



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## Předmluva k sedmému a osmému číslu časopisu Kvaternion

Milé čtenářky a čtenáři,

název právě vycházejícího dvojčísla připomíná blížící se životní jubileum významné a nepřehlédnutelné osobnosti brněnské matematiky (dodejme, že nejen brněnské a nejen matematiky), prof. RNDr. Alexandra Ženíška, DrSc. V rámci tohoto úvodního slova není možné, byť jen stručně, zachytit jeho vědecký přínos, který je zejména v oblasti matematické teorie metody konečných prvků celosvětově uznáván a oceňován. Prostor na podobná zhodnocení ostatně bude při lednovém setkání s jubilantem, které je pořádáno na jeho počest. V souvislosti s časopisem Kvaternion však nelze alespoň nezmínit, že profesor Ženíšek působil po dobu 9 let jako ředitel Ústavu matematiky FSI. Navíc stál u zrodu studijního oboru Matematické inženýrství, který se pod jeho vedením stal respektovaným oborem s řadou vynikajících absolventů.

Zatímco název tohoto dvojčísla odkazuje na již zmíněné jubileum, jeho obsah vypovídá o něčem možná ještě důležitějším. Totiž, že se nejedná o pouhou formální či nostalgickou vzpomínku na významného vědce. Autorem hned tří odborných příspěvků je právě profesor Ženíšek, kterému by jeho současný vědecký záběh a nasazení mohla řada mladších kolegů jen závidět. Názvy těchto příspěvků („Soustavy jednotek cgs a SI v případě elektromagnetického pole“, „K transformačním vztahům vektorů elektromagnetického pole“ – napsáno společně s Janem Lamačem a „Úplné Maxwellovy–Lorentzovy rovnice v cgs a SI“) prozrazují i jeho původní vědeckou profesi, fyziku. Další dva články tohoto dvojčísla představují v jistém smyslu protipól zmíněných tří příspěvků, neboť se jedná o práce studentské. Článek „Výmenná ekonomia“ Kristíny Šramkové, studentky oboru Matematické metody v ekonomice, byl napsán v souvislosti s přípravou její bakalářské práce a bude nepochybně zajímavý i pro matematické čtenáře. Jan Stopka a Jindřich Dvořák (druhý jmenovaný je studentem oboru Fyzikální inženýrství) přináší inspiraci ke zpestření dlouhých zimních večerů, a to článkem „Karetní hra Kabrňáci“, pojednávajícím o originální hře, jejíž součástí jsou nejvýznamnější postavy matematické historie. Tuto hru nepochybně ocení i profesor Ženíšek, sám znamenitý hráč bridge. Příspěvek „O rozložení kořenů kubického polynomu“ autorů Jana Čermáka a Ludka Nechvátala, členů Ústavu matematiky FSI, poukazuje na skutečnost, že i v tak klasické problematice, jakou představují kubické polynomy a jejich kořeny, je stále nad čím přemýšlet.

Doufáme, že obsah tohoto dvojčísla zaujme co nejširší matematickou veřejnost (a to zejména studentskou) a těšíme se, že bude inspirací i pro další potencionální přispěvatele tohoto časopisu. Na závěr bychom rádi jménem redakční rady Kvaternionu poblahopřáli profesorovi Alexandru Ženíškovi k jeho jubileu a popřáli mu mnoho zdraví a sil ke zdolání náročných vědeckých výzev, které před ním ještě stojí.

V Brně dne 23. 12. 2015

Jan Čermák, J. Franců, M. Kureš  
Ústav matematiky  
Fakulta strojního inženýrství VUT v Brně

## SOUSTAVY JEDNOTEK CGS A SI V PŘÍPADĚ ELEKTROMAGNETICKÉHO POLE

ALEXANDER ŽENÍŠEK

ABSTRAKT. Tento článek byl napsán ze čtyř důvodů: (1) Málokdo ví, že mezi jednotkami cgs a SI je v případě elektromagnetického pole velký rozdíl. (2) Všechny známé učebnice teorie relativity jsou napsány v cgs. (3) Chcemeli v teorii relativity užívat soustavu SI, na některých místech se nevyhneme užití soustavy cgs (jako např. při doslovném překladu Einsteinových textů). (4) Moderní soustava CGS je pružnější než soustava SI.

Elektrická intenzita  $\mathbf{E}$  a magnetická intenzita  $\mathbf{H}$  elektromagnetického pole splňují v soustavě cgs tyto Maxwellovy-Lorentzovy rovnice<sup>1</sup>

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \varrho, \quad (2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (4)$$

kde  $c$  je rychlost světla ve vakuu,  $\varrho$  hustota elektrických nábojů a  $\mathbf{J} = \varrho \mathbf{u}$  proudová hustota, přičemž  $\mathbf{u}$  je rychlost elektrických nábojů.

V cgs mají transformační vztahy pro vektory elektromagnetického pole tvar

$$E'_\xi = E_x, \quad E'_\eta = \gamma(E_y - \beta H_z), \quad E'_\zeta = \gamma(E_z + \beta H_y), \quad (*)$$

$$H'_\xi = H_x, \quad H'_\eta = \gamma(H_y + \beta E_z), \quad H'_\zeta = \gamma(H_z - \beta E_y), \quad (**)$$

kde

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \text{a} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

přičemž  $v$  je relativní rychlost inerciálních kartézských pravotočivých souřadnicových soustav  $S$  a  $S'$ , které jsou zvoleny tak, že osy  $x$  a  $\xi$  leží na téže přímce a  $y||\eta$ ,  $z||\zeta$ . (Pro určitost poznamenáváme, že počátek  $O'$  soustavy  $S'$  se pohybuje vůči  $S$  rychlostí  $(v, 0, 0)$ .)

Platí  $[\beta] = 1$ , takže aby rovnice  $(*)$ ,  $(**)$  měly smysl, musí v nich mít vektory  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{H}$  stejný rozměr

$$[\mathbf{H}] = [\mathbf{E}]. \quad (5)$$

---

<sup>1</sup>V soustavě SI mají tvar (7)–(10). Einstein se vyjadřoval v soustavě cgs.

V důkazu (5) napřed předpokládejme, že  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ . Potom z (1) plyne

$$[\text{rot } \mathbf{H}] = \left[ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] \Rightarrow \frac{1}{\text{cm}} [\mathbf{H}] = \frac{\text{s}}{\text{cm}} \frac{1}{\text{s}} [\mathbf{E}] \Rightarrow [\mathbf{H}] = [\mathbf{E}]. \quad \square$$

V moderní soustavě CGS je jednotkou síly (stejně jako v cgs)  $1 \text{ dyn} = 1 \text{ g cm s}^{-2}$ . Protože chceme, aby Coulombův zákon měl tvar

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{r^2}, \quad (6)$$

definujeme v CGS jednotku elektrického náboje (budeme ji značit  $1 \text{ sC} \equiv 1 \text{ statC}$ , kde C je zkratka pro coulomb) vztahem<sup>2</sup>  $(1 \text{ sC})^2 = 1 \text{ dyn (cm)}^2$ . Po odmocnění (viz [2])

$$1 \text{ sC} = 1 \text{ g}^{1/2} \text{ cm}^{3/2} \text{ s}^{-1}.$$

Z Coulombova zákona (6) vyplývá pro rozměr intenzity elektrického pole

$$[\mathbf{E}] = \left[ \frac{F}{Q_1} \right] = \frac{\text{g}^{1/2} \text{ cm}^{3/2} \text{ s}^{-1}}{\text{cm}^2} = \text{g}^{1/2} \text{ cm}^{-1/2} \text{ s}^{-1}.$$

Z (2) plyne stejný výsledek:

$$[\text{div } \mathbf{E}] = [\rho] \Rightarrow \frac{1}{\text{cm}} [\mathbf{E}] = \frac{[Q]}{\text{cm}^3} \Rightarrow [\mathbf{E}] = \frac{[Q]}{\text{cm}^2} = \text{g}^{1/2} \text{ cm}^{-1/2} \text{ s}^{-1}.$$

Obraťme ještě pozornost na rovnici (1), když  $\mathbf{J} \neq \mathbf{0}$ . Platí

$$\text{g}^{1/2} \text{ cm}^{-3/2} \text{ s}^{-1} = \frac{\text{g}^{1/2} \text{ cm}^{3/2} \text{ s}^{-1}}{\text{cm}^3} = \frac{[q]}{\text{cm}^3} = \frac{[\mathbf{u}][\rho]}{[c]} = \left[ \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \right] = [\text{rot } \mathbf{H}] = \left[ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right],$$

což je ve shodě s rovnicí (1).

V SI mají Maxwellovy–Lorentzovy rovnice pro vakuum tvar

$$\text{rot } \mathbf{H} - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J}, \quad (7)$$

$$\varepsilon_0 \text{div } \mathbf{E} = \varrho, \quad (8)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{0}, \quad (9)$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0, \quad (10)$$

kde  $\varepsilon_0 = 8,85416 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$  je permitivita vakua a  $\mu_0 = 1,25665 \cdot 10^{-6} \text{ H m}^{-1}$  permeabilita vakua. Zde mají transformační vztahy pro vektory elektromagnetického pole tvar podle [3], vztahy (10.10), (10.11)

$$E'_\xi = E_x, \quad E'_\eta = \gamma \left( E_y - \beta H_z \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \right), \quad E'_\zeta = \gamma \left( E_z + \beta H_y \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \right), \quad (11)$$

$$H'_\xi = H_x, \quad H'_\eta = \gamma \left( H_y + \beta E_z \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \right), \quad H'_\zeta = \gamma \left( H_z - \beta E_y \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \right). \quad (12)$$

kde  $[\gamma] = [\beta] = 1$  a dále podle [1], Tab. 7.03 na str. 555–559

$$[\mu_0] = \text{m kg s}^{-2} \text{ A}^{-2} = \frac{J}{A^2}, \quad [\varepsilon_0] = \text{m}^{-3} \text{ kg s}^{-4} \text{ A}^2 \quad (13)$$

<sup>2</sup>Slovy: Dva náboje o velikosti 1 sC, jsou-li vzdáleny od sebe 1 cm, působí na sebe silou 1 dyn.

takže

$$\left[ \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \right] = \text{m}^2 \text{kg s}^{-3} \text{A}^{-2} = \frac{\text{J}}{\text{s A}^2}, \quad (14)$$

kde  $\text{J} = \text{m}^2 \text{kg s}^{-2} = \text{joule}$  a  $\text{A} = \text{ampér}$ . V SI má Coulombův zákon tvar

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qq}{r^2}. \quad (15)$$

Podle (15) pro velikost  $E$  intenzity  $\mathbf{E}$  bodového náboje  $Q$  platí

$$E = \frac{F}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

takže

$$[\mathbf{E}] = \text{m}^3 \text{kg s}^{-4} \text{A}^{-2} \frac{\text{s A}}{\text{m}^2} = \text{m kg s}^{-3} \text{A}^{-1} = \text{m}^{-1} \text{V} \quad (16)$$

kde  $\text{V} = \text{volt}$ . Podle (12), (16) a (14)

$$[\mathbf{H}] = [\mathbf{E}] \left[ \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \right] = \text{m kg s}^{-3} \text{A}^{-1} \frac{\text{s A}^2}{\text{J}} = \text{m}^{-1} \text{A}.$$

Magnetické pole o intenzitě  $\mathbf{H}$  je charakterizováno silovým působením na pohybující se elektrický náboj  $q$  podle vztahu

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

kde  $\mathbf{v}$  je rychlost náboje a  $\mathbf{B}$  vektor magnetické indukce související s  $\mathbf{H}$  vztahem  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = \mu_r\mu_0\mathbf{H}$ .

*Poznámka.* V moderní CGS jsou pouze mechanické jednotky; proto jsou elektromagnetické jednotky definovány pomocí mocnin  $\text{g}^p \text{cm}^q$  s necelými exponenty  $p, q$ .

Spočteme ještě kolik sC odpovídá jednomu coulombu. Dříve však uvedeme moderní MKS (krátce mMKS). Podle Coulombova zákona (6) platí

$$\text{newton} \cdot \text{m}^2 = [Q]_{\text{mMKS}}^2.$$

Odtud

$$[Q]_{\text{mMKS}} = \text{kg}^{1/2} \text{m}^{3/2} \text{s}^{-1}.$$

Podobně jako 1 sC definujeme

$$1 \text{ mC} = \text{kg}^{1/2} \text{m}^{3/2} \text{s}^{-1}. \quad (17)$$

Upravme Coulombův zákon v SI na tvar

$$F = \frac{1}{r^2} \left( \frac{Q_1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} \right) \left( \frac{Q_2}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} \right). \quad (18)$$

Porovnáním (18) s (6) dostáváme

$$q = \frac{Q}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}, \quad (19)$$

kde  $q$  je v soustavě mMKS a za  $Q$  dosazujeme hodnotu v coulombech. Přesvědčíme se o tom: Podle (13)<sub>2</sub> a  $C = A \cdot s$  platí

$$[q] = \frac{1}{\sqrt{[\varepsilon_0]}} [Q]_{\text{SI}} = \{\text{kg}^{1/2} \text{m}^{3/2} \text{s}^{-1} (\text{s}^{-1} \text{A}^{-1})\} A \cdot s = \text{kg}^{1/2} \text{m}^{3/2} \text{s}^{-1}. \quad (20)$$

Pravé strany (17) a (20) jsou totožné, což jsme potřebovali dokázat.

Protože

$$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1} = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ m}^{-3} \text{ kg}^{-1} \text{ s}^4 \text{ A}^2,$$

platí podle (19), když položíme  $Q = 1 \text{ C}$ ,

$$q_{\text{mMKS}} \doteq \frac{1}{6\sqrt{\pi}} \cdot 10^6 \text{ miC}. \quad (21)$$

Podle (6)

$$1 \text{ miC} = (1000 \text{ g})^{1/2} 1000 \text{ cm}^{3/2} \text{ s}^{-1} \doteq \pi \cdot 10^4 \text{ sC},$$

takže podle (21)

$$1 \text{ C} \doteq \frac{\sqrt{\pi}}{6} \cdot 10^{10} \text{ sC} \doteq 3 \cdot 10^9 \text{ sC}.$$

#### REFERENCE

- [1] B. Klimeš, J. Kracík, A. Ženíšek: *Základy fyziky II*, Academia, Praha, 1972.
- [2] D. Nedbal: <http://www-ucjf.troja.mff.cuni.cz/~nedbal/cr>.
- [3] A. Ženíšek: *Relativita do kapsy*, připraveno k tisku.

Alexander Ženíšek, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69, Brno,  
e-mail: zenisek@fme.vutbr.cz

## K TRANSFORMAČNÍM VZTAHŮM VEKTORŮ ELEKTROMAGNETICKÉHO POLE

ALEXANDER ŽENÍŠEK A JAN LAMAC

**ABSTRAKT.** V letošním roce si připomínáme nejenom 100 let od vzniku obecné teorie relativity, ale také 110 let od vzniku speciální teorie relativity. V tomto příspěvku se hlavně zaměříme na detailní odvození transformačních vztahů pro vektory intenzity elektromagnetického pole klasickým způsobem v soustavě SI. Einstein neuvedl v [1] propočty přechodu od (E1) k (E3); jeho rovnice (E2) jsou jenom naznačením. Domníváme se, že v roce 110. výročí transformačních rovnic (E4), (E5) je vhodné uvést detaily. (Tento postup byl nahrazen v cgs stručnějším Minkowského formalismem [4] – viz např. [5], str. 166–167, resp. českou učebnici speciální teorie relativity [6], str. 225–227, a zde také kap. 5. Dodatek.) V kap. 5 jsou také dokázány obdobné transformační rovnice v SI. Klasické knihy o relativitě (jako [2], [3], [5], [6]) užívají soustavu cgs.

### 1. NĚKOLIK ÚVODNÍCH VZTAHŮ

Maxwellovy-Lorentzovy rovnice jsou zjednodušené Maxwellovy rovnice, které Lorentz<sup>1</sup> užíval ve své elektronové teorii.

Pro větší přehlednost zápisu budeme užívat symboly  $\xi, \eta, \zeta$  a  $\tau$  místo  $x', y', z'$  a  $t'$ . Nejjednodušší Lorentzova transformace (když osy  $x$  a  $\xi$  leží na stejné přímce, počátek  $O'$  se pohybuje po ose  $x$  rychlostí  $v$  a  $\eta||y, \zeta||z$ ) pro přechod z inerciální soustavy  $S$  do inerciální soustavy  $S'$  bude pak mít tvar

$$\xi = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \eta = y, \quad \zeta = z, \quad \tau = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (1.1)$$

kde  $c$  je rychlost světla ve vakuu. Pro inverzní Lorentzovu transformaci odpovídající přechodu z  $S'$  do  $S$  nyní platí

$$x = \frac{\xi + v\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y = \eta, \quad z = \zeta, \quad t = \frac{\tau + \frac{v}{c^2}\xi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (1.2)$$

Podle Einsteinova principu relativity mají Maxwellovy-Lorentzovy rovnice pro vakuum v soustavě  $S$ , resp.  $S'$  tvar<sup>2</sup>

<sup>1</sup>H. A. Lorentz, druhý nositel Nobelovy ceny, kterou získal společně se Zeemanem.

<sup>2</sup>Užíváme zde soustavu jednotek SI.

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{H} &= \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0,\end{aligned}\tag{1.3}$$

resp.

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}' \mathbf{H}' &= \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial \tau}, & \operatorname{div}' \mathbf{E}' &= 0, \\ \operatorname{rot}' \mathbf{E}' &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial \tau}, & \operatorname{div}' \mathbf{H}' &= 0,\end{aligned}\tag{1.4}$$

kde  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{H}$  jsou intensity elektrického a magnetického pole;  $\varepsilon_0$  je permitivita vakua a  $\mu_0$  permeabilita vakua. Dále

$$\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z), \quad \mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z), \quad \mathbf{E}' = (E'_\xi, E'_\eta, E'_\zeta), \quad \mathbf{H}' = (H'_\xi, H'_\eta, H'_\zeta),$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \mathbf{k},$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}' \mathbf{E}' &= \begin{vmatrix} \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}' \\ \frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{\partial}{\partial \eta} & \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ E'_\xi & E'_\eta & E'_\zeta \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial E'_\zeta}{\partial \eta} - \frac{\partial E'_\eta}{\partial \zeta} \right) \mathbf{i}' \\ &\quad + \left( \frac{\partial E'_\xi}{\partial \zeta} - \frac{\partial E'_\zeta}{\partial \xi} \right) \mathbf{j}' + \left( \frac{\partial E'_\eta}{\partial \xi} - \frac{\partial E'_\xi}{\partial \eta} \right) \mathbf{k}';\end{aligned}$$

kde  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , resp.  $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$  jsou jednotkové vektory v kladném směru os  $x, y, z$ , resp.  $\xi, \eta, \zeta$ . Konečně

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}, \quad \operatorname{div}' \mathbf{E}' = \frac{\partial E'_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial E'_\eta}{\partial \eta} + \frac{\partial E'_\zeta}{\partial \zeta}.$$

## 2. PŘEKLAD MATEMATICKÉ ČÁSTI EINSTEINOVA PŮVODNÍHO TEXTU PARAGRAFU 6 PRÁCE [1]

Einstein „odvodil“ transformační vztahy (E4), (E5) ve své práci z roku 1905 takto (užili jsme uvozovky proto, že Einstein žádný výpočet neuvedl):

Nechť v klidné soustavě  $S$  platí Maxwellovy–Hertzovy rovnice pro vakuum, takže máme (Einstein užil soustavu cgs (v předchozím textu jsme užili SI), takže se na levé straně rovnic (E1) objevuje faktor  $\frac{1}{c}$ )

$$\begin{aligned}\frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} &= \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}, & \frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t} &= \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} &= \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}, & \frac{1}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t} &= \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}, & \frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t} &= \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x}.\end{aligned}\tag{E1}$$

Transformujme rovnice (E1) do soustavy  $S'$  pomocí Lorentzovy transformace uvedené v §3 práce [1]. (Zde viz (1.1) resp. (1.2).) Dostaneme

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial \tau} &= \gamma \frac{\partial (H_z - \beta E_y)}{\partial \eta} - \gamma \frac{\partial (H_y + \beta E_z)}{\partial \zeta}, \\
 \frac{1}{c} \gamma \frac{\partial (E_y - \beta H_z)}{\partial \tau} &= \frac{\partial H_x}{\partial \zeta} - \gamma \frac{\partial (H_z - \beta E_y)}{\partial \xi}, \\
 \frac{1}{c} \gamma \frac{\partial (E_z + \beta H_y)}{\partial \tau} &= \gamma \frac{\partial (H_y + \beta E_z)}{\partial \xi} - \frac{\partial H_x}{\partial \eta}, \\
 \frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial \tau} &= \gamma \frac{\partial (E_y - \beta H_z)}{\partial \xi} - \gamma \frac{\partial (E_z + \beta H_y)}{\partial \eta}, \\
 \frac{1}{c} \gamma \frac{\partial (H_y + \beta E_z)}{\partial \tau} &= \gamma \frac{\partial (E_z + \beta H_y)}{\partial \xi} - \frac{\partial E_x}{\partial \zeta}, \\
 \frac{1}{c} \gamma \frac{\partial (H_z - \beta E_y)}{\partial \tau} &= \frac{\partial E_x}{\partial \eta} - \gamma \frac{\partial (E_y - \beta H_z)}{\partial \xi},
 \end{aligned} \tag{E2}$$

kde konstanty  $\gamma, \beta$  mají stejný význam jako v (3.10). Protože v  $S$  platí rovnice (E1), tak v  $S'$  podle principu relativity platí rovnice

