komplexní čísla tvoří komutativní těleso. Komutativním tělesem přitom rozumíme množinu vybavenou dvěma binárními operacemi $(M, +, \cdot)$ takovou, že dvojice $(M, +)$ tvoří komutativní grupu s nulovým prvkem 0, dvojice $(M - \{0\}, \cdot)$ tvoří také komutativní grupu a operace $+$ a $\cdot$ jsou navzájem distributivní. Poznamenejme, že pro prvek $(a,b) \in \mathbb{C}$, $(a,b) \neq (0,0)$, dostaneme inverzi ve tvaru

$$(a,b)^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2}(a, -b).$$

Souvislost s klasickým zápisem $a + bi := (a,b)$ se lehce ověří výpočtem

$$i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1$$

a není těžké následně dokázat, že definice komplexních čísel jako rozšíření tělesa reálných čísel o prvek i, kde $i^2 = -1$ (tj. $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i] = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}$), je naší definici ekvivalentní. Geometricky můžeme komplexní číslo $z = (a,b) \in \mathbb{C}$ realizovat jako vektor v $\mathbb{R}^2$. Každý vektor $z = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ můžeme charakterizovat jeho normou $|z|$ a úhlem θ, který svírá vektor (a,b) s osou x, přičemž platí

$$(a,b) = |z|(\cos\theta, \sin\theta).$$

Díváme–li se na $\mathbb{R}^2$ jako na komplexní čísla $\mathbb{C}$, tak pokud násobíme vektor $(x,y) = x + iy$ jednotkovým vektorem

$$\cos\theta + i\sin\theta$$

dostaneme vektor $(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$ a matice příslušného lineárního zobrazení na $\mathbb{R}^2$ ve standardní bázi je tedy

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Díváme se tedy na $\mathbb{R}^2$ jako na komplexní čísla $\mathbb{C}$ pak rotace kolem počátku o úhel θ můžeme reprezentovat jako násobení jednotkovým komplexním číslem

$$\cos\theta + i\sin\theta$$

a z goniometrických vzorců lehce dokážeme, že

$$\mathbb{S}^1 = \{\cos\theta + i\sin\theta |\ \theta \in \langle 0, 2\pi)\}$$

tvoří grupu, tj. zejména platí

$$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2).$$

Množina rotací je tedy izomorfní právě jednotkovým komplexním číslům

$$\mathbb{S}^1 = \{z,\ \text{kde } |z| = 1\}.$$

Označíme–li $1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $i := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, dostaneme opět příslušné identity

$$1^2 = 1, 1 \cdot i = i \cdot 1 = i, i^2 = -1.$$

Prvky grupy $\mathbb{S}^1$ můžeme reprezentovat maticově

$$R_\theta = \cos\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a dostaneme tak alternativní popis $\mathbb{S}^1$ maticově

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a + bi.$$

Poznamenejme, že v maticové reprezentaci je druhá mocnina velikosti komplexního čísla $|a+bi|^2 = a^2+b^2$ rovna determinantu příslušné matice. Dále, z vlastností pro determinant $|AB| = |A||B|$ dostaneme pro čtveřice reálných čísel zajímavý vztah

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = (a_1a_2 + b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2.$$

Historicky se problém nalezení čísel x, y pro a_1, b_1, a_2, b_2 takových, že

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = x^2 + y^2,$$

který je ekvivalentní nalezení takového pravoúhlého trojúhelníku jehož odvěsna je součin odvěsen dvou zvolených pravoúhlých trojúhelníků objevuje už před 2000 lety v díle řeckého matematika Diophanta.

Nyní prodiskutujeme geometrické vlastnosti kvaternionů a jejich využití pro popis sférického pohybu. Nejprve připomeňme, že kvaterniony rozumíme čtveřice reálných čísel $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ spolu se dvěma binárními operacemi

$$\begin{aligned}
&(a_1, b_1, c_1, d_1) + (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2),\\
&(a_1, b_1, c_1, d_1) \cdot (a_2, b_2, c_2, d_2)\\
&\qquad\qquad = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2, a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_2c_2,\\
&\qquad\qquad a_1c_2 + c_1a_2 - b_1d_2 + d_1b_2, a_1d_2 + d_1a_2 + b_1c_2 - c_1b_2).
\end{aligned}$$

