SOUSTAVY JEDNOTEK CGS A SI V PŘÍPADĚ ELEKTROMAGNETICKÉHO POLE

ALEXANDER ŽENÍŠEK

ABSTRAKT. Tento článek byl napsán ze čtyř důvodů: (1) Málokdo ví, že mezi jednotkami cgs a SI je v případě elektromagnetického pole velký rozdíl. (2) Všechny známé učebnice teorie relativity jsou napsány v cgs. (3) Chcemeli v teorii relativity užívat soustavu SI, na některých místech se nevyhneme užití soustavy cgs (jako např. při doslovném překladu Einsteinových textů). (4) Moderní soustava CGS je pružnější než soustava SI.

Elektrická intenzita $\mathbf{E}$ a magnetická intenzita $\mathbf{H}$ elektromagnetického pole splňují v soustavě cgs tyto Maxwellovy-Lorentzovy rovnice[1]

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{J}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\varrho, \tag{2}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \tag{3}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \tag{4}$$

kde c je rychlost světla ve vakuu, ϱ hustota elektrických nábojů a $\mathbf{J} = \varrho\mathbf{u}$ proudová hustota, přičemž $\mathbf{u}$ je rychlost elektrických nábojů.

V cgs mají transformační vztahy pro vektory elektromagnetického pole tvar

$$E'_\xi = E_x,\;\; E'_\eta = \gamma\big(E_y - \beta H_z\big),\;\; E'_\zeta = \gamma\big(E_z + \beta H_y\big), \tag{$*$}$$

$$H'_\xi = H_x,\;\; H'_\eta = \gamma\big(H_y + \beta E_z\big),\;\; H'_\zeta = \gamma\big(H_z - \beta E_y\big), \tag{$**$}$$

kde

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \text{a} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

přičemž v je relativní rychlost inerciálních kartézských pravotočivých souřadnicových soustav S a S', které jsou zvoleny tak, že osy x a ξ leží na téže přímce a $y||\eta$, $z||\zeta$. (Pro určitost poznamenáváme, že počátek O' soustavy S' se pohybuje vůči S rychlostí $(v, 0, 0)$.)

Platí $[\beta] = 1$, takže aby rovnice $(*)$, $(**)$ měly smysl, musí v nich mít vektory $\mathbf{E}$ a $\mathbf{H}$ stejný rozměr

$$[\mathbf{H}] = [\mathbf{E}]. \tag{5}$$

---

[1] V soustavě SI mají tvar (7)–(10). Einstein se vyjadřoval v soustavě cgs.

V důkazu (5) napřed předpokládejme, že $\mathbf{J} = \mathbf{0}$. Potom z (1) plyne

$$[\operatorname{rot}\mathbf{H}] = \left[\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right] \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{\mathrm{cm}}[\mathbf{H}] = \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{cm}}\frac{1}{\mathrm{s}}[\mathbf{E}] \quad\Rightarrow\quad [\mathbf{H}] = [\mathbf{E}]. \quad \square$$

V moderní soustavě CGS je jednotkou síly (stejně jako v cgs) $1\,\mathrm{dyn}{=}1\,\mathrm{g\,cm\,s^{-2}}$. Protože chceme, aby Coulombův zákon měl tvar

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{r^2}, \tag{6}$$

definujeme v CGS jednotku elektrického náboje (budeme ji značit $1\,\mathrm{sC} \equiv 1\,\mathrm{statC}$, kde C je zkratka pro coulomb) vztahem[2] $(1\,\mathrm{sC})^2{=}1\,\mathrm{dyn}\,(\mathrm{cm})^2$. Po odmocnění (viz [2])

$$1\,\mathrm{sC} = 1\,\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{cm}^{3/2}\,\mathrm{s}^{-1}.$$

Z Coulombova zákona (6) vyplývá pro rozměr intenzity elektrického pole

$$[\mathbf{E}] = \left[\frac{F}{Q_1}\right] = \frac{\mathrm{g}^{1/2}\mathrm{cm}^{3/2}\mathrm{s}^{-1}}{\mathrm{cm}^2} = \mathrm{g}^{1/2}\mathrm{cm}^{-1/2}\mathrm{s}^{-1}.$$

