

GREENOVA VĚTA A JEJÍ APLIKACE

ROBERT MAŘÍK

ABSTRAKT. V článku je diskutován vliv Greenovy věty mimo ryze matematické oblasti. Je zde zdůrazněn její význam při odvozování diferenciálních tvarů fyzikálních zákonů a dále je uvedena její role při vysvětlení funkce planimetru – přístroje pro měření obsahů rovinných obrazců obecného tvaru. Na rozdíl od jiných podobně zaměřených prací rekonstruujeme přímo vektorové pole planimetru a tím můžeme kromě vysvětlení planimetru ověřit i matematické zdůvodnění některých doporučení pro správnou práci s tímto přístrojem.

Greenova věta je klasické tvrzení z vektorové analýzy, dávající do souvislosti křivkový integrál druhého druhu po uzavřené křivce a dvojný integrál rotace vektorového pole přes množinu, která je touto křivkou ohraničena. V tomto článku si připomeneme význam Greenovy věty a představíme si planimetr – přístroj k měření obsahů dvourozměrných množin, jehož funkce s Greenovou větou úzce souvisí.

1. ÚVOD

Nejběžnější tvar Greenovy věty je

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dS, \quad (1.1)$$

kde D je jednoduše souvislá oblast a $C = \partial D$ je kladně orientovaná hranice této množiny, o níž předpokládáme, že je tvořena po částech hladkou jednoduchou uzavřenou křivkou. Funkce P a Q jsou funkce proměnných x, y definované v nějaké otevřené množině obsahující množinu D , mající v této množině spojitě parciální derivace.

Pracujeme-li s vektorovým polem $\vec{F} = (P, Q)$ a uvažujeme-li dvourozměrnou rotaci $\text{rot}_z \vec{F}$ jako z -ovou komponentu trojrozměrné rotace vektorového pole $(P, Q, 0)$, tj.

$$\text{rot}_z \vec{F} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y},$$

dostává vztah (1.1) tvar

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \iint_D \text{rot}_z \vec{F} dS.$$

2010 MSC. Primární 26B20; Sekundární 01A55.

Klíčová slova. Matematická analýza, vektorová analýza, Greenova věta, planimetr.

V kontextu vektorové analýzy se křivkový integrál na levé straně nazývá cirkulace vektorového pole $\vec{F}$ po orientované křivce C . Nejčastěji se s tímto integrálem v aplikacích setkáváme při výpočtu práce (v tomto případě je vektorové pole definováno působící silou) nebo při výpočtu elektrického napětí (příslušným vektorovým polem je pole elektrické intenzity).

Dalším běžným tvarem Greenovy věty je

$$\oint_C -Q \, dx + P \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \, dS.$$

Matematicky tento vztah dostaneme prostou substitucí funkcí $-Q$ a P za funkce P a Q v (1.1). Tento vztah je však zajímavý z fyzikálního hlediska, protože formálně nahrazuje pole (P, Q) kolmým polem $(-Q, P)$ a pracuje tedy s normálovou složkou vektorového pole $\vec{F}$ namísto složky tečné. Proto má výraz na levé straně fyzikální interpretaci toku vektorového pole křivkou C . Na pravé straně vidíme divergenci vektorového pole $\vec{F}$, která je definována vztahem

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

2. FYZIKÁLNÍ VÝZNAM GREENOVY VĚTY

Ve fyzice jsou známa a používanější rozšíření Greenovy věty do více dimenzí. Rozšířením Greenovy věty pro cirkulaci podél okraje plochy, která není rovinou plochou, je Stokesova věta a rozšířením Greenovy věty pro tok uzavřenou plochou v prostoru je Gaussova-Ostrogradského věta. Ve spojení toku nebo cirkulace vektorového pole s jistým dvojným integrálem obsahujícím operátory divergence a rotace spočívá aplikační význam Greenovy věty a jejích rozšíření. Díky této větě je možné přecházet mezi lokálními (diferenciálními) a nelokálními (integrálními) tvary fyzikálních zákonů. Například Faradayův zákon elektromagnetické indukce

$$\oint_{\partial D} \vec{E} \, d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \iint_D \vec{B} \, d\vec{S}$$

vyjadřuje skutečnost, že velikost indukovaného napětí ve smyčce je rovna časové změně toku magnetické indukce touto smyčkou a působí proti této změně. Dává tedy do souvislosti makroskopické veličiny. Díky Greenově větě (resp. v obecném případě díky Stokesově větě) je možné Faradayův zákon převést na tvar

