

STEFANŮV PROBLÉM A JEHO ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ

RENÉ KESLER

ABSTRAKT. Tento článek je věnován analytickému řešení úloh vedení tepla s fázovou přeměnou, které jsou nazvány jako klasický Stefanův problém. Nejprve je odvozena diferenciální rovnice vedení tepla a také je vytvořen matematický model Stefanova problému. Důležitou částí je následné odvození analytického řešení pro úlohu tání¹.

1. ÚVOD

Jako Stefanův problém je označována úloha vedení tepla zahrnující tání nebo tuhnutí a je nazvána po Jožefu Stefanovi², který na konci 19. století ve své práci formuloval problém rozložení teploty při tuhnutí vody. Dále se problém rozšiřoval o mnohem komplexnější děje a postupně, jak rostlo pole jeho aplikací, tak vzrůstal také zájem o jeho výzkum, a to především z matematického hlediska [2].

Stefanův problém je proces, který je nám všem nejspíše velice dobře znám. V každodenním životě se setkáváme například s mražením nebo naopak rozmrazováním potravin, výrobou ledu nebo táním vosku při hoření svíčky. Ovšem znalost přesného řešení nabývá důležitosti v mnoha technických aplikacích, jako je například odlévání oceli a slitin, kde dochází k tuhnutí materiálu. Další důležitou aplikací je uchovávání energie, jež je v materiálu uložena ve formě latentního tepla [3]. Principem je akumulace energie (například ze slunečního záření během dne), kterou materiál spotřebuje během tání a tím ji v sobě uchová. Následně, když je této energie potřeba (během noci může sloužit k ohřevu vzduchu), se může zpětně uvolnit při tuhnutí.

Řešení problému nabývá složitosti především díky rozhraní mezi tuhou a kapalnou fází, které se pohybuje v důsledku absorpce nebo uvolňování latentního tepla, a tak je jeho poloha neznámou, jež se musí vyšetřit v rámci řešení.

2. PŘENOS TEPLA

Přenos tepla obecně probíhá třemi způsoby (viz [8]):

2010 MSC. Primární 35Q79.

Klíčová slova. Stefanův problém, vedení tepla, fázová přeměna, tání, tuhnutí.

¹Článek vznikl na základě bakalářské práce autora v oboru Matematické inženýrství na FSI VUT v Brně. Vedoucím práce byl Lubomír Klimeš z Energetického ústavu FSI VUT v Brně.

²Jožef Stefan (1835-1893) byl slovinský fyzik, matematik a básník působící na Vídeňské univerzitě.

- **Vedením (kondukcí).** Kinetická energie molekul se předává vzájemnými srážkami při jejich neuspořádaném pohybu. Vedení převládá v pevných látkách a také tekutinách bez proudění.
- **Prouděním (konvekcí).** Při nuceném nebo přirozeném proudění se přemístěním molekul přenáší i tepelná energie. Konvekce převládá v tekutinách.
- **Zářením (sáláním).** Probíhá ve formě elektromagnetického vlnění v určitém rozsahu vlnových délek. Nositeli tepelné energie jsou v tomto případě fotony.

V tomto článku je uvažován pouze přenos tepla vedením.

2.1. Odvození diferenciální rovnice vedení tepla

Nejprve je vhodné uvést pár základních vztahů z termomechaniky, jež byly čerpány z [7], pomocí kterých se odvodí diferenciální rovnice vedení tepla.

Tepelný tok. Vzniknou-li v tělese teplotní rozdíly, začne teplo podle druhého zákona termodynamiky přecházet z míst s vyšší teplotou do míst s teplotou nižší. Množství tepla transportované za jednotku času se nazývá tepelný tok \dot{Q} [W]. Tepelný tok procházející plochou o jednotkové velikosti, která stojí kolmo ke směru toku, se označuje jako měrný tepelný tok \dot{q} [Wm⁻²] a platí

$$d\dot{Q} = \dot{q} dS. \quad (2.1)$$

Fourierův zákon. Měrný tepelný tok \dot{q} v látce je přímo úměrný teplotnímu gradientu

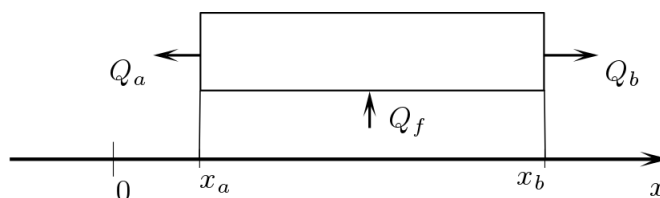
$$\dot{q} = -k \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (2.2)$$

kde k [Wm⁻¹K⁻¹] je součinitel tepelné vodivosti, což je fyzikální vlastnost daného materiálu, která udává jaký odpor klade látka proti přenosu tepla.