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{c} \frac{\partial E'_\xi}{\partial \tau} &= \frac{\partial H'_\zeta}{\partial \eta} - \frac{\partial H'_\eta}{\partial \zeta}, & \frac{1}{c} \frac{\partial H'_\xi}{\partial \tau} &= \frac{\partial E'_\eta}{\partial \zeta} - \frac{\partial E'_\zeta}{\partial \eta}, \\
 \frac{1}{c} \frac{\partial E'_\eta}{\partial \tau} &= \frac{\partial H'_\xi}{\partial \zeta} - \frac{\partial H'_\zeta}{\partial \xi}, & \frac{1}{c} \frac{\partial H'_\eta}{\partial \tau} &= \frac{\partial E'_\zeta}{\partial \xi} - \frac{\partial E'_\xi}{\partial \zeta}, \\
 \frac{1}{c} \frac{\partial E'_\zeta}{\partial \tau} &= \frac{\partial H'_\eta}{\partial \xi} - \frac{\partial H'_\xi}{\partial \eta}, & \frac{1}{c} \frac{\partial H'_\zeta}{\partial \tau} &= \frac{\partial E'_\xi}{\partial \eta} - \frac{\partial E'_\eta}{\partial \xi}.
 \end{aligned} \tag{E3}$$

Porovnáním (E2) a (E3) dostáváme tyto transformační vztahy

$$E'_\xi = E_x, \quad E'_\eta = \gamma(E_y - \beta H_z), \quad E'_\zeta = \gamma(E_z + \beta H_y), \tag{E4}$$

$$H'_\xi = H_x, \quad H'_\eta = \gamma(H_y + \beta E_z), \quad H'_\zeta = \gamma(H_z - \beta E_y). \tag{E5}$$

### 3. TRANSFORMACE VEKTORŮ $\mathbf{E}$ A $\mathbf{H}$ V PŘÍPADĚ SI

Problém je, jak získat z rovnic typu (E1), resp. (E3) rovnice typu (E2). Abychom vyjádřili  $E'_\xi, E'_\eta, E'_\zeta, H'_\xi, H'_\eta, H'_\zeta$  pomocí  $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$ , vyjdeme ze složkového tvaru rovnic (1.4):

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E'_\xi}{\partial \tau} = \frac{\partial H'_\zeta}{\partial \eta} - \frac{\partial H'_\eta}{\partial \zeta}, \tag{3.1}$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E'_\eta}{\partial \tau} = \frac{\partial H'_\xi}{\partial \zeta} - \frac{\partial H'_\zeta}{\partial \xi}, \tag{3.2}$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E'_\zeta}{\partial \tau} = \frac{\partial H'_\eta}{\partial \xi} - \frac{\partial H'_\xi}{\partial \eta}, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial E'_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial E'_\eta}{\partial \eta} + \frac{\partial E'_\zeta}{\partial \zeta} = 0, \tag{3.4}$$

$$-\mu_0 \frac{\partial H'_\xi}{\partial \tau} = \frac{\partial E'_\zeta}{\partial \eta} - \frac{\partial E'_\eta}{\partial \zeta}, \quad (3.5)$$

$$-\mu_0 \frac{\partial H'_\eta}{\partial \tau} = \frac{\partial E'_\xi}{\partial \zeta} - \frac{\partial E'_\zeta}{\partial \xi}, \quad (3.6)$$

$$-\mu_0 \frac{\partial H'_\zeta}{\partial \tau} = \frac{\partial E'_\eta}{\partial \xi} - \frac{\partial E'_\xi}{\partial \eta}, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial H'_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial H'_\eta}{\partial \eta} + \frac{\partial H'_\zeta}{\partial \zeta} = 0. \quad (3.8)$$

(Einstein nepovažoval za nutné uvést rovnice  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ , resp.  $\operatorname{div} \mathbf{E}' = 0$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{H}' = 0$  v (E1), resp. (E3).) Platí

$$\begin{aligned} E'_\xi(\xi, \eta, \zeta, \tau) &= E_x(x(\xi, \eta, \zeta, \tau), y(\xi, \eta, \zeta, \tau), z(\xi, \eta, \zeta, \tau), t(\xi, \eta, \zeta, \tau)), \\ E'_\eta(\xi, \eta, \zeta, \tau) &= E_y(x(\xi, \eta, \zeta, \tau), y(\xi, \eta, \zeta, \tau), z(\xi, \eta, \zeta, \tau), t(\xi, \eta, \zeta, \tau)), \\ E'_\zeta(\xi, \eta, \zeta, \tau) &= E_z(x(\xi, \eta, \zeta, \tau), y(\xi, \eta, \zeta, \tau), z(\xi, \eta, \zeta, \tau), t(\xi, \eta, \zeta, \tau)), \\ H'_\xi(\xi, \eta, \zeta, \tau) &= H_x(x(\xi, \eta, \zeta, \tau), y(\xi, \eta, \zeta, \tau), z(\xi, \eta, \zeta, \tau), t(\xi, \eta, \zeta, \tau)), \\ H'_\eta(\xi, \eta, \zeta, \tau) &= H_y(x(\xi, \eta, \zeta, \tau), y(\xi, \eta, \zeta, \tau), z(\xi, \eta, \zeta, \tau), t(\xi, \eta, \zeta, \tau)), \\ H'_\zeta(\xi, \eta, \zeta, \tau) &= H_z(x(\xi, \eta, \zeta, \tau), y(\xi, \eta, \zeta, \tau), z(\xi, \eta, \zeta, \tau), t(\xi, \eta, \zeta, \tau)). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Dosaďme vztahy (3.9) do rovnic (3.1)–(3.8). Po úpravě dostaneme<sup>3</sup>

$$\varepsilon_0 \gamma \left( \frac{\partial E_x}{\partial t} + v \frac{\partial E_x}{\partial x} \right) = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}, \quad (3.1a)$$

$$\varepsilon_0 \gamma \left( \frac{\partial E_y}{\partial t} + v \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \gamma \left( \frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial H_z}{\partial t} \right), \quad (3.2a)$$

$$\varepsilon_0 \gamma \left( \frac{\partial E_z}{\partial t} + v \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) = \gamma \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial H_y}{\partial t} \right) - \frac{\partial H_x}{\partial y}, \quad (3.3a)$$

$$\gamma \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} \right) + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad (3.4a)$$

$$\mu_0 \gamma \left( \frac{\partial H_x}{\partial t} + v \frac{\partial H_x}{\partial x} \right) = \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y}, \quad (3.5a)$$

$$\mu_0 \gamma \left( \frac{\partial H_y}{\partial t} + v \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) = \gamma \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} \right) - \frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad (3.6a)$$

$$\mu_0 \gamma \left( \frac{\partial H_z}{\partial t} + v \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \gamma \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} \right), \quad (3.7a)$$

$$\gamma \left( \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial H_x}{\partial t} \right) + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0. \quad (3.8a)$$

---

<sup>3</sup>Užíváme vztahy

$$\begin{aligned} \frac{\partial f'}{\partial \xi} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \xi} = \gamma \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial f}{\partial t} \right), \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f'}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f'}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial f}{\partial \tau} = \gamma \left( \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

kteří plynou z pravidla o derivování složené funkce a z transformace (1.2); zde symbol  $f$  nahrazuje funkce  $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$  a symbol  $f'$  nahrazuje funkce  $E'_\xi, E'_\eta, E'_\zeta, H'_\xi, H'_\eta, H'_\zeta$ .

Vztahy (3.1a)–(3.8a) lze upravit na tvar (podrobnosti jsou uvedeny v závěru důkazu věty 1)

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \gamma (H_z + \varepsilon_0 v E_y) \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \gamma (H_y - \varepsilon_0 v E_z) \right], \quad (3.1b)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[ \gamma (E_y + \mu_0 v H_z) \right] = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \gamma (H_z + \varepsilon_0 v E_y) \right], \quad (3.2b)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[ \gamma (E_z - \mu_0 v H_y) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \gamma (H_y - \varepsilon_0 v E_z) \right] - \frac{\partial H_x}{\partial y}, \quad (3.3b)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \gamma (E_y + \mu_0 v H_z) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \gamma (E_z - \mu_0 v H_y) \right] = 0, \quad (3.4b)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \gamma (E_y + \mu_0 v H_z) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \gamma (E_z - \mu_0 v H_y) \right], \quad (3.5b)$$

$$\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[ \gamma (H_y - \varepsilon_0 v E_z) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \gamma (E_z - \mu_0 v H_y) \right] - \frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad (3.6b)$$

$$\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[ \gamma (H_z + \varepsilon_0 v E_y) \right] = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \gamma (E_y + \mu_0 v H_z) \right], \quad (3.7b)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \gamma (H_y - \varepsilon_0 v E_z) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \gamma (H_z + \varepsilon_0 v E_y) \right] = 0, \quad (3.8b)$$

kde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (3.10)$$

**Věta 3.1.** Transformační vztahy pro vektory  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  elektromagnetického pole mají v soustavě SI v případě Lorentzovy transformace (1.1) tvar

$$E'_\xi = E_x, \quad E'_\eta = \gamma(E_y - \mu_0 v H_z), \quad E'_\zeta = \gamma(E_z + \mu_0 v H_y), \quad (3.11)$$

$$H'_\xi = H_x, \quad H'_\eta = \gamma(H_y + \varepsilon_0 v E_z), \quad H'_\zeta = \gamma(H_z - \varepsilon_0 v E_y), \quad (3.12)$$

čili (protože  $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ )

$$E'_\xi = E_x, \quad E'_\eta = \gamma \left( E_y - \beta H_z \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \right), \quad E'_\zeta = \gamma \left( E_z + \beta H_y \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \right), \quad (3.13)$$

$$H'_\xi = H_x, \quad H'_\eta = \gamma \left( H_y + \beta E_z \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \right), \quad H'_\zeta = \gamma \left( H_z - \beta E_y \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \right). \quad (3.14)$$

*Důkaz.* Zavedme pomocné značení

$$\hat{E}_x := E_x, \quad \hat{E}_y := E_y, \quad \hat{E}_z := E_z, \quad \hat{H}_x := H_x, \quad \hat{H}_y := H_y, \quad \hat{H}_z := H_z \quad (3.15)$$

a s jeho užitím napíšeme rovnice (1.3) ve složkách:

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \hat{E}_x}{\partial t} = \frac{\partial \hat{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial z}, \quad (3.1c)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial t} = \frac{\partial \hat{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \hat{H}_z}{\partial x}, \quad (3.2c)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \hat{E}_z}{\partial t} = \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \hat{H}_x}{\partial y}, \quad (3.3c)$$

$$\frac{\partial \hat{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \hat{E}_z}{\partial z} = 0, \quad (3.4c)$$

$$-\mu_0 \frac{\partial \hat{H}_x}{\partial t} = \frac{\partial \hat{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial z}, \quad (3.5c)$$

$$-\mu_0 \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial t} = \frac{\partial \hat{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \hat{E}_z}{\partial x}, \quad (3.6c)$$

$$-\mu_0 \frac{\partial \hat{H}_z}{\partial t} = \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \hat{E}_x}{\partial y}, \quad (3.7c)$$

$$\frac{\partial \hat{H}_x}{\partial x} + \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial y} + \frac{\partial \hat{H}_z}{\partial z} = 0. \quad (3.8c)$$

Protože rovnice (3.1c)–(3.8c) znamenají totéž co rovnice (3.1b)–(3.8b), platí

$$\hat{E}_x = E_x, \quad \hat{E}_y = \gamma(E_y + \mu_0 v H_z), \quad \hat{E}_z = \gamma(E_z - \mu_0 v H_y), \quad (3.16)$$

$$\hat{H}_x = H_x, \quad \hat{H}_y = \gamma(H_y - \varepsilon_0 v E_z), \quad \hat{H}_z = \gamma(H_z + \varepsilon_0 v E_y), \quad (3.17)$$

V pravých stranách rovnic (3.16), (3.17) položme

$$x = x(\xi, \eta, \zeta, \tau), \quad y = y(\xi, \eta, \zeta, \tau), \quad z = z(\xi, \eta, \zeta, \tau), \quad t = t(\xi, \eta, \zeta, \tau),$$

takže podle (3.9) platí

$$\hat{E}_x = E'_\xi, \quad \hat{E}_y = \gamma(E'_\eta + \mu_0 v H'_\zeta), \quad \hat{E}_z = \gamma(E'_\zeta - \mu_0 v H'_\eta), \quad (3.18)$$

$$\hat{H}_x = H'_\xi, \quad \hat{H}_y = \gamma(H'_\eta - \varepsilon_0 v E'_\zeta), \quad \hat{H}_z = \gamma(H'_\zeta + \varepsilon_0 v E'_\eta), \quad (3.19)$$

Odstraníme-li v levých stranách rovnic (3.1), (3.19) již zbytečný „klobouk“ (*wide-hat* čili český obvykleji *stříšku*), dostaneme

$$E_x = E'_\xi, \quad E_y = \gamma(E'_\eta + \mu_0 v H'_\zeta), \quad E_z = \gamma(E'_\zeta - \mu_0 v H'_\eta), \quad (3.11^*)$$

$$H_x = H'_\xi, \quad H_y = \gamma(H'_\eta - \varepsilon_0 v E'_\zeta), \quad H_z = \gamma(H'_\zeta + \varepsilon_0 v E'_\eta), \quad (3.12^*)$$

což je inverzní transformace k transformaci (3.11), (3.12).

Zbývá dokázat implikaci (3.1a) – (3.8a)  $\Rightarrow$  (3.1b) – (3.8b). Každou ze čtyř rovnic (3.2b), (3.3b), (3.6b), (3.7b) lze získat z jednotlivých korespondujících rovnic (3.2a), (3.3a), (3.6a), (3.7a) snadnou úpravou a užitím vztahu  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ .

Rovnice

$$(3.1b) = \gamma \times (3.1a) - \gamma \varepsilon_0 v \times (3.4a).$$

Rovnice

$$(3.4b) = \gamma \times (3.4a) - \gamma \mu_0 v \times (3.1a).$$

Podobně,

$$(3.5b) = \gamma \times (3.5a) - \gamma \mu_0 v (3.8a) \quad \text{a} \quad (3.8b) = \gamma \times (3.8a) - \gamma \varepsilon_0 v \times (3.5a).$$

□

## 3A. K ODVOZENÍ ROVNIC (E2)

Einsteinův výsledek transformace rovnic (E1) na rovnice (E2) je nestandardní: „staré“ funkce  $E_x, \dots, H_z$  jsou derivovány podle „nových“ proměnných  $\xi, \eta, \zeta, \tau$ . Zcela ve stylu článku [1] není připojen žádný komentář nebo nějaké zdůvodnění.

*Poznámka.* I když funkce  $E_x, \dots, H_z$  nesouvisují s proměnnými  $\xi, \eta, \zeta, \tau$ , matematický formalismus dovoluje psát (kde  $f$  je libovolná z funkcí  $E_x, \dots, H_z$ )

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial s} \quad (s = x, y, z, t). \quad (3.20)$$

Uvažujme první z rovnic (E1):

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}. \quad (3.21)$$

Podle (1.1) a (3.20) dostáváme z rovnice (3.21):

$$\frac{1}{c} \left( -\frac{\partial E_x}{\partial \xi} \gamma v + \frac{\partial E_x}{\partial \tau} \gamma \right) = \frac{\partial H_z}{\partial \eta} - \frac{\partial H_y}{\partial \zeta}. \quad (3.22)$$

Odtud nedostaneme první rovnici (E2), i kdyby platilo

$$\frac{\partial E_x}{\partial \xi} + \frac{\partial E_y}{\partial \eta} + \frac{\partial E_z}{\partial \zeta} = 0.$$

Záporné výsledky se dokazují obtížně, ale zdá se, že přes (3.20) cesta nevede.

## 4. JEŠTĚ K ODVOZENÍ ROVNIC (E2)

Domníváme se, že Einstein zacházel s derivacemi tak, jako by to byly zlomky, takže upravoval jejich „čitatele“ následujícím způsobem:<sup>4</sup> S pomocí (3.9) přepíšeme rovnice (3.1b)–(3.8b) na tvar (jiný způsob získání rovnic (4.1)–(4.8) pomocí definice parciálních derivací nevidíme, resp. by byl příliš krkolomný, což by Einstein nedělal)

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E'_\xi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \gamma (H'_\zeta + \varepsilon_0 v E'_\eta) \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \gamma (H'_\eta - \varepsilon_0 v E'_\zeta) \right], \quad (4.1)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[ \gamma (E'_\eta + \mu_0 v H'_\zeta) \right] = \frac{\partial H'_\xi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \gamma (H'_\zeta + \varepsilon_0 v E'_\eta) \right], \quad (4.2)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[ \gamma (E'_\zeta - \mu_0 v H'_\eta) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \gamma (H'_\eta - \varepsilon_0 v E'_\zeta) \right] - \frac{\partial H'_\xi}{\partial y}, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial E'_\xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \gamma (E'_\eta + \mu_0 v H'_\zeta) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \gamma (E'_\zeta - \mu_0 v H'_\eta) \right] = 0, \quad (4.4)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H'_\xi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \gamma (E'_\eta + \mu_0 v H'_\zeta) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \gamma (E'_\zeta - \mu_0 v H'_\eta) \right], \quad (4.5)$$

$$\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[ \gamma (H'_\eta - \varepsilon_0 v E'_\zeta) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \gamma (E'_\zeta - \mu_0 v H'_\eta) \right] - \frac{\partial E'_\xi}{\partial z}, \quad (4.6)$$

<sup>4</sup>Podle našeho mínění nelze takto postupovat.

$$\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[ \gamma (H'_\zeta + \varepsilon_0 v E'_\eta) \right] = \frac{\partial E'_\xi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \gamma (E'_\eta + \mu_0 v H'_\zeta) \right], \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial H'_\xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \gamma (H'_\eta - \varepsilon_0 v E'_\zeta) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \gamma (H'_\zeta + \varepsilon_0 v E'_\eta) \right] = 0. \quad (4.8)$$

Toto jsou rovnice typu (E2). Podle Einsteinova principu relativity vyjadřují rovnice (4.1)–(4.8) totéž co rovnice (1.3). Odtud

$$E_x = E'_\xi, \quad E_y = \gamma (E'_\eta + \mu_0 v H'_\zeta), \quad E_z = \gamma (E'_\zeta - \mu_0 v H'_\eta), \quad (4.11*)$$

$$H_x = H'_\xi, \quad H_y = \gamma (H'_\eta - \varepsilon_0 v E'_\zeta), \quad H_z = \gamma (H'_\zeta + \varepsilon_0 v E'_\eta), \quad (4.12*)$$

To jsou inverzní rovnice k rovnicím (3.11) a (3.12). Z nich snadno získáme rovnice (3.11) a (3.12).

## 5. DODATEK

Ještě dokážeme dvě věty o transformaci vektorů  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ , a to jak v cgs, tak v SI s pomocí Minkowského formalismu.

**Věta 5.1.** *Transformační vztahy pro vektory  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  elektromagnetického pole mají v soustavě cgs tvar*

$$E'_\xi = E_x, \quad E'_\eta = \gamma (E_y - \beta H_z), \quad E'_\zeta = \gamma (E_z + \beta H_y), \quad (5.1)$$

$$H'_\xi = H_x, \quad H'_\eta = \gamma (H_y + \beta E_z), \quad H'_\zeta = \gamma (H_z - \beta E_y), \quad (5.2)$$

kde  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ ,  $\beta = v/c$ .

Napřed uvedeme dvě lemmata:

**Lemma 5.2.** *Při nejjednodušší Lorentzově transformaci (kde osy  $x$  a  $\xi$  leží na jedné přímce a  $y||\eta$ ,  $z||\zeta$ ) pro čtyřvektor  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  platí*

$$x'_1 = \frac{x_1 + i\beta x_4}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3, \quad x'_4 = \frac{x_4 - i\beta x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (5.3)$$

$$x_1 = \frac{x'_1 - i\beta x'_4}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x_2 = x'_2, \quad x_3 = x'_3, \quad x_4 = \frac{x'_4 + i\beta x'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (5.3*)$$

$$\frac{\partial}{\partial x'_1} = \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} + i\beta \frac{\partial}{\partial x_4}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \frac{\partial}{\partial x'_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial}{\partial x'_3} = \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial}{\partial x'_4} = \frac{\frac{\partial}{\partial x_4} - i\beta \frac{\partial}{\partial x_1}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_4} \frac{\partial x_4}{\partial t} = ic \frac{\partial}{\partial x_4}, \quad \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial x'_4} \frac{\partial x'_4}{\partial t'} = ic \frac{\partial}{\partial x'_4}, \quad (5.5)$$

kde značíme  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ ,  $x_4 = ict$  a  $x'_1 = \xi$ ,  $x'_2 = \eta$ ,  $x'_3 = \zeta$ ,  $x'_4 = ic\tau$ .

*Důkaz.* Rovnice (5.3) tvoří nejjednodušší Lorentzovu transformaci napsanou pomocí Minkowského souřadnic; (5.3\*) je k (5.3) inverzní transformace. Vztahy (5.5) jsou zřejmé a vztahy (5.4) plynou z (5.3\*) a věty o derivaci složené funkce, podle které

$$\frac{\partial}{\partial x'_k} = \sum_{j=1}^4 \frac{\partial x_j}{\partial x'_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (k = 1, \dots, 4).$$

□

Druhé lemma se týká potenciálů  $\mathbf{A}$ ,  $\varphi$ , které vystupují ve vztazích

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (5.6)$$

(Poznamenejme, že veličiny  $A_x, A_y, A_z, i\varphi$  jsou složky čtyřvektoru  $A_1 = A_x, A_2 = A_y, A_3 = A_z, A_4 = i\varphi$ .)