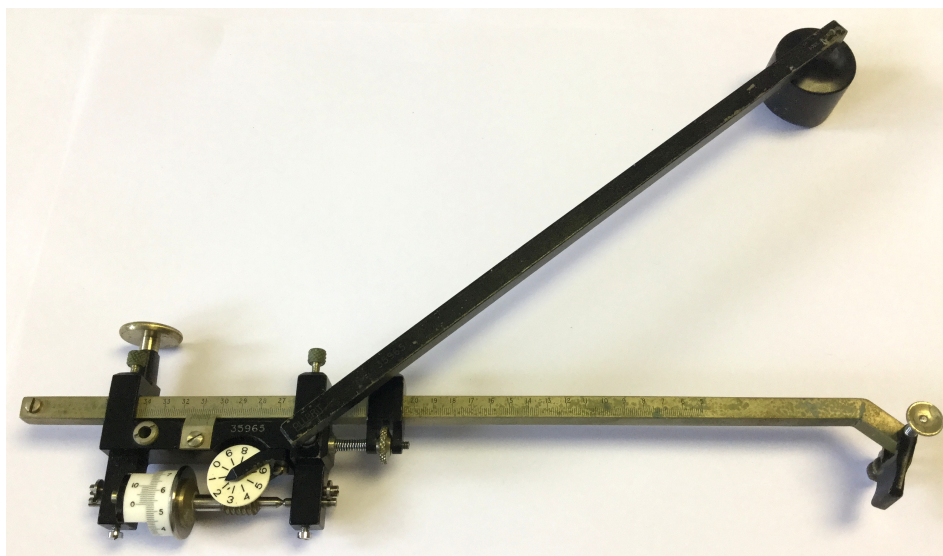
$$\iint_D \operatorname{rot} \vec{E} \, d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iint_D \vec{B} \, d\vec{S}$$

a (po záměně pořadí derivování a integrování podle nezávislých proměnných)

$$\iint_D \operatorname{rot} \vec{E} \, d\vec{S} = \iint_D -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \, d\vec{S}.$$

Protože tato rovnost musí být splněna pro libovolnou plochu D , platí

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.1)$$



Obrázek 1. Polární kompenzační planimetr značky Allbrit.

což je třetí Maxwellova rovnice¹ v diferenciálním tvaru. Tato rovnice slovně vyjadřuje, že vír elektrického pole (tj. nenulová rotace intenzity elektrického pole) vzniká tam, kde se mění magnetické pole. Na rozdíl od Faradayova zákona, který je podle výše uvedeného vlastně třetí Maxwellovou rovnicí v integrálním tvaru, nepracuje rovnice (2.1) s makroskopicky měřitelnými veličinami, je však vhodnější pro pochopení fyzikální podstaty a dává také fyzikální interpretaci operátoru rotace.

Podobným způsobem je možné ze zákonů zachování makroskopických veličin odvodit příslušné diferenciální zákony a vztahy používané ve fyzice jako například rovnici kontinuity pro obecnou stlačitelnou tekutinu, rovnici vedení tepla nebo rovnici difuze, viz například [3, Kapitola 1].

