MATICOVÉ HRY V INŽENÝRSTVÍ

JAROSLAV HRDINA a PETR VAŠÍK

Abstrakt. Následující text pokrývá jeden z cyklů přednášek předmětu Aplikovaná algebra pro inženýry (0AA) na FSI VUT. Text vznikl při třetím běhu tohoto předmětu ve školním roce 2014/2015. Jeho cílem je demonstrovat principy teorie her na příkladě maticových her a představit některé inženýrské aplikace.

1. Úvod

Cílem teorie her je popsat situaci, která nás zajímá, jako hru. Klasickým případem je takzvané vězňovo dilema, které může být zformulované například následujícím způsobem. Policie zadržela dva podezřelé, Andreje a Bohuslava a drží je odděleně. Důkazy, které proti nim policie má jsou bohužel nepřímé a nestačí k odsouzení. Pokud se žádný z podezřelých nepřizná budou oba dva odsouzení jen za drobné přestupky, každý na dva roky. Pokud ale jeden z nich udá druhého a ten bude mlčet, bude udavač volný a druhý dostane deset let. Pokud se udají navzájem dostanou každý trest ve výši šesti let. Takto zadaná hra je hrou dvou hráčů $\{A, B\}$ a je plně popsaná následující maticí

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 0 & 6 \end{pmatrix},$$

kde hráč A vybírá řádek a hráč B sloupec. Hodnota ve vybraném řádku a sloupci je pak platbou (výší trestu) hráče A a matice plateb hráče B je matice M^T. Proto, abychom mohli používat matematický aparát, musíme jasně definovat, co znamenají pojmy, které budeme při popisování používat.

Rozhodování – výběr jedné z více variant.
Rozhodovací situace – situace, ve které je potřeba vykonat rozhodování.
Výsledek – výběr variant vede k určitým výsledkům, které mohou být z hlediska zájmu rozhodujícího se subjektu horší nebo lepší.
Racionální účastník – rozhodující se subjekt vychází z pozorování možných výsledků a usiluje o výběr (v jistém smyslu) nejlepší varianty.
Indiferentní (neracionální) účastník – subjekt pro který je lhostejný výsledek rozhodovací situace (počasí,...).

2010 *MSC.* Primární 91A05; Sekundární 91A80.
Klíčová slova. teorie her, maticové hry.
Práce byla podporována projektem A-Math-Net - Síť pro transfer znalostí v aplikované matematice (CZ.1.07/2.4.00/17.0100).

Předpokládáme, že rozhodovací situace má alespoň jednoho racionálního účastníka a hledáme odpověď, jaké rozhodování racionálního účastníka můžeme pokládat v dané rozhodovací situaci za optimální.

Dělení rozhodovacích situací:

1. (a) Rozhodovací situace se *skalárním ohodnocením* (rozhodnutí je možné hodnotit jednou charakteristikou).
   (b) Rozhodovací situace s *vektorovým ohodnocením* (rozhodnutí je možné hodnotit více charakteristikami).
2. (a) Rozhodovací situace s *jedním (nutně racionálním)* účastníkem.
   (b) Rozhodovací situace s *více (alespoň jedním racionálním)* účastníky.
3. (a) *Nekonfliktní* rozhodovací situace (s jedním účastníkem a skalárním ohodnocením (matematické programování)).
   (b) *Konfliktní* rozhodovací situace (s větším počtem racionálních účastníků případně alespoň jedním indiferentním, nebo s vektorovým ohodnocením (jejich kombinace)).

Teorie her řeší konfliktní rozhodovací situace s větším (ne jedním) počtem racionálních účastníků a se skalárním ohodnocením.

Jako další musíme zavést formalismus, který nám umožní zformulování matematického modelu. Uvažujeme následující objekty: množinu racionálních účastníků $Q = \{1, 2, \ldots, n\}$, množinu indiferentních účastníků $R = \{1, 2, \ldots, m\}$. Množinu alternativ rozhodování racionálního účastníka $q \in P$

$$X_q = \{X_q^1, \ldots, X_q^{k_q}\}.$$

Množinu možných stavů vzniklých v důsledku působení indiferentního účastníka $r \in R$

$$Y_r = \{Y_r^1, \ldots, Y_r^{l_r}\}$$

a výsledek rozhodovací situace

$$V = \prod_{i=1}^{n} X_i \times \prod_{j=1}^{m} Y_j.$$

Zisk q–tého účastníka na "úkor " i–tého účastníka, pro $(x, y) \in V$ realizujeme vektorem

$$M_q(x, y) = \begin{pmatrix} M_q^1(x, y) \\ \vdots \\ M_q^n(x, y) \end{pmatrix},$$

kde $M_q^i : V \to \mathbb{R}$.

Definice 1.1. *Matematickým modelem* rozhodovací situace v normálním tvaru nazýváme následující zápis:

$$\left\{ \begin{matrix} Q = \{1, \ldots, n\} & X_1, \ldots, X_n & M_1, \ldots, M_n \\ R = \{1, \ldots, m\} & Y_1, \ldots, Y_m & \end{matrix} \right\}.$$

Definice 1.2. *Racionální účastník* $q \in Q$ se chová tak, že pokud

$$M_q^s(x_1, y_1) \geq M_q^s(x_2, y_2),\ \forall s = 1, \ldots, n$$

a alespoň pro jedno s platí:

$$M_q^s(x_1, y_1) > M_q^s(x_2, y_2),$$

pak upřednostňuje alternativu (x_1, y_1) před (x_2, y_2).

Některé způsoby, jak je možné teorii her dělit, jsou následující:

1. (a) Hry dvou hráčů.
   (b) Hry n hráčů.
2. (a) *Konečná hra* - konečné množiny strategií.
   (b) *Nekonečná hra* - množina strategií alespoň jednoho hráče je nekonečná.
3. (a) *Hra s konstantním součtem plateb*

$$\forall (x, y) \in V, \sum_{q \in Q} \sum_{i \in q} M_q^i(x, y) = c.$$

   (b) *Hra s nulovým součtem plateb*

$$\forall (x, y) \in V, \sum_{q \in Q} \sum_{i \in q} M_q^i(x, y) = 0.$$

4. (a) *Nekooperativní hry* – hry bez možnosti uzavírat koalice.
   (b) *Koaliční hry* – hry s možnosti uzavírat koalice.