**Lemma 5.3.** *Pro složky vektorů  $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ ,  $\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)$  platí*

$$iE_x = \frac{\partial A_1}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_1}, \quad iE_y = \frac{\partial A_2}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_2}, \quad iE_z = \frac{\partial A_3}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_3}, \quad (5.7)$$

$$H_x = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}, \quad H_y = \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}, \quad H_z = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}. \quad (5.8)$$

*Důkaz.* Dokážeme (5.7): Násobme první vztah (5.6) imaginární jednotkou  $i$ . Dostaneme pro  $k = 1, 2, 3$

$$iE_k = -i \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \frac{i}{c} \frac{\partial A_k}{\partial t} = -\frac{\partial A_4}{\partial x_k} + \frac{\partial A_k}{\partial x_4},$$

což je již (5.7); při úpravě  $-\frac{i}{c} \frac{\partial A_k}{\partial t}$  jsme užili vztah (5.5). Vztah (5.8) plyne z  $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ .  $\square$

*Důkaz věty 5.1.* S užitím (5.3) a (5.4) dostaneme:

$$\begin{aligned} H'_x &= \frac{\partial A'_3}{\partial x'_2} - \frac{\partial A'_2}{\partial x'_3} = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} = H_x, \\ H'_\eta &= \frac{\partial A'_1}{\partial x'_3} - \frac{\partial A'_3}{\partial x'_1} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{A_1 + i\beta A_4}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) - \frac{\frac{\partial A_3}{\partial x_1} + i\beta \frac{\partial A_3}{\partial x_4}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ &= \frac{\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} - i\beta \left( \frac{\partial A_3}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_3} \right)}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \end{aligned}$$

což dá konečný výsledek (s pomocí (5.7), (5.8))

$$H'_\eta = \frac{H_y + \beta E_x}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Zcela stejně můžeme psát

$$H'_\zeta = \frac{\partial A'_2}{\partial x'_1} - \frac{\partial A'_1}{\partial x'_2} = \frac{\frac{\partial A_2}{\partial x_1} + i\beta \frac{\partial A_2}{\partial x_4} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} - i\beta \frac{\partial A_4}{\partial x_2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{H_z - \beta E_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Tím jsme dokázali (5.2). Nyní dokážeme (5.1). Důkaz vztahu  $E'_\xi = E_x$  je opět snadný; omezíme se na  $E'_\eta$ :

$$\begin{aligned} iE'_\eta &= \frac{\partial A'_2}{\partial x'_4} - \frac{\partial A'_4}{\partial x'_2} = \frac{\frac{\partial A_2}{\partial x_4} - i\beta \frac{\partial A_2}{\partial x_1}}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{A_4 - i\beta A_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \\ &= \frac{\frac{\partial A_2}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_2} - i\beta \left( \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned}$$

čili

$$iE'_\eta = \gamma(iE_y - i\beta H_z),$$

což po zkrácení imaginární jednotkou  $i$  dá  $E'_\eta = \gamma(E_y - \beta H_z)$ .  $\square$

**Lemma 5.4.** *V SI platí*

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \mu_0 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (5.9)$$

*Důkaz.* Dosadíme zřejmý vztah  $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$  do druhé Maxwellovy rovnice  $\text{rot } \mathbf{E} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0$ , kterou jsme napsali v SI. Dostaneme  $\text{rot}(\mathbf{E} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) = 0$ . Tento vztah bude splněn, položíme-li  $\mathbf{E} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\text{grad } \varphi$ , což je definiční vztah pro  $\varphi$ . Odtud plyne první vztah (5.9).  $\square$

**Věta 5.5.** *Transformační vztahy pro vektory  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  elektromagnetického pole mají v soustavě SI v případě Lorentzovy transformace (1.1) tvar*

$$E'_\xi = E_x, \quad E'_\eta = \gamma(E_y - \beta H_z \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}), \quad E'_\zeta = \gamma(E_z + \beta H_y \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}), \quad (5.10)$$

$$H'_\xi = H_x, \quad H'_\eta = \gamma(H_y + \beta E_z \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}), \quad H'_\zeta = \gamma(H_z - \beta E_y \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}). \quad (5.11)$$

*Důkaz.* V případě SI stačí položit  $A_4 = i\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\varphi$ . Potom (je totiž  $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ )

$$\begin{aligned} iE_k &= -i\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - i\mu_0 \frac{\partial A_k}{\partial t} = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \left( i\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \frac{1}{ic} \frac{\partial A_k}{\partial t} \right) \\ &= -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \left( \frac{\partial A_4}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_4} \right), \end{aligned} \quad (5.12)$$

takže vyjde např. (podle (5.12) a lemat 5.1 a 5.2)

$$\begin{aligned} H'_\eta &= \frac{\partial A'_1}{\partial x'_3} - \frac{\partial A'_3}{\partial x'_1} = \frac{\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} - i\beta \left( \frac{\partial A_3}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_3} \right)}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \left( H_y + \beta E_z \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \right), \\ iE'_\zeta &= -i\frac{\partial \varphi'}{\partial \zeta} - i\mu_0 \frac{\partial A'_3}{\partial t'} = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \left( i\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{\partial \varphi'}{\partial \zeta} + i\mu_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{\partial A'_3}{\partial t'} \right) \\ &= -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \left( \frac{\partial A'_4}{\partial x'_3} - \frac{1}{ic} \frac{\partial A'_3}{\partial t'} \right) = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \left( \frac{\partial A'_4}{\partial x'_3} - \frac{\partial A'_3}{\partial x'_4} \right) \\ &= -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \left[ -\left( \frac{\partial A_4}{\partial x_3} - i\beta \frac{\partial A_1}{\partial x_3} \right) + \left( \frac{\partial A_3}{\partial x_4} - i\beta \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) \right] = \\ &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \gamma \left[ -\left( \frac{\partial A_3}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_3} \right) + i\beta \left( -\frac{\partial A_3}{\partial x_1} + \frac{\partial A_1}{\partial x_3} \right) \right] = \gamma \left( iE_z + i\beta H_y \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \right). \end{aligned}$$

$\square$

## REFERENCE

- [1] A. Einstein: *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Ann. Phys. **17** (1905), 891–921.
- [2] V. Fock: *The Theory of Space, Time and Gravitation*, Pergamon Press, London, 1961.
- [3] K. Kuchař: *Základy obecné teorie relativity (Foundations of a general theory of relativity)*, Academia, Praha, 1968.
- [4] H. Minkowski: *Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern*, Nachr. Gess. Wiss. Göttingen (1908), 53–61.
- [5] J. B. Rumer, M. S. Ryvkin: *Teorija otnositelnosti*. Učpedgiz, Moskva, 1960.

- [6] V. Votruba: *Základy speciální teorie relativity*, Academia, Praha, 1969.

Alexander Ženíšek, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické  
v Brně, Technická 2, 616 69, Brno,  
*e-mail*: `zenisek@fme.vutbr.cz`

Jan Lamač, Praha



# ÚPLNÉ MAXWELLOVY–LORENTZOVY ROVNICE V CGS A SI

ALEXANDER ŽENÍŠEK

ABSTRAKT. Článek uzavírá sérii tří článků započatou články [5], [4]. Reference [2] byla užita ve větě 1 a poznámce 2 (konkrétně kap. o integraci Maxwellových rovnic), reference [1] v důkazu věty 5 (konkrétně odvození vztahu (48.11), který vyjadřuje rychlost světla  $c$ ). V sérii je nejvýznamnější článek [4] se svými výhradami k Einsteinově postupu.

Elektrická intenzita  $\mathbf{E}$  a magnetická intenzita  $\mathbf{H}$  elektromagnetického pole splňují v soustavě cgs tyto Maxwellovy-Lorentzovy rovnice<sup>1</sup>

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \varrho, \quad (2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (4)$$

kde  $c$  je rychlost světla ve vakuu,  $\varrho$  hustota elektrických nábojů a  $\mathbf{J} = \varrho \mathbf{u}$  proudová hustota, přičemž  $\mathbf{u}$  je rychlost elektrických nábojů.

Vzhledem k rozsáhlosti odvozování shrneme hlavní výsledky do Věty 1, kterou potom dokážeme.

**Věta 1.** *Rovnice (3) a (4) zaručují, že intenzity  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{H}$  lze vždy vyjádřit vektorovým potenciálem  $\mathbf{A}$  a skalárním potenciálem  $\varphi$  ve tvaru*

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (5)$$

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (6)$$

*Pokud je možné zvolit potenciály  $\mathbf{A}$  a  $\varphi$  tak, aby splňovaly Lorentzovu kalibrační podmínku*

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (7)$$

*potom rovnice (1) a (2) mají tvar*

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad (1a)$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \varrho. \quad (2a)$$

<sup>1</sup>V soustavě SI mají tvar (13)–(16). Einstein se vyjadřoval v soustavě cgs.

Vždy však platí rovnice (1c), (2c). Z nich lze potenciály  $\mathbf{A}$  a  $\varphi$  vypočítat při daných  $\varrho$  a  $\mathbf{J} \equiv \varrho \mathbf{u}$ .

*Důkaz.* Protože  $\text{div rot } \mathbf{a} = 0$  pro každý vektor  $\mathbf{a}$ , z rovnice (4) plyne existence vektorového potenciálu  $\mathbf{A}$ , pro který platí (6). Dosazením (6) do (3) dostaneme  $\text{rot} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$ . Tento vztah bude také splněn, položíme-li  $\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\text{grad } \varphi$ , což je definiční vztah pro skalární potenciál  $\varphi$ . Z něj plyne (5).

Nyní odvodíme rovnice (1a) a (2a). Dosadíme proto (5) a (6) do rovnic (1) a (2), přičemž k (2) přičteme nulu ve tvaru  $0 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ :

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad } \varphi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}, \quad (1b)$$

$$-\text{div grad } \varphi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \mathbf{A}) = 4\pi \varrho. \quad (2b)$$

Připomeňme známé vztahy z vektorové analýzy:

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}, \quad \text{div grad } \varphi = \Delta \varphi.$$

S jejich pomocí upravíme (1b) a (2b):

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \text{grad} \left( \text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad (1c)$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -4\pi \varrho. \quad (2c)$$

Vidíme, že systém (1c), (2c) by se značně zjednodušil, kdyby platila Lorentzova podmínka (7). (Potom bychom, mimo jiné, obdrželi dvě na sobě nezávislé rovnice.)

Obraťme nejdříve pozornost na to, že podmínka (6) nedefinuje jednoznačně vektorový potenciál  $\mathbf{A}$ . Můžeme zavést jiný vektorový potenciál  $\mathbf{A}'$ , který se liší od  $\mathbf{A}$  o gradient libovolné funkce  $f(x, y, z, t)$ :

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } f \quad (8)$$

a vztah  $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}'$  zůstane v platnosti (je  $\text{rot } \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{A}'$ , protože  $\text{rot grad } f = 0$ ).

Nyní, aby se nezměnila hodnota  $\mathbf{E}$ , musíme současně změnit definici skalárního potenciálu tím, že od něj odečteme výraz  $\frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}$ :

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (9)$$

Potom

$$-\text{grad } \varphi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = -\text{grad } \varphi + \frac{1}{c} \text{grad} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad } f).$$

Protože operace  $\frac{\partial}{\partial t}$  a  $\text{grad}$  jsou komutativní, tak se druhý a čtvrtý výraz na pravé straně ruší a platí

$$-\text{grad } \varphi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E}.$$

Tedy potenciály  $\varphi$  a  $\mathbf{A}$  můžeme definovat pomocí vztahů (5) a (6). Vztahy (8) a (9) se nazývají *kalibrační transformace*. Pokud Lorentzova kalibrační podmínka (7) platí, systém (1c), (2c) se redukuje na dvě samostatné vlnové rovnice (1a), (2a).

Zjistíme nyní, kdy platí Lorentzovy kalibrační podmínka (7): Podrobme potenciály  $\varphi = \varphi' - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}$ ,  $\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \text{grad } f$  (získané z kalibrační transformace (8), (9)) Lorentzově kalibrační podmínce  $\text{div}(\mathbf{A}' + \text{grad } f) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(\varphi' - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}) = 0$ . Dostaneme (vzhledem ke vztahu  $\text{div grad } f = \Delta f$ )

$$-\Delta f + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \text{div } \mathbf{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi'}{\partial t}. \quad (7a)$$

Tedy: Pokud  $\Delta f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$  (tedy pokud funkce  $f$  splňuje homogenní vlnovou rovnici), potom platí Lorentzova kalibrační podmínka (7) pro potenciály  $\mathbf{A}'$ ,  $\varphi'$ . Naopak: Pokud je pravá strana (7a) rovna nule, potom i levá strana (7a) je rovna nule, tj. funkce  $f$  splňuje homogenní vlnovou rovnici.

Votruba [3], str. 43: Z hlediska rovnice (7) a vlnových rovnic (1a), (2a) jsou potenciály  $\mathbf{A}'$ ,  $\varphi'$  rovnocenné původním  $\mathbf{A}$ ,  $\varphi$  jen tehdy, splňuje-li funkce  $f$  sama vlnovou rovnici  $\Delta f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$ . Tato podmínka není ovšem nutná. (*Důkaz neveden.* Konec citátu.)  $\square$

*Nástin řešení rovnic (1a), (2a): Existuje-li obecné řešení rovnice*

$$\Delta f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0,$$

*máme také obecná řešení homogenních rovnic příslušných k (1a), (2a). Nyní už stačí nalézt partikulární řešení rovnic (1a), (2a).*  $\square$

*Poznámka 2.* Dokážeme tzv. rovnici kontinuity, která vyjadřuje zákon zachování elektrického náboje. Derivujeme proto rovnici (2) podle času

$$\frac{\partial}{\partial t}(\text{div } \mathbf{E}) = 4\pi \frac{\partial \varrho}{\partial t}$$

a na rovnici (1) aplikujeme operátor  $\text{div}$ . Protože  $\text{div rot } \mathbf{H} = 0 \ \forall \mathbf{H}$ , dostaneme (zaměníme-li operátory  $\frac{\partial}{\partial t}$  a  $\text{div}$ )

$$\frac{4\pi}{c} \text{div } \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(\text{div } \mathbf{E}) = 0.$$

Vyloučíme-li z posledních dvou rovnic výraz  $\frac{\partial}{\partial t}(\text{div } \mathbf{E})$ , získáme rovnici kontinuity

$$\text{div } \mathbf{J} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0. \quad (10)$$

Fyzikální smysl (10) je tento: Změna hustoty  $\varrho$  v daném bodě se děje pouze v důsledku vtékání či vytékání elektrického toku v tomto bodě.  $\square$

Následující větu o transformaci vektorů  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  lze elegantně dokázat pomocí Minkowského formalismu (viz [4], kap. 5).

**Věta 3.** *Transformační vztahy pro vektory  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  elektromagnetického pole mají v soustavě cgs tvar*

$$\begin{aligned} E'_\xi &= E_x, & E'_\eta &= \gamma(E_y - \beta H_z), & E'_\zeta &= \gamma(E_z + \beta H_y), \\ H'_\xi &= H_x, & H'_\eta &= \gamma(H_y + \beta E_z), & H'_\zeta &= \gamma(H_z - \beta E_y), \end{aligned}$$

kde  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ ,  $\beta = v/c$ .

*Poznámka 4.* V soustavě SI mají Maxwellovy–Lorentzovy rovnice tvar

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J}, \quad (11)$$

$$\varepsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} = \varrho, \quad (12)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \quad (13)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (14)$$

kde  $\varepsilon_0 = 8,854\,16 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$  je permitivita vakua a  $\mu_0 = 1,256\,65 \cdot 10^{-6} \text{ H m}^{-1}$  permeabilita vakua.

**Věta 5.** *Pro rychlost světla  $c$  ve vakuu platí*

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}. \quad (15)$$

*Důkaz.* Dokážeme, že v případě

$$\mathbf{J} = \mathbf{0}, \quad \varrho = 0$$

z rovnic (11)–(14) plyne

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (16)$$

což je vlnová rovnice pro vektor  $\mathbf{E}$ , kde  $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ . Protože  $1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = 2,9979 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$ , plyne odtud (15). Dokážeme tedy (16).

Derivujeme  $x$ -ovou složku rovnice (11), kde  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ , podle  $t$ :

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial y \partial t} - \frac{\partial^2 H_y}{\partial z \partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}. \quad (17)$$

Derivujeme dále ypsilonovou, resp. zetovou složku rovnice (13) podle  $z$ , resp.  $y$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial t \partial z} = -\frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial z} \right), \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial t \partial y} = -\frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} \right)$$

a dosadíme tyto dva vztahy do (17):

$$\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \left( \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial z} \right). \quad (18)$$

Poslední dva členy v závorce upravíme

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right).$$

Podle rovnice (12), kde  $\varrho = 0$ , je

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{\partial E_x}{\partial x},$$

takže

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial z} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial E_x}{\partial x} = -\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}. \quad (19)$$

Dosadíme-li (19) do (18), dostaneme

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}.$$

což ie  $x$ -ová složka vektorové rovnice (16). Zbývající dvě složky se dokážou obdobně.  $\square$

Pomocí Minkowského formalismu lze odvodit transformační vztahy pro vektory  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  také v SI (viz opět [4]):

**Věta 6.** *Transformační vztahy pro vektory  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  elektromagnetického pole mají v soustavě SI v případě Lorentzovy transformace tvar*

$$\begin{aligned} E'_\xi &= E_x, & E'_\eta &= \gamma \left( E_y - \beta H_z \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \right), & E'_\zeta &= \gamma \left( E_z + \beta H_y \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \right), \\ H'_\xi &= H_x, & H'_\eta &= \gamma \left( H_y + \beta E_z \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \right), & H'_\zeta &= \gamma \left( H_z - \beta E_y \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \right) \end{aligned}$$

čili (protože  $\beta = v/c$  a  $1/c = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ )

$$\begin{aligned} E'_\xi &= E_x, & E'_\eta &= \gamma (E_y - v \mu_0 H_z), & E'_\zeta &= \gamma (E_z + v \mu_0 H_y), \\ H'_\xi &= H_x, & H'_\eta &= \gamma (H_y + v \varepsilon_0 E_z), & H'_\zeta &= \gamma (H_z - v \varepsilon_0 E_y). \end{aligned}$$

#### REFERENCE

- [1] B. Klimeš, J. Kracík, A. Ženíšek: *Základy fyziky II*, Academia, Praha, 1972.
- [2] J. B. Rumer, M. S. Ryvkin: *Teorija otnositělnosti*. Učpedgiz, Moskva, 1960.
- [3] V. Votruba: *Základy speciální teorie relativity*, Academia, Praha, 1969.
- [4] A. Ženíšek, J. Lamač: *K transformačním vztahům vektorů elektromagnetického pole*, vyjde v Kvaternionu.
- [5] A. Ženíšek: *Soustavy jednotek cgs a SI v případě elektromagnetického pole*, vyjde v Kvaternionu.

Alexander Ženíšek, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69, Brno,  
e-mail: [zenisek@fme.vutbr.cz](mailto:zenisek@fme.vutbr.cz)



## O ROZLOŽENÍ KOŘENŮ KUBICKÉHO POLYNOMU

JAN ČERMÁK A LUDEK NECHVÁTAL

**ABSTRAKT.** Článek je věnován problematice lokalizace kořenů kubického polynomu s obecnými reálnými koeficienty. Jsou zde odvozeny efektivní a současně optimální (tj. nutné i postačující) podmínky na koeficienty tohoto polynomu, které zajišťují, že všechny jeho tři kořeny leží ve stanovených oblastech komplexní roviny. Poněvadž přímý postup založený na užití Cardanových vzorců není pro tento účel vhodný, článek diskutuje i další metody pro řešení problémů tohoto typu.

### 1. ÚVOD

Kubické polynomy (tedy polynomy třetího stupně) s reálnými koeficienty hrají velmi důležitou úlohu v různých matematických i nematematických oblastech, a s potřebou nalézt kořeny nějakého konkrétního kubického polynomu se setkal téměř každý student technického či přírodovědného směru. Je všeobecně známo, že pro řešení tohoto problému existují tzv. Cardanovy vzorce, které umožňují vyjádření těchto kořenů pomocí koeficientů daného polynomu. Tato skutečnost přispívá k domněnce, že tím je otázka vyšetřování kořenů kubického polynomu vyřešena, a není proto důvod se problematikou související s analýzou těchto kořenů dále hlouběji zabývat. Cílem tohoto článku je poukázat na skutečnost, že tomu tak není, a že naopak existují problémy, související především s lokalizací kořenů, které mohou být i nadále předmětem výzkumu v oblasti kubických polynomů.

Jedna z nejvýznamnějších aplikací kubických polynomů souvisí s kvalitativní analýzou spojitých a diskrétních dynamických systémů. Uvažujeme-li spojitý dynamický systém ve formě soustavy tří lineárních autonomních diferenciálních rovnic prvního řádu (příp. ve formě jedné lineární autonomní diferenciální rovnice třetího řádu), pak odpovídající charakteristický polynom je právě kubický polynom. Je přitom známo, že lineární a nelineární třídimenzionální dynamické systémy mají zásadní význam z hlediska teoretického i praktického (v této souvislosti připomeňme alespoň Lorenzův problém konvektivního proudění v atmosféře, jehož matematický model ve tvaru zmíněné dynamické soustavy se stal základem pro studium chaotického chování, viz např. [6]). Vyšetřování hlavních problémů kvalitativní teorie spojitých dynamických systémů, jako jsou otázky (asymptotické) stability, periodického chování a oscilatorických vlastností, pak formuluje následující problémy pro příslušné charakteristické polynomy:

---

2010 *MSC*. Primární 26C10; Sekundární 65H04.