Je lehké ověřit, že takto definované kvaterniony tvoří nekumtativní těleso. Poznamenejme jen, že pro prvek $(a, b, c, d) \in \mathbb{H}$ dostaneme inverzi ve tvaru

$$(a, b, c, d)^{-1} = \frac{(a, -b, -c, -d)}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2},$$

souvislost s klasickým zápisem $a+bi+cj+dk := (a, b, c, d)$ se lehce ověří výpočtem

$$\begin{aligned}
i^2 &= (0, 1, 0, 0) \times (0, 1, 0, 0) = (-1, 0, 0, 0) = -1,\\
j^2 &= (0, 0, 1, 0) \times (0, 0, 1, 0) = (-1, 0, 0, 0) = -1,\\
k^2 &= (0, 0, 0, 1) \times (0, 0, 0, 1) = (-1, 0, 0, 0) = -1,\\
ij &= (0, 1, 0, 0) \times (0, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, 1) = k,\\
ji &= (0, 0, 1, 0) \times (0, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, -1) = -k,
\end{aligned}$$

a není těžké následně dokázat, že definice kvaternionů jako rozšíření tělesa reálných čísel o prvky i, j, k, kde $i^2 = j = k = -1$ a $ij = -ji = k$ (tj. $\mathbb{H} = \mathbb{R}[i, j, k]$) je s naší definici ekvivalentní. Stejně jako komplexní čísla můžeme analogicky reprezentovat kvaterniony $\mathbb{H}$, ale tentokrát komplexními maticemi:

$$q = \begin{pmatrix} a+id & -b-ic \\ b-ic & a-id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix},$$

kde $\alpha = a+id$ a $\beta = b+ic$. Při tomto popisu je determinant příslušné matice opět roven druhé mocnině velikosti kvaternionu, tj číslu $a^2+b^2+c^2+d^2$. Ve vhodné bázi můžeme opět libovolný kvaternion vyjádřit jako $q = a1+bi+cj+dk$,

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, j = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, k = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

a dostat klasické vztahy

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k.$$

Pokud do komplexních matic pro 1 a i dosadíme jejich maticové reprezentace, dostaneme reprezentaci kvaternionů pomocí reálných matic 4×4:

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, k = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

a opět z vlastností determinantů plyne vztah

$$\begin{aligned}(a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2) &= (a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2-d_1d_2)^2+ \\ &+ (a_1b_2+b_1a_2+c_1d_2-d_1c_2)^2+ \\ &+ (a_1c_2-b_1d_2+c_1a_2+d_1b_2)^2+ \\ &+ (a_1d_2-b_1c_2-c_1b_2+d_1a_2)^2.\end{aligned}$$

Poznamenejme, že ryze imaginární kvaterniony $\mathrm{Im}\mathbb{H} = \mathbb{R}i+\mathbb{R}j+\mathbb{R}k$ tvoří ortogonální komplement k $\mathbb{R}1$, že součet dvou ryze imaginárních kvaternionů je opět ryze imaginární kvaternion, ale že součin dvou čistě imaginárních kvaternionů nemusí být vždy imaginární. Pří rozepsání součinu pro libovolné dva imaginární kvaterniony

$$\begin{aligned}uv = &-(u_2v_2+u_3v_3+u_4v_4)+(u_3v_4-u_4v_3)i+(u_2v_4-u_4v_2)j \\ &+(u_2v_3-u_3v_2)k\end{aligned}$$

je zřejmé, že součin uv je ryze imaginární kvaternion, pokud vektory (u_2,u_3,u_4), (v_2,v_3,v_4) jsou ortogonální a ryze reálný pokud jsou rovnoběžné, zejména $u^{-1}u = |u|^2 = -u^2$ Analogicky jako u komplexních čísel, kde sféra jednotkových komplexních čísel $\mathbb{S}^1$ reprezentovala rotace kolem počátku, sféra jednotkových kvaternionů

$$\mathbb{S}^3 = \{z \in \mathbb{H} : |z| = 1\}$$

reprezentuje rotace $\mathbb{R}^3$ kolem zvolené osy. Abychom mohli použít kvaterniony pro popis rotace v $\mathbb{R}^3$, zavedeme operaci konjugace $q^{-1}tq$. Prvky $\mathbb{R}^3$ reprezentujeme jako ryze imaginární kvaterniony $\mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$ následovně

$$(x_1, x_2, x_3) \rightleftharpoons x_1 i + x_2 j + x_3 k.$$

Nyní definujeme množinu kvaternionů, kterým říkáme *rotory*, jako kvaterniony tvaru