Tématem tohoto textu jsou především maticové hry, ale zájemce o další partie teorie her můžeme odkázat na klasické monografie [5, 4, 3]. Ve slovenštině je možné ke studiu použít například knihu [2]. Z internetových zdrojů v češtině doporučujeme [1].

2. Maticové hry

Většinu pojmů, se kterými budeme pracovat budeme postupně demonstrovat na následujícím příkladě. Dvě energetické společnosti, označme si je W a G chtějí postavit elektrárnu poblíž jednoho ze čtyř měst A, B, C, D, které jsou od sebe vzdáleny následujícím způsobem:

$$\bigcirc_0^A \text{——} \bigcirc_{20}^B \text{————————} \bigcirc_{60}^C \text{————————} \bigcirc_{100}^D$$

Každé dominantní pokrytí odpovídá právě proporcionální délce úseku. Pokud například společnost W postaví elektrárnu v bodě B a společnost G v bodě C, bude společnost W dominantní na úseku AB a na půlce úseku BC (to dělá 40% celého území), kdežto společnost G bude dominantní na úseku CD a na půlce úseku BC (to dělá ale 60% území). Elektrárna musí být umístěna v jednom z bodů A, B, C, D. Jako první musíme ze slovního zadání vytvořit matematický model, tj.

$$\begin{aligned}
Q &= \{1, 2\}, \quad R = \emptyset \\
X_1 &= (X_1^1 = A, X_1^2 = B, X_1^3 = C, X_1^4 = D) \\
X_2 &= (X_2^1 = A, X_2^2 = B, X_2^3 = C, X_2^4 = D) \\
V &= X_1 \times X_2
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll}
M_1(X_1^1, X_2^1) = 50 & M_1(X_1^1, X_2^2) = 10 & M_1(X_1^1, X_2^3,) = 30 & M_1(X_1^1, X_2^4) = 50 \\
M_1(X_1^2, X_2^1) = 90 & M_1(X_1^2, X_2^2) = 50 & M_1(X_1^2, X_2^3,) = 40 & M_1(X_1^2, X_2^4) = 60 \\
M_1(X_1^3, X_2^1) = 70 & M_1(X_1^3, X_2^2) = 60 & M_1(X_1^3, X_2^3,) = 50 & M_1(X_1^3, X_2^4) = 80 \\
M_1(X_1^4, X_2^1) = 50 & M_1(X_1^4, X_2^2) = 40 & M_1(X_1^4, X_2^3,) = 20 & M_1(X_1^4, X_2^4) = 50
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
M_2(X_1^1, X_2^1) = 50 & M_2(X_2^1, X_2^2) = 90 & M_2(X_1^1, X_2^3,) = 70 & M_2(X_1^1, X_2^4) = 50 \\
M_2(X_1^2, X_2^1) = 10 & M_2(X_1^2, X_2^2) = 50 & M_2(X_1^2, X_2^3,) = 60 & M_2(X_1^2, X_2^4) = 40 \\
M_2(X_1^3, X_2^1) = 30 & M_2(X_1^3, X_2^2) = 40 & M_2(X_1^3, X_2^3,) = 50 & M_2(X_1^3, X_2^4) = 20 \\
M_2(X_1^4, X_2^1) = 50 & M_2(X_1^4, X_2^2) = 60 & M_2(X_1^4, X_2^3,) = 80 & M_2(X_1^4, X_2^4) = 50
\end{array}$$

U příkladu energetických společností máme tedy dva hráče a zisk jednoho znamená automaticky ztrátu druhého. Takové hře se říká *antagonistická* hra dvou hráčů a není těžké si představit, že je možné takovou hru reprezentovat maticí:

$$\begin{pmatrix} 50 & 10 & 30 & 50 \\ 90 & 50 & 40 & 60 \\ 70 & 60 & 50 & 80 \\ 50 & 40 & 20 & 50 \end{pmatrix}.$$

Hrám, které lze reprezentovat maticí, se říká *maticové hry.* Formálně je maticová hra konečná hra dvou hráčů s konstantním (nulovým) součtem. To, že je hru dvou hráčů s konstantním součtem možné reprezentovat jen maticí plateb prvního hráče M_1, plyne přímo z následujícího faktu. Pokud je hra s konstantním součtem, platí

$$M_1(x, y) + M_2(x, y) = c$$

a je tedy možné vyjádřit matici plateb druhého hráče pomocí matice plateb prvního hráče:

$$M_2(x, y) = c - M_1(x, y).$$

V našem příkladě se jedná o maticovou hru s konstantním součtem, kde $c = 100$.

Definice 2.1. *Hrou dvou hráčů v normální formě s konstantním součtem (maticovou hru)* nazýváme hru $\{Q = \{1, 2\} \quad X, Y \quad M(x, y) \quad c\}$, kde *maticí plateb* rozumíme matici

$$M = \begin{pmatrix} M(x_1, y_1) & \cdots & M(x_1, y_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ M(x_m, y_1) & \cdots & M(x_m, y_n) \end{pmatrix}.$$

Z definice je jasné, že nedává smysl uvažovat možnou spolupráci hráčů (čím víc jeden získá tím víc druhý ztratí). Takové hry se nazývají **antagonistické (nekooperativní)**.

Maticová hra se tedy hraje tak, že první hráč vybírá řádek a druhý hráč sloupec. Příslušné číslo v matici je pak platba prvního hráče.

Definice 2.2. Strategie $i = 1, \dots, m$ a $j = 1, \dots, n$ nazýváme *čisté strategie* prvního a druhého hráče.