*Klíčová slova.* Kubický polynom, Cardanovy vzorce, lokalizace kořenů.

Práce byla podpořena projektem Moderní metody aplikované matematiky pro využití v technických vědách (FSI-S-14-2290).

Mají všechny kořeny daného polynomu zápornou reálnou část? Existuje kořen polynomu s nulovou reálnou částí? Jak je tomu s reálností či nereálností kořenů?

Zatímco v případě kubického polynomu je poslední otázka poměrně snadná, a lze ji skutečně zodpovědět přímo pomocí Cardanových vzorců (příp. pomocí dalších elementárních vlastností kubických polynomů), odpovědi na zbývající dvě otázky již tak snadné nejsou. Později ukážeme, že ani pro kubický polynom s konkrétními koeficienty nelze užitím Cardanových vzorců snadno rozhodnout, zda všechny kořeny mají, či nemají zápornou reálnou část. V teorii stability je navíc často potřeba tuto odpověď znát pro polynom s obecnými koeficienty. V takovém případě se ukazuje použití Cardanových vzorců být nevhodné, a proto se volí alternativní postupy (vycházející nejčastěji z aplikace Routhova–Hurwitzova kritéria), které dávají rychlou odpověď na tuto otázku.

V nedávné době se objevily nové obecnější polynomiální problémy, a to zejména v souvislosti s analýzou tzv. zlomkových spojitých dynamických systémů, kdy je derivace prvního řádu stavové proměnné nahrazena derivací neceločíselného řádu (nejčastěji se jedná o reálné číslo ležící mezi nulou a jedničkou). Speciálně problém asymptotické stability systémů tohoto typu se dá formulovat pomocí příslušného charakteristického polynomu takto:

Jaké podmínky je třeba klást na koeficienty polynomu, aby absolutní hodnota argumentů všech jeho kořenů byla větší než předepsaná hodnota  $\gamma \in (0, \pi/2]$ ?

Všimněme si, že při  $\gamma = \pi/2$  se jedná o výše zmíněný klasický problém, kdy požadujeme, aby všechny kořeny daného polynomu měly zápornou reálnou část.

Odpověď na tento problém je obecně velmi obtížná, a do nedávné doby nebyla zodpovězena ani v případě kubického polynomu. Přesněji řečeno, zformulované podmínky nebyly buď explicitní (tj. formulované přímo pomocí koeficientů polynomu a parametru  $\gamma$ ), nebo měly charakter pouze postačujících podmínek. Hlavní výsledek tohoto článku zformuluje podmínky explicitní a přitom optimální (tj. nutné i postačující).

Podobné problémy se řeší i v oblasti analýzy diskrétních dynamických systémů. Rozdíl spočívá pouze v tom, že příslušné podmínky, kterým mají kořeny charakteristického polynomu vyhovovat, jsou jiného charakteru. Speciálně, omezíme-li se na otázku asymptotické stability klasických diskrétních dynamických systémů, pak je třeba posoudit, zda všechny kořeny příslušného charakteristického polynomu mají velikost menší než jedna. V případě kubického polynomu s obecnými koeficienty je analýza této vlastnosti založena na užití Schurova–Cohnova kritéria (přímé odvození potřebných podmínek pomocí Cardanových vzorců je opět početně velmi komplikované). Uvažujeme-li tzv. zlomkové diskrétní dynamické systémy, které zahrnují difference neceločíselných řádů, pak otázka lokalizace kořenů příslušného charakteristického kubického polynomu v dané oblasti komplexní roviny je dosud nezodpovězeným problémem.

Nyní uvedeme pár poznámek ke struktuře tohoto článku. Kapitola druhá je věnována shrnutí základních poznatků, které souvisejí s Cardanovými vzorci a jejich užitím při hledání kořenů kubického polynomu s obecnými koeficienty. Třetí kapitola připomene výše zmíněná klasická polynomiální kritéria, která aplikujeme na

kubické polynomy s cílem získat efektivní podmínky na jejich koeficienty zaručující, že všechny kořeny splňují požadovanou lokalizační vlastnost. V kapitole čtvrté uvedeme rozšířenou verzi Routhova–Hurwitzova kritéria pro kubické polynomy, včetně nastínění principu důkazu. Závěry této kapitoly jsou výsledkem nedávného výzkumu autorů tohoto článku. Poslední kapitola má shrnující charakter, naznačí ale také některé směry dalšího výzkumu.

Na závěr úvodní kapitoly je třeba zdůraznit, že v dalším textu se zaměříme již výhradně na výše uvedené problémy související s lokalizací kořenů kubického polynomu. Výše užívané pojmy, jako asymptotická stabilita diskrétních a spojitých dynamických systémů, nebo derivace a difference neceločíselných řádů, sloužily pouze jako motivace a zdůvodnění, proč je užitečné se těmito polynomiálními otázkami zabývat. Proto tyto pojmy nebudeme blíže specifikovat. Poznamenejme jen, že zatímco otázka stability lineárních dynamických systémů a její souvislost s rozložením kořenů příslušného charakteristického polynomu je záležitost klasická (podrobnosti lze nalézt v každé učebnici věnované těmto systémům, viz např. [7] a [3]), oblast tzv. zlomkového kalkulu, kam patří pojmy derivace a difference neceločíselných řádů, již standardní věcí není. Úvod do této problematiky je přístupnou formou popsán např. v [5] a [10]. Poznamenejme také ještě, že výsledky tohoto článku obsahově navazují na práci [1], kde jsou uvedeny další související výsledky a poznámky.

## 2. CARDANOVY VZORCE

V této i dalších kapitolách bude kubický polynom uvažován s vedoucím koeficientem rovným jedné<sup>1</sup>, tj. ve tvaru

$$Q(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c,$$

kde koeficienty  $a, b, c$  jsou libovolná reálná čísla. Předpis pro výpočet všech tří kořenů tohoto polynomu je znám pod názvem Cardanovy vzorce<sup>2</sup>. Postup při odvození těchto vzorců je následující. Kubickou rovnici

$$Q(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (2.1)$$

nejprve převedeme na tzv. redukovaný tvar, který neobsahuje kvadratický člen. To lze provést díky substituci

$$\lambda = t - \frac{a}{3}.$$

Po dosazení tohoto vztahu do (2.1) a úpravě dostaneme rovnici

$$t^3 + pt + q = 0, \quad (2.2)$$

kde

$$p = b - \frac{a^2}{3} \quad \text{a} \quad q = c + \frac{2a^3 - 9ab}{27}.$$

Je-li  $p = 0$ ,  $q \neq 0$ , nebo  $p \neq 0$ ,  $q = 0$ , nebo  $p = q = 0$ , pak rovnici (2.2) lze snadno vyřešit. V dalším tedy uvažujme  $p, q \neq 0$ .

<sup>1</sup>To není omezující, neboť kdyby vedoucí koeficient nebyl roven jedné, tak polynom vydělený tímto koeficientem bude mít stejné kořeny.

<sup>2</sup>Gerolamo Cardano (1501–1576) byl italský matematik, filosof, astronom a astrolog.

Předpokládejme nyní, že lze nalézt dvě neznámé  $u$  a  $v$  splňující  $t = u + v$ . Dosazení tohoto výrazu do (2.2) vede po roznásobení na tvar

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0.$$

Položme

$$3uv + p = 0, \quad \text{neboli} \quad uv = -p/3 \quad (2.3)$$

(to jistě můžeme, tato vazba neodporuje podmínce  $u + v = t$ ). Potom

$$u^3 + v^3 = -q \quad \text{a zároveň} \quad u^3 v^3 = -p^3/27.$$

Je známo, že kořeny  $x_1, x_2$  kvadratické rovnice  $x^2 + Ax + B = 0$  splňují vztahy  $x_1 + x_2 = -A$ ,  $x_1 x_2 = B$  (tzv. Viètovy vzorce). Z toho plyne, že  $u^3$  a  $v^3$  jsou řešenými kvadratické rovnice

$$x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0,$$

tedy

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}. \quad (2.4)$$

Rovnice (2.4) nyní představují dvě binomické rovnice pro neznámé  $u, v$ , přičemž každá rovnice má tři řešení. Zdánlivě tedy dostaneme devět hodnot řešení  $t = u + v$  rovnice (2.2). Uvědomíme-li si však, že pro jedno konkrétní řešení  $u$  rovnice (2.4)<sub>1</sub> je řešení  $v$  rovnice (2.4)<sub>2</sub> určeno již jednoznačně vztahem  $v = -p/(3u)$  plynoucím z (2.3), máme pouze tři možné hodnoty pro součet  $u + v$ .

Platí následující tvrzení: Nechť  $\sqrt[3]{z_0}$  představuje jednu (pevně zvolenou) hodnotu tohoto řešení (ze tří možných) binomické rovnice  $z^3 = z_0$ . Pak všechny tři hodnoty řešení je možné napsat ve tvaru<sup>3</sup>

$$\sqrt[3]{z_0}, \quad \varepsilon \sqrt[3]{z_0}, \quad \varepsilon^2 \sqrt[3]{z_0}, \quad \text{kde} \quad \varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Označme  $u_1$  libovolnou (ale pevně zvolenou) hodnotu třetí odmocniny

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Potom podle výše uvedeného pro zbylé dvě hodnoty máme  $u_2 = \varepsilon u_1$  a  $u_3 = \varepsilon^2 u_1$ . Pro hodnotu  $u_1$  dále platí

$$\left(-\frac{p}{3u_1}\right)^3 = -\frac{p^3}{27} \cdot \frac{1}{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \cdot \frac{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = v^3.$$

---

<sup>3</sup>Obecněji: je-li  $\sqrt[n]{z_0}$  libovolná (ale pevná) hodnota řešení binomické rovnice  $z^n = z_0$ , pak všechny hodnoty řešení rovnice lze vyjádřit jako

$$\sqrt[n]{z_0}, \quad \varepsilon \sqrt[n]{z_0}, \quad \varepsilon^2 \sqrt[n]{z_0}, \dots, \quad \varepsilon^{n-1} \sqrt[n]{z_0}, \quad \text{kde} \quad \varepsilon = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)i.$$

Označíme-li  $v_1$  tu hodnotu

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

pro kterou platí  $v_1 = -p/(3u_1)$ , pak dostáváme tři kořeny rovnice (2.2) ve tvaru Cardanových vzorců

$$t_1 = u_1 + v_1,$$

$$t_2 = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 v_1 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + \frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1)i,$$

$$t_3 = \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon v_1 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) - \frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1)i.$$

Proveďme nyní diskuzi typu kořene. Označme

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

diskriminant<sup>4</sup> rovnice (2.2).

Je-li  $D > 0$ , jsou hodnoty  $u^3$  a  $v^3$  ve vztahu (2.4) reálné. Pak je ovšem reálná i jedna ze tří hodnot  $\sqrt[3]{u^3}$ . Označíme-li právě tuto reálnou hodnotu  $u_1$ , pak kořen  $t_1 = u_1 + v_1$  je také reálný a zbývající dva kořeny  $t_2, t_3$  jsou komplexně sdružené, což plyne přímo z jejich vyjádření. Na tomto místě je vhodné poznamenat, že v době G. Cardana ještě komplexní čísla nebyla známa, v rovnicích (2.4) se tedy předpokládalo  $D > 0$  (tj. na pravých stranách těchto rovnic bylo reálné číslo) a třetí odmocnina z reálného čísla se chápala též jako reálné číslo (striktně vzato, v té době ještě ani množina reálných čísel nebyla korektně představena). V Cardanově práci *Ars Magna*, která statě týkající se kubických rovnic obsahuje, je však naznačeno, že řešení mimo číselný obor, se kterým se tehdy pracovalo, existovat bude.

Je-li  $D = 0$ , ze vzorců (2.4) plyne  $u^3 = v^3$  a tedy buď  $u = v$ , nebo  $u = \varepsilon v$ , nebo  $u = \varepsilon^2 v$ . Potom je buď  $t_2 = t_3$ , nebo  $t_1 = t_3$ , nebo  $t_1 = t_2$ , tj. rovnice má alespoň dvojnásobný kořen. Přitom jsou všechny kořeny nutně reálné, neboť imaginární kořeny polynomu s reálnými koeficienty jsou vždy (po dvou) komplexně sdružené.

Je-li  $D < 0$ , lze ukázat, že všechny tři kořeny budou reálné a různé, diskuze však již není tak snadná, jako v předcházejících dvou případech. Poznamenejme, že i když jsou kořeny v tomto případě reálné, Cardanovy vzorce je vyjadřují jako součty třetích odmocnin z imaginárních čísel (v případě  $D < 0$  jsou pravé strany (2.4) imaginární čísla, a tedy žádná hodnota třetí odmocniny nebude reálná). Jinak řečeno, má-li kubická rovnice reálné různé kořeny, nelze je algebraicky vyjádřit jinak, než jako třetí odmocniny z imaginárních čísel. Tento případ se obvykle nazývá ireducibilní.

Vrátíme-li se zpět k rovnici (2.1) (připomeňme, že řešení rovnic (2.1) a (2.2) jsou svázána vztahem  $\lambda = t - a/3$ ), můžeme výše uvedené úvahy shrnout do následujícího tvrzení:

<sup>4</sup>V případě původní rovnice (2.1) se diskriminant obvykle píše ve tvaru  $\hat{D} = 18abc + a^2b^2 - 4a^3c - 4b^3 - 27c^2$ , přičemž vztah mezi  $D$  a  $\hat{D}$  je  $\hat{D} = -108 \cdot D$ .

**Věta 2.1.** Označme symbolem  $u$  kteroukoliv hodnotu třetí odmocniny

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad \text{kde } p = b - \frac{a^2}{3} \quad a \quad q = c + \frac{2a^3 - 9ab}{27}.$$

Dále označme symbolem  $v$  tu hodnotu třetí odmocniny

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

pro kterou platí  $3uv = -p$ . Potom kořeny polynomu  $Q(\lambda)$  jsou čísla

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= u + v - \frac{a}{3}, \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{2}(u + v) - \frac{a}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}(u - v)i, \\ \lambda_3 &= -\frac{1}{2}(u + v) - \frac{a}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}(u - v)i. \end{aligned}$$

Označíme-li dále

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

diskriminant rovnice, potom platí: je-li  $D > 0$ , polynom má jeden reálný kořen a dva imaginární komplexně sdružené kořeny, je-li  $D = 0$ , polynom má jeden reálný trojnásobný kořen nebo dva reálné kořeny (dvojnásobný a jednoduchý), a konečně je-li  $D < 0$ , polynom má tři reálné (navzájem různé) kořeny.

*Poznámka 2.2.* Z praktického hlediska není užití Cardanových vzorců příliš výhodné především proto, že vyjadřují kořeny často v komplikovaném tvaru, což znesnadňuje další potřebnou analýzu. Např. rovnice  $t^3 - 15t + 22 = 0$  má tři reálné kořeny, z toho jeden celočíselný  $t_1 = 2$ . Cardanovy vzorce jej ale vyjadřují jako

$$t_1 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 \sqrt[3]{-11 + 2i} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \sqrt[3]{-11 - 2i}.$$

Navíc, z hlediska problému lokalizace kořenů uvnitř dané oblasti komplexní roviny by ke Cardanovým vzorcům musely přistoupit další výpočty týkající se velikosti a argumentu daných kořenů. Proto se v další části zaměříme na jiné způsoby řešení tohoto problému, které jsou efektivnější (a v některých případech aplikovatelné i na polynomy obecného stupně).

### 3. NĚKOLIK DALŠÍCH KLASICKÝCH VÝSLEDKŮ

Uvažujme obecný polynom  $k$ -tého stupně ve tvaru

$$P(\lambda) = \lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + p_2\lambda^{k-2} + \dots + p_{k-1}\lambda + p_k,$$

kde  $p_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) jsou reálná čísla. V úvodní kapitole bylo připomenuto, že otázka asymptotické stability lineárních dynamických rovnic vede k problému nalezení podmínek na koeficienty polynomu  $P(\lambda)$  zaručujících, že všechny jeho kořeny mají zápornou reálnou část (spojitý případ), resp. zaručujících, že všechny jeho kořeny mají velikost menší než jedna (diskrétní případ).

Odpověď na první otázku dává Routhovo–Hurwitzovo kritérium. Pro jeho obvyklou formulaci nejprve zavedeme označení

$$d(n) = \det \begin{pmatrix} p_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{2n-1} & p_{2n-2} & p_{2n-3} & p_{2n-4} & \cdots & \cdots & p_n \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots, k,$$

kde prvek  $p_m$  nahradíme nulou pro  $m > k$ . Pak platí

**Věta 3.1. (Routhova–Hurwitzova).** *Všechny kořeny  $P(\lambda)$  mají zápornou reálnou část právě tehdy, když*

$$d(1) > 0, d(2) > 0, \dots, d(k) > 0.$$

Formálně velmi podobný tvar má i druhé kritérium, odpovídající diskrétnímu případu. Místo determinantů  $d(n)$  zavádíme determinanty

$$D(n) = \det \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ B_n & A_n \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots, k-1,$$

kde

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ p_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ p_{n-1} & \cdots & p_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & p_k \\ \vdots & \ddots & \ddots & p_{k-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ p_k & p_{k-1} & \cdots & p_{k-n+1} \end{pmatrix}.$$

Pak platí

**Věta 3.2. (Schurova–Cohnova).** *Všechny kořeny  $P(\lambda)$  mají velikost menší než jedna právě tehdy, když*

$$P(1) > 0, \quad (-1)^k P(-1) > 0 \quad (3.1)$$

a zároveň

$$D(1) > 0, D(2) > 0, \dots, D(k-1) > 0. \quad (3.2)$$

Obě tvrzení mají i svá komplexní rozšíření, kdy  $p_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) jsou komplexní čísla, viz např. [8].

Nyní tato kritéria aplikujeme na kubický polynom

$$Q(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c,$$

kde  $a, b, c$  jsou reálná čísla. Jako první posoudíme otázku, kdy mají všechny tři kořeny  $Q(\lambda)$  zápornou reálnou část. V tomto případě z Routhova–Hurwitzova kritéria vyplývá, že  $d(1) = a > 0$  a

$$d(2) = \det \begin{pmatrix} a & 1 \\ c & b \end{pmatrix} = ab - c > 0,$$

$$d(3) = \det \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ c & b & a \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = c(ab - c).$$

Dostáváme tak následující jednoduchou charakterizaci požadované kořenové vlastnosti.

**Důsledek 3.3.** *Všechny tři kořeny  $Q(\lambda)$  mají zápornou reálnou část právě tehdy, když*

$$a, b > 0 \quad a \quad 0 < c < ab. \quad (3.3)$$

O něco málo složitější je rozpracování Schurova–Cohnova kritéria pro polynom  $Q(\lambda)$ . V tomto případě podmínky (3.1) a (3.2) dávají

$$Q(1) = 1 + a + b + c > 0, \quad (-1)^3 Q(-1) = 1 - a + b - c > 0$$

a

$$D(1) = \det \begin{pmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{pmatrix} = 1 - c^2 > 0,$$

$$D(2) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & c \\ a & 1 & c & b \\ 0 & c & 1 & 0 \\ c & b & a & 1 \end{pmatrix} = (1 - c^2)^2 - (b - ac)^2 > 0.$$

Odtud vyplývá

$$|c| < 1, \quad |a + c| < 1 + b, \quad |b - ac| < 1 - c^2.$$

Dostáváme tedy

**Důsledek 3.4.** *Všechny tři kořeny  $Q(\lambda)$  mají velikost menší než jedna právě tehdy, když*

$$|a + c| < 1 + b \quad a \quad |b - ac| < 1 - c^2.$$

Zdůrazněme, že předcházející postupy jsou mnohem jednodušší, než kdybychom se závěry Důsledků 3.3 a 3.4 snažili odvodit přímo z vyjádření kořenů  $Q(\lambda)$  pomocí Cardanových vzorců.

#### 4. ZOBECNĚNÉ ROUTHOVO-HURWITZOVO KRITÉRIUM PRO KUBICKÝ POLYNOM

V této kapitole uvedeme (a částečně dokážeme) nutné a postačující podmínky, které, při pevně daném  $\gamma \in (0, \pi/2]$ , zajistí splnění nerovnosti

$$|\arg(\lambda_i)| > \gamma \quad (4.1)$$

pro všechny kořeny  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) kubického polynomu  $Q(\lambda)$  (symbolem  $\arg(\cdot)$  zde rozumíme hlavní argument daného komplexního čísla). Jedná se tedy o rozšíření Routhova–Hurwitzova kritéria v tom smyslu, že při volbě  $\gamma = \pi/2$  nerovnost (4.1) přechází právě v požadavek, aby všechny kořeny  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) polynomu  $Q(\lambda)$  měly zápornou reálnou část.

Všimněme si, že Routhovy–Hurwitzovy podmínky (3.3) představují postačující podmínky pro splnění vlastnosti (4.1) (přičemž pro  $\gamma = \pi/2$  se stávají současně i podmínkami nutnými). Je totiž dobře vidět, že při klesající hodnotě  $\gamma$  se podmínka (4.1), kladená na hlavní argumenty kořenů, stává stále méně omezující. Jinak vyjádřeno, množina všech koeficientů  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ , při kterých všechny kořeny  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) polynomu  $Q(\lambda)$  splňují podmínku (4.1), se při klesající hodnotě  $\gamma$  stále rozšiřuje.

