ÚPLNÉ MAXWELLOVY–LORENTZOVY ROVNICE V CGS A SI

ALEXANDER ŽENÍŠEK

ABSTRAKT. Článek uzavírá sérii tří článků započatou články [5], [4]. Reference [2] byla užita ve větě 1 a poznámce 2 (konkrétně kap. o integraci Maxwellových rovnic), reference [1] v důkazu věty 5 (konkrétně odvození vztahu (48.11), který vyjadřuje rychlost světla c). V sérii je nejvýznamnější článek [4] se svými výhradami k Einsteinově postupu.

Elektrická intenzita $\mathbf{E}$ a magnetická intenzita $\mathbf{H}$ elektromagnetického pole splňují v soustavě cgs tyto Maxwellovy-Lorentzovy rovnice[1]

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\varrho, \tag{2}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \tag{3}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \tag{4}$$

kde c je rychlost světla ve vakuu, ϱ hustota elektrických nábojů a $\mathbf{J} = \varrho\mathbf{u}$ proudová hustota, přičemž $\mathbf{u}$ je rychlost elektrických nábojů.

Vzhledem k rozsáhlosti odvozování shrneme hlavní výsledky do Věty 1, kterou potom dokážeme.

Věta 1. *Rovnice* (3) *a* (4) *zaručují, že intenzity* $\mathbf{E}$ *a* $\mathbf{H}$ *lze vždy vyjádřit vektorovým potenciálem* $\mathbf{A}$ *a skalárním potenciálem* φ *ve tvaru*

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \tag{5}$$

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}. \tag{6}$$

Pokud je možné zvolit potenciály $\mathbf{A}$ *a* φ *tak, aby splňovaly Lorentzovu kalibrační podmínku*

$$\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \tag{7}$$

potom rovnice (1) *a* (2) *mají tvar*

$$\varDelta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}, \tag{1a}$$

$$\varDelta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\varrho. \tag{2a}$$

[1] V soustavě SI mají tvar (13)–(16). Einstein se vyjadřoval v soustavě cgs.

Vždy však platí rovnice (1c), (2c). *Z nich lze potenciály* $\mathbf{A}$ *a* φ *vypočítat při daných* ϱ *a* $\mathbf{J} \equiv \varrho \mathbf{u}$.

Důkaz. Protože $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a} = 0$ pro každý vektor $\mathbf{a}$, z rovnice (4) plyne existence vektorového potenciálu $\mathbf{A}$, pro který platí (6). Dosazením (6) do (3) dostaneme $\operatorname{rot}\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0$. Tento vztah bude také splněn, položíme-li $\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad}\varphi$, což je definiční vztah pro skalární potenciál φ. Z něj plyne (5).

Nyní odvodíme rovnice (1a) a (2a). Dosadíme proto (5) a (6) do rovnic (1) a (2), přičemž k (2) přičtěme nulu ve tvaru $0 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\big(\operatorname{grad}\varphi\big) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}, \tag{1b}$$

$$-\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\big(\operatorname{div}\mathbf{A}\big) = 4\pi\varrho. \tag{2b}$$

Připomeňme známé vztahy z vektorové analýzy:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A}, \quad \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \Delta\varphi.$$

S jejich pomocí upravíme (1b) a (2b):

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}, \tag{1c}$$

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = -4\pi\varrho. \tag{2c}$$

Vidíme, že systém (1c), (2c) by se značně zjednodušil, kdyby platila Lorentzova podmínka (7). (Potom bychom, mimo jiné, obdrželi dvě na sobě nezávislé rovnice.)

Obraťme nejdříve pozornost na to, že podmínka (6) nedefinuje jednoznačně vektorový potenciál $\mathbf{A}$. Můžeme zavést jiný vektorový potenciál $\mathbf{A}'$, který se liší od $\mathbf{A}$ o gradient libovolné funkce $f(x, y, z, t)$:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} f \tag{8}$$

a vztah $\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}'$ zůstane v platnosti (je $\operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{rot}\mathbf{A}'$, protože $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0$).