$$q = \cos\frac{\theta}{2} + u\sin\frac{\theta}{2}, \tag{4.1}$$

kde u je jednotkový ryze imaginární kvaternion tvaru $\mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$. Následující výpočet ukazuje, že pro každý rotor q platí $|q| = 1$:

$$|q|^2 = q^{-1}q = (\cos\frac{\theta}{2} - u\sin\frac{\theta}{2})(\cos\frac{\theta}{2} + u\sin\frac{\theta}{2}) = (\cos^2\frac{\theta}{2} - u^2\sin^2\frac{\theta}{2}) = 1,$$

protože u je ryze imaginární kvaternion a tedy $-u^2 = u^{-1}u = |u|^2 = 1$. Lze ukázat, že každý kvaternion s normou jedna jde napsat ve tvaru (4.1). Rotory jsou uzavřené na násobení, protože

$$|q_1q_2|^2 = (q_1q_2)^{-1}(q_1q_2) = (q_2)^{-1}(q_1)^{-1}q_1q_2 = (q_2)^{-1}q_2 = 1$$

a množina rotorů tedy tvoří grupu.

Podstatné je, že konjugování pomocí rotoru q reprezentuje rotaci kolem osy u o úhel θ. Důkaz tohoto tvrzení můžeme najít například v [6]. Demonstrujeme, že zmíněný postup funguje pro konkrétně zvolené parametry. Pokud bychom chtěli realizovat rotaci kolem osy z o úhel θ, zvolíme vektor

$$u = 0i + 0j + 1k$$

a rotor příslušný zvolené rotaci je

$$q = \cos\frac{\theta}{2} + k\sin\frac{\theta}{2}.$$

V následujícím výpočtu provedeme konjugování $q^{-1}tq$, kde $t = xi + yj + zk$ je obecný vektor v $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
q^{-1}tq &= (\cos\frac{\theta}{2} - k\sin\frac{\theta}{2})(xi + yj + zk)(\cos\frac{\theta}{2} + k\sin\frac{\theta}{2})\\
&= xi\cos^2\frac{\theta}{2} + yj\cos^2\frac{\theta}{2} + zk\cos^2\frac{\theta}{2} - xj\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\\
&+ yi\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} + z\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\\
&- xj\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} + iy\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} - z\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} - ix\sin^2\frac{\theta}{2}\\
&- yj\sin^2\frac{\theta}{2} + kz\sin^2\frac{\theta}{2}\\
&= i(x\cos^2\frac{\theta}{2} + 2y\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} - x\sin^2\frac{\theta}{2})\\
&+ j(y\cos^2\frac{\theta}{2} - 2x\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} - y\sin^2\frac{\theta}{2})\\
&+ k(z\cos^2\frac{\theta}{2} + z\sin^2\frac{\theta}{2})
\end{aligned}$$

$$= i(x\cos\theta + y\sin\theta) + j(y\cos\theta - x\sin\theta) + kz.$$

Poznamenejme, že v poslední rovnici jsme využili dvojici goniometrických identit:

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta,$$
$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta.$$

Výsledný tvar transformace

$$q^{-1}tq = i(x\cos\theta + y\sin\theta) + j(y\cos\theta - x\sin\theta) + kz$$

při identifikaci $\mathrm{Im}\,\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^3$ odpovídá lineární transformaci, kterou můžeme maticově zapsat jako

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a tedy rotaci kolem osy z o úhel θ. Cylindrický pohyb, tedy pohyb podle už pevně zvolené osy u, můžeme realizovat konjugováním rotory

$$q = \cos\frac{\theta}{2} + u\sin\frac{\theta}{2},$$

kde $\theta \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Klasické posunutí realizujeme jednoduše jako přičtení prvku z $\mathrm{Im}\,\mathbb{H}$. Sférický pohyb můžeme realizovat metodou Eulerových úhlů, kterou v našem kontextu dostaneme konjugováním dvojicí rotorů $q_2^{-1}q_1^{-1}xq_1q_2$, kde

$$q_1 = \cos\frac{\theta_1}{2} + i\sin\frac{\theta_1}{2},\ q_2 = \cos\frac{\theta_2}{2} + j\sin\frac{\theta_2}{2}.$$

5. Grupa $SU(2)$

Další možností, jak realizovat rotace, je pomocí grupy $SU(2)$, tento přístup je motivován fyzikou částic a je technicky náročnější. Vynucuje definování několika dalších pojmů.