Protože systém nutných a postačujících podmínek, které zajistí splnění (4.1) pro  $\gamma \in (0, \pi/2)$ , je výrazně komplikovanější, než tomu bylo v případě  $\gamma = \pi/2$ , zavedeme nejprve některá pomocná označení. Klademe

$$c^{\pm}(a, b; \gamma) = \left\{ -ab \pm 2 \cos(\gamma)[a^2 - 4b \cos^2(\gamma) + b] \sqrt{a^2 \cos^2(\gamma) - 4b \cos^2(\gamma) + b} + 2a \cos^2(\gamma)[-a^2 + 4b \cos^2(\gamma) + b] \right\} / \left\{ 4 \cos^2(\gamma) - 1 \right\}^3$$

a

$$\widehat{b}(a; \gamma) = \frac{a^2 \cos^2(\gamma)}{4 \cos^2(\gamma) - 1}, \quad \bar{b}(a; \gamma) = \frac{a^2}{4 \cos^2(\gamma)},$$

jestliže uvedené výrazy mají smysl. Pak v závislosti na hodnotě parametru  $\gamma$  dostáváme následující čtyři tvrzení, která budeme také průběžně komentovat.

**Věta 4.1.** *Nechť  $\pi/3 < \gamma < \pi/2$ . Všechny kořeny  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) polynomu  $Q(\lambda)$  splňují (4.1) právě tehdy, když platí libovolná z následujících (disjunktních) podmínek:*

- (a)  $a > 0, \quad b > 0, \quad 0 < c < c^-(a, b; \gamma);$
- (b)  $a \leq 0, \quad b > \bar{b}(a; \gamma), \quad 0 < c < c^-(a, b; \gamma);$
- (c)  $a > 0, \quad \widehat{b}(a; \gamma) \leq b \leq 0, \quad c^+(a, b; \gamma) < c < c^-(a, b; \gamma).$

*Poznámka 4.2.* Podmínky tvrzení kladené na trojice koeficientů  $(a, b, c)$  tvoří prostorovou oblast, která zasahuje do I. II. a IV. oktantu. Bude-li se parametr  $\gamma$  blížit zleva k hodnotě  $\pi/2$ , bude se tato oblast zmenšovat „směrem“ k I. oktantu, až v limitě přejde na oblast popsanou Routhovými–Hurwitzovými podmínkami (3.3). Naopak, s klesající hodnotou parametru  $\gamma$  se oblast, ve které se mohou koeficienty  $(a, b, c)$  pohybovat, postupně rozšiřuje.

**Věta 4.3.** *Nechť  $\gamma = \pi/3$ . Všechny kořeny  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) polynomu  $Q(\lambda)$  splňují vztah (4.1) právě tehdy, když platí libovolná z následujících (disjunktních) podmínek:*

- (a)  $a \geq 0, \quad b > 0, \quad c > 0;$
- (b)  $a < 0, \quad b > a^2, \quad 0 < c < (a^2 b^2 - b^3)/a^3;$
- (c)  $a > 0, \quad b \leq 0, \quad c > (a^2 b^2 - b^3)/a^3.$

*Poznámka 4.4.* Pro hodnotu  $\gamma = \pi/3$  již podmínky na trojice  $(a, b, c)$  zahrnují celý I. oktant (to je důležitá informace, neboť mnoho reálných úloh vede právě na polynom s kladnými koeficienty). V tomto případě také naše množina trojic  $(a, b, c)$  vyplní příslušnou část II. a IV. oktantu.

**Věta 4.5.** *Nechť  $\pi/4 < \gamma < \pi/3$ . Všechny kořeny  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) polynomu  $Q(\lambda)$  splňují (4.1) právě tehdy, když platí libovolná z následujících (disjunktních) podmínek:*

- (a)  $a < 0, \quad b \leq \bar{b}(a; \gamma), \quad c > c^+(a, b; \gamma);$
- (b)  $a < 0, \quad \bar{b}(a; \gamma) < b < \widehat{b}(a; \gamma), \quad 0 < c < c^-(a, b; \gamma) \text{ nebo } c > c^+(a, b; \gamma);$
- (c)  $a < 0, \quad b > \widehat{b}(a; \gamma), \quad c > 0;$
- (d)  $a \geq 0, \quad b < 0, \quad c > c^+(a, b; \gamma);$
- (e)  $a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad c > 0.$

**Poznámka 4.6.** Při uvedených hodnotách  $\gamma$  splnění podmínky (4.1) nově zajistí také některé trojice koeficientů  $(a, b, c)$  náležejících III. oktantu.

**Věta 4.7.** *Nechť  $0 < \gamma \leq \pi/4$ . Všechny kořeny  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) polynomu  $Q(\lambda)$  splňují vztah (4.1) právě tehdy, když platí libovolná z následujících (disjunktních) podmínek:*

- (a)  $a < 0, \quad b \leq \bar{b}(a; \gamma), \quad c > c^+(a, b; \gamma);$
- (b)  $a < 0, \quad b > \bar{b}(a; \gamma), \quad c > 0;$
- (c)  $a \geq 0, \quad b < 0, \quad c > c^+(a, b; \gamma);$
- (d)  $a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad c > 0.$

**Poznámka 4.8.** V souladu s našimi očekáváními se prostorová oblast všech trojic  $(a, b, c)$ , pro které platí podmínka (4.1), nadále zvětšuje. V limitě pro  $\gamma \rightarrow 0+$  pak dostáváme celý poloprostor  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ .

Všimněme si také, že žádná z podmínek v předcházejících čtyřech tvrzeních nedovolí, aby  $c$  bylo nekladné. Kdyby totiž platilo  $c \leq 0$ , pak polynom  $Q(\lambda)$  má nezáporný reálný kořen (ověření této skutečnosti je elementární, a plyne okamžitě z vlastností  $Q(0) \leq 0$  a  $Q(\infty) = \infty$ ), tedy podmínka (4.1) nemůže být pro takový kořen splněna. Jinými slovy,  $c > 0$  je nutnou podmínkou pro splnění vztahu (4.1), a tedy „výchozí“ množinou, ve které se trojice koeficientů  $(a, b, c)$  může pohybovat, je poloprostor  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ .

*Idea důkazu.* Důkaz předcházejících tvrzení využívá tzv. *boundary locus* metodu, která je poměrně značně rozšířena zejména při analýze stability v oblasti numerické matematiky. Podstata metody spočívá v nalezení množiny nazývané *boundary locus*, která leží v prostoru koeficientů daného polynomu a má tu vlastnost, že při volbě koeficientů z množiny *boundary locus* má daný polynom alespoň jeden kořen ležící na hranici vyšetřované lokalizační oblasti v komplexní rovině. V našem případě je tato množina definována jako

$$\mathcal{BL}(\gamma) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : \text{existuje } \lambda \in \mathbb{C} \text{ splňující } Q(\lambda) = 0 \text{ a } |\arg(\lambda)| = \gamma\}.$$

Jinak řečeno,  $\mathcal{BL}(\gamma)$  je tvořena všemi trojicemi  $(a, b, c)$  takovými, že  $Q(\lambda)$  má kořen

$$\lambda = \omega \exp(i\gamma) \quad \text{pro vhodné } \omega \geq 0. \quad (4.2)$$

Dosadíme-li (4.2) do  $Q(\lambda) = 0$  a separujeme reálnou a imaginární část, dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \omega^3 \cos(3\gamma) + a\omega^2 \cos(2\gamma) + b\omega \cos(\gamma) + c &= 0, \\ \omega[\omega^2 \sin(3\gamma) + a\omega \sin(2\gamma) + b \sin(\gamma)] &= 0 \end{aligned}$$

pro neznámé  $a, b, c$ . Přesněji vyjádřeno, hledáme všechny trojice  $(a, b, c)$  tvořené koeficienty polynomu  $Q(\lambda)$ , které dané soustavě vyhovují při nějaké (vhodné) volbě parametru  $\omega \geq 0$ .

Tato soustava má řešení  $c = 0$  ( $a, b$  libovolná) při volbě  $\omega = 0$ , a řešení

$$\begin{aligned} b &= -2a\omega \cos(\gamma) - \omega^2 [4 \cos^2(\gamma) - 1], \\ c &= 2\omega^3 \cos(\gamma) + a\omega^2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

( $a$  libovolné) při libovolné volbě  $\omega > 0$ . V rovnicích (4.3) dále rozlišíme případy  $\gamma \neq \pi/3$  a  $\gamma = \pi/3$ .

Je-li  $\gamma \neq \pi/3$ , pak první z rovnic (4.3) je kvadratická rovnice v proměnné  $\omega$ , která má dvě řešení  $\omega_{1,2} = \omega_{1,2}(a, b; \gamma)$ . Protože tato řešení mají být reálná a kladná, je třeba provést diskuzi, za jakých podmínek na  $a, b$  a  $\gamma$  se tak stane. Jakmile je potřebná analýza provedena, stačí dosadit hodnoty  $\omega_{1,2}$  do druhé z rovnic (4.3), čímž dostaneme dvě řešení  $c_{1,2} = c_{1,2}(a, b; \gamma)$ . Poznamenejme, že naznačená analýza vede právě k symbolům  $\hat{b}(a; \gamma)$  a  $c^\pm(a, b; \gamma)$ , které byly zavedeny na začátku této kapitoly, a které vystupují v podmínkách jednotlivých vět.

Je-li  $\gamma = \pi/3$ , pak se soustava (4.3) zjednoduší na

$$\begin{aligned} b &= -a\omega, \\ c &= \omega^3 + a\omega^2, \end{aligned}$$

kde  $\omega > 0$  je parametr. Odtud vyplývá, že

$$ab < 0, \quad c = (a^2b^2 - b^3)/a^3, \quad \text{nebo} \quad a = b = 0, \quad c > 0.$$

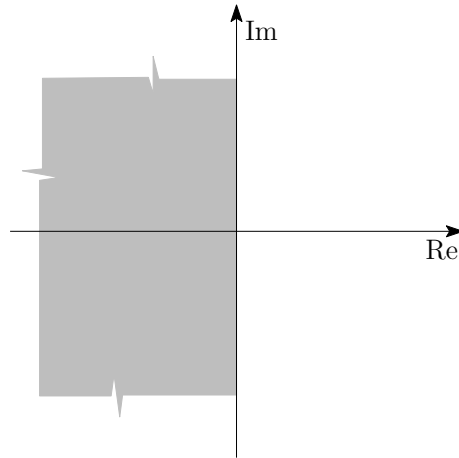
Naznačené úvahy, a s nimi související výpočty, dávají plně explicitní popis množiny  $\mathcal{BL}(\gamma) \subset \mathbb{R}^3$ . Přidáním výše zmíněné nutné podmínky  $c > 0$  se nám další úvahy zúží na poloprostor  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$  (poznamenejme, že zúžení  $\mathcal{BL}(\gamma) \cap (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+)$  si vynutí zavedení další „hraniční křivky“  $\hat{b}(a; \gamma)$  uvedené výše). Podmínka  $c > 0$  zaručuje existenci záporného kořene  $\lambda_1$ , který vztah (4.1) splňuje automaticky. Aby i zbylé dva kořeny tento vztah splnily, musí to být komplexně sdružené imaginární kořeny s argumenty vyhovujícími (4.1), nebo dva reálné záporné kořeny.

Množina  $\mathcal{BL}(\gamma)$  rozděluje  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$  na dvě disjunktní části. Je známo (viz např. [3]), že kořeny polynomu spojitě závisejí na jeho koeficientech, tedy malá změna hodnot koeficientů vyvolá malou změnu v hodnotách kořenů. To znamená, že pokud jakákoliv trojice  $(a, b, c)$ , ležící v jedné ze zmíněných dvou částí, generuje polynom  $Q(\lambda)$  s kořeny splňujícími (resp. nesplňujícími) (4.1), pak každá další trojice ležící ve stejné části má tutéž vlastnost. Stačí tedy v každé ze zmíněných disjunktních částí vybrat jednoho reprezentanta, spočítat kořeny odpovídajícího kubického polynomu a ověřit, zda jejich argument splňuje (4.1) či nikoliv.  $\square$

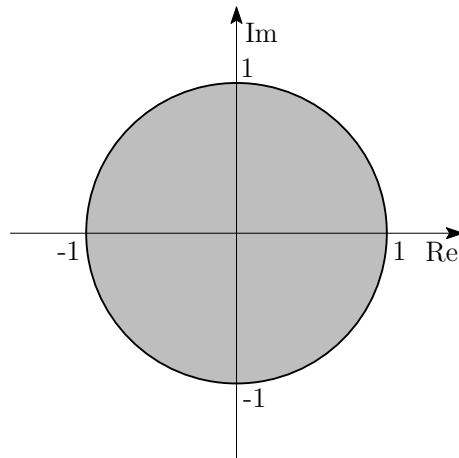
*Poznámka 4.9.* Předcházející úvahy jsou obsahem článku [2]. Poznamenejme ještě, že zcela analogickým způsobem by bylo možné diskutovat i splnění podmínky (4.1) v případě  $\gamma \in (\pi/2, \pi)$ .

## 5. ZÁVĚREČNÉ POZNÁMKY

Smyslem předcházejících kapitol bylo ukázat, že znalost Cardanových vzorců není automatickou odpovědí na všechny otázky, které se objevují v souvislosti s problematikou kořenů kubického polynomu, a že v řadě případů se jeví jako účinnější užití alternativních postupů. Speciálně tomu pak je v případech, kdy je třeba odvodit efektivní podmínky na koeficienty tohoto polynomu zaručující, že všechny jeho tři kořeny leží uvnitř předepsané oblasti. Nejvýznamnějšími takovými oblastmi jsou levá polorovina komplexní roviny (vymezená vztahem  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ ) a otevřený jednotkový kruh (daný vztahem  $|\lambda| < 1$ ). Obě dvě tyto části Gaussovy komplexní roviny jsou znázorněny na Obrázku 1 a 2.



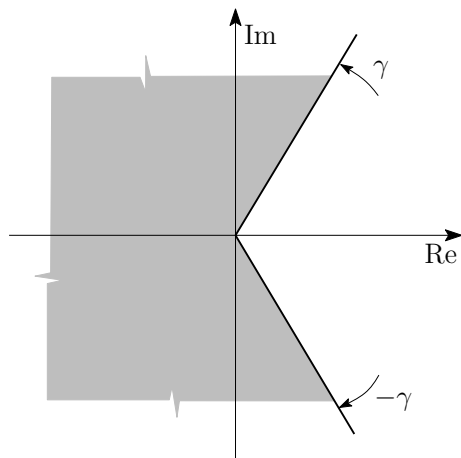
Obrázek 1



Obrázek 2

Potřebné efektivní podmínky, zaručující příslušnost všech kořenů  $Q(\lambda)$  do těchto oblastí, byly zformulovány jako Důsledek 3.3, resp. Důsledek 3.4, vyplývající téměř okamžitě z Routhova–Hurwitzova, resp. Schurova–Cohnova kritéria. Důkazy obou těchto kritérií a další související poznatky lze nalézt v monografii M. Mardena [8], která je v tomto směru považována za jednu z nejkvalifikovanějších učebnic.

Třetím typem oblasti, která byla v souvislosti s lokalizací kořenů  $Q(\lambda)$  diskutována, je otevřený sektor Gaussovy roviny, vymezený vztahem  $|\arg(\lambda)| > \gamma$ , kde  $\gamma \in (0, \pi/2]$  je reálné číslo. Tento sektor je zobrazen na Obrázku 3, z něhož je dobře patrné, že při  $\gamma = \pi/2$  se uvedená oblast redukuje na levou komplexní polorovinu (viz Obrázek 1).



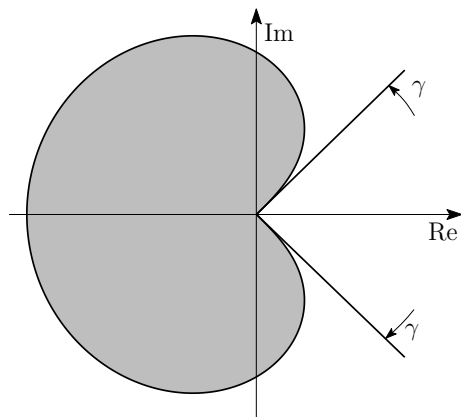
Obrázek 3

Není bez zajímavosti, že i této oblasti je v monografii [8] věnována pozornost (přesněji řečeno, je zde vyšetřován počet kořenů obecného polynomu  $P(\lambda)$  ležících v doplňku této oblasti v rámci komplexní roviny). Zatímco motivace vyšetřování standardních lokalizačních problémů (kdy všechny kořeny daného polynomu mají ležet v levé části komplexní roviny, příp. uvnitř jednotkového kruhu) je věc klasická a daná potřebami teorie stability diferenciálních, příp. diferenčních rovnic, žádná podobná motivace pro vyšetřování podmínek zaručujících, že všechny kořeny daného polynomu mají ležet ve výseku komplexní roviny dle Obrázku 3 v době vzniku Mardenovy knihy známa nebyla. Zásadní výsledek D. Matignona, popisující význam této oblasti v rámci teorie stability diferenciálních rovnic neceločíselných řádů, se totiž objevil teprve v jeho známém článku [9] z roku 1996. Kniha [8] se tedy otázkou lokalizace kořenů polynomu v daném sektoru zevrubně zabývala již o 30 let dříve, a to pomocí konstrukce speciálních Sturmových posloupností. Zdůrazněme ovšem, že touto cestou není možné získat efektivní podmínky podobné těm, které byly formulovány v příslušných větách kapitoly čtvrté.

Uvedené typy lokalizačních oblastí pro kořeny kubického polynomu jsou bezesporu nejvýznamnější, avšak nikoliv jediné. Jako příklad lze uvést oblast popsanou podmínkami

$$|\lambda| < \left( 2 \cos \frac{|\arg \lambda| - \pi}{2 - 2\gamma/\pi} \right)^{2\gamma/\pi} \quad \text{a} \quad |\arg \lambda| > \gamma$$

( $\gamma$  je opět z intervalu  $(0, \pi/2]$ ) a zobrazenou na Obrázku 4. Důvodem, proč se zabývat otázkou, za jakých podmínek leží všechny kořeny  $Q(\lambda)$  právě uvnitř této oblasti, je analýza stability některých diskrétních soustav neceločíselných řádů. Zdůrazněme přitom, že na rozdíl od předcházejících diskutovaných lokalizačních otázek, je zodpovězení této záležitosti otevřeným problémem. Jeví se však jako reálné, že použití podobné důkazové techniky, jako v případě odvození rozšířeného Routhova–Hurwitzova kritéria, by mohlo vést k nalezení potřebných podmínek.



Obrázek 4

Problematika rozložení kořenů kubického polynomu však není omezena jen na podmínky příslušnosti všech jeho kořenů do dané oblasti komplexní roviny. Jako příklad lze uvést následující zajímavou souvislost mezi rozložením kořenů kubického polynomu a jistého (souvisejícího) kvadratického polynomu:

Uvažujme kubický polynom  $Q(\lambda)$  s vlastností, že jeho tři kořeny, zobrazené v Gaussově komplexní rovině, neleží na jedné přímce. Tyto kořeny tedy vytvoří vrcholy trojúhelníku, do kterého lze vepsat (jednoznačně určenou) elipsu, která se hranice trojúhelníku dotýká ve středech jeho jednotlivých stran. Pak ohniska této elipsy jsou kořeny kvadratického polynomu, který vznikne derivací původního kubického polynomu, tedy jedná se o kořeny polynomu

$$Q'(\lambda) = 3\lambda^2 + 2a\lambda + b.$$

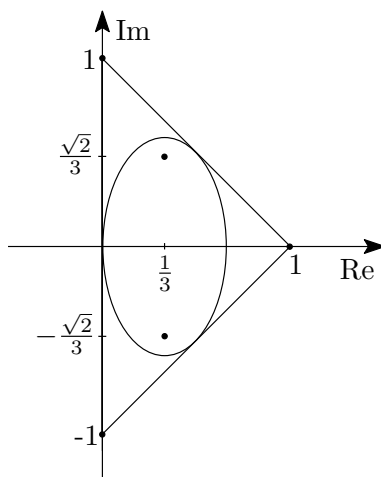
Situace je znázorněna na Obrázku 5, a to pro případ polynomu

$$Q(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1$$

s kořeny  $\lambda_1 = 1$  a  $\lambda_{2,3} = \pm i$ . Tyto tři kořeny vytvoří v Gaussově komplexní rovině vrcholy rovnoramenného trojúhelníku, jemuž vepsaná elipsa, dotýkající se středů jeho stran, má ohniska  $(1 \pm \sqrt{2}i)/3$ . Tato ohniska jsou v souladu se závěrem předcházejícího tvrzení současně kořeny kvadratického polynomu

$$Q'(\lambda) = 3\lambda^2 - 2\lambda + 1.$$

Poznamenejme ještě, že autorství této věty je připisováno J. Siebeckovi, v širší povědomí však vešla teprve díky již zmiňovanému M. Mardenovi, a to s vydatným přispěním popularizačního článku [4] D. Kalmana. Autoři tohoto článku byli na její existenci upozorněni Mgr. Janem Pavlíkem, Ph.D., kolegou z Ústavu matematiky FSI. Snad i tato věta, společně s přehledem předcházejících poznatků o lokalizaci kořenů kubického polynomu, přispěla ke zdůraznění skutečnosti, že i v této klasické (a zdánlivě uzavřené) oblasti se lze dozvědět nové zajímavé skutečnosti, či dokonce nalézat originální výsledky.