3. PLANIMETR

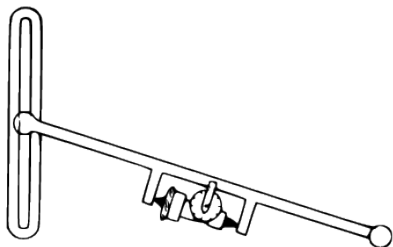
Jak bylo uvedeno v předchozí kapitole, Greenova věta má ve fyzikálním popisu světa zásadní postavení. Z matematického hlediska je zajímavé, že dává do souvislosti informaci rozloženou na množině v rovině a informaci získanou výhradně na hranici této množiny. V učebnicích (viz například [9, str. 1139]) i na přednáškách (viz například [2, čas cca 43:30]) bývá často jako mechanický přístroj pracující

¹Maxwellovy rovnice jsou čtyři rovnice, které zcela popisují chování elektromagnetického pole. K nim zpravidla přidáváme materiálové vztahy podle studovaného prostředí a řešením těchto rovnic dostáváme fyzikální popis reálných situací. Jako důsledky Maxwellových rovnic můžeme získat například vlnovou rovnici pro elektromagnetickou vlnu, zákon odrazu a zákon lomu světla, Kirchhoffovy zákony v elektrických obvodech apod.

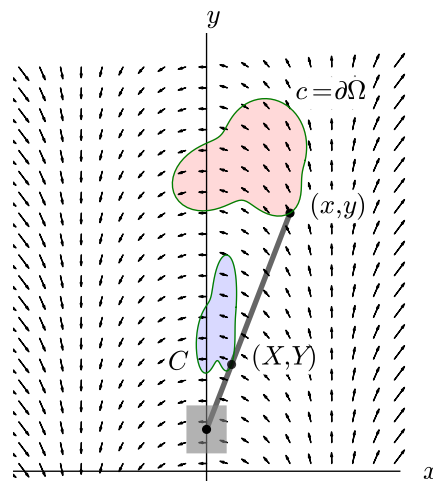
na základě Greenovy věty uváděn planimetr – přístroj na měření obsahů dvou-rozměrných obrazců. Pod pojmem planimetr se v praxi rozumí téměř výhradně polární planimetr, což je přístroj, jehož historie je zcela unikátní a vymyká se všem ostatním přístrojům vědců a přírodovědců. Posuďte sami: polární planimetr vynalezl v roce 1854 Švýcar Jacob Amsler a tento planimetr se běžně používal až do 80-tých let 20. století ke stanovení obsahů dvourozměrných obrazců všude, kde znalost obsahu byla podstatná pro další postup. Planimetry byly přítomny ze zřejmého důvodu v pracovnách kartografů a stavebních inženýrů, ale našly uplatnění i v biologii, lékařství, potravinářství, strojírenství, lesnictví, geologii a fyzice. Bez zásadní inovace planimetr přežil druhou polovinu 19. století a téměř celé 20. století, tedy dobu, kdy došlo k zásadním technickým inovacím prakticky ve všech oblastech života. Postupně byl vytěsněn až nástupem digitalizace a digitálního zpracování obrazu. Dnes se s ním v běžné laboratoři již nesetkáme. I tak je však zajímavé poznat souvislost mezi tímto jednoduchým aparátem a Greenovou větou.

Základním stavebním kamenem planimetru je rameno planimetru s integračním kolečkem a hrotem. Hrot je při měření veden po obvodu obrazce a druhý konec ramene je dodatečným mechanismem vázán na nějakou křivku – přímku v případě lineárního planimetru a kružnici v případě polárního planimetru.

Integrační kolečko je jednoduchý mechanický prostředek, který svazuje funkci planimetru s křivkovým integrálem. Je nasazeno kolmo na rameno planimetru a navrženo tak, aby se lehce otáčelo okolo své osy a současně bez odporu klouzalo do boku. Pokud se takové kolečko pohybuje po křivce se kterou svírá obecný úhel, rozkládá se jeho pohyb přirozeně na dvě komponenty: na komponentu ve směru kolečka (otáčení) a na komponentu kolmou (klouzání). Pouze komponenta ve směru kolečka způsobí pootočení kolečka. Je to podobné jako práce konaná silou, kdy jenom komponenta ve směru pohybu koná práci. Pro kvantitativní popis označme jednotkový normálový vektor k rameni planimetru (což je současně současně směr kolečka) $\vec{n}$. Při pohybu kolečka po úsečce definované vektorem posunutí $\vec{r}$ je celková dráha zaznamenaná kolečkem rovna délce projekce vektoru $\vec{r}$ do směru $\vec{n}$, tj. je dána skalárním součinem $\vec{n} \cdot \vec{r}$. Pokud se kolečko nepohybuje po úsečce, ale po obecné křivce C přechází tento skalární součin v křivkový integrál druhého druhu $\int_C \vec{n} d\vec{r}$ vektorového pole $\vec{n}$ po křivce C . To je možné nahlédnout buď s odvoláním na analogii s konáním práce, nebo obvyklými úvahami integrálního počtu založenými na dělení a limitním přechodu. V dalším rozboru musíme zjistit, jaká je souvislost mezi křivkovým integrálem $\int_C \vec{n} d\vec{r}$ a pohybem měřicího hrotu po hranici měřené množiny².