Z (2) plyne stejný výsledek:

$$[\operatorname{div}\mathbf{E}] = [\rho] \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{\mathrm{cm}}[\mathbf{E}] = \frac{[Q]}{\mathrm{cm}^3} \quad\Rightarrow\quad [\mathbf{E}] = \frac{[Q]}{\mathrm{cm}^2} = \mathrm{g}^{1/2}\mathrm{cm}^{-1/2}\mathrm{s}^{-1}.$$

Obraťme ještě pozornost na rovnici (1), když $\mathbf{J} \neq \mathbf{0}$. Platí

$$\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{cm}^{-3/2}\,\mathrm{s}^{-1} = \frac{\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{cm}^{3/2}\,\mathrm{s}^{-1}}{\mathrm{cm}^3} = \frac{[q]}{\mathrm{cm}^3} = \frac{[\mathbf{u}][\rho]}{[c]} = \left[\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}\right] = [\operatorname{rot}\mathbf{H}] = \left[\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right],$$

což je ve shodě s rovnicí (1).

V SI mají Maxwellovy–Lorentzovy rovnice pro vakuum tvar

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} - \varepsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J}, \tag{7}$$

$$\varepsilon_0 \operatorname{div}\mathbf{E} = \varrho, \tag{8}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} + \mu_0\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \tag{9}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \tag{10}$$

kde $\varepsilon_0 = 8{,}854\,16\cdot 10^{-12}\ \mathrm{F\,m^{-1}}$ je permitivita vakua a $\mu_0 = 1{,}256\,65\cdot 10^{-6}\ \mathrm{H\,m^{-1}}$ permeabilita vakua. Zde mají transformační vztahy pro vektory elektromagnetického pole tvar podle [3], vztahy (10.10), (10.11)

$$E'_\xi = E_x,\ \ E'_\eta = \gamma\left(E_y - \beta H_z\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\right),\ \ E'_\zeta = \gamma\left(E_z + \beta H_y\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\right), \tag{11}$$

$$H'_\xi = H_x,\ \ H'_\eta = \gamma\left(H_y + \beta E_z\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\right),\ \ H'_\zeta = \gamma\left(H_z - \beta E_y\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\right). \tag{12}$$

kde $[\gamma] = [\beta] = 1$ a dále podle [1], Tab. 7.03 na str. 555–559

$$[\mu_0] = \mathrm{m\,kg\,s^{-2}\,A^{-2}} = \frac{J}{A^2}, \quad [\varepsilon_0] = \mathrm{m^{-3}\,kg^{-1}\,s^4\,A^2} \tag{13}$$

[2]Slovy: Dva náboje o velikosti $1\,\mathrm{sC}$, jsou-li vzdáleny od sebe $1\,\mathrm{cm}$, působí na sebe silou $1\,\mathrm{dyn}$.

takže

$$\left[\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\right] = \mathrm{m}^2\,\mathrm{kg}\,\mathrm{s}^{-3}\,\mathrm{A}^{-2} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}\,\mathrm{A}^2}, \tag{14}$$

kde $\mathrm{J} = \mathrm{m}^2\,\mathrm{kg}\,\mathrm{s}^{-2}$ = joule a A = ampér. V SI má Coulombův zákon tvar

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\,q}{r^2}. \tag{15}$$

Podle (15) pro velikost E intenzity $\mathbf{E}$ bodového náboje Q platí

$$E = \frac{F}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

takže

$$[\mathbf{E}] = \mathrm{m}^3\,\mathrm{kg}\,\mathrm{s}^{-4}\,\mathrm{A}^{-2}\,\frac{\mathrm{s}\,\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{m}\,\mathrm{kg}\,\mathrm{s}^{-3}\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{m}^{-1}\mathrm{V} \tag{16}$$

kde V = volt. Podle (12), (16) a (14)

$$[\mathbf{H}] = [\mathbf{E}]\left[\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\right] = \mathrm{m}\,\mathrm{kg}\,\mathrm{s}^{-3}\mathrm{A}^{-1}\,\frac{\mathrm{s}\,\mathrm{A}^2}{\mathrm{J}} = \mathrm{m}^{-1}\mathrm{A}.$$