Pokud první hráč volí i–tou čistou strategii, potom může s určitostí zabezpečit, že jeho platba bude alespoň

$$\min_j a_{ij}.$$

Vzhledem k tomu, že chce ale zabezpečit co možná nejvyšší platbu, uvažuje přinejmenším o platbě

$$\max_i \min_j a_{ij}.$$

Druhý hráč chce minimalizovat platbu prvního hráče, ta však nebude vyšší než

$$\max_i a_{ij}$$

a druhý hráč tedy volí strategii

$$\min_j \max_i a_{ij}.$$

Z toho tedy vyplývá, že volbou čisté strategie může první hráč zabezpečit, že jeho platba nebude nižší než $\max_i \min_j a_{ij}$, přičemž druhý hráč může vhodnou volbou strategie zajistit, aby jeho platba nebyla vyšší než $\min_j \max_i a_{ij}$ Pokud by tyto úvahy obou hráčů nebyly ve sporu znamenalo by to, že svou volbou zaručí, že případná změna protihráčovy strategie by pro protihráče nebyla výhodná a může se tedy spolehnout, že protihráč strategii nezmění. Můžeme říct, že *kdo pak uhne, tak si nepolepší.* V příkladě s energetickými společnostmi se jedná o maticovou hru s maticí plateb:

$$\begin{pmatrix} 50 & 10 & 30 & 50 \\ 90 & 50 & 40 & 60 \\ 70 & 60 & 50 & 80 \\ 50 & 40 & 20 & 50 \end{pmatrix}.$$

Máme tedy:

$$\begin{array}{llll} \min_j a_{1j} = 10 & \min_j a_{2j} = 40 & \min_j a_{3j} = 50 & \min_j a_{4j} = 20 \\ & & & \max_i \min_j a_{ij} = 50 \\ \max_i a_{i1} = 90 & \max_i a_{i2} = 60 & \max_i a_{i3} = 50 & \max_i a_{i4} = 80 \\ & & & \min_j \max_i a_{ij} = 50 \end{array}$$

a tentokrát

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = 50,$$

existuje tedy čistá optimální strategie a jde o strategii, kdy si obě energetické společnosti postaví elektrárnu u stejného města, a to na místě C. Toto dává smysl následujícím definicím:

Definice 2.3. *Sedlovým bodem matice* $A = (a_{ij})$ nazýváme takový její prvek a_{ij} pro který platí $\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$.

Definice 2.4. Takové strategie i_0, j_0, že (i_0, j_0) je sedlový bod matice plateb A, nazýváme *čistými optimálními strategiemi* prvního a druhého hráče v maticové hře. Číslo $v = a_{i_0 j_0}$ nazýváme *hodnotou* této hry. Trojici (i_0, j_0, v) nazýváme *řešením* maticové hry v čistých strategiích.

Uvedeme si příklad hry, která sice není maticová, ale demonstruje jedno z úskalí tohoto přístupu. Následující příklad je v literatuře uváděný jako Braessův paradox. V následujícím diagramu se deset hráčů (aut) rozhoduje jestli pojede ze startu do cíle přes bod A, nebo bod B. Například pokud 6 aut pojede přes bod A a čtyři přes bod B. Doba průjezdu přes bod A bude 16, přes bod B bude 14. Tato strategie není rovnovážné, pokud jedno auto projíždějící bodem A svou strategii změní místo 16 dorazí do cíle za 15 a tím si polepší. Rovnovážná strategie je 5 a 5 a celková doba průjezdu každého auta je stejná a je to 15.

$$\begin{tikzcd}
\text{start} \arrow[r, "x"] \arrow[d, "10"] & A \arrow[d, "10"] \\
B \arrow[r, "x"] & \text{cíl}
\end{tikzcd}$$

Všimněme si jak by se situace změnila pokud bychom graf doplnili o vysokorychlostní zkratku mezi body A a B, bez újmy na obecnosti jí ohodnotíme nulou. Rozdělení 5 a 5 již není rovnovážné, pokud jedno z aut jedoucí horní cestou využije spojku klesne jeho doba průjezdu z 15 na 11.

$$\begin{tikzcd}
\text{start} \arrow[r, "x"] \arrow[d, "10"] & A \arrow[d, "10"] \arrow[dl, "0"'] \\
B \arrow[r, "x"] & \text{cíl}
\end{tikzcd}$$

Jediná rovnovážná situace je v tomto případě taková, že všechny auta využijí rychlostní spojky. Doba průjezdu každého auta tím ale vzroste z 15 na 20. V literatuře je toto uváděno jako paradox v tom smyslu, že zdánlivé vylepšení dopravní sítě vede paradoxně ke zpomalení dopravy a v dopravních sítích větších měst je tato situace při plánování dopravy řešena. Ve skutečnosti se ale jedná o případ hry kdy je sedlový prvek matice, tj rovnovážná strategie je odlišný od optimální strategie. Toto formalizuje takzvaná *Míra anarchie* definovaná jako podíl rovnovážné a optimální. V našem případě je to $\frac{20}{15} = \frac{4}{3}$ a čím více se tato hodnota liší od čísla 1 o to více je tento systém nestabilní.

Věta 2.5. *Nechť $f(x,y)$ je reálná funkce definovaná pro $x \in X$ a $y \in Y$ a předpokládejme že existují veličiny*

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y),\ \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y).$$

Potom

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) \le \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y).$$

Důkaz. Z definice minima a maxima víme, že pro libovolné zadané $x \in X$ platí

$$\min_{y\in Y} f(x,y) \le f(x,y)$$

a pro libovolné zadané $y \in Y$ platí

$$f(x,y) \le \max_{x\in X} f(x,y).$$

Proto pro všechna $x \in X$ a $y \in Y$ platí

$$\min_{y\in Y} f(x,y) \le \max_{x\in X} f(x,y).$$

Vzhledem k tomu, že pravá strana nerovnice nezávisí na $x \in X$ tedy

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) \le \max_{x\in X} f(x,y).$$

A vzhledem k tomu, že levá strana nerovnice nezávisí na $y \in Y$, dostaneme celkem

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) \leq \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y).$$

□

Definice 2.6. Nechť $f(x, y)$ je reálná funkce definovaná pro $x \in X$ a $y \in Y$. *Sedlovým bodem* této funkce vzhledem k množině $X \times Y$ nazýváme takový bod $(x_0, y_0) \in X \times Y$, že pro všechny $x \in X$ a $y \in Y$ platí

$$f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0) \leq f(x_0, y).$$

Věta 2.7 (Věta o sedlovém bodu). *Nechť $f(x, y)$ je reálná funkce definovaná pro $x \in X$ a $y \in Y$ a nechť existují veličiny $\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y)$ a $\min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y)$. Pak funkce $f(x, y)$ má sedlový bod na množině $X \times Y$ právě tehdy, když platí*