Relací na množině M rozumíme podmnožinu kartézského součinu $R \subset M \times M$. Jako příklad můžeme na $\mathbb{R}$ definovat relaci

$$R = \{(a,b) | a, b \in \mathbb{R},\ a < b\},$$

která je formálním ekvivalentem klasické relace ostře menší $<$. Relaci označujeme *reflexivní*, pokud

$$\forall a \in M : (a,a) \in R$$

symetrická, pokud

$$\forall a, b \in M : (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$$

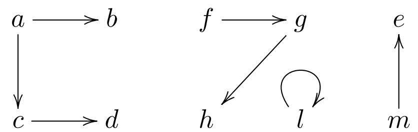
a *tranzitivní*, pokud

$$\forall a, b, c \in M : (a,b), (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R.$$

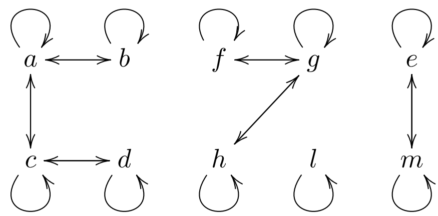
Relace ostře menší není reflexivní ani symetrická a je pouze tranzitivní. Relace, která je současně reflexivní, symetrická a tranzitivní, se nazývá relací *ekvivalence*. Relací ekvivalence je například relace rovnosti $=$. Pro další úvahy budeme realizovat relaci R graficky. Body množiny M znázorníme jako body v rovině. Pokud pro $a, b \in M$ platí $(a, b) \in R$, nakreslíme šipku z bodu a do bodu b. Například na množině $M = \{a, b, c, d, e, f, g, h, l, m\}$ definujeme relaci

$$R = \{(a, b), (a, c), (c, d), (f, g), (g, h), (m, e), (l, l)\},$$

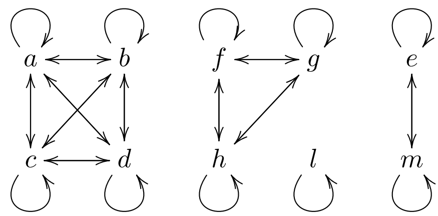
kterou můžeme graficky znázornit jako orientovaný graf:



Tato relace není relací ekvivalence, protože není reflexivní. Jediný prvek, který je v relaci sám se sebou, je prvek l. Není ani symetrická, protože obsahuje jednostranné šipky a není ani tranzitivní. Aby byla relace reflexivní, musí být smyčka na každém prvku. Aby byla relace symetrická, musí platit, že pokud vede šipka jedním směrem, musí vést i opačně. Symetrická a reflexivní relace odpovídá pak obrázku:



Tato relace není tranzitivní, protože například $(a, c), (c, d) \in R$ ale $(a, d) \notin R$. Relace ekvivalence odpovídá následujícímu obrázku

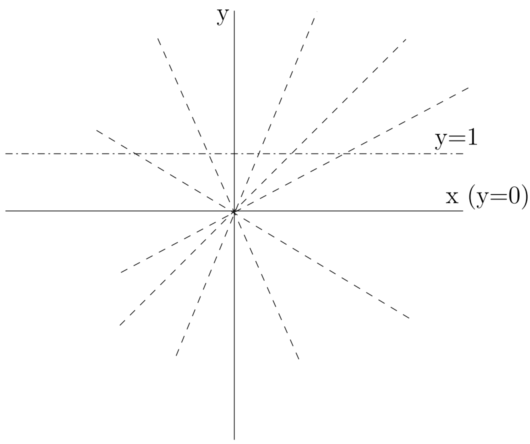


Z obrázků je vidět, že relace ekvivalence určuje na množině M rozklad na podmnožiny, kterým říkáme *třídy relace* a které mají tu vlastnost, že prvky třídy jsou v relaci každý s každým. Současně nejsou v relaci žádné dva prvky z různé třídy.

Pomocí relace ekvivalence můžeme definovat například prostor všech přímek v rovině následovně: Vezmeme množinu $\mathbb{R}^2$ na které definujeme relaci

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in R \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0 : (x_1, y_1) = (\lambda x_2, \lambda y_2).$$

Třídy relace jsou pak přímky v $\mathbb{R}^2$. Pokud předpokládáme, že $y \neq 0$, můžeme najít v každé třídě prvek $(\frac{x}{y}, 1)$ a existuje tedy jedno jednoznačná korespondence mezi třídami, pro které platí $y \neq 0$ a $\mathbb{R}$. Zbývá jedna třída $(x, 0)$, kterou označujeme jako nekonečno ∞. Na obrázku 5. vidíme geometrický význam takto definovaného prostoru, kterému říkáme projektivní prostor $\mathbb{PR}^1$, každá přímka s nenulovou směrnicí procházející počátkem má průnik s přímkou $y = 1$ právě v jednom bodě a přímka $y = 0$ hraje roli bodu v nekonečnu. Projektivní prostor $\mathbb{PC}^1$ definujeme stejným způsobem, jen pro dvojice komplexních čísel.