Nyní, aby se nezměnila hodnota $\mathbf{E}$, musíme současně změnit definici skalárního potenciálu tím, že od něj odečteme výraz $\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$:

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}. \tag{9}$$

Potom

$$-\operatorname{grad}\varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t} = -\operatorname{grad}\varphi + \frac{1}{c}\operatorname{grad}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{grad} f).$$

Protože operace $\frac{\partial}{\partial t}$ a grad jsou komutativní, tak se druhý a čtvrtý výraz na pravé straně ruší a platí

$$-\operatorname{grad}\varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E}.$$

Tedy potenciály φ a $\mathbf{A}$ můžeme definovat pomocí vztahů (5) a (6). Vztahy (8) a (9) se nazývají *kalibrační transformace*. Pokud Lorentzova kalibrační podmínka (7) platí, systém (1c), (2c) se redukuje na dvě samostatné vlnové rovnice (1a), (2a).

Zjistíme nyní, kdy platí Lorentzovy kalibrační podmínka (7): Podrobme potenciály $\varphi = \varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \operatorname{grad} f$ (získané z kalibrační transformace (8), (9)) Lorentzově kalibrační podmínce $\operatorname{div}(\mathbf{A}' + \operatorname{grad} f) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}) = 0$. Dostaneme (vzhledem ke vztahu $\operatorname{div}\operatorname{grad} f = \Delta f$)

$$-\Delta f + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \operatorname{div}\mathbf{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi'}{\partial t}. \tag{7a}$$

Tedy: Pokud $\Delta f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$ (tedy pokud funkce f splňuje homogenní vlnovou rovnici), potom platí Lorentzova kalibrační podmínka (7) pro potenciály $\mathbf{A}'$, φ'. Naopak: Pokud je pravá strana (7a) rovna nule, potom i levá strana (7a) je rovna nule, tj. funkce f splňuje homogenní vlnovou rovnici.

Votruba [3], str. 43: Z hlediska rovnice (7) a vlnových rovnic (1a), (2a) jsou potenciály $\mathbf{A}'$, φ' rovnocenné původním $\mathbf{A}$, φ jen tehdy, splňuje-li funkce f sama vlnovou rovnici $\Delta f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$. Tato podmínka není ovšem nutná. (*Důkaz neuveden.* Konec citátu.) □

Nástin řešení rovnic (1a), (2a)*: Existuje-li obecné řešení rovnice*

$$\Delta f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0,$$

máme také obecná řešení homogenních rovnic příslušných k (1a), (2a)*. Nyní už stačí nalézt partikulární řešení rovnic* (1a), (2a)*.* □

Poznámka 2. Dokážeme tzv. rovnici kontinuity, která vyjadřuje zákon zachování elektrického náboje. Derivujme proto rovnici (2) podle času

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\operatorname{div}\mathbf{E}\Big) = 4\pi\frac{\partial \varrho}{\partial t}$$

a na rovnici (1) aplikujme operátor div. Protože $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0\ \forall \mathbf{H}$, dostaneme (zaměníme-li operátory $\frac{\partial}{\partial t}$ a div)

$$\frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\operatorname{div}\mathbf{E}\Big) = 0.$$

Vyloučíme-li z posledních dvou rovnic výraz $\frac{\partial}{\partial t}\big(\operatorname{div}\mathbf{E}\big)$, získáme rovnici kontinuity

$$\operatorname{div}\mathbf{J} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0. \tag{10}$$

Fyzikální smysl (10) je tento: Změna hustoty ϱ v daném bodě se děje pouze v důsledku vtékání či vytékání elektrického toku v tomto bodě. □

Následující větu o transformaci vektorů $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ lze elegantně dokázat pomocí Minkowského formalismu (viz [4], kap. 5).