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y).$$

Navíc pokud (x_0, y_0) je sedlový bod funkce $f(x, y)$ na množině $X \times Y$, pak

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Důkaz. 1. Nechť $(x_0, y_0) \in X \times Y$ je sedlový bod funkce $f(x, y)$. Pak podle Definice 2.6. pro všechna $x \in X$ a $y \in Y$ platí $f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0) \leq f(x_0, y)$. Z toho vyplývá, že $\max_{x \in X} f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0) \leq \min_{y \in Y} f(x_0, y)$. Vzhledem k tomu, že obecně platí

$$\min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y) \leq \max_{x \in X} f(x, y_0)$$

a

$$\min_{y \in Y} f(x_0, y) \leq \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y),$$

protože $f(x_0, y_0)$ je sedlový bod, platí

$$\min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y) \leq \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y).$$

Současně podle Věty 2.5. platí

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) \leq \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y).$$

A tedy celkem

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y).$$

Z důkazu je zřejmé, že se výraz také musí rovnat $f(x_0, y_0)$.

2. Nechť je splněna rovnost ve znění věty. Dále předpokládejme, že funkce $\min_{y \in Y} f(x, y)$ nabývá svého maxima v bodě $x_0 \in X$ a funkce $\max_{x \in X} f(x, y)$ svého minima v bodě $y_0 \in Y$, tj. platí

$$\min_{y \in Y} f(x_0, y) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y),$$

$$\max_{x \in X} f(x, y_0) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y).$$

Ukážeme, že dvojice $(x_0, y_0) \in X \times Y$ je sedlovým bodem funkce $f(x, y)$. Na základě předpokladu o splnění rovnosti máme

$$\min_{y \in Y} f(x_0, y) = \max_{x \in X} f(x, y_0).$$

Z definice minima vyplývá

$$\min_{y \in Y} f(x_0, y) \leq f(x_0, y_0),$$

a z definice maxima

$$\max_{x \in X} f(x, y_0) \geq f(x_0, y_0).$$

Celkem

$$f(x, y_0) \leq \max_{x \in X} f(x, y_0) = \max_{x \in X} f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0), \quad \text{pro všechna } x \in X.$$

Analogicky

$$f(x_0, y) \geq \min_{y \in Y} f(x_0, y) = \max_{x \in X} f(x, y_0) \geq f(x_0, y_0), \quad \text{pro všechna } y \in Y,$$

a tedy $(x_0, y_0) \in X \times Y$ je z definice sedlovým bodem. □

Všimněme si ještě jedné důležité vlastnosti maticových her. Pokud je některý řádek matice ve všech sloupcích větší než jiný, nemá pro prvního hráče smysl příslušnou strategii hrát.

Definice 2.8. Řekneme, že vektor $a = (a_1, \cdots, a_n)^T$ *dominuje (ostře)* vektoru $b = (b_1, \cdots, b_n)^T$, pokud pro všechna $j = 1, \cdots, n$ platí $a_j \geq b_j$ $(a_j > b_j)$.

Věta 2.9. *Optimální strategie hráčů v maticové hře se nezmění, pokud k matici plateb připočteme libovolnou konstantu ξ nebo pokud matici plateb vynásobíme libovolnou kladnou konstantou β.*

Na závěr kapitoly si ukážeme příklad hry pro kterou sedlový bod v čistých strategiích neexistuje.

Příklad 2.10. Mějme dva frekvenční generátory generující stejný periodický výstup. První generátor do signálu kóduje informaci kterou chceme přenést. Druhý generátor se snaží vyslat signál s opačnou frekvencí. První generátor může vyslat i opačný signál bez informace $-f$. Cílem prvního generátoru je signál přenést, druhého vyrušit. Pokud oba zvolí f signál se zesílí a zisk prvního hráče ohodnotíme 4 pokud oba zvolí $-f$ signál se nevyruší ale příjemce pozná, že je vysílač rušen a zisk prvního hráče ohodnotíme 2. Pokud jsou frekvence opačné signál se vyruší a zisk prvního hráče ohodnotíme -3. Jde tedy o maticovou hru s maticí plateb

$$\begin{array}{r} \\ -f \\ f \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} -f & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

a konstantou $c = 0$. V tomto příkladě máme tedy

$$\min_j a_{1j} = -3, \qquad \min_j a_{2j} = -3, \qquad \max_i \min_j a_{ij} = -3,$$
$$\max_i a_{i1} = 2, \qquad \max_i a_{i2} = 4, \qquad \min_j \max_i a_{ij} = 2.$$

Platí tedy $\max_i \min_j a_{ij} < \min_j \max_i a_{ij}$ a čistá optimální strategie neexistuje.

3. Smíšené optimální strategie

Pokud nemá maticová hra čistou optimální strategii, platí

$$\max_i \min_j a_{ij} < \min_j \max_i a_{ij}.$$

V tomto případě se při opakování hry, tj. při jednotlivých partiích, bude první i druhý hráč snažit opakovat čisté strategie s takovou pravděpodobností, aby v průměru první hráč získal více než jen $\max_i \min_j a_{ij}$ a druhý hráč se snaží zajistit, aby první získal méně než $\min_j \max_i a_{ij}$. Tady každý hráč přiřazuje každé své čisté strategii určitou pravděpodobnost, s jakou jí bude používat.

Definice 3.1. *Smíšenou strategií prvního hráče* nazýváme m–rozměrný vektor $x = (x_1, \dots, x_m)^T$, pro který platí

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \geq 0.$$

Smíšenou strategií druhého hráče budeme nazývat n–rozměrný vektor

$$y = (y_1, \dots, y_n)^T,$$

pro který platí

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = 1,\ y_i \geq 0.$$

Množiny

$$S_m = \{x \in E_m,\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \geq 0\},$$

$$S_n = \{y \in E_n,\ \sum_{i=1}^{n} y_i = 1,\ y_i \geq 0\}$$

nazýváme *množinou smíšených strategií* prvního a druhého hráče.

Každá čistá strategie odpovídá smíšené

$$x = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T.$$

Definice 3.2. Funkci

$$E(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = x^T A y$$

definovanou pro $x \in S_m$ a $y \in S_n$ nazýváme *funkcí střední hodnoty platby* v maticové hře.

