VYBRANÉ PRÍKLADY Z INTERNETOVEJ MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

VIERA ŠTOUDKOVÁ RŮŽIČKOVÁ

ABSTRAKT. V článku sú riešené štyri vybrané príklady z Internetovej matematickej olympiády pre študentov stredných škôl. V prvom príklade sa rozhoduje o lineárnej závislosti vektorov daného tvaru, v druhom príklade sa hľadá neznáma funkca spĺňajúca daný vzťah, v treťom príklade sa počíta tretia mocnina daného kvaterniónu a vo štvrtom príklade sa počíta dĺžka stany pravouhlého trojuholníka s danými vlastnosťami.

Ústav matematiky na FSI VUT v Brne každoročne organizuje Internetovú matematickú olympiádu pre študentov stredných škôl ČR a SR. V roku 2017 prebehol už jej desiaty ročník. Na príprave príkladov a ich vyhodnotení sa nemalou mierou podieľajú študenti oboru Matematické inženýrství. Podľa pravidiel tejto súťaže rieši desať príkladov skupina siedmich stredoškolákov maximálne dve hodiny. Skladba príkladov býva pestrá, sú zaradené príklady rôznej obťažnosti. Cieľom je, aby aj študenti nižších ročníkov (ktorí môžu byť buď členmi tímu namiešaného z rôznych ročníkov alebo majú svoj tím) mali šancu dotiahnuť do konca aspoň nejaký príklad a zbierali do budúcna skúsenosti.

Na stránkach http://matholymp.fme.vutbr.cz je možné nájsť zadania aj riešenia príkladov zo všetkých ročníkov.

Tento príspevok píšem z pohľadu riešiteľa. Vybrala som niektoré z tých náročnejších príkladov (podľa výsledného bodového hodnotenia) a uvádzam pri každom pôvodné zadanie a potom moje postupné úvahy – ukážku toho, nad čím všetkým uvažuje riešiteľ, než sa dopracuje k riešeniu a niekedy ešte aj potom.

Poznámka: V zátvorke je vždy uvedený rok, kedy sa daný príklad vyskytol na olympiáde, pod akým číslom a meno autora príkladu.

1. PRÍKLAD S VEKTORMI

Na úvod som vybrala príklad z lineárnej algebry.

2010 *MSC.* Primární 00A09; Sekundární 00A35.
Klíčová slova. Matematická olympiáda, kvaternión.

Príklad 1 (2014, Příklad 9, autorka Hana Druckmüllerová). *Mějme v $\mathbb{R}^n$ dáno n vektorů o n složkách, kde $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, takto*

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1 &= (1, 2, 3, \ldots, n),\\
\vec{v}_2 &= (n+1, n+2, \ldots, 2n),\\
&\vdots\\
\vec{v}_n &= \big((n-1)n+1, (n-1)n+2, \ldots, n^2\big).
\end{aligned}$$

Rozhodněte, zda tyto vektory jsou lineárně závislé.

Príklad má zložito vyzerajúce zadanie, pracuje sa tam s n-rozmernými vektormi, to asi mnohých stredoškolákov odradilo. Pre získanie predstavy, o čo vlastne ide, je dobré prepísať si zadanie pre konkrétne n. Napríklad pre štvorku dostanem

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1 &= (1, 2, 3, 4),\\
\vec{v}_2 &= (5, 6, 7, 8),\\
\vec{v}_3 &= (9, 10, 11, 12),\\
\vec{v}_4 &= (13, 14, 15, 16).
\end{aligned}$$

Spomenula som si pri tom na matice – keď chce niekto napísať vymyslenú, ale „peknú" maticu, častokrát prvá, ktorá ho napadne, je matica poskladaná z práve takýchto vektorov

$$\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ 9 & 10 & 11 & 12\\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

Otázka v zadaní je, či sú tieto vektory lineárne nezávislé. Ak nie sú, znamená to, že tá matica má nulový determinant. Aj mne sa už stalo, že som vymyslela príklad s takouto maticou 3×3 a pamätám si, že jej determinant vyšiel nulový (bol to práve príklad na výpočet determinantu matice). Platí to ale pre všetky takéto matice? Pozriem sa ešte raz na tie vektory a hneď vidím, že platí

$$\begin{aligned}
\vec{v}_2 - \vec{v}_1 &= (5, 6, 7, 8) - (1, 2, 3, 4) = (4, 4, 4, 4),\\
\vec{v}_3 - \vec{v}_2 &= (9, 10, 11, 12) - (5, 6, 7, 8) = (4, 4, 4, 4).
\end{aligned}$$

S n-rozmernými vektormi je to podobné,

$$\begin{aligned}
\vec{v}_2 - \vec{v}_1 &= (n+1, n+2, \ldots, 2n) - (1, 2, 3, \ldots, n) = (n, n, \ldots, n),\\
\vec{v}_3 - \vec{v}_2 &= (2n+1, 2n+2, \ldots, 3n) - (n+1, n+2, \ldots, 2n) = (n, n, \ldots, n).
\end{aligned}$$

Takže pre každé $n > 2$ platí, že

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_3 - \vec{v}_2,$$

a teda

$$\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3 = (0, 0, \ldots, 0).$$

Našla som lineárnu kombináciu prvých troch vektorov, ktorá mi dá nulový vektor. Sú teda vždy lineárne závislé.