Zákon zachování energie. Nebudeme-li uvažovat ztráty do okolí, můžeme napsat tepelnou bilanci

$$\Delta E = Q_f - Q_a - Q_b, \quad (2.3)$$

což nám udává, že změna vnitřní energie ΔE úseku mezi x_a a x_b během časového intervalu (t_α, t_β) se rovná teplu Q_f dodaného do úseku známými zdroji a zmenšené o tepla Q_a a Q_b , která vytečou přes konce x_a a x_b (viz obrázek 1).



Obrázek 1. Energetická bilance pro tyč.

Diferenciální rovnice vedení tepla. Aby byl problém řešitelný analyticky, budeme uvažovat pouze případ v jedné prostorové dimenzi (např. dlouhá tenká tyč). Hledanou neznámou je potom funkce $T = T(x, t)$, jež popisuje teplotu v bodě x a čase t . Z předchozích vztahů lze odvodit (viz [5]) rovnici popisující T pro homogenní tyč ve tvaru

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f,$$

kde ρ [kg m^{-3}] uvažujeme jako délkovou hustotu, c [$\text{J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$] je měrná tepelná kapacita za konstantního tlaku, která udává množství tepla potřebné ke zvýšení teploty jednoho kilogramu materiálu o 1K a $f(x, t)$ [Wm^{-1}] je tzv. hustota vnitřních zdrojů. Zjednodušeně rovnici zapíšeme jako

$$T_t = \kappa T_{xx} + f^*, \quad (2.4)$$

kde

$$\kappa = \frac{k}{\rho c}$$

je nově zavedená veličina, známá jako součinitel teplotní vodivosti, a $f^* = f/(\rho c)$. Dostali jsme parciální diferenciální rovnici druhého řádu, jejíž kvadratická forma $Q(x, t) = x^2$ je semidefinitní, a proto je rovnice parabolická.

3. MATEMATICKÁ FORMULACE STEFANOVA PROBLÉMU

Zformulujme si například úlohu pro případ tání. Uvažujme tedy látku v tuhé fázi, která má v čase $t = 0$ počáteční teplotu T_i nižší než je teplota tání T_m . Mějme tuto látku definovanou na intervalu $x \in \langle 0, \infty \rangle$. Na začátku děje je náhle teplota okraje $x = 0$ zvýšena na hodnotu T_0 , která je vyšší než teplota tání T_m , a je na této teplotě udržován po celou dobu $t > 0$, což nám představuje Dirichletovu podmínku, která je konstantní v čase. Můžeme si tedy představit, že tání započne právě na okraji $x = 0$ a dále se bude rozhraní $s(t)$ mezi fázemi pohybovat v kladném směru osy x (viz [6]). Jednotlivé teploty $T_l(x, t)$ pro kapalně skupenství a $T_s(x, t)$ pro skupenství tuhé jsou popsány parabolickými rovnicemi tvaru (2.4) odvozeného v předchozí kapitole (viz také [2]). Tedy

$$\frac{\partial T_l(x, t)}{\partial t} = \kappa_l \frac{\partial^2 T_l(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{pro } 0 < x < s(t), \quad t > 0, \quad (3.1a)$$

$$\frac{\partial T_s(x, t)}{\partial t} = \kappa_s \frac{\partial^2 T_s(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{pro } s(t) < x < \infty, \quad t > 0. \quad (3.1b)$$

K rovnicím dodáme počáteční podmínku

$$T_s(x, 0) = T_i \quad \text{pro } x > 0 \quad (3.2)$$

a podmínky okrajové

$$T_l(0, t) = T_0 \quad \text{pro } t > 0, \quad (3.3a)$$

$$T_s(x \rightarrow \infty, t) \rightarrow T_i \quad \text{pro } t > 0. \quad (3.3b)$$

Ale protože máme dvě rovnice, úloha ještě není dobře formulována. Potřebujeme navíc ještě dodat pro každou rovnici jednu okrajovou podmínku na rozhraní fází.