Stejnými úvahami odvodíme, že první hráč volbou smíšené strategie může docílit toho, že střední hodnota jeho platby bude nižší než

$$\max_{x \in S_n} \min_{y \in S_m} E(x, y),$$

přičemž druhý hráč může zajistit, aby střední hodnota plateb prvního byla nižší než

$$\min_{y \in S_m} \max_{x \in S_n} E(x, y).$$

Víme, že pro každou funkci platí

$$\max_{x\in S_n}\min_{y\in S_m} E(x,y) \le \min_{y\in S_m}\max_{x\in S_n} E(x,y)$$

a pokud platí rovnost

$$\max_{x\in S_n}\min_{y\in S_m} E(x,y) = \min_{y\in S_m}\max_{x\in S_n} E(x,y),$$

existuje sedlový bod.

Definice 3.3. Nechť (x,y) je sedlový bod funkce $E(x,y)$ vzhledem k $S_m \times S_n$. Vektory $\bar{x}$ respektive $\bar{y}$ nazýváme *optimálními smíšenými strategiemi* prvního respektive druhého hráče v příslušné maticové hře a číslo $v = E(\bar{x},\bar{y})$ nazýváme *hodnotou* této hry. Trojici $(\bar{x},\bar{y},v)$ nazýváme *řešením maticové hry ve smíšených strategiích.*

Vrátíme se opět k příkladu 2.10, tj. k maticové hře s maticí plateb

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix},$$

přičemž už víme, že čistá optimální strategie neexistuje a hra má řešení pouze ve smíšených strategiích

$$\bar{x} = (\frac{7}{12},\frac{5}{12})^T \text{ a } \bar{y} = (\frac{7}{12},\frac{5}{12})^T.$$

Toto řešení teď jen ověříme, hodnota hry je:

$$E(\bar{x},\bar{y}) = (\frac{7}{12},\frac{5}{12})\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{7}{12} \\ \frac{5}{12} \end{pmatrix} = -\frac{1}{12},$$

pokud první hráč strategii změní, nepolepší si (ani si nepohorší ale to z definice sedlového bodu neřešíme)

$$E(x,\bar{y}) = (x_1,x_2)\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{7}{12} \\ \frac{5}{12} \end{pmatrix} = (x_1,x_2)\begin{pmatrix} -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} \end{pmatrix} =$$

$$-\frac{1}{12}x_1 - \frac{1}{12}x_2 = -\frac{1}{12}(x_1+x_2) = -\frac{1}{12},$$

pokud změní druhý hráč strategii, také si nepolepší:

$$E(\bar{x},y) = (\frac{7}{12},\frac{5}{12})\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{12}.$$

Pro nalezení řešení hry ve smíšených strategiích budeme potřebovat aparát lineárního programování. Úloha lineárního programování je úloha minimalizovat, nebo maximalizovat lineární polynom na nějaké množině určené lineárními nerovnicemi, například maximalizovat funkci $x_1 + x_2$ za podmínek $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$ a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 4, \\ 4x_1 + 2x_2 &\le 12, \\ -x_1 + x_2 &\le 1. \end{aligned}$$

Maticově, maximalizovat

$$(1,1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

za podmínek

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Definice 3.4. O následující dvojici úloh lineárního programování, říkáme, že jsou *duální*:

1. maximalizovat $c^T x$ za podmínek $Ax \leq b$ a $x \geq 0$,
2. minimalizovat $y^T b$ za podmínek $y^t A \geq c^T$ a $y \geq 0$,

kde $c, x \in \mathbb{R}^n$, $b, y \in \mathbb{R}^m$ a $A \in Mat(m, n)$.

Duální problém k našemu příkladu je minimalizovat funkci $4y_1 + 10y_2 + y_3$ za podmínek $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$ a

$$y_1 + 4y_2 - y_3 \geq 1,$$
$$2y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 1.$$

Věta 3.5 (J. von Neuman, J. Nash). *Pro každou maticovou hru platí*

$$\max_{x \in S_n} \min_{y \in S_m} E(x, y) = \min_{y \in S_m} \max_{x \in S_n} E(x, y),$$

a tedy existuje sedlový bod funkce $E(x, y)$ na množině $S_m \times S_n$. Tedy každá hra má řešení ve smíšených strategiích.

Důkaz. Zformulujeme si dvě duální úlohy lineárního programování:

Maximalizovat ω za podmínek:

$$-\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i + \omega \leq 0, \ \forall j,$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,$$
$$x_i \geq 0,$$

Minimalizovat u za podmínek:

$$-\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j + u \geq 0, \ \forall i,$$
$$\sum_{i=1}^{n} y_i = 1,$$
$$y_j \geq 0$$

pro $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$.

Tyto dvě úlohy jsou duální a to z hlediska lineárního programování znamená, že mají stejnou množinu přípustných řešení (tj. řešení, která splňují dané nerovnosti) a současně, pokud existuje optimální řešení jedné, existuje i optimální řešení druhé a výsledná hodnota účelové funkce je stejná. Pokud zvolíme za příslušná a_{ij} prvky matice hry, dostaneme optimální řešení, které bude rovno sedlovému bodu funkce $E(x,y)$, a tedy optimální strategií příslušné maticové hry. Poznamenejme nakonec, že toto řešení není dané jednoznačně. □

Bez důkazu uvádíme následující dvě věty:

Věta 3.6. 1. *Pokud ve hře s maticí plateb $A = (a_{ij})$ typu $m \times n$ platí, že pro nějaké k $(1 \le k \le m)$ existují čísla α_i $(i \neq k)$ taková, že pro všechna $j = 1, \dots, n$ máme*

$$\sum_{i \neq k} \alpha_i a_{ij} \ge a_{kj}, \ \sum_{i \neq k} \alpha_i = 1,$$

potom existuje optimální strategie prvního hráče $\bar{x} \in S_m$, jejíž složkou je $\bar{x}^0 = 0$.

2. *Pokud ve hře s maticí plateb $A = (a_{ij})$ typu $m \times n$ platí, že pro nějaké t $(1 \le t \le n)$ existují čísla β_j $(j \neq t)$ taková, že pro všechna $i = 1, \dots, m$ máme*

$$\sum_{j \neq t} \beta_i a_{ij} \le a_{it}, \ \sum_{j \neq t} \beta_j = 1,$$

potom existuje optimální strategie druhého hráče $\bar{x} \in S_n$, jejíž složkou je $\bar{y}^0 = 0$.