Obrázek 3. Projektivní prostor $\mathbb{R}^1$.

Definice 5.1. Mějme na $\mathbb{C}^2$ definovanou relaci

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in R \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C},\ (x_1, y_1) = \lambda(x_2, y_2),$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}$. Pak třídy relace

$$[(x, y)]_R = \{\lambda(x, y) | \lambda \in \mathbb{C}\}$$

tvoří projektivní prostor $\mathbb{PC}^1$.

Prvky projektivního prostor $\mathbb{PC}^1$ takové, že $y \neq 0$, jsou izomorfní komplexním číslům $\mathbb{C}$:

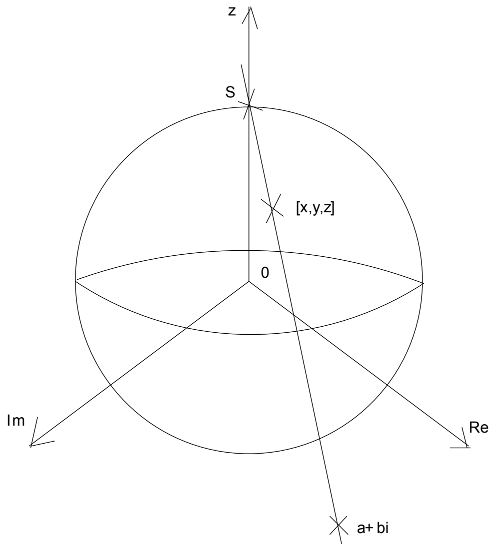
$$\{(x, y) | y \neq 0\} \cong \mathbb{C}$$

a třídu pro $y = 0$ pak označujeme jako nekonečno:

$$\infty := \{(x, y) | y = 0\}.$$

Geometricky můžeme $\mathbb{C}^2$ realizovat jako $\mathbb{R}^4$ a prvky $\mathbb{PC}^1$ jsou pak roviny $\mathbb{R}^2$ procházející počátkem zachovávající lineární transformace indukované komplexní strukturou.

Při konstrukci grupy $SU(2)$ budeme postupovat tak, že definujeme kruhovou inverzi jako speciální zobrazení ze sféry $\mathbb{S}^2$ do $\mathbb{C}$. Prvek z $SO(3)$ reprezentuje rotaci v $\mathbb{R}^3$, zachovává tedy skalární součin a tedy i normu. Musí tedy zachovávat i sféru $\mathbb{S}^2$. Rotace kolem jednotlivých os pak po kruhové inverzi indukují nějaké zobrazení v $\mathbb{C}$. Toto zobrazení nebude lineární, ale my si ho budeme reprezentovat lineárním zobrazením $\mathbb{PC}^1 \to \mathbb{PC}^1$ na projektivním rozšíření. Všechny pojmy postupně vysvětlíme. Kruhová inverze je zobrazení znázorněné na Obrázku 4. Bod $[x, y, z]$ ze sféry $\mathbb{S}^3$ se zobrazí na bod $a + bi$ z $\mathbb{C}$ tak, že $a + bi$ je průnikem přímky určené severním pólem S a bodem $[x, y, z]$ s rovinou $z = 0$. Vidíme, že takové zobrazení je dáno jednoznačně a je definováno na všech bodech kromě severního pólu S. Rozepíšeme teď postupně rotace. Nejjednodušší případ je rotace kolem osy z, v tomto případě je indukovaná rotace na $\mathbb{C}$ středovou rotací a taková je



Obrázek 4. Kruhová inverze.

realizována násobením jednotkovým komplexním číslem, tj.