Obrázek 2. Schematický náčrt lineárního planimetru. Vlevo vazba na přímku, vpravo měřicí hrot, uprostřed integrační kolečko se stupnicí. Převzato z <http://persweb.wabash.edu/facstaff/footer>.



Obrázek 3. Vektorové pole lineárního planimetru a křivka C , kterou opisuje integrační kolečko při měření obsahu Ω .

3.1. Lineární planimetr

Lineární planimetr se vyznačuje tím, že druhý konec ramene planimetru (ten, kde není měřicí hrot) se volně pohybuje po přímce. V souřadnicích podle obrázku 3 má vektor určený ramenem planimetru souřadnice $(x, \sqrt{L^2 - x^2})$, kde L je délka ramene. Jednotkový normálový vektor k rameni planimetru je tedy

$$\vec{n} = \frac{1}{L} \left(-\sqrt{L^2 - x^2}, x \right).$$

Jsou-li (X, Y) souřadnice integračního kolečka a jsou-li c a C po řadě křivky opísované měřicím hrotem a integračním kolečkem, potom kolečko zaznamenává hodnotu

$$I = \frac{1}{L} \int_C -\sqrt{L^2 - x^2} dX + x dY. \quad (3.1)$$

Tento integrál převedeme do vyjádření pomocí křivky c a souřadnic měřicího hrotu (x, y) . Je-li w vzdálenost integračního kolečka od konce ramene vázaného na přímku, snadno odvodíme

$$(X, Y) = \left(\frac{w}{L} x, y - \left(1 - \frac{w}{L} \right) \sqrt{L^2 - x^2} \right).$$

²V publikacích věnovaných funkci planimetru je tento postup zpravila zjednodušen tak, že se nejprve uvažuje integrační kolečko umístěné ve stejném bodě jako měřicí hrot a poté se ukáže, že otáčky zaznamenané na kolečku po uzavření celé křivky nezáleží na skutečné poloze integračního kolečka na rameni planimetru. Jiný přístup je zanedbat už během výpočtu komponentu, která se na celkovém čtení planimetru neuplatní, viz například [5]. My se však budeme snažit najít přímou souvislost mezi pohybem planimetru a vektorovým polem přístroje, tj. přímou souvislost mezi pohybem planimetru a údaji zaznamenávanými na integračním kolečku i během pohybu.

Diferencováním získáme

$$(dX, dY) = \left(\frac{w}{L} dx, dy + \left(1 - \frac{w}{L} \right) \frac{x}{\sqrt{L^2 - x^2}} dx \right)$$

a po dosazení do (3.1) dostáváme

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{L} \int_c \left(-\sqrt{L^2 - x^2} \frac{w}{L} + \left(1 - \frac{w}{L} \right) \frac{x^2}{\sqrt{L^2 - x^2}} \right) dx + x dy \\ &= \frac{1}{L} \int_c \frac{x^2 - Lw}{\sqrt{L^2 - x^2}} dx + x dy. \end{aligned}$$