Magnetické pole o intenzitě $\mathbf{H}$ je charakterizováno silovým působením na pohybující se elektrický náboj q podle vztahu

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

kde $\mathbf{v}$ je rychlost náboje a $\mathbf{B}$ vektor magnetické indukce související s $\mathbf{H}$ vztahem $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = \mu_r\mu_0\mathbf{H}$.

Poznámka. V moderní CGS jsou pouze mechanické jednotky; proto jsou elektromagnetické jednotky definovány pomocí mocnin $\mathrm{g}^p\mathrm{cm}^q$ s necelými exponenty p, q.

Spočteme ještě kolik sC odpovídá jednomu coulombu. Dříve však uvedeme moderní MKS (krátce mMKS). Podle Coulombova zákona (6) platí

$$\text{newton} \cdot \mathrm{m}^2 = [Q]^2_{\mathrm{mMKS}}.$$

Odtud

$$[Q]_{\mathrm{mMKS}} = \mathrm{kg}^{1/2}\mathrm{m}^{3/2}\mathrm{s}^{-1}.$$

Podobně jako 1 sC definujeme

$$1\,\mathrm{miC} = \mathrm{kg}^{1/2}\mathrm{m}^{3/2}\mathrm{s}^{-1}. \tag{17}$$

Upravme Coulombův zákon v SI na tvar

$$F = \frac{1}{r^2}\left(\frac{Q_1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}\right)\left(\frac{Q_2}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}\right). \tag{18}$$

Porovnáním (18) s (6) dostáváme

$$q = \frac{Q}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}, \tag{19}$$

kde q je v soustavě mMKS a za Q dosazujeme hodnotu v coulombech. Přesvědčíme se o tom: Podle $(13)_2$ a $\mathrm{C} = \mathrm{A}\cdot\mathrm{s}$ platí

$$[q] = \frac{1}{\sqrt{[\varepsilon_0]}}[Q]_{\mathrm{SI}} = \{\mathrm{kg}^{1/2}\mathrm{m}^{3/2}\mathrm{s}^{-1}(\mathrm{s}^{-1}\mathrm{A}^{-1})\}\mathrm{A}\cdot\mathrm{s} = \mathrm{kg}^{1/2}\mathrm{m}^{3/2}\mathrm{s}^{-1}. \qquad (20)$$

Pravé strany (17) a (20) jsou totožné, což jsme potřebovali dokázat.

Protože

$$\varepsilon_0 = 8,85\cdot 10^{-12}\,\mathrm{F\,m}^{-1} = 8,85\cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}^{-3}\,\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^4\mathrm{A}^2,$$

platí podle (19), když položíme $Q = 1\,\mathrm{C}$,

$$q_{\mathrm{mMKS}} \doteq \frac{1}{6\sqrt{\pi}}\cdot 10^6\,\mathrm{miC}. \qquad (21)$$

Podle (6)

$$1\,\mathrm{miC} = (1000\,\mathrm{g})^{1/2}\,1000\,\mathrm{cm}^{3/2}\,\mathrm{s}^{-1} \doteq \pi\cdot 10^4\,\mathrm{sC},$$

takže podle (21)

$$1\,\mathrm{C} \doteq \frac{\sqrt{\pi}}{6}\cdot 10^{10}\,\mathrm{sC} \doteq 3\cdot 10^9\,\mathrm{sC}.$$

Reference

[1] B. Klimeš, J. Kracík, A. Ženíšek: *Základy fyziky II*, Academia, Praha, 1972.
[2] D. Nedbal: `http://www-ucjf.troja.mff.cuni.cz/~nedbal/cr`.
[3] A. Ženíšek: *Relativita do kapsy*, připraveno k tisku.

Alexander Ženíšek, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69, Brno,
e-mail: `zenisek@fme.vutbr.cz`