Obrázek 5

## REFERENCE

- [1] J. Čermák, J. Janský: *Elementární důkaz Levinovy-Mayovy věty*, Kvaternion **2013** (2013), 57–68.
- [2] J. Čermák, L. Nechvátal: The Routh–Hurwitz conditions of fractional type in stability analysis of the Lorenz dynamical system, zasláno k publikaci do Appl. Math. Model.
- [3] S. Elaydi: *An Introduction to Difference Equations*, 3. vyd., Springer, 2005.
- [4] D. Kalman: *The most marvelous theorem in mathematics*, J. Online Math. Appl. **8** (2008), [http://www.maa.org/external\\_archive/joma/Volume8/Kalman/index.html](http://www.maa.org/external_archive/joma/Volume8/Kalman/index.html).
- [5] J. Karásek: *Diferenciální rovnice necelého řádu*, Kvaternion **2013** (2013), 15–25.
- [6] E. N. Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow*, J. Atmos. Sci. **20** (1963), 130–141.
- [7] D. G. Luenberger: *Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models, and Applications*, John Wiley & Sons, 1979.
- [8] M. Marden: *Geometry of Polynomials*, Mathematical Surveys and Monographs **3**, Providence, 1966.
- [9] D. Matignon: *Stability results for fractional differential equations with applications to control processing*, v: Computational Engineering in Systems and Application Multiconference, IMACS, IEEE-SMC, Lille, France, Vol. 2, 1996, 963–968.
- [10] I. Podlubný: *Fractional Differential Equations*, Academic Press, New Jersey, 1999.

Jan Čermák, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně,  
Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,  
*e-mail*: [cermak.j@fme.vutbr.cz](mailto:cermak.j@fme.vutbr.cz)

Luděk Nechvátal, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické  
v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,  
*e-mail*: [nechvatal@fme.vutbr.cz](mailto:nechvatal@fme.vutbr.cz)



## VÝMENNÁ EKONÓMIA

KRISTÍNA ŠRAMKOVÁ

ABSTRAKT. V článku je prezentovaná a na jednoduchom príklade ilustrovaná výmenná ekonómia, čo je model ekonómie bez produkcie. Cieľom je prehľadné zobrazenie procesu hľadania rovnovážnej alokácie statkov medzi spotrebiteľov a názorné vysvetlenie základných ekonomických problémov, s ktorými sa počas procesu stretávame, ako je Paretoovo optimum, konkurenčná rovnováha a efektivita.

Článok je voľným prekladom kapitoly 15 knihy R. Serrano and A. M. Feldman: *A Short Course in Intermediate Microeconomics with Calculus*, Cambridge University Press, Cambridge, 2013. Je publikovaný s dovolením autorov.

### 1. ÚVOD

V tomto článku sa budeme zaoberať výmennou ekonómiou, čo je model ekonómie bez produkcie. To znamená, že statky<sup>1</sup> už boli vyrobené, nájdené, zdedené alebo darované. Jediným problémom, ktorý budeme riešiť je, ako budú rozdelené medzi spotrebiteľov. Napriek tomu, že v tomto modeli vylučujeme existenciu produkcie, model objasňuje všetky dôležité otázky o efektívnosti a neefektívnosti alokácií<sup>2</sup> tovaru medzi spotrebiteľmi.

Na začiatku si zvolíme veľmi jednoduchý ekonomický model a pozrieme sa na Paretoovo optimum alokácie statkov. Potom sa presunieme k úlohe trhov, budeme sa zaoberať konkurenčnými trhmi a walrasovou tržnou rovnováhou. Nakoniec budeme hovoriť o dôležitých vzťahoch medzi trhmi a efektivitou vo výmennej ekonómii. Tieto vzťahy patria medzi najdôležitejšie výsledky teórie ekonómie a sú patrične nazývané základné teorémy ekonómie blahobytu.

### 2. HOSPODÁRSTVO S DVOMI SPOTREBITEĽMI A DVOMI STATKAMI

Budeme sa zaoberať najjednoduchším možným modelom výmennej ekonomiky, v ktorom vystupujú iba dvaja spotrebiteľia a obchoduje sa iba s dvomi statkami. Tento model je skutočne najjednoduchší, aký by mohol existovať. Pretože keby sme ho chceli ešte zjednodušiť, vystupoval by v ňom iba jeden spotrebiteľ, alebo by sa obchodovalo len s jedným statkom, takže by vlastne ani neexistoval reálny dôvod na obchodovanie. Hoci je náš model naozaj veľmi jednoduchý, obsiahne všetky problémy, ktoré sa vyskytujú aj vo väčších trhoch a je veľmi jednoducho zovšeobecniteľný.

---

<sup>1</sup>Predmety alebo služby, ktoré slúžia na uspokojovanie ľudských potrieb

<sup>2</sup>Alokácia alebo tiež rozdelenie

Začnime s predpokladom, že máme dvoch spotrebiteľov, inšpirujeme sa románom *Daniela Defoa Robinson Crusoe* (vydaný 1719) a nazveme ich Robinson a Piatok. Budeme označovať Robinsona  $R$ , Piatka  $P$ . Ďalej predpokladáme, že na ostrove sú len dva spotrebné statky, chlieb (statok  $x$ ) a rum (statok  $y$ ). V tomto modeli vylúčime produkciu, teda možnosť, že by  $R$  a  $P$  vyrábali rum a chlieb (alebo si akokoľvek zaobstarali ich zásoby). Preto môžeme predpokladať, že existuje fixné množstvo rumu a chleba a že jediným problémom je, ako toto množstvo rozdeliť medzi dvoch spotrebiteľov. Teda môžeme povedať, že máme najjednoduchší model výmennej ekonomiky.

Obaja spotrebiteľia začínajú s počiatočným množstvom statkov, potom začnú obchodovať. Nech  $X$  reprezentuje celkové dostupné množstvo statku  $x$ . Analogicky  $Y$  reprezentuje celkové dostupné množstvo statku  $y$ . Všeobecne, keď budeme hovoriť o ľubovoľnom zväzku Robinsonových statkov, označíme ho ako  $(x_R, y_R)$ , kde  $x_R$  je jeho množstvo chleba a  $y_R$  je množstvo jeho rumu. Podobne pre Piatka, ľubovoľný zväzok jeho statkov budeme značiť  $(x_P, y_P)$ .

Robinson aj Piatok majú počiatočné zväzky statkov, budeme ich označovať nulou v hornom indexe. Robinsonov počiatočný zväzok teda bude  $(x_R^0, y_R^0)$ , pre Piatka to analogicky bude  $(x_P^0, y_P^0)$ . Súčtom počiatočných množstiev statkov musíme vždy dostať predpokladané celkové dostupné množstvá chleba a rumu, keďže sme vylúčili produkciu aj akúkoľvek inú možnosť získať statky. To znamená,

$$X = x_R^0 + x_P^0 \quad \text{a} \quad Y = y_R^0 + y_P^0.$$

Taktiež, keď začnú obchodovať, každý zväzok statkov, pri ktorom skončia, musí znova zachovávať celkové dostupné množstvo. Takže, ak skončia so zväzkami

$$((x_R, y_R), (x_P, y_P)),$$

bude tu stále platiť závislosť

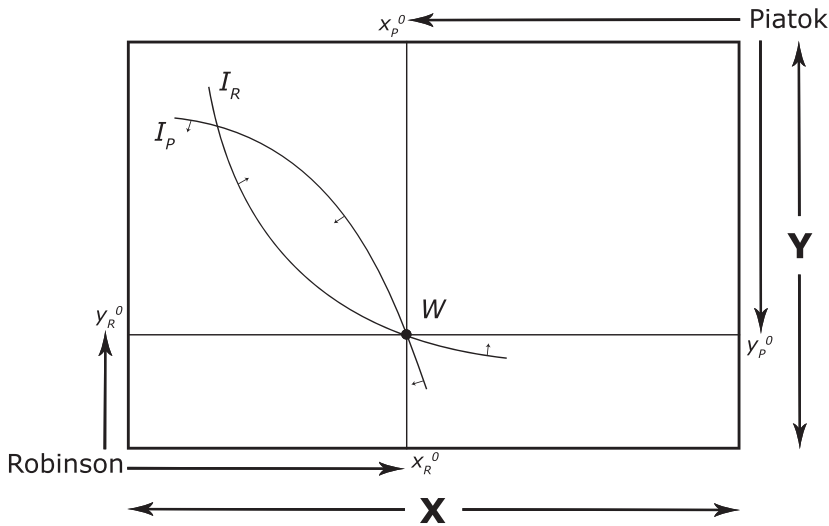
$$X = x_R + x_P \quad \text{a} \quad Y = y_R + y_P.$$

Ďalej budeme predpokladať, že každý zo spotrebiteľov je schopný rozhodnúť, ktorý zo zväzkov je pre neho užitočnejší. Inými slovami, dokáže zväzky usporiadať s rastúcou preferenciou a tým zadefinovať reláciu preferencie medzi zväzkami. Robinsonove preferencie pre chlieb a rum sú reprezentované jeho úžitkovou funkciou<sup>3</sup>  $u_R(x_R, y_R)$ , a podobne Piatkove preferencie sú reprezentované jeho úžitkovou funkciou  $u_P(x_P, y_P)$ . Predpokladáme, že úžitková funkcia každého spotrebiteľa závisí iba na jeho vlastnom spotrebnom zväzku. Poznamenajme, že úžitkové funkcie  $u_R$  a  $u_P$  budú vo všeobecnosti rôzne a nezávislé na počiatočných zväzkoch. Tieto dva fakty umožňujú vzájomne prospešné obchodovanie.

Pre názornosť použijeme grafické zobrazenie našej výmennej ekonomiky, využijeme diagram, ktorý bol prvýkrát použitý írskym ekonómom a matematikom *Francisom Ysidrom Edgeworthom* (1845–1926). (Edgeworth v skutočnosti tento diagram nevymyslel; za verziu, ktorú dodnes používame vďačíme anglickému ekonómovi *Arthurovi Bowleyimu* (1869–1957).) Názov tohto grafu je Edgeworthov krabicový diagram. Môžeme ho vidieť na Grafe 1. Na tomto grafe označíme ľavý

<sup>3</sup>Názov úžitková funkcia sa často stretáva s kritikou (napr. McKenna, Rees [19], str. 55), pretože úžitok sa nedá merať. V princípe ide len o usporadúvanie zväzkov do postupnosti podľa preferencie

dolný roh Robinson a pravý horný roh Piatok, dĺžku grafu  $X$  a výšku  $Y$ . Do vnútra grafu sme umiestnili bod  $W$ , ktorým sú dané počiatočné zväzky, čo v našom značení znamená zväzok  $(x_R^0, y_R^0)$  pre Robinsona a analogicky  $(x_P^0, y_P^0)$  pre Piatka. V grafe sú ďalej znázornené dve indifferenčné krivky,  $I_R$  patriaca Robinsonovi a  $I_P$  Piatkovi. Indifferenčné krivky sú krivky, na ktorých funkcia  $z = f(x, y)$  nadobúda konštantnú hodnotu  $c$ . V našom prípade krivky, ktoré predstavujú zväzky statkov, z ktorých majú Robinson ( $I_R$ ) a Piatok ( $I_P$ ) rovnaký úžitok. Malé šípky na krivkách určujú smery, v ktorých ich úžitok rastie.



Graf 1

Edgeworthov krabicový diagram sme nezvolili pre znázornenie náhodne. Ako sme si mohli všimnúť, máme v ňom dva počiatky, od ktorých sa merajú množstvá statkov pre jednotlivých spotrebiteľov  $R$  a  $P$ . Piatkov počiatok je vpravo hore, teda jeho statky sú merané nadol a vľavo, preto aj jeho indifferenčná krivka vyzerá byť nakreslená opačne, ale keď si uvedomíme ako sú orientované osi, zistíme, že je to takto správne. Keď sa ďalej pozrieme na graf, vidíme, že sú splnené aj obe naše podmienky. Prvou je, že súčet počiatočných statkov je rovný celkovému množstvu

$$X = x_R^0 + x_P^0 \quad \text{a} \quad Y = y_R^0 + y_P^0.$$

A druhou, že ľubovoľná dvojica zväzkov  $((x_R, y_R), (x_P, y_P))$  v súčte znova dáva celkové dostupné množstvo statkov

$$X = x_R + x_P \quad \text{a} \quad Y = y_R + y_P.$$

## 3. PARETOVO OPTIMUM

Ďalej pri určovaní ekonomického optima musíme vedieť merať prospech. Ten sa v ekonomike vytvára aj produkciou, aj obchodovaním na trhu samotnom. Ekonomický prospech meriame pomocou *prebytku spotrebiteľa a prebytku výrobcu*. Prebytok spotrebiteľa je rozdiel medzi čiastkou, ktorú je spotrebiteľ ochotný maximálne zaplatiť a čiastkou, ktorú skutočne zaplatil. Prebytkom výrobcu rozumieme rozdiel medzi príjmami získanými výrobcom za predaj statkov a minimálnou sumou, ktorá bola potrebná na produkciu daných statkov. Súčet týchto dvoch prebytkov reprezentuje celkový čistý úžitok vytvorený na trhu meraný v peňažných jednotkách. Inými slovami, sumou prebytku spotrebiteľa a výrobcu meriame ekonomický prospech. Ak je tento prospech možné zvýšiť, trh je neefektívny (prípado monopolu) a naopak, ak neexistuje spôsob ako prospech zvýšiť, trh je efektívny (prípado konkurenčného trhu). To je práve situácia, akú by sme v našom modeli chceli dosiahnuť.

Všimnime si, že tento druh analýzy sa zameriava len na štúdium jedného statku a ignoruje, čo sa deje na ostatných trhoch pre iné statky. Preto túto analýzu nazývame *analýza čiastkovej rovnováhy* a model, ktorý študuje tento jeden statok voláme *model čiastkovej rovnováhy*.

Ale teraz sa zaoberáme jednoduchým modelom výmennej ekonomiky bez produkcie. Ak by sme merali ekonomický prospech na základe celkového množstva chleba a/alebo rumu, veľkosť prospechu by sa nezmenila, pretože celkové množstvá sú pevne dané a nemenné. V našom modeli nie sú peniaze (aspoň zatiaľ nie), preto nebude jednoduché ekonomický prospech merať v peňažných jednotkách. Môžeme skúsiť merať prospech v jednotkách úžitku, ale vieme, že zrejme nebude správne spočítavať dohromady Robinsonov a Piatkov úžitok. Ako teda rozhodneme či je alokácia pevného množstva chleba a rumu medzi našich dvoch spotrebiteľov efektívna?

S riešenie tohto problému prišiel taliansky ekonóm *Vilfredo Pareto* (1848–1923). Jeho riešenie sa nazýva *Paretovo optimum*. Je to stav v ekonomike, kedy už nie je možné zvýšiť uspokojenie žiadneho účastníka bez toho, aby sa zároveň neznížilo uspokojenie niekoho iného. Všimnime si, že tento princíp môže byť jednoducho rozšírený na výmennú ekonomiku s akýmkoľvek počtom spotrebiteľov a akýmkoľvek počtom statkov, tiež môže byť rozšírená na iný model ekonómie, vrátane modelov s produkciou. Taktiež Paretovo optimum nie je obmedzené na modely s jedným statkom (čiastkové rovnovážne modely), je použiteľné aj pri *všeobecných rovnovážnych modeloch*, to sú modely, ktoré uvažujú ponuku a dopyt na všetkých trhoch zároveň.

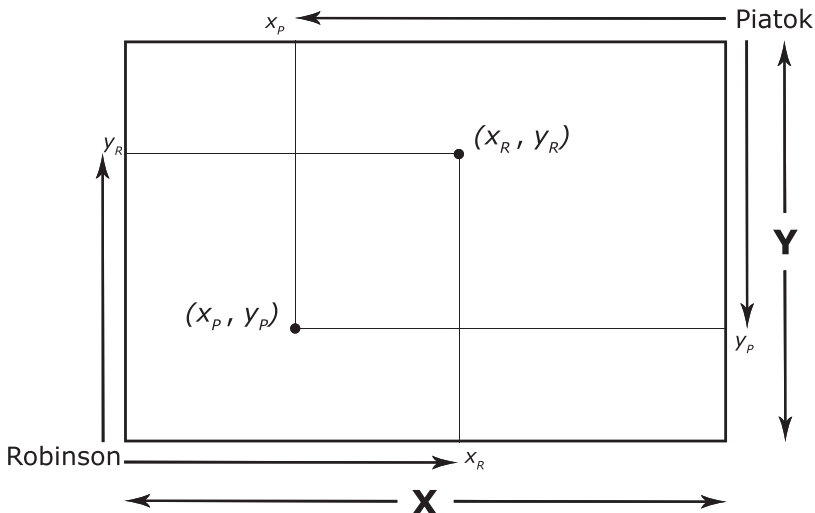
Teraz sa zamyslime nad prípustnými alokáciami, ktoré nie sú paretovsky optimálne, tie sú pre spoločnosť evidentne nežiaduce, keďže existuje iná prípustná alokácia, pri ktorej by sa spoločnosť mohla mať lepšie. Avšak poznamenajme, že Paretovo optimum nemá nič spoločné so spravodlivým rozdelením statkov. Inými slovami, paretovsky neoptimálna alokácia môže byť oveľa spravodlivejšia ako paretovsky optimálna. Ako príklad si zoberme situáciu Robinsona a Piatka. Ak by sme všetok chlieb a rum dali Robinsonovi, táto alokácia by bola paretovsky optimálna. Na druhej strane, ak by sme dali Robinsonovi a Piatkovi každému presne polovicu

celkového množstva chleba aj rumu, táto alokácia by bola oveľa spravodlivejšia, avšak už by nebola paretoovsky optimálna.

Vráťme sa opäť k Edgeworthovmu krabicovému diagramu, záhadu paretoovsky optimálnej a paretoovsky neoptimálnej alokácie nám objasní názornejšie.

### Prípustné alokácie

Predstavme si, že máme zväzky statkov  $((x_R, y_R), (x_P, y_P))$ , hodnoty nám v súčte musia dať  $X$  a  $Y$ . Na Grafe 2 máme tieto zväzky znázornené, ale množstvá chleba (horizontálna os) a rumu (vertikálna os) v súčte prevyšujú celkové množstvá  $X$  (šírka diagramu) a  $Y$  (výška diagramu). Inými slovami, alokácia znázornená na Grafe 2 nie je prípustná, tým pádom nemôže byť ani paretoovsky optimálna.



Graf 2

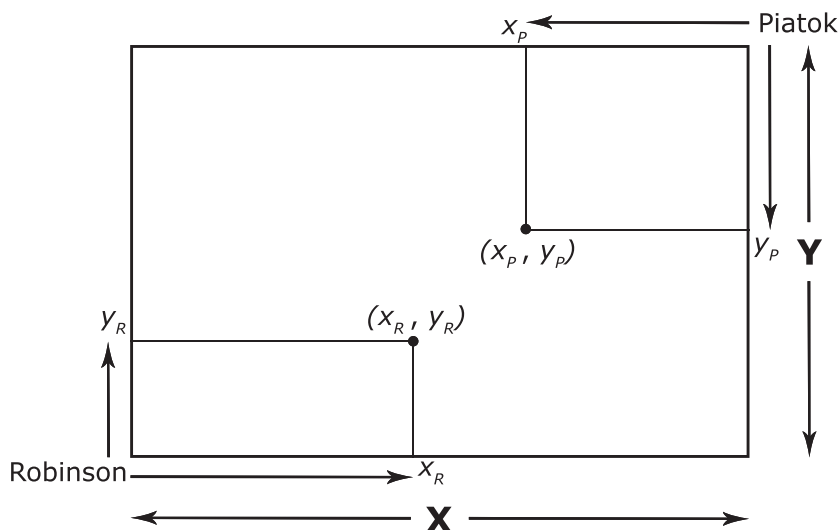
Na Grafe 3 je zobrazený iný pár zväzkov, ktorých jednotlivé súčty sú menšie ako celkové množstvá  $X$  a  $Y$ . Teda taktiež považujeme tento pár zväzkov za neprípustný a rovnako aj paretoovsky neoptimálny. (Niektorí ekonómovia by považovali tento pár zväzkov za prípustný, pretože existuje možnosť prebytku statkov jednoducho vyhodiť z modelu, a teda znížiť celkové množstvá statkov  $X$  a  $Y$ , my však takto uvažovať nebudeme).