Předpoklad $c = \partial\Omega$ a Greenova věta umožňují převod na dvojný integrál

$$I = \frac{1}{L} \iint_{\Omega} dS$$

mající (až na konstantní násobek) význam obsahu množiny Ω . Lineární planimetr tedy pracuje s vektorovým polem

$$(P, Q) = \left(\frac{x^2 - Lw}{\sqrt{L^2 - x^2}}, x \right)$$

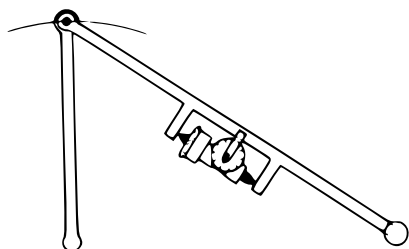
a integrál tohoto vektorového pole po křivce $c = \partial\Omega$ je roven obsahu množiny Ω .

Poznámka 3.1. Díky translační invarianci při posunutí ve směru osy y (viz obrázek 3) bylo přirozené očekávat, že vektorové pole lineárního planimetru nezávisí na proměnné y . Toto očekávání se skutečně potvrdilo. Dále je možno vypozorovat (přímým výpočtem nebo z obrázku 3), že velikost vektorů z vektorového pole planimetru je větší dál od osy y . To má snadno interpretovatelný důsledek: pokud se operátorovi obsluhujícímu planimetr zachvěje ruka a nekopíruje přesně křivku c v místě, kde má vektorové pole větší velikost, způsobí se tím větší chyba, než když takováto nepozornost nastane v místě s menší velikostí vektorového pole. Proto se doporučuje měřit tak, aby rameno nebylo moc vychýlené. Pokud bychom netrvali na úplnosti našeho popisu planimetru, ale snažili se výklad zjednodušit úvahami naznačenými v poznámce pod čarou na straně 19, nebyl by důvod takového doporučení zřejmý. My však nyní toto doporučení máme podloženo výpočtem.

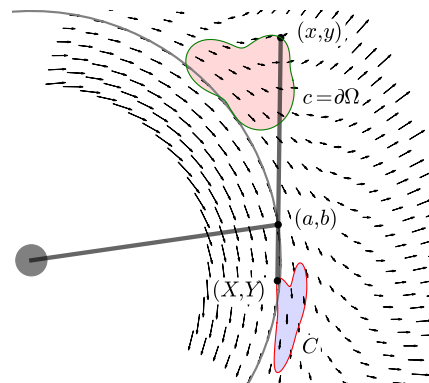
3.2. Polární planimetr

V polárním planimetru navrženém Amslerem je konec ramene planimetru, ve kterém není měřicí hrot, vázán na kružnici. Výhoda je, že takováto vazba je konstrukčně mnohem jednodušší než vazba na přímku, protože je možno ji realizovat pomocí nepohyblivého pólu a pomocného ramene definujícího kružnici.

Počátek soustavy souřadnic volme v nepohyblivém pólu. Nechť L je délka měřicího ramene a buďte (x, y) souřadnice měřicího hrotu a $(a(x, y), b(x, y))$ souřadnice druhého konce měřicího ramene (vázaného na kružnici). Měřicí hrot se pohybuje po křivce $c = \partial\Omega$. Je-li hrot v bodě (x, y) , má jednotkový vektor mířící kolmo k měřicímu rameni vyjádření $\vec{n} = \frac{1}{L}(b - y, x - a)$ a jsou-li dále souřadnice (X, Y)



Obrázek 4. Schematický náčrt polárního planimetru. Dolní konec svislého ramene tvoří pól planimetru. Pól se nepohybuje, ale rameno se okolo něj může otáčet. Šikmé rameno má na pravém konci hrot kopírující hranici měřené množiny a přibližně uprostřed integrační kolečko. Časté je i umístění kolečka až za spojem obou ramen, jako na obrázku vpravo a na obrázku 1. Převzato z <http://persweb.wabash.edu/facstaff/footer>.