Například v maticové hře s maticí plateb

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 8 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

existuje $k = 3$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$ takové, že pro všechna $j = 1, 2, 3$ platí $\alpha_1 a_{1j} + \alpha_2 a_{2j} \ge a_{3j}$. Existuje tedy optimální strategie pro kterou je $x_3 = 0$. Z důkazu Nashovy věty víme, že optimální smíšená strategie maticové hry s maticí A je optimálním řešením dvojice úloh lineárního programování. Potřebujeme ale tyto úlohy převést na tvar, který umíme řešit. Jako výchozí úlohu použijeme

$$\begin{aligned} &\text{Minimalizovat } u \text{ za podmínek:} \\ -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j + u &\ge 0, \\ \sum_{i=1}^{n} y_i &= 1, \\ y_j &\ge 0. \end{aligned}$$

pro $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$. Z předešlých vět víme, že matici plateb můžeme přičtením vhodné konstanty upravit tak, aby $a_{ij} \ge 0$, tedy i hodnota účelové funkce u je kladná a můžeme nerovnosti dělit beze změny směru nerovnosti.

$$\text{Minimalizovat } u \text{ za podmínek:}$$
$$-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{y_j}{u} + 1 \geq 0,$$
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{u} = \frac{1}{u},$$
$$\frac{y_i}{u} \geq 0.$$

zavedeme substituci $q_i = \frac{y_i}{u}$ a dostaneme

$$\text{Minimalizovat } u \text{ za podmínek:}$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j \leq 1,$$
$$\sum_{i=1}^{n} q_i = \frac{1}{u},$$
$$q_i \geq 0.$$

Minimalizovat funkci u je to samé jako maximalizovat funkci $\sum_{i=1}^{n} q_i$ a dostáváme výsledný tvar:

$$\text{Maximalizovat } \sum_{i=1}^{n} q_i \text{ za podmínek:}$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j \leq 1,$$
$$q_i \geq 0$$

tedy tvar, který umíme řešit jak uvidíme v další kapitole.

4. Simplexová metoda

Úlohu lineárního programování můžeme chápat jako nalezení extrému (maxima nebo minima) lineární funkce více proměnných při vedlejších podmínkách, které jsou vyjádřeny lineárními rovnicemi nebo nerovnicemi. Existuje několik formulací základní úlohy lineárního programování, my budeme pracovat s následujícími omezujícími podmínkami:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2,$$
$$\cdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m,$$

kde $m < n$ a $x_i \geq 0$. Jako první krok doplníme soustavu o pomocné proměnné $\bar{x}_1, \cdots \bar{x}_m$ tak, aby platila následující soustava rovnic:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + \bar{x}_1 = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + \bar{x}_2 = b_2,$$
$$\cdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + \bar{x}_m = b_m,$$

kde $m < n$ a $b_i \geq 0$. Všimněme si, že soustava má řešení:

$$x_1 = x_n = 0,\ \bar{x}_1 = b_1, \cdots, \bar{x}_n = b_m.$$

Proměnné $\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_m$ jsou ale pomocné a řešení v základních proměnných je $x_1 = x_n = 0$. Našim cílem je maximalizovat funkci

$$z = c_1x_1 + \cdots c_nx_n + d,$$

přičemž pro naše řešení $x_1 = \cdots = x_n = 0$ je hodnota účelové funkce rovna d. Přidáme si jako další řádek soustavy účelovou funkci

$$z - c_1x_1 - \cdots - c_nx_n = d,$$

tím ale přidáme ještě jednu proměnnou z (kterou chceme maximalizovat). Matice soustavy pak vypadá následovně:

$$\left(\begin{array}{cccccccccc|c} 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 1 & b_m \\ 1 & -c_1 & -c_2 & \cdots & -c_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & d \end{array}\right).$$

Zamysleme se teď nad tím, jak najít jiné řešení. Máme soustavu m rovnic o $m+n$ neznámých takovou, že n proměnných je základních. Další řešení můžeme získat tak, že pomocí řádkových elementární úprav vynulujeme nějaký další sloupec. Abychom se rozhodli který, musíme se podívat na poslední řádek soustavy

$$z - c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n = d.$$

Protože všechna x_i jsou kladná můžeme zvýšit hodnotu účelové funkce z jen pokud vybereme takové c_i, které je kladné, tedy takový prvek matice který je záporný. V našem algoritmu pak vybereme to nejmenší číslo (číslo s největší absolutní hodnotou), protože u něho je předpoklad, že účelovou funkci zvýšíme nejvíce. Vybraný sloupec bychom pak chtěli přidat k jednotkové matici, ale ještě nevíme, vůči kterému řádku budeme sloupec nulovat. Představme si tedy, jak budou vypadat příslušná řešení pro $x_i = 0,\ i \neq k$ pokud zanedbáme pomocné proměnné $\tilde{x}_i$:

$$x_1 = b_1 - a_{1k}x_k,$$
$$x_2 = b_2 - a_{2k}x_k,$$
$$\vdots$$
$$x_m = b_m - a_{mk}x_k.$$

S ohledem na podmínky nezápornosti musí platit:

$$x_k \leq \frac{b_i}{a_{ik}}.$$

Vybereme řádku s nejmenším podílem

$$x_k \leq \min \frac{b_i}{a_{ik}} = \frac{b_s}{a_{sk}}$$

pro $i = 1, 2, \ldots, m$, tj. předpokládáme, že nejmenší podíl je v s–té řádce soustavy. Proměnnou x_k nazýváme vstupující proměnnou a proměnnou x_s vystupující proměnnou.