Z Grafov 2 a 3 môžeme spraviť záver, že v modeli výmennej ekonomiky musí byť alokácia chleba a rumu najskôr prípustná, aby sme vôbec mohli rozhodovať, či je paretoovsky optimálna alebo nie. Aby bola alokácia prípustná, musí spĺňať podmienku

$$X = x_R + x_P \quad \text{a} \quad Y = y_R + y_P.$$

### Bod dotyku indifferenčných kriviek

Odtiaľ sa obmedzíme iba na prípustné alokácie. To znamená, že budeme brať do úvahy iba páry zväzkov  $((x_R, y_R), (x_P, y_P))$ , ktoré sú reprezentované jediným

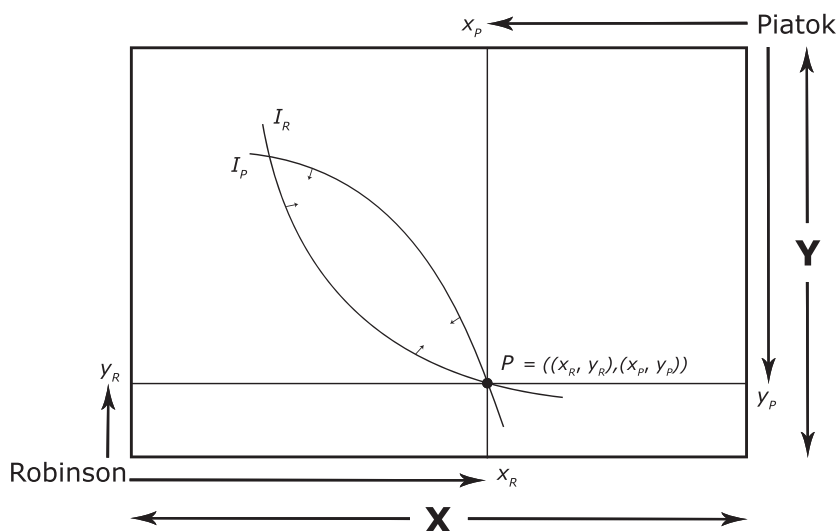


Graf 3

bodom v Edgeworthovom krabicovom diagrame. V Grafe 1 bol takouto alokáciou bod  $W$ . Nakreslíme si nový graf, Graf 4, s podobným bodom, označeným  $P$ . V grafe sa indiferenčné krivky  $I_R$  a  $I_P$  pretnú v bode  $P = ((x_R, y_R), (x_P, y_P))$ . Šípky na indiferenčných krivkách znázorňujú smer rastúceho úžitku. Ako vidíme, bod  $P$  nemôže byť paretoovsky optimálny, pretože akýkoľvek posun do vnútra oblasti tvaru šošovky, by pre oboch spotrebiteľov znamenal väčší úžitok. (Posun do druhého konca šošovky, kde sa pretínajú  $I_R$  a  $I_P$ , by pre oboch znamenal znova rovnakú situáciu, posun po hranách šošovky by jednému spotrebiteľovi priniesol vyšší úžitok a pre druhého by znamenal rovnakú situáciu ako v bode  $P$ .)

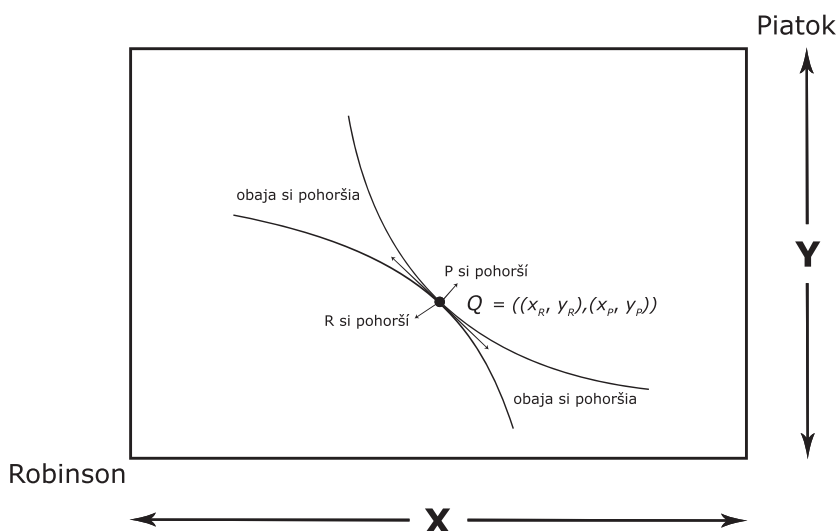
Ak by boli Robinson a Piatok v bode ako je  $P$  v Grafe 3, mohli by obchodovať tak, aby z toho mal aspoň jeden z nich prospech a ani jednému by nepoškodili. Tomu hovoríme *paretovské zlepšenie*. Ak môžu voľne obchodovať, sú si vedomí prípustných alokácií, a budú sa rozhodovať na základe ich preferencií a úžitkových funkcií, pravdepodobne by pokračovali v obchodovaní až dovtedy, kým by už nemohli spraviť žiadne paretové zlepšenie, to znamená, že by dosiahli paretoovsky optimálnu alokáciu. Navyše, ak by bol bod, v ktorom skončili obchodovanie vo vnútri Edgeworthovho diagramu, nemohol by to byť bod, kde sa pretínajú indiferenčné krivky Robinsona a Piatka. Presnejšie, ak predpokladáme, že indiferenčné krivky sú hladké a nemajú žiadne nespojitosti, bod, v ktorom skončia obchodovanie, kde už nie sú možné ďalšie paretové zlepšenia, musí byť *bod dotyku*.

Skrátene, vo vnútri Edgeworthovho krabicového diagramu musia byť paretoovsky optimálne body bodmi dotyku medzi dvomi indiferenčnými krivkami. Na Grafe 5 môžeme vidieť príklad takéhoto paretoovsky optimálneho bodu označeného  $Q = ((x_R, y_R), (x_P, y_P))$ . Sú z neho nakreslené štyri šípky. Šípka smerujúca severovýchodne ukazuje, ktorým smerom by si mohol polepšiť Robinson, ale tým by Piatkovi pohoršil. Šípka na juhozápad predstavuje rovnakú situáciu pre Piatka,



Graf 4

ktorý by bol vo výhode, ale Robinsonovu situáciu by tým zhoršil. Zvyšné dve šípky ukazujú pohyb, v ktorom by si pohoršili obaja spotrebitelia. Preto v bode  $Q$  neexistuje žiadne paretové zlepšenie, tým pádom je bod  $Q$  paretoovsky optimálny.



Graf 5

To nás privádza k ďalšej nutnej podmienke pre Paretoovo optimum. Pre body, vo vnútri Edgeworthovho krabicového diagramu, ktoré sú paretoovsky optimálne, musí platiť, že sklony indifferenčných kriviek Robinsona a Piatka musia byť v tomto

bode rovnaké. To z ekonomického hľadiska znamená, že *medzná miera substitúcie* (značíme  $MRS$ , z anglického marginal rate of substitution) statku  $y$  za statok  $x$  sa musí rovnať Piatkovej medznej miere substitúcie statku  $y$  za statok  $x$ . Medzná miera substitúcie statku  $y$  za statok  $x$  prakticky udáva, o koľko viac/menej má spotrebiteľ nakúpiť statku  $y$ , ak nakúpi o jednotku viac/menej statku  $x$ , aby bolo jeho uspokojenie stále rovnaké.

To znamená

$$MRS^R = MRS^P,$$

z čoho ďalej dostávame

$$\frac{MU_x^R}{MU_y^R} = \frac{MU_x^P}{MU_y^P}.$$

Medzná užitočnosť  $MU_x^R$  sa vypočíta ako parciálna derivácia úžitkovej funkcie podľa  $x$ . Ekonomická interpretácia potom znie: ak sa  $x$  zmení o jednotku pri nennom  $y$ , medzná miera substitúcie predstavuje, o koľko sa zmení úžitok.

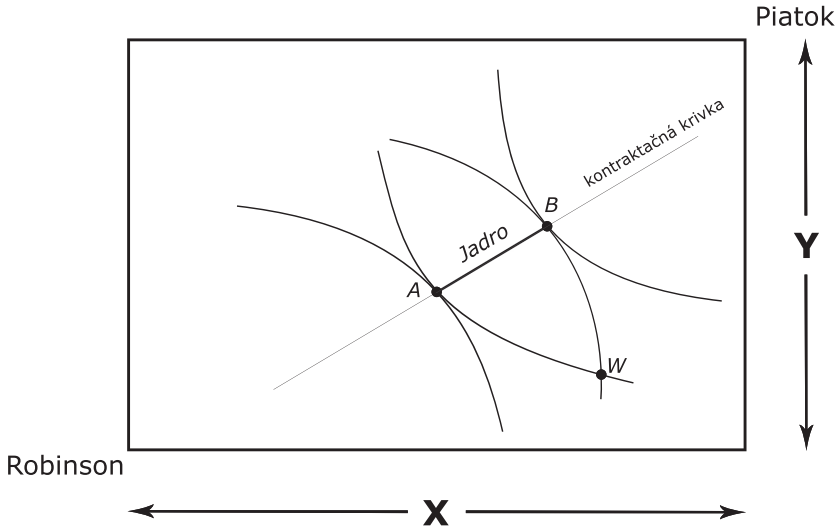
Množinu všetkých paretoovsky optimálnych alokácií v Edgeworthovom krabicovom diagrame nazývame *kontrakčná krivka*. Robinson a Piatok budú pravdepodobne súhlasiť s dohodou, ktorá by ich z počiatočnej alokácie  $W$  doviedla na kontrakčnú krivku. Kde na kontrakčnej krivke skončia bude pochopiteľne záležať od umiestnenia počiatočnej alokácie  $W$ , a tiež od ich schopnosti vyjednávať. Ak  $W$  priraduje väčšinu chleba aj rumu Robinsonovi, obchodovanie skončí na kontrakčnej krivke v mieste, kde bude mať Robinson stále väčšinu oboch týchto statkov.

Na Grafe 6 je zobrazená kontrakčná krivka. Vo vnútri Edgeworthovho krabicového diagramu je to množina bodov dotyku. Na grafe je zobrazená počiatočná alokácia  $W$ , ktorá priraduje väčšinu chleba Robinsonovi a väčšinu rumu Piatkovi. Vo výmennej ekonomike, budú Robinson a Piatok obchodovať tak, že sa nakoniec dostanú na kontrakčnú krivku, ale nie kamkoľvek na ňu. Budú robiť paretové zlepšenia, to znamená, že ani jeden z nich nebude chcieť skončiť horšie, ako začal pri počiatočnej alokácii  $W$ . Časť kontrakčnej krivky, na ktorej ani jeden nebude v horšej situácii ako na začiatku, je medzi bodmi  $A$  a  $B$ . Táto časť sa nazýva *jadro*.

Medzi ekonómami vznikol rozpor, nevedia určiť či je paretoovsky optimálny bod  $A$  lepší (alebo horší) ako paretoovsky optimálny bod  $B$ . Avšak, zhodnú sa v tom, že je dobré skončiť obchodovanie v paretoovsky optimálnom bode v niektorom bode na kontrakčnej krivke. Naznačili sme, že v modeli výmennej ekonomiky naši dvaja spotrebiteľia môžu jednoducho obchodovať a vymieňať si statky tak, aby sa dostali na kontrakčnú krivku. Existuje iný spôsob, ako sa tam dostať? Odpoveď znie Áno, riešením je *obchodný trh*.

#### 4. KONKURENČNÁ (WALRASOVA) ROVNOVÁHA

Teraz si vytvoríme konkurenčný trh v našej jednoduchej ekonomike s dvomi spotrebiteľmi (Robinsonom a Piatkom) a dvomi statkami (chlebom a rumom). Táto teória pochádza od francúzskeho ekonóma *Leona Walrasa* (1834–1910). Rovnováha na trhu, o ktorej budeme hovoriť sa nazýva konkurenčná rovnováha, alebo tiež podľa jej autora *Walrasova rovnováha*. Prepojenie medzi tržnou rovnováhou a Paretovým optimom bolo analyzované v 50. rokoch 20. storočia, predovšetkým



Graf 6

americkými ekonómami *Kennethom Arrowom* (\*1921) a *Lionelom McKenziem* (1919–2010) a tiež francúzskym ekonómom *Gerardom Debreuom* (1921–2004).

Walrasovu rovnováhu si vysvetlíme na nasledujúcom príklade. Predstavme si, že na ostrov k Robinsonovi a Piatkovi sa dostane dražiteľ. Dražiteľ nemá žiadny chlieb ani rum a nemá ani záujem žiadny z týchto statkov získať. Jeho jedinou úlohou je vytvárať trh, na ktorom ľudia obchodujú s dvomi statkami. Robí to nasledujúcim spôsobom, vyvoláva ceny statkov, za ktoré si Robinson a Piatok môžu kúpiť ľubovoľné množstvo statkov. Pýta sa ich: Čo budete robiť s týmito cenami?

V našom modeli ekonomiky s konkurenčným trhom predpokladáme, že Robinson a Piatok budú brať tieto vyvolané ceny za fixné a nemenné, neovplyvnené ich činmi. (To je evidentne v skutočnosti nemožné, keď hovoríme len o dvoch spotrebiteľoch, ale náš model sa snažíme vytvárať tak, aby sa mohol rozšíriť na prípady, keď je spotrebiteľov viac, kde tento predpoklad konkurenčného správania bude prijateľnejší.) Teraz sa Robinson a Piatok dozvedeli od dražiteľa dvojicu cien  $(p_x, p_y)$  a očakáva sa od nich, že dražiteľovi povedia množstvá statkov, ktoré chcú za danú cenu spotrebovať.

Naši obchodníci nemajú žiadne peniaze uložené v banke alebo vo vrecku, jediné čo majú sú ich počiatočné zväzky statkov. Robinson a Piatok počuli vyhlásené ceny a vedľa, s akými počiatočnými množstvami začínajú. Ak by Robinson začínal s 10 bochníkmi chleba a rozhodol by sa, že ich chce spotrebovať 12, musel by ísť za dražiteľom a vymeniť časť jeho rumu za ďalšie 2 bochníky chleba. Aké sú teda jeho *rozpočtové obmedzenia*? Môžeme si ich znázorniť na základe tejto výmeny, bude to teda hodnota získaného chleba = hodnote obetovaného rumu alebo

$$(x_R - x_R^0)p_x = (y_R^0 - y_R)p_y.$$

Po úprave

$$p_x x_R + p_y y_R = p_x x_R^0 + p_y y_R^0,$$

čo by sme mohli interpretovať *hodnota želaných spotrebných statkov = hodnota počiatočného množstva statkov*. Teda by sme mohli povedať, že v modeli bez peňažného príjmu, zastupuje rozpočtové obmedzenie<sup>4</sup> hodnota počiatočného množstva statkov.

Teraz do hry vstupuje znova dražiteľ a vyvolá nové ceny statkov, Robinsona a Piatka sa opäť opýta: Čo budete robiť s týmito cenami? Robinson samozrejme bude chcieť maximalizovať svoj úžitok, alebo inak povedané, dosiahnuť čo najvyššiu indifferenčnú krivku vzhľadom k jeho rozpočtovým obmedzeniam. To znamená, že bude chcieť maximalizovať

$$u_R(x_R, y_R)$$

vzhľadom k obmedzeniu

$$p_x x_R + p(y) y_R = p_x x_R^0 + p_y y_R^0.$$

Premýšľajme o rozpočtovej priamke, ktorá plynie z rozpočtového obmedzenia. Poznamenajme, že absolútna hodnota sklonu rozpočtovej priamky je  $p_x/p_y$  a tiež, že rozpočtová priamka musí prechádzať počiatočným zväzkom  $(x_R^0, y_R^0)$ .

Robinson povie dražiteľovi, že na základe vyvolaných cien, chce spotrebovať nejaké množstvo statkov, označme ho  $A_R$ . Piatok spraví podobné rozhodnutie a nakoniec povie dražiteľovi, že množstvo, ktoré chce spotrebovať je  $B_P$ .

V Grafe 7 je nakreslený výsledok. Nachádza sa tam jedna rozpočtová priamka, ktorá prechádza bodom  $W$ , ktorý predstavuje počiatočnú alokáciu. Nemáme dve rozpočtové priamky, jednu pre Robinsona a druhú pre Piatka. Po prvé preto, že obe by museli prechádzať bodom  $W$ , pretože počiatočná alokácia je pre každého z nich v tomto bode. A po druhé, dražiteľ vyvolal iba jednu dvojicu cien pre obidvoch, teda máme iba jeden pomer cien  $p_x/p_y$ , čo predstavuje iba jediný možný sklon. Z čoho plynie, že rozpočtové priamky sú totožné. V grafe sú ďalej znázornené zväzky statkov, ktoré chcú Robinson a Piatok spotrebovať,  $A_R$  pre Robinsona a  $B_P$  pre Piatka.

Z grafu môžeme vyčítať ďalšie zistenia, vidíme, že sme v situácii, v ktorej ponuka chleba prevyšuje dopyt po ňom a dopytom po rume prevyšujúcim jeho ponuku. Rozpočtová priamka prechádza cez  $W$ , ale je príliš strmá, zobrazuje požadovanú spotrebu Robinsona a Piatka ako dva odlišné body. Môžeme vidieť, že dražiteľ by mal vyvolať nové ceny s nižšou pomernou cenou pre statok  $x$ ,  $p_x/p_y$ .

Teraz je čas, keď bude konať dražiteľ. Sám seba sa pýta: Je možné, aby Robinson spotreboval  $A_R$  a Piatok  $B_P$ ? My už vidíme odpoveď Nie, pretože  $(A_R, B_P)$  nie je prípustná alokácia. Súčtom jednotlivých statkov nedostaneme celkové množstvá  $X, Y$ . Keď si to rozoberieme, množstvo chleba, ktoré chcú Robinson a Piatok spotrebovať je nižšie ako množstvo chleba, ktoré celkovo máme, a množstvo rumu, ktoré chcú spotrebovať naopak prevyšuje naše celkové dostupné množstvo rumu. Takže  $(A_R, B_P)$  nie je možná kombinácia.

<sup>4</sup>Rozpočtové obmedzenie v modeloch s príjmom je príjem spotrebiteľa  $I = p_x X + p_y Y$  ( $X$  a  $Y$  ceny statkov,  $p$  ich ceny)

Dražiteľ túto situáciu vidí a povie si: Ceny  $(p_x, p_y)$ , ktoré som vyhlásil, musím zmeniť. Musím znížiť pomernú cenu chleba  $p_x/p_y$ . Takže povie Robinsonovi a Piatkovi, že s vyhlásenými cenami sa obchodovať nebude. A namiesto nich vyhlási nové ceny, pre ktoré pomer  $p_x/p_y$  bude mierne nižší ako to bolo u predchádzajúcich cien. (Napríklad, ak boli pôvodné ceny (2, 1), vyhlási nové ceny (1.75, 1).) Ďalej obchodujúcim povie, aby mu povedali nové množstvá, ktoré chcú spotrebovať pri nových cenách, Robinson a Piatok si tieto množstvá premyslia a potom svoje rozhodnutia znova oznámia dražiteľovi.

Dražiteľ spolu s obchodujúcimi pokračuje v procese tvorby ceny a požadovaného množstva, ktoré by fungovalo. To znamená, že tento proces pokračuje, až kým Robinson a Piatok nepovedia dražiteľovi, že na základe ním vyhlásených cien  $(p_x^*, p_y^*)$ , chcú spotrebovať zväzky statkov  $A_R^*$  a  $B_P^*$  a tieto zväzky nebudú v súčtoch zhodné s celkovými množstvami chleba a rumu. Teda kým nebudú prípustnou alokáciou, čo znamená, že v Edgeworthovom krabicovom diagrame budú predstavovať jediný bod. Inak povedané, pre dvojicu zväzkov  $A_R^*$  a  $B_P^*$  bude pre jednotlivé statky platiť *Celkový dopyt = Celková ponuka*.

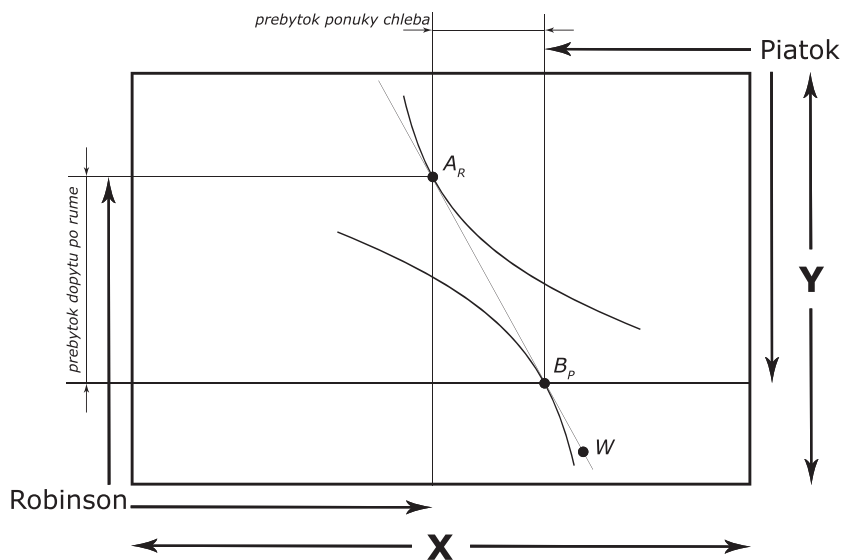
Konečný výsledok tohto procesu sa nazýva konkurenčná rovnováha alebo tiež Walrasova rovnováha. Cenový vektor, ktorý dražiteľ vyvolá ako posledný  $(p_x^*, p_y^*)$ , sa nazýva cenový vektor konkurenčnej rovnováhy. Výsledkom tohto procesu je cenový vektor konkurenčnej rovnováhy a dvojica spotrebných zväzkov  $A_R^*$  a  $B_P^*$  takých, že  $A_R^*$  maximalizuje Robinsonov úžitok vzhľadom k jeho rozpočtovým obmedzeniam pri rovnovážnych cenách a  $B_P^*$  maximalizuje Piatkov úžitok vzhľadom k jeho rozpočtovým obmedzeniam pri rovnovážnych cenách a zároveň ešte musí platiť, že  $(A_R^*, B_P^*)$  je prípustná alokácia, čo znamená, že suma jednotlivých statkov sa rovná jednotlivým celkovým dostupným množstvám. Potom dvojicu  $(A_R^*, B_P^*)$  nazývame *konkurenčná rovnovážna alokácia*.