Obrázek 5. Vektorové pole polárního planimetru. Délka měřicího ramene L je měřena od spoje (a, b) k měřicímu hrotu (x, y) . Při pohybu bodu (x, y) po křivce c je spoj ramen (a, b) vázán na vyznačenou kružnici a integrační kolečko v bodě (X, Y) se pohybuje po křivce C .

souřadnicemi integračního kolečka pohybujícího se po křivce C , je údaj na integračním kolečku roven

$$I = \frac{1}{L} \int_C (b - y) dX + (x - a) dY. \quad (3.2)$$

Je-li integrační kolečko na rameni planimetru ve vzdálenosti w od bodu (a, b) směrem k bodu (x, y) , jsou souřadnice kolečka

$$(X, Y) = \left(\frac{w}{L}x + \left(1 - \frac{w}{L}\right)a, \frac{w}{L}y + \left(1 - \frac{w}{L}\right)b \right).$$

Tento vzorec zahrnuje i případ $w < 0$, kdy integrační kolečko není mezi oběma konci planimetru, ale je ve vzdálenosti $|w|$ od bodu (a, b) , směrem od bodu (x, y) . Připomeňme, že a a b jsou funkcemi proměnných x a y . Diferencováním vztahů pro X a Y dostaneme

$$\begin{aligned} dX &= \frac{w}{L}dx + \left(1 - \frac{w}{L}\right) \left[\frac{\partial a}{\partial x}dx + \frac{\partial a}{\partial y}dy \right], \\ dY &= \frac{w}{L}dy + \left(1 - \frac{w}{L}\right) \left[\frac{\partial b}{\partial x}dx + \frac{\partial b}{\partial y}dy \right] \end{aligned}$$

a po dosazení do (3.2) získáme

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{L} \cdot \frac{w}{L} \int_c (b - y) dx + (x - a) dy \\ &\quad + \frac{L - w}{L^2} \int_c \left((b - y) \frac{\partial a}{\partial x} + (x - a) \frac{\partial b}{\partial x} \right) dx + \left((b - y) \frac{\partial a}{\partial y} + (x - a) \frac{\partial b}{\partial y} \right) dy, \end{aligned}$$

kde pro snazší výpočet je integrál rozdělen na dvě části. Aplikace Greenovy věty pro křivku $c = \partial\Omega$ dává po jednoduchých úpravách

$$I = \frac{1}{L} \cdot \frac{w}{L} \iint_{\Omega} \left[2 - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y} \right] dS + \frac{1}{L} \left(1 - \frac{w}{L} \right) \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} - 2 \begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial a}{\partial y} \\ \frac{\partial b}{\partial x} & \frac{\partial b}{\partial y} \end{vmatrix} \right) dS. \quad (3.3)$$

Pokusíme se najít vyjádření výrazů vystupujících v těchto integrálech pomocí proměnných x a y .

Dvě ramena polárního planimetru definují dvě vazby mezi body (x, y) a funkcemi $a(x, y)$ a $b(x, y)$. Jsou-li délky ramen planimetru L a P , mají tyto vazby tvar

$$a^2 + b^2 = P^2$$

a

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = L^2.$$

Derivováním každého z těchto vztahů podle x a poté podle y obdržíme čtyři rovnice, které je možno zapsat maticově ve tvaru

$$\begin{pmatrix} a & b \\ x - a & y - b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial a}{\partial y} \\ \frac{\partial b}{\partial x} & \frac{\partial b}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x - a & y - b \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Matice

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ x - a & y - b \end{pmatrix}$$

má inverzní matici M^{-1} , pokud je splněna podmínka $\det M = ay - bx \neq 0$. Potom platí

$$M^{-1} = \frac{1}{ay - bx} \begin{pmatrix} y - b & -b \\ a - x & a \end{pmatrix}$$

a z (3.4) dostaneme

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial a}{\partial y} \\ \frac{\partial b}{\partial x} & \frac{\partial b}{\partial y} \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x - a & y - b \end{pmatrix} = \frac{1}{ay - bx} \begin{pmatrix} -b(x - a) & -b(y - b) \\ a(x - a) & a(y - b) \end{pmatrix}.$$

Odtud okamžitě plyne

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} = 1.$$

Dále z existence M^{-1} a z Cauchyovy věty (determinant součinu je součinem determinantů) aplikované na maticovou rovnici (3.4) plyne

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial a}{\partial y} \\ \frac{\partial b}{\partial x} & \frac{\partial b}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

S těmito vztahy dostává výraz (3.3) tvar

$$I = \frac{1}{L} \iint_{\Omega} dS$$

a stejně jako u lineárního planimetru vidíme, že kolečko zobrazuje (až na multiplikační konstantu) obsah množiny Ω .