Věta 3. *Transformační vztahy pro vektory* $\mathbf{E}$*,* $\mathbf{H}$ *elektromagnetického pole mají v soustavě* cgs *tvar*

$$E'_\xi = E_x,\ \ E'_\eta = \gamma(E_y - \beta H_z),\ \ E'_\zeta = \gamma(E_z + \beta H_y),$$
$$H'_\xi = H_x,\ \ H'_\eta = \gamma(H_y + \beta E_z),\ \ H'_\zeta = \gamma(H_z - \beta E_y),$$

kde $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$*,* $\beta = v/c$*.*

Poznámka 4. V soustavě SI mají Maxwellovy–Lorentzovy rovnice tvar

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J}, \tag{11}$$

$$\varepsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} = \varrho, \tag{12}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \tag{13}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \tag{14}$$

kde $\varepsilon_0 = 8,854\,16 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$ je permitivita vakua a $\mu_0 = 1,256\,65 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{H\,m^{-1}}$ permeabilita vakua.

Věta 5. *Pro rychlost světla c ve vakuu platí*

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}. \tag{15}$$

Důkaz. Dokážeme, že v případě

$$\mathbf{J} = \mathbf{0}, \quad \varrho = 0$$

z rovnic (11)–(14) plyne

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \tag{16}$$

což je vlnová rovnice pro vektor $\mathbf{E}$, kde $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$. Protože $1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = 2,9979 \cdot 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, plyne odtud (15). Dokážeme tedy (16).

Derivujme x-ovou složku rovnice (11), kde $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, podle t:

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial y \partial t} - \frac{\partial^2 H_y}{\partial z \partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}. \tag{17}$$

Derivujme dále ypsilonovou, resp. zetovou složku rovnice (13) podle z, resp. y

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial t \partial z} = -\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial z}\right), \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial t \partial y} = -\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}\right)$$

a dosaďme tyto dva vztahy do (17):

$$\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial z}\right). \tag{18}$$

Poslední dva členy v závorce upravíme

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right).$$

Podle rovnice (12), kde $\varrho = 0$, je

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{\partial E_x}{\partial x},$$

takže

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial z} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial E_x}{\partial x} = -\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}. \tag{19}$$

Dosadíme-li (19) do (18), dostaneme

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}.$$

což ie x-ová složka vektorové rovnice (16). Zbývající dvě složky se dokážou obdobně. □

Pomocí Minkowského formalismu lze odvodit transformační vztahy pro vektory **E**, **H** také v SI (viz opět [4]):

Věta 6. *Transformační vztahy pro vektory* **E**, **H** *elektromagnetického pole mají v soustavě* SI *v případě Lorentzovy transformace tvar*

$$E'_\xi = E_x,\ \ E'_\eta = \gamma\Big(E_y - \beta H_z \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\Big),\ \ E'_\zeta = \gamma\Big(E_z + \beta H_y \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\Big),$$
$$H'_\xi = H_x,\ \ H'_\eta = \gamma\Big(H_y + \beta E_z \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\Big),\ \ H'_\zeta = \gamma\Big(H_z - \beta E_y \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\Big)$$

čili (protože $\beta = v/c$ *a* $1/c = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$*)*

$$E'_\xi = E_x,\ \ E'_\eta = \gamma\big(E_y - v\mu_0 H_z\big),\ \ E'_\zeta = \gamma\big(E_z + v\mu_0 H_y\big),$$
$$H'_\xi = H_x,\ \ H'_\eta = \gamma\big(H_y + v\varepsilon_0 E_z\big),\ \ H'_\zeta = \gamma\big(H_z - v\varepsilon_0 E_y\big).$$

Reference

[1] B. Klimeš, J. Kracík, A. Ženíšek: *Základy fyziky II*, Academia, Praha, 1972.

[2] J. B. Rumer, M. S. Ryvkin: *Teorija otnositělnosti.* Učpedgiz, Moskva, 1960.

[3] V. Votruba: *Základy speciální teorie relativity*, Academia, Praha, 1969.

[4] A. Ženíšek, J. Lamač: *K transformačním vztahům vektorů elektromagnetického pole*, vyjde v Kvaternionu.

[5] A. Ženíšek: *Soustavy jednotek cgs a SI v případě elektromagnetického pole*, vyjde v Kvaternionu.

Alexander Ženíšek, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69, Brno,
e-mail: `zenisek@fme.vutbr.cz`