Změna skupenství probíhá na konstantní teplotě T_m , dodáme tedy podmínku na rozhraní, která zastoupí obě potřebné okrajové podmínky a zároveň zajistí spojitost řešení (viz [6])

$$T_l(s(t), t) = T_m = T_s(s(t), t) \quad \text{pro } t > 0.$$

Počátečně okrajovou úlohu již máme dobře formulovanu, ovšem problém ještě vyřešit nedokážeme, protože máme pouze dvě diferenciální rovnice a celkově tři neznámé $T_s(x, t)$, $T_l(x, t)$ a $s(t)$, kde $s(t)$ je rozhraní pohybující se v čase. Další potřebnou rovnici získáme vyšetřením energetické bilance na rozhraní $x = s(t)$. Vezmeme tedy tepelný tok z kapalně fáze v kladném směru osy x , který je zmenšený o teplo spotřebovávané na fázovou přeměnu (tání), a ten se musí rovnat v izolované tyči tepelnému toku vstupujícího do tuhé fáze ve směru osy x . Matematicky bilanci vyjádříme pomocí Fourierova zákona (viz [6]) vztahem

$$-k_l \frac{\partial T_l}{\partial x} - \rho L \frac{ds(t)}{dt} = -k_s \frac{\partial T_s}{\partial x},$$

což můžeme přepsat do tvaru

$$k_s \frac{\partial T_s(x, t)}{\partial x} - k_l \frac{\partial T_l(x, t)}{\partial x} = \rho L \frac{ds(t)}{dt} \quad \text{pro } x = s(t), \quad t > 0, \quad (3.4)$$

kde L je latentní teplo vztažené na jednotku hmotnosti [J kg^{-1}]. Hustota ρ bude uvažována konstantní pro obě skupenství, tedy $\rho_l = \rho_s = \rho$.

Nyní již máme dobře formulovanou a řešitelnou úlohu. Rovnice (3.1a), (3.1b), (3.4) jsou tři diferenciální rovnice pro řešení neznámých $T_s(x, t)$, $T_l(x, t)$ a $s(t)$. Máme také všechny potřebné počáteční a okrajové podmínky.

Formulaci pro tuhnutí bychom odvodili analogicky.

4. ANALYTICKÁ ŘEŠENÍ

Obecně jsou problémy s fázovou přeměnou řešitelné především numericky, nicméně v některých zjednodušených případech splňujících určitá omezení je možné nalézt analytické řešení. Princip odvození analytického řešení si ukážeme na případu tání polonekonečné tyče, tedy problém budeme řešit na polopřímce $x > 0$. Je třeba vyšetřit teplotu kapalně a tuhé fáze a také pozice rozhraní mezi fázemi.

Matematickou formulaci úlohy jsme odvodili v předešlé kapitole. Rovnice pro popis teplotního pole tedy jsou (3.1a), (3.1b) s počáteční podmínkou (3.2) a okrajovými podmínkami (3.3a), (3.3b). Dodáme podmínky na rozhraní $x = s(t)$ tvaru

$$T_l(x, t) = T_m = T_s(x, t) \quad \text{pro } x = s(t), \quad t > 0, \quad (4.1a)$$

$$k_s \frac{\partial T_s(x, t)}{\partial x} - k_l \frac{\partial T_l(x, t)}{\partial x} = \rho L \frac{ds(t)}{dt} \quad \text{pro } x = s(t), \quad t > 0. \quad (4.1b)$$

Budeme hledat tzv. *similarity solution* (viz [4]) úlohy (3.1a)–(3.3b), (4.1a), (4.1b), které je složením funkce jedné proměnné a transformace $(x, t) \mapsto \xi(x, t)$ sdružující dvě nezávislé proměnné x, t do jedné proměnné ξ . Řešení parabolické

rovnice (3.1a) pro kapalnou fázi budeme tedy hledat ve tvaru

$$T_l(x, t) = F(\xi(x, t)),$$

kde F je neznámá funkce jedné proměnné třídy C^2 a podle [2] je $\xi(x, t) = \frac{x}{\sqrt{t}}$. Spočteme parciální derivace složené funkce $F(\xi)$, dosadíme do rovnice (3.1a) a po úpravách dostaneme diferenciální rovnici pro hledanou funkci F tvaru

$$F'' + F' \frac{1}{2\kappa_l} \xi = 0.$$

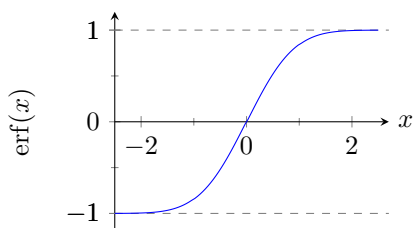
Převodli jsme tak parciální diferenciální rovnici na obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu, kterou už můžeme vyřešit, a dostaneme

$$F(\xi) = F(0) + C_1 \operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\kappa_l}}\right), \quad C_1 \neq 0,$$

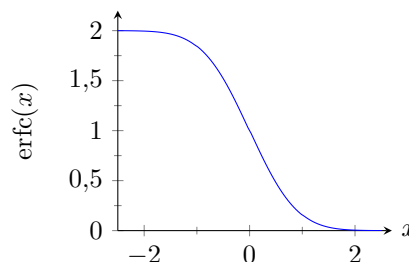
kde $\operatorname{erf}(\eta)$ je tzv. *error function*, nebo-li Gaussova chybová funkce, která je definována (viz [1]) vztahem

$$\operatorname{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-t^2} dt$$

(viz obrázek 2). Vyšetříme ještě člen $F(0)$, tedy hodnotu funkce F v bodě $\xi = 0$.