Poznámka 3.2. Konstrukce polárního planimetru umožňuje měnit délku L ramene planimetru a pohodlně takto pracovat s podklady při různých zvětšeních. Skutečná podoba polárního planimetru se již ve 30. letech 20. století ustálila na snadno rozebíratelné konstrukci, kterou je možno při měření sestavit dvěma různými způsoby, kdy spojení obou ramen je jednou nalevo a jednou napravo od spojnice pólu a měřicího hrotu. Tím je možno kompenzovat případné výrobní nedostatky: měření se provede v obou konfiguracích a z naměřených hodnot se vypočte aritmetických průměr. Tento typ planimetru se již nenazývá Amslerův, ale kompenzační planimetr.

Poznámka 3.3. Při měření polárním planimetrem se doporučuje postupovat tak, aby při měření nebyl planimetr příliš otevřený nebo zavřený. Díky úplnému popisu vektorového pole planimetru si, podobně jako u planimetru lineárního, můžeme objasnit, odkud tento požadavek vyvstává. Požadavek na existenci inverzní matice M^{-1} je ekvivalentní podmínce, že (a, b) není násobkem (x, y) , tj. že ramena planimetru nejsou rovnoběžná. Čím dále jsme od rovnoběžné konfigurace ramen, tím lépe je soustava (3.4) podmíněna. Proto před měřením nastavíme planimetr tak, aby jeho ramena byla kolmá, když je měřicí hrot blízko těžiště měřeného obrazce.

Poznámka 3.4. Pravděpodobně první zmínka o souvislosti planimetru s Greenovou větou je v článku [1]. Dalšími vhodnými zdroji informací jsou například [4, 5]. Bez pomoci Greenovy věty je možno funkci planimetru vysvětlit pomocí Guldinovy věty nebo pomocí křivočarých souřadnic (viz [6]). Čistě geometrické vysvětlení je možno najít například v práci [7] a na webové stránce [8].

REFERENCE

- [1] G. Ascoli: *Vedute sintetiche sugli strumenti integratori*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **18** (1947), 36–54, online <https://link.springer.com/article/10.1007/BF02938642>.
- [2] D. Auroux: *Multivariable Calculus*, videopřednáška MIT Course 18.02, čas 43:30, online <https://youtu.be/tYdoS0tkAHA?t=43m30s> (březen 2018).
- [3] P. Drábek, G. Holubová: *Parciální diferenciální rovnice*, online <http://mi21.vsb.cz/modul/parcialni-diferencialni-rovnice> (březen 2018).
- [4] R. W. Gatterdam: *The planimeter as an example of Green's theorem*, American Mathematical Monthly **88** (1981), 701–704.
- [5] T. Leise: *As the planimeter wheel turns*, College Math. J. **38** (2007), 24–31.
- [6] L. I. Lowell: *Comments on the polar planimeter*, American Mathematical Monthly **61** (1954), 467–469, online <http://www.jstor.org/stable/pdf/2308082.pdf>.
- [7] R. Mařík: *O měření obsahů planimetrem a koloběžkou*, Učitel matematiky **24** (2016) No. 2, 65–79.
- [8] R. Mařík: *Za tajemstvím planimetru*, online http://user.mendelu.cz/marik/mechmat/za_tajemstvím_planimetru/ (březen 2018).
- [9] J. Stewart: *Calculus 8th Edition*, Brooks Cole, 2015.

Robert Mařík, Ústav matematiky, Lesnická a dřevařská fakulta, Mendelova univerzita v Brně,
Zemědělská 1, 613 00 Brno, Česká republika,
e-mail: `marik@mendelu.cz`