Na závěr si všechno ukážeme na příkladu. Maximalizujte $z = 4x_1 + 2x_2$ za podmínek

$$\begin{aligned} -x_1 - 3x_2 &\leq 9, \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 18, \\ 2x_1 - x_2 &\leq 10, \end{aligned}$$

kde $x_i \geq 0$. Simplexová matice má tvar

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 18 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & -4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Záporné hodnoty v posledním řádku jsou dvě, -4 a -2, vybereme tu menší, podělíme sloupec pravých stran příslušnými koeficienty (pokud jsou kladné) a dostaneme:

$$\left(\begin{array}{cccccc|cc} 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 9 & - \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 18 & \frac{18}{2} \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 10 & \frac{10}{2} \\ 1 & \underline{-4} & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & - \end{array}\right).$$

Vybereme ten nejmenší podíl, tedy $\frac{10}{2}$ a nulujeme druhý sloupec vzhledem k podtržené dvojce ve třetím řádku

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 18 \\ 0 & \underline{2} & -1 & 0 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & -4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Po provedení příslušných řádkových elementárních úprav tedy dostaneme

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & \frac{5}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 14 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 5 \\ 1 & 0 & -4 & 0 & 0 & 2 & 20 \end{array}\right).$$

Zlepšené řešení je

$$x_1 = 5, x_2 = 0, \bar{x}_1 = 14, \bar{x}_2 = 8, \bar{x}_3 = 0$$

a hodnota účelové funkce je $z = 20$. V posledním řádku je už jen jedno záporné číslo -4. Opět porovnáme podíly

$$\left(\begin{array}{cccccc|cc} 0 & 0 & \frac{5}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 14 & \frac{28}{5} \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 5 & - \\ 1 & 0 & \underline{-4} & 0 & 0 & 2 & 20 & - \end{array}\right)$$

a vyberme druhý řádek

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{8} & \frac{9}{8} & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 28 \end{array}\right).$$

Výsledné řešení je

$$x_1 = 6, x_2 = 2, \bar{x}_1 = 9, \bar{x}_2 = 0, \bar{x}_3 = 0$$

a hodnota účelové funkce je $z = 28$.

5. Algoritmus

Výchozí úloha pro maticovou hru s maticí plateb $\{a_{ij}\}$ je

$$\text{Maximalizovat} \sum_{i=1}^{n} q_i \text{ za podmínek:}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \leq 1,$$

$$q_i \geq 0.$$

Pokud $q = (q_1, \dots, q_n)$ je libovolné optimální řešení, pak

$$x_i = \frac{q_i}{\sum_{i=1}^{m} q_i}$$

je optimální smíšenou strategií prvního hráče a číslo

$$u = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} q_i}$$

je hodnotou v příslušné maticové hře.

6. Příklad

Mějme dva roboty označené symbolem ① a ② na šachovnici, kteří jsou v základní poloze viz obrázek:

	A	B	C	
	D	①	E	
	F	G	H	
	A	B	C	
	D	②	E	
	F	G	H	

Tabulka 1. Výchozí pozice 1.

Každý z těchto robotů má 8 možností pohybu na políčka označená A až H. Oba roboti se současně pohnou, následně změříme jejich vzdálenost. Tu definujeme takto:

1. Vzdálenost dvou políček se společnou stranou je 0.
2. Vzdálenost dvou políček se společným vrcholem je 1.
3. Vzdálenost dvou políček bez společného vrcholu nebo strany je délka nejkratší cesty mezi nimi, přičemž délka jednoho celého políčka při průchodu horizontálně nebo vertikálně je 2 a při průchodu diagonálně je 3. Zda políčko procházíme horizontálně, vertikálně nebo diagonálně se rozhoduje podle způsobu vstupu do tohoto pole.

Úkolem robota ① je vzdalovat se od robota ② a naopak. Tabulku vzdáleností mezi pozicemi robotů tedy lze chápat jako definici výplatní funkce robota ①, bude tedy dána maticí:

$$Q = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} A & B & C & D & E & F & G & H \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 6 & 8 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 4 & 5 & 7 & 7 & 9 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 & 7 & 6 & 10 & 9 & 8 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 & 6 & 4 & 8 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 5 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 3 & 5 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 0 & 5 & 2 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Budeme-li hledat rovnovážný stav mezi čistými strategiemi, vyjde nám:

$$\begin{aligned} \max_i \min_j Q_{ij} &= 4, \\ \min_j \max_i Q_{ij} &= 5. \end{aligned}$$

Neexistuje tedy čistá optimální strategie. Budeme-li uvažovat pravděpodobnostní rozšíření této hry, budeme za strategii považovat vektor $x = (x_1, ..., x_8)$ s vlastostmi $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ a $x_i \geq 0$ pro všechna $i = 1, ..., 8$. Budeme tedy úlohu řešit dle předchozího algoritmu jako úlohu lineárního programování, kde a_{ij} budou prvky matice plateb A. Vzhledem k velikosti matice najdeme řešení pomocí nějakého softwaru, konkrétně vyjde

$$q = (\frac{1}{10}, 0, \frac{1}{10}, 0, 0, 0, 0, 0),$$

což vede na strategii

$$x_i = \frac{q_i}{\sum_{i=1}^8 q_i} = \begin{cases} \frac{1/10}{1/10 + 1/10} = 1/2 & \text{pro } i = 1, 3 \\ 0 & \text{pro } i = 2, 4, ..., 8 \end{cases}$$

Optimální smíšenou strategií tedy bude vektor $x = (1/2, 0, 1/2, 0, 0, 0, 0, 0)$ a hodnotou hry je

$$u = \frac{1}{\sum_{i=1}^8 q_i} = 5.$$

To znamená, že robot ① se pohne s pravděpodobností $^1/_2$ na pozici A nebo se stejnou pravděpodobností na pozici C a jeho vzdálenost od robota ② bude 5. Tato strategie dává smysl, protože dostává robota ① co nejdále od robota ②. Zamysleme se nad tím, jak tuto hru řešit bez použití počítače. Všimneme si například, že 4. až 8. řádek je dominován 3. řádkem, lze je tedy z matice vypustit. Stejně 4. až 8. sloupec dominují sloupce 1 až 3. Zůstane tedy pouze matice 3×3, konkrétně

$$Q = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 5 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Snadno zkontrolujeme, že ani zde není optimální čistá strategie. Nyní provedeme pravděpodobnostní rozšíření a řešíme úlohu lineárního programování maximalizovat funkci $z = q_1 + q_2 + q_3$ za podmínek:

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 5 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$p_1, p_2, p_3 \geq 0.$$