Obrázek 2. Gaussova chybová funkce.



Obrázek 3. Doplnková Gaussova chybová funkce.

Ta odpovídá hodnotě $x = 0$ a pomocí okrajové podmínky (3.3a) proto dostaneme

$$F(0) = T_l(0, t) = T_0.$$

Našli jsme tedy řešení rovnice (3.1a) ve tvaru

$$T_l(x, t) = T_0 + C_1 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa_l t}}\right). \quad (4.2)$$

Řešení rovnice (3.1b) pro tuhou fázi získáme podobným postupem ve tvaru

$$T_s(x, t) = T_i + C_2 \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa_s t}}\right), \quad C_2 \neq 0, \quad (4.3)$$

kde $\operatorname{erfc}(\eta)$ je doplnková Gaussova chybová funkce definována (viz [1]) vztahem

$$\operatorname{erfc}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_\eta^\infty e^{-t^2} dt = 1 - \operatorname{erf}(\eta)$$

(viz obrázek 3). Zatím neznámé konstanty C_1 a C_2 se nyní pokusíme vyšetřit pomocí podmínek na rozhraní $s(t)$. Nejprve využijeme podmínku (4.1a), do níž dosadíme a dostaneme

$$T_0 + C_1 \operatorname{erf}\left(\frac{s(t)}{2\sqrt{\kappa_l t}}\right) = T_m = T_i + C_2 \operatorname{erfc}\left(\frac{s(t)}{2\sqrt{\kappa_s t}}\right) \quad \text{pro } t > 0 \quad (4.4)$$

Odtud je vidět, že členy

$$\frac{s(t)}{2\sqrt{\kappa_l t}} \quad \text{a} \quad \frac{s(t)}{2\sqrt{\kappa_s t}}$$

musí být konstantní. Zavedeme parametr

$$\lambda = \frac{s(t)}{2\sqrt{\kappa_l t}}, \quad \text{neboli} \quad s(t) = 2\lambda\sqrt{\kappa_l t}, \quad (4.5)$$

a z rovností (4.4) tak můžeme postupně určit hledané konstanty

$$C_1 = \frac{T_m - T_0}{\operatorname{erf}(\lambda)}, \quad C_2 = \frac{T_m - T_i}{\operatorname{erfc}\left(\lambda\sqrt{\frac{\kappa_l}{\kappa_s}}\right)}.$$

Získali jsme řešení ve tvaru

$$T_l(x, t) = T_0 + \frac{T_m - T_0}{\operatorname{erf}(\lambda)} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa_l t}}\right), \quad (4.6)$$

$$T_s(x, t) = T_i + \frac{T_m - T_i}{\operatorname{erfc}\left(\lambda\sqrt{\frac{\kappa_l}{\kappa_s}}\right)} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa_s t}}\right). \quad (4.7)$$

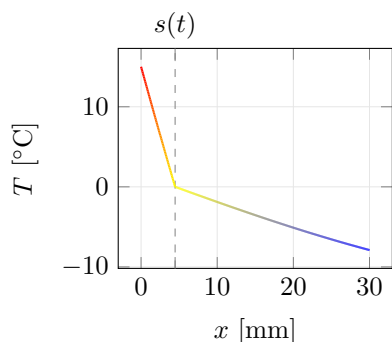
Zbývá najít hodnotu parametru λ , kterou určíme z podmínky (4.1b). Dosazením do této podmínky a následnými úpravami dostáváme

$$\frac{k_s\sqrt{\kappa_l}}{k_l\sqrt{\kappa_s}} \cdot \frac{(T_m - T_i)e^{-\frac{\kappa_l}{\kappa_s}\lambda^2}}{\operatorname{erfc}\left(\lambda\sqrt{\frac{\kappa_l}{\kappa_s}}\right)} + \frac{(T_m - T_0)e^{-\lambda^2}}{\operatorname{erf}(\lambda)} = -\frac{L\lambda\sqrt{\pi}}{c_l}.$$