Graf 8 zobrazuje stav konkurenčnej rovnováhy. Všimnime si, že zásadný rozdiel medzi Grafom 7 a 8 je v tom, že v Grafe 7 požadované zväzky predstavujú dva rôzne body, čo znamená, že nie sú prípustnou alokáciou. Na tomto grafe vidíme prebytočnú ponuku chleba a prebytočný dopyt po rume, to nám napovedá, že by sa mala pomerná cena chleba  $p_x/p_y$  znížiť, z čoho plynie, že sklon rozpočtovej krivky sa zmenší (bude menej strmá, bude mať menšiu smernicu). Na Grafe 8 máme rozpočtovú priamku s menším sklonom, tiež tam vidíme, že dvojica zväzkov  $A_R^*$  a  $B_P^*$  tvorí jediný bod, teda táto dvojica tvorí prípustnú alokáciu. Ponuka sa rovná dopytu pre každý statok. Môžeme povedať, že na Grafe 8 vidíme Walrasovu rovnováhu.

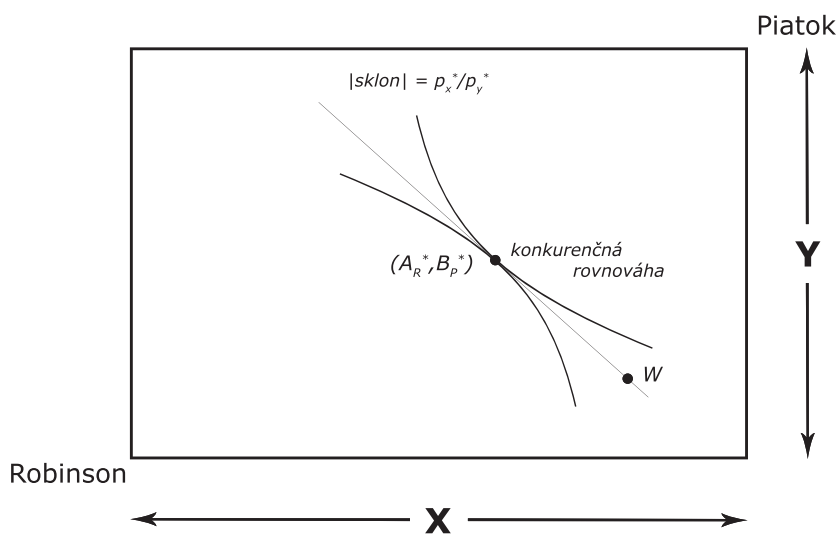
Na záver tohto paragrafu ešte zhrňme dva dôležité fakty o  $(A_R^*, B_P^*)$  na Grafe 8. Po prvé, alokácia konkurenčnej rovnováhy je bod dotyku k obom diferencným krivkám, to znamená, že leží na kontraktačnej krivke a teda je paretoovsky optimálna. A po druhé, pohľad na Graf 8 a Graf 6 zároveň nás presvedčí, že alokácia konkurenčnej rovnováhy leží v jadre.

## 5. ZÁKLADNÉ TEORÉMY EKONÓMIE BLAHOBYTU

Už od čias *Adama Smitha* (1723–1790) a jeho knihy *Bohatstvo národov* (1776) sa mnoho ekonómov zaoberalo vzťahmi medzi efektivitou a voľným obchodom. Smith



Graf 7



Graf 8

bol tvorcom nových teórií v dobe, v ktorej žil, avšak formálny rozbor jeho teórií prebehol až neskôr, na prelome 19. a 20. storočia. Výsledky Smithových teórií dnes poznáme pod názvom *prvý* a *druhý základný teorém ekonómie blahobytu*. Graf 8 predstavuje prvý základný teorém v našom jednoduchom modeli výmennej ekonómie. Ukazuje, že alokácia konkurenčnej rovnováhy je paretoovsky optimálna. Tento

výsledok môžeme jednoducho rozšíriť na modely s väčším počtom statkov a spotrebiteľov, ako aj na modely s produkciou. Tento teorém si na začiatok vyžaduje niekoľko predpokladov. Najskôr musíme predpokladať, že existujú trhy a tržné ceny pre všetky statky, ďalej, že všetci ľudia vystupujúci na tomto trhu sú *konkurenčnými cenovými príjemcami*, ďalej, že každého individuálny úžitok závisí iba na jeho vlastnom spotrebnom zväzku statkov, a nie na zväzkoch iných spotrebiteľov. (Podobne by sme uvažovali predpoklady u firiem. Predpokladali by sme, že všetky firmy sú konkurenčnými cenovými príjemcami, a že produkčná funkcia každej firmy závisí iba na jej vlastných vstupoch a výstupoch.) Teraz môžeme formulovať prvý základný teorém pre všeobecnú výmennú ekonomiku.

### Prvý základný teorém ekonómie blahobytu

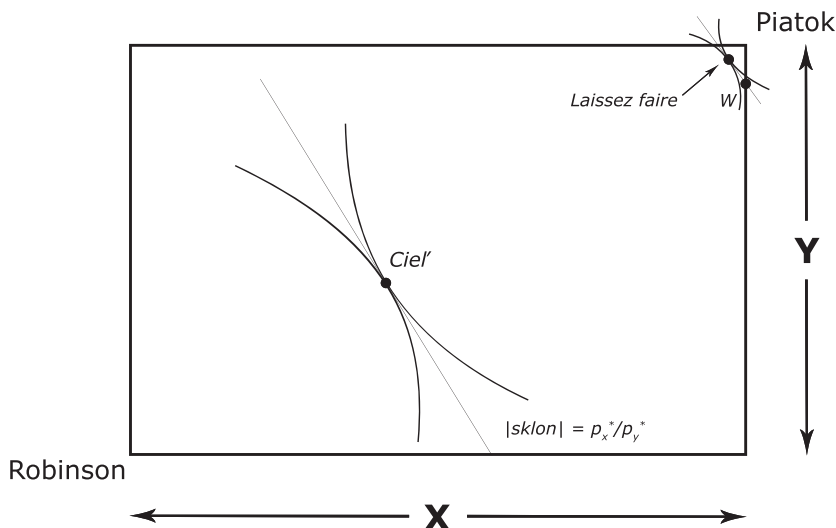
Predpokladajme, že existujú trhy a tržné ceny pre všetky statky, že všetci ľudia sú konkurenční cenový príjemcovia, a že úžitok každej osoby závisí iba na jej vlastnom zväzku statkov. Potom každá konkurenčne rovnovážna alokácia je paretoovsky optimálna (teda leží v jadre).

Toto je veľmi dôležitý výsledok, pretože poukazuje na to, že spoločnosť, ktorá sa spolieha na konkurenčné trhy dosiahne Paretovo optimum. Všimnime si, že väčšina alokácií v našom modeli výmennej ekonomiky je paretoovsky neoptimálna, takže nie je jednoduché dosiahnuť práve takú alokáciu, ktorá by optimálna bola, a fakt, že na túto alokáciu sa spoločnosť dostane len vďaka tržnému mechanizmu je pôsobivá. Navyše, tržný mechanizmus je pomerne lacný (teoreticky vyžaduje len dražiteľa, v praxi si ho môžeme predstaviť ako eBay). Nevyžaduje, aby pomyselná hlava trhu poznala úžitkovú funkciu každého účastníka a na základe toho rozhodovala o rozdelení statkov. Tržný mechanizmus vyžaduje len verejne známe ceny, ktoré sa menia v závislosti na prebytku ponuky alebo dopytu. V skratke, mechanizmus konkurenčného trhu je pomerne lacný, veľmi nenápadný a pozoruhodne efektívny. Toto nám pomáha pochopiť prvý základný teorém ekonómie blahobytu.

Avšak, prvý základný teorém má jeden nedostatok, a to ten, že konkurenčne rovnovážna alokácia značne závisí na umiestnení počiatočnej alokácie. Inými slovami, ak na začiatku prideliť Robinsonovi väčšinu chleba a rumu, skončíme v rovnovážnej alokácii, ktorá bude dávať Robinsonovi stále väčšinu chleba a rumu. Alebo všeobecne, ak je v spoločnosti veľmi nerovnomerné rozloženie schopností a počiatočných množstiev rôznych statkov, v konečnej paretoovsky optimálnej rovnovážnej alokácii bude toto rozloženie stále nerovnomerné. Čo s tým môžeme urobiť? Tu nám pomôže druhý základný teorém.

Druhý základný teorém ekonómie blahobytu užíva všetky predpoklady prvého teorému a pridávame ešte jeden ďalší, a to *konvexnosť*. V modeli výmennej ekonomiky budeme predpokladať, že každý obchodujúci má konvexnú indifferenčnú krivku. Povedzme, že počiatočná alokácia statkov v spoločnosti je veľmi nespravodlivá, a teda aj na nej založená rovnováha bude veľmi nespravodlivá. Predstavme si, že spoločnosť sa rozhodla, že existuje iná, spravodlivejšia paretoovsky optimálna alokácia, ktorú by chceli dosiahnuť. Spoločnosť nechce túto spravodlivú alokáciu dosiahnuť nariadením, ale chce na to využiť tržný mechanizmus. Existuje takýto mechanizmus? Odpoveď znie Áno.

Graf 9 vysvetľuje tento teorém. Počiatočná alokácia  $W$  priraduje všetok chlieb a väčšinu rumu Robinsonovi. S touto počiatočnou alokáciou by sme sa pomocou walrasiánskeho mechanizmu dostali do rovnovážneho stavu, ktorý priraduje Robinsonovi väčšinou chleba aj rumu. Táto alokácia je označená *Laissez Faire*<sup>5</sup> (z francúzskeho *Laissez faire*, čo v preklade znamená nechať byť), avšak je veľmi nespravodlivá. Oveľa spravodlivejšou možnosťou by bola alokácia označená *Ciel'*.



Graf 9

Je možné, aby sme jednoduchými zmenami v mechanizme dosiahli túto alokáciu? Okrem toho, aby bol *Ciel'* paretoovsky optimálny, musí byť tiež bodom dotyku indifferenčných kriviek obchodníkov. Ak je bodom dotyku, môžeme nakresliť dotyčnicu, ako na Grafe 9. Zo sklonu dotyčnice môžeme vidieť, aká je pomerná cena  $(p_x^*)/(p_y^*)$ . Jednu z cien si ľubovoľne označíme 1a potom z pomernej ceny dopočítame druhú cenu. Nakoniec dostaneme požadovanú dvojicu cien  $(p_x^*, p_y^*)$ .

Teraz do nášho modelu vstupuje vláda, ktorá zavedie *paušálnu (jednorazovú) daň a dotácie*. Tie sú uvalené na Robinsona a Piatka. Sú paušálne, pretože nezávisia na množstve statkov, ktoré chcú spotrebovať. Daň (peniaze, ktoré berie vláda od ľudí) bude reprezentovaná záporným číslom a dotácie (peniaze, ktoré vláda dáva ľuďom) budú reprezentované kladným číslom. Robinsonove dane a dotácie označíme  $T_R$ , analogicky Piatkove označíme  $T_P$ . Vláda nevytvára ani neničí majetok, takže predpokladáme, že

$$T_R + T_P = 0,$$

<sup>5</sup>Z kréda fyziokratov *Laissez faire, laissez passer* (nechať byť, nechýť plynúť). Predstavovalo výzvu vládám, aby nezasahovali do ekonomiky. V slobodnom a neregulovanom tržnom mechanizme videli najspravodlivejšiu cestu k efektívnym alokáciám.

čo znamená, že dane jednej strany sú okamžite posielané druhej strane, a naopak. Teraz vláda pošle Robinsonovi správu: Daj  $T_R$  na pravú stranu svojho rozpočtového obmedzenia, a počítaj s cenami  $(p_x^*, p_y^*)$ . Ak je  $T_R$  záporné číslo, je to pre teba zlá správa. Prišiel si o peniaze a musíš nám ich poslať. Ak je  $T_R$  kladné číslo, peniaze si získal, zašleme ti ich ešte dnes. Piatkovi bola poslaná podobná správa. Rozpočtové obmedzenia sa pre oboch obchodníkov zmenili nasledujúcim spôsobom:

$$p_x^* x_R + p_y^* y_R = p_x^* x_R^0 + p_y^* y_R^0 + T_R$$

a

$$p_x^* x_P + p_y^* y_P = p_x^* x_P^0 + p_y^* y_P^0 + T_P.$$

Robinson a Piatok si teraz zvolia svoje požadované zväzky statkov v závislosti na rozpočtových obmedzeniach. Za predpokladu, že vláda stanoví dane a dotácie v správnej výške, obchodovanie skončí v požadovanom paretoovsky optimálnom bode *Cieľ*.

V skratke, daňami a dotáciami v správnej výške, spoločnosť môže dosiahnuť akúkoľvek paretoovsky optimálnu alokáciu bez toho, aby sme sa zriekli tržného mechanizmu. Druhý teorém ekonómie blahobytu hovorí, že všetko toto je možné. Tento teorém teraz môžeme definovať formálne.

### Druhý základný teorém ekonómie blahobytu

Predpokladajme, že existujú trhy pre všetky statky, že všetci ľudia sú prijímatelia cien, a že úžitok každej osoby závisí len na jej vlastnom zväzku statkov. Ďalej predpokladajme, že indifferenčné krivky obchodníkov sú konvexné. Povedzme, že *Cieľ* je paretoovsky optimálna alokácia.

Potom existujú konkurenčne rovnovážny cenový vektor a vektor paušálnych daní a dotácií s nulovým súčtom zložiek také, že ak rozpočtové obmedzenia s cenami tohto cenového vektoru pozmeníme o dane a dotácie, tak dosiahneme, že *Cieľ* je výslednou konkurenčne rovnovážnou alokáciou.

Voľne povedané, prvý základný teorém hovorí, že akákoľvek konkurenčná rovnováha je paretoovsky optimálna a druhý teorém hovorí, že akýkoľvek paretoovsky optimálny bod je konkurenčne rovnovážny správnou modifikáciou rozpočtových obmedzení. Druhý teorém má doplňujúcu podmienku (konvexnosť) a je veľmi závislý na zmene rozpočtových obmedzení.



## KARETNÍ HRA KABRŇÁCI

JAN STOPKA A JINDŘICH DVOŘÁK

**ABSTRAKT.** Kabrňáci jsou moderní karetní hra s matematickou tematikou. Článek vás postupně provede obsahem hry a jejím cílem. Stručně shrneme pravidla a princip hry a nakonec se podíváme také na historii vzniku této karetní hry a její současný vývoj.

### 1. CO JSOU KABRŇÁCI

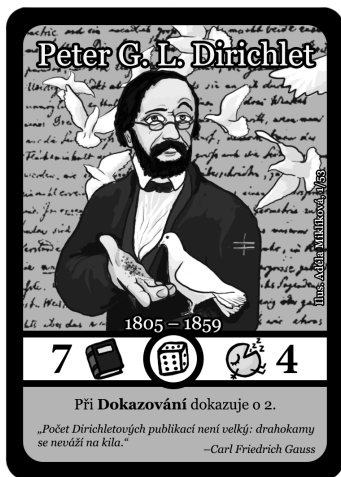
Kabrňáci jsou moderní karetní hra s matematickou tematikou, kterou vytvořili organizátoři Brněnského korespondenčního semináře (BRKOS) Jan Stopka, Tomáš Moutelík a Adéla Miklíková za pomoci některých dalších organizátorů BRKOSu. Každý hráč ve hře představuje jednoho ze slavných matematiků historie a v této roli je jeho cílem dokázat dostatek matematických vět. Dokazování se děje prostřednictvím přidávání žetonů na vyložené karty jednotlivých vět. Ale pozor, údel matematika není tak jednoduchý a hráči si musí dát pozor, aby nehráli příliš nudně, jinak se jim stane, že usnou nudou a prohrají hru.

Kořeny hry vychází z tradice sběratelských karetních her jako *Magic: The Gathering* nebo počítačový *Hearthstone*. Každý hráč si proto před hrou volí matematika, za kterého bude hrát, a sestavuje pro něj balíček hracích karet. Na rozdíl od sběratelských karetních her ale v Kabrňácích hráči nemusí nic sbírat – k dostání je kompletní sada karet. Ta obsahuje šest různých matematiků, mimo jiné velikány jako Eukleidés či Isaac Newton, a dále celkem čtyřicet sedm unikátních hracích karet. Počet karet v sestaveném hracím balíčku není nijak omezen, ba naopak mohou vznikat funkční balíčky o pěti kartách, ale lze hrát i s kompletní sadou čtyřiceti sedmi karet.

Hrací karty jsou čtyř typů: věty, události, pomůcky a definice. Věty jsou nejdůležitější karty balíčku, protože jejich vyložením a následným dokázáním se hráči posunují k vítězství. Události jsou karty s jednorázovým efektem, které tak či onak pomáhají hráči, který je zahrál, nebo naopak škodí ostatním. Pomůcky může hráč vyložit z ruky a poté je v každém tahu použít a získat tak malý bonus. Poslední typ jsou definice. To jsou karty s obvykle pasivním efektem, který platí pro všechny hráče a zásadně mění pravidla hry.

### 2. JAK SE TO HRAJE

Jakmile mají hráči sestavené své hrací balíčky, mohou se pustit do hry. Z vybraných karet utvoří dobírací balíčky, oba si do začátku vezmou čtyři karty a hra může začít!



Hráči se střídají na tahu, který se sestává ze tří fází. V první fázi mohou hráči vyložit definici, mají-li nějakou v ruce. V druhé fázi hrají akce.

Hráči mají v každém tahu tři akce, které mohou libovolně využít k braní karet z dobíracího balíčku, hraní karet z ruky, používání pomůcek a dokazování vět. Při dokazování věty hráč umístí žeton důkazu na příslušnou větu a jakmile je na ní tolik žetonů důkazu, kolik je její obtížnost zobrazená v levém horním rohu karty, je věta dokázaná. Každý matematik pak k vítězství potřebuje dokázat tolik vět, kolik je jeho ctížádostivost (číslo od čtyř do sedmi).

Po odehrání všech akcí následuje poslední fáze – konec tahu. Zde přichází do hry drobný prvek náhody, protože hráč na konci tahu musí tzv. pálit. To znamená, že vrchní karta jeho dobíracího balíčku je odložena na odkládací balíček. Když hráči dojdou karty v dobíracím balíčku, vytvoří nový balíček zamícháním odkládacího. Přitom však získá určitý počet žetonů nudy. Po prvním zamíchání jeden, po druhém dva žetony atd. Nudu může hráč obdržet nebo se jí naopak zbavit také skrze efekty některých karet. A jakmile hráč získá tolik žetonů nudy, kolik je jeho trpělivost (číslo od tří do pěti), usíná jeho matematik nudou a hráč hru prohrává.

Až na několik detailů jsou tohle celá pravidla hry, i přes matematickou tematiku tak nejde o nic náročného. Navíc jde o velmi svižnou hru – jedna partie trvá kolem dvaceti minut.

### 3. KDE SE VZALI KABRŇÁCI

Možná si kladete otázku, kde jsme k takovému nápadu přišli. Zcela jistě bychom neobětovali stovky hodin času, pokud bychom neměli velkou motivaci a neoplývali přesvědčením, že vynaložená práce bude stát za to. Původní myšlenka byla vytvořit sběratelskou karetní hru s matematickou tematikou, jejíž karty bychom mohli rozdávat jako odměnu řešitelům BRKOSu.

Tenhle nápad se objevil před asi dvěma lety na srazu organizátorů korespondenčních seminářů a od té doby zůstal asi na rok v šuplíku. Pak jsme ho ale oživil

a obzvláště vzájemným popoháněním jsme překonali první velké překážky, vytvořili rámcový koncept hry a první provizorní karty ve formě malých popsaných papírků. S papírky jsme pak hráli a hráli a hráli, neustále přidávali nové a obměňovali již vytvořené, vylepšovali, ladili a dokončovali hru tak dlouho, dokud jsme s ní nebyli spokojeni.

Souběžně s tím pracovala Adéla na ilustracích ke kartám. Každým dnem se objevovaly krásné obrázky humorně ztvárňující matematické pojmy i každodenní matematikovy reálie. Obzvláště povedené ilustrace jsme navíc zveřejnili na Facebooku, abychom se s projektem mohli pochlubit našim známým. A toto počínání nezůstalo bez odezvy. Čím dál více lidí nám psalo, jaká je škoda, že už nemohou řešit BRKOS, aby také mohli Kabrňáky sbírat. My jsme se rozhodli vyjít jim vstříc a nabídli jsme kompletní balíčky za pořizovací cenu také našim známým a přátelům. Tehdy jsme netušili, že známých a přátel, kteří Kabrňáky chtějí se najde celá stovka.

#### 4. SOUČASNOST KABRŇÁKŮ

Od chvíle prvního vydání jsme na Kabrňácích neustále pracovali, přemýšleli nad novými sadami karet, propagovali Kabrňáky mezi další a další lidi, vytvořili jsme webové stránky a na jaře jsme také přepracovali základní sadu, změnili efekty několika karet, pozměnili pravidla hry a vytvořili přibližně deset nových ilustrací. Na konci dubna jsme měli k dispozici už druhé vydání hry, tentokrát k dostání také s tištěnou brožurkou pravidel, přiloženými žetony a referenční kartou. V této podobě můžete Kabrňáky získat objednááním na našich webových stránkách <http://hrakabrnaci.cz/> nebo na <http://facebook.com/hrakabrnaci>.

Jan Stopka, *e-mail*: [honza.stopka@gmail.com](mailto:honza.stopka@gmail.com)

Jindřich Dvořák, *e-mail*: [jsemoptimista@gmail.com](mailto:jsemoptimista@gmail.com)