Úvodní simplexová tabulka bude tvaru

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 4 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{6} & 5 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Po eliminaci vzhledem k prvku ve čtverečku dostaneme

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & ^5/_3 & \boxed{^{10}/_3} & 1 & 0 & 0 & ^1/_3 \\ 0 & 0 & -^1/_6 & ^5/_3 & 0 & 1 & -^5/_6 & ^1/_6 \\ 0 & 1 & ^5/_6 & ^2/_3 & 0 & 0 & ^1/_6 & ^1/_6 \\ 1 & 0 & -^1/_6 & -^1/_3 & 0 & 0 & ^1/_6 & ^1/_6 \end{array}\right).$$

Posledním krokem je eliminace vzhledem k prvku ve čtverečku, čímž dostaneme

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & ^1/_2 & 1 & ^3/_{10} & 0 & 0 & ^1/_{10} \\ 0 & 0 & -^7/_6 & 0 & -^1/_2 & 1 & -^5/_6 & 0 \\ 0 & 1 & ^1/_2 & 0 & -^1/_5 & 0 & ^1/_6 & ^1/_{10} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & ^1/_{10} & 0 & ^1/_6 & ^2/_{15} \end{array}\right).$$

Tím eliminace končí, protože poslední řádek už neobsahuje žádná záporná čísla. Řešením tedy je vektor

$$(^1/_{10}, 0, ^1/_{10})$$

a optimální smíšenou strategií je vektor

$$(^1/_2, 0, ^1/_2),$$

tedy řešení stejné.

Uvažujeme-li tuto hru jako hru s konstantním součtem 10, tedy hodnoty největší možné vzdálenosti, pak z pohledu robota ② získáme matici plateb B jako rozdíl

$R_{ij} = 10 - Q_{ij}$. Po pravděpodobnostním rozšíření a vyřešení úlohy lineárního programování vyjde jako rovnovážná smíšená strategie vektor

$$(0, {}^{1}\!/_{5}, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

Robot ② se tedy s pravděpodobností 1 pohne na pozici B, což odpovídá čisté strategii. Toto řešení opět dává smysl, protože posunuje robota ② co nejblíže k robotovi ①.

V dalším kole bude základní pozice robotů následujícího tvaru:

	A	B	C
	D	①	E
	F	G	H
A	B	C	
D	②	E	
F	G	H	

Tabulka 2. Výchozí pozice 2.

Funkce plateb tedy bude realizována maticí

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} A & B & C & D & E & F & G & H \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 & 7 & 7 & 9 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 & 8 & 6 & 10 & 9 & 8 \\ 8 & 6 & 5 & 9 & 7 & 11 & 10 & 9 \\ 3 & 2 & 3 & 5 & 5 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 3 & 8 & 5 & 9 & 8 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 3 & 5 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 0 & 5 & 2 & 6 & 5 & 4 \\ 6 & 4 & 1 & 7 & 3 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix} \end{array}.$$

V tomto případě existuje čistá rovnovážná strategie, a to (C,C) s hodnotou hry 5.

Pokud tímto způsobem rozebereme i další možná výchozí postavení, například situaci v rozích, lze určit pohyb robotů po celé šachovnici tak, aby se roboti nesrazili a přitom si byli stále co nejblíž. V inženýrství se například řeší podobný problém - zachování viditelnosti jednoho objektu pro objekt jiný, a to například v prostředí s překážkami ve viditelnosti. Pokud bychom chtěli naši hru modifikovat tímto směrem, zamezili bychom vstup na některá políčka šachovnice.

7. Výpočtová prostředí

Pro řešení maticových her můžeme použít všechna standardní výpočtová prostředí. V prostředí *Mathematica*® je možné použít proceduru `LinearProgramming` a v prostředí *Matlab*® proceduru `linprog`. Vyřešíme příklad z předešlé kapitoly v prostředí *Matlab*®, ale protože `linprog` standardně pracuje s duální úlohou lineárního programování než je naše zadání, úlohu maximalizovat funkci $z = q_1 +$

$q_2 + q_3$ za podmínek

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 5 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$q_1, q_2, q_3 \geq 0.$$

musíme převést na duální úlohu úlohu minimalizovat funkci $z = r_1 + r_2 + r_3$ za podmínek:

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 5 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$r_1, r_2, r_3 \geq 0.$$

Protože prostředí `linprog` pracuje se omezujícími podmínkami tvaru $Ax \leq b$, $lb \leq x \leq ub$ je zadání úlohy kód tvaru:

$$\begin{aligned} &\texttt{f} = [\texttt{1}; \texttt{1}; \texttt{1}]; \\ &\texttt{A} = [-\texttt{4}, -\texttt{5}, -\texttt{6}; -\texttt{6}, -\texttt{4}, -\texttt{5}; -\texttt{6}, -\texttt{5}, -\texttt{4}]; \\ &\texttt{b} = [-\texttt{1}; -\texttt{1}; -\texttt{1}]; \\ &\texttt{lb} = \texttt{zeros}(\texttt{3}, \texttt{1}); \end{aligned}$$

Pomocí příkazu

```
[x] = linprog(f,A,b,[],[],lb);
```

dostaneme výsledek

```
x = 0.0974 0.0053 0.0974,
```

což je po normování $(0.486, 0.026, 0.486)$. To přibližně odpovídá hodnotě vypočtené $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$.

Reference

[1] Magdalena Hykšová: Teorie her a optimální rozhodování, online texty, http://euler.fd.cvut.cz/predmety/teorie_her/.

[2] Michal Chobot, AkkuĺTurnovcová: *Metody rozhodovania v konfliktných situáciách a za neurčitosti*, Alfa, Bratislava, 1980.

[3] J. González-Díaz, I. García-Jurado, M. G. Fiestras-Janeiro: *An Introductory Course on Mathematical Game Theory*, AMS Graduate Studies in Mathematics **114**, 2010.

[4] J. McKinsey: *Introduction to the Theory of Games*, The Rand Series, Stanford University, 1952.

[5] M. J. Osborne, A. Rubinstein: *A Course in Game Theory*, The MIT Press, 1994.

Jaroslav Hrdina, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: `hrdina@fme.vutbr.cz`

Petr Vašík, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: `vasik@fme.vutbr.cz`