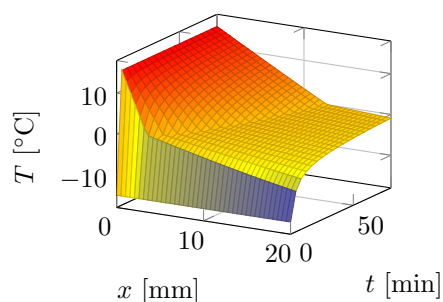
Výsledná rovnice je tzv. *transcendentní rovnice*, kterou nelze analyticky vyřešit. K jejímu řešení proto využijeme některou z numerických metod, například metodu bisekce nebo metodu tečen. Jakmile nalezneme řešení $\lambda > 0$, problém je vyřešen. Pozici rozhraní $s(t)$ získáme ze vztahu (4.5), rozložení teploty v kapalně fázi z (4.6) a rozložení teploty v tuhé fázi z (4.7).

Obrázky 4–6 vyobrazují získané řešení pro případ tání ledu s hodnotou $T_i = -15^\circ\text{C}$ v počáteční podmínce a hodnotou $T_0 = 15^\circ\text{C}$ v podmínce okrajové. Obrázek 4 představuje rozložení teploty v čase $t = 10$ min, obrázek 5 zobrazuje průběh tání pro $t \in \langle 0, 80 \rangle$ min a obrázek 6 je pohyb rozhraní $s(t)$ mezi kapalnou a tuhou fází v závislosti na čase.

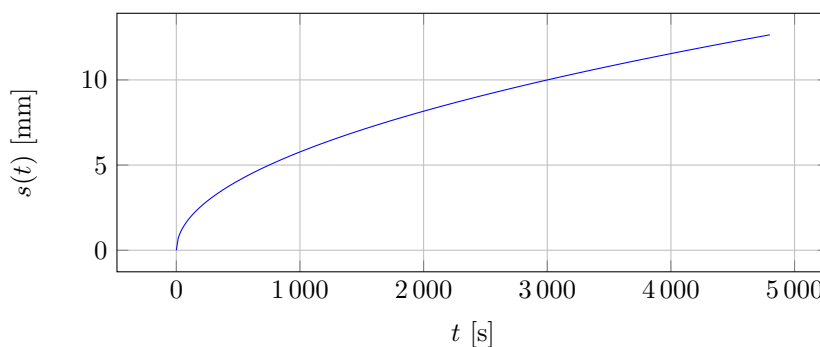
Při řešení úlohy tuhnutí bychom postupovali analogicky.



Obrázek 4. Rozložení teploty při tání.



Obrázek 5. Rozložení teploty při tání.

Obrázek 6. Pozice rozhraní $s(t)$ v čase.

5. ZÁVĚR

Cílem tohoto textu bylo přiblížit čtenáři téma Stefanova problému a jeho analytického řešení. Nejprve bylo ve zkratce pojednáno o odvození diferenciální rovnice vedení tepla pomocí základních vztahů z termomechaniky. Následně bylo pro ukázkou odvozeno analytické řešení pro případ tání, kde se využila možnost převodu parciální diferenciální rovnice na obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu. Při dalším odvozování se objevil problém s vyřešením transcendentní rovnice, která se musí řešit nějakou numerickou metodou. Výsledky byly nakonec pro názornost vyobrazeny graficky a to prostřednictvím prostředí MATLAB.

REFERENCE

- [1] M. Abramowitz, I. A. Stegun (ed.): *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs and mathematical tables*, Dover Publications, New York, 1965.
- [2] V. Alexiades, A. D. Solomon: *Mathematical modeling of melting and freezing processes*, Hemisphere Pub., Washington, 1993.

- [3] C. Arkar, T. Šuklje, B. Vidrih, S. Medved: *Performance analysis of a solar air heating system with latent heat storage in a lightweight building*, Applied Thermal Engineering **95** (2016), 281–287.
- [4] J. Crank: *Free and moving boundary problems*, Oxford University Press, New York, 1984.
- [5] J. Franců: *Parciální diferenciální rovnice*, Akademické nakladatelství CERM, Brno, 2011.
- [6] D. W. Hahn, M. N. Özisik: *Heat conduction*, Wiley, Hoboken, New Jersey, 2012.
- [7] J. Kalčík, K. Sýkora: *Technická termomechanika*, Academia, Praha, 1973.
- [8] M. Pavelek: *Termomechanika*, Akademické nakladatelství CERM, Brno, 2011.

René Kesler, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně,
Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: keslerrene@seznam.cz