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \leftrightarrow (\cos\varphi + i\sin\varphi)(a+bi) = \mathrm{e}^{i\varphi}(a+bi).$$

Body $\mathbb{C}$ odpovídají bodům v projektivním prostoru $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ tak, že bodu $z \in \mathbb{C}$ odpovídá třída ekvivalence $[(z_1, z_2)] \in \mathbb{C}^2/\sim$, kde relace ekvivalence $\sim$ je definována takto

$$(z_1, z_2) \sim (z_3, z_4) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{C},\ k \neq 0 : (z_1, z_2) = k(z_3, z_4).$$

Hledaná matice s jednotkovým determinantem je pak následující

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}, \ \det \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{i\frac{\varphi}{2}}\mathrm{e}^{-i\frac{\varphi}{2}} = 1,$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i\frac{\varphi}{2}} z_1 \\ \mathrm{e}^{-i\frac{\varphi}{2}} z_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{e}^{i\frac{\varphi}{2}}}{\mathrm{e}^{-i\frac{\varphi}{2}} z_2} z_1 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i\varphi} \frac{z_1}{z_2} \\ 1 \end{pmatrix} \sim \mathrm{e}^{i\varphi} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Rotaci kolem osy y o úhel β můžeme realizovat pomocí tří rotací. Rotací kolem osy x o úhel $\frac{\pi}{2}$, rotací kolem osy z o úhel β a nakonec rotací kolem osy x o úhel $\frac{\pi}{2}$. Potřebujeme tedy nalézt matici transformace kolem osy x o úhel $\pm\frac{\pi}{2}$. Taková rotace zobrazuje v $\mathbb{R}^3$ následující prvky:

$$(0,0,-1) \mapsto (0,-1,0) \mapsto (0,0,1) \mapsto (1,0,0) \mapsto (0,0,-1),$$

což po stereografické projekci indukuje zobrazeni na $\mathbb{C}$

$$0 \mapsto i \mapsto \infty \mapsto -i \mapsto 0,$$

které můžeme realizovat pomoci Möbiovy transformace

$$w(z) = -i\frac{z+i}{z-i},$$

která není lineární, ale Möbiovu transformaci můžeme v $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ realizovat maticí

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

Celkově tedy dostaneme

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} & -\sin\frac{\beta}{2} \\ \sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}.$$

Rotace kolem osy y o úhel $\frac{\pi}{2}$ indukuje na $\mathbb{C}$ transformaci

$$\infty \mapsto 1 \mapsto 0 \mapsto -1 \mapsto \infty,$$

kterou můžeme na $\mathbb{PC}^1$ realizovat maticí

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a výsledná matice rotace o úhel α kolem osy x je pak dána kompozicí

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} & -i\sin\frac{\alpha}{2} \\ i\sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}.$$

Dostáváme tedy matice, jejichž složením dostaneme transformace prostoru $\mathbb{PC}^1$ odpovídající rotacím $\mathbb{R}^3$ patřícím do $SO(3)$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} & -\sin\frac{\beta}{2} \\ \cos\frac{\beta}{2} & \sin\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} & -i\sin\frac{\alpha}{2} \\ \cos\frac{\alpha}{2} & i\sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}.$$

Protože výsledné atice rotace leží v $SL(2,\mathbb{C})$, mají tvar

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix},$$

a protože $\det(A) = 1$, musí tedy $a = a_1 + ia_2, b = b_1 + ib_2$ ležet na 3-dimenzionální sféře

$$|a|^2 + |b|^2 = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1.$$

Tyto matice opět tvoří grupu, která se označuje $SU(2)$ a nazývá se speciální unitární a je izomorfní grupě rotorů.

Reference

[1] P. Horník: *Teorie Lieových grup v robotice*, Brno, 2012. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky.

[2] J. Hrdina: *Některé kinematické dvojice*, Kvaternion, Vol 1., No 1., VUT v Brně (2012)

[3] A. Karger, J. Novák: Prostorová kinematika a Lieovy grupy, Státní nakladatelství technické literatury, (1978)

[4] J. B. Kuipers: *Quaternions and Rotation Sequences: A Primer with Applications to Orbits*, Aerospace and Virtual, Princeton University Press, 2002.

[5] J. M. Selig: *Geometric Fundamentals of Robotics*, Monographs in Computer Science, Springer, 2004.

[6] John Stillwell: *Naive Lie Theory*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2008.

[7] M. Pivovarník: *Matematické principy robotiky*, Diplomová práce, ÚM FSI VUT v Brně, Brno, 2012.
[8] M. Pivovarník: *Geometrické algoritmy v robotice*, Bakalářská práce, ÚM FSI VUT v Brně, Brno, 2010.
[9] L. Motl, M. Zahradník: *Pěstujeme lineární algebru*, Karolinum, Praha, 1995.

Jaroslav Hrdina, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2896/2, 616 69 Brno,
e-mail: `hrdina@fme.vutbr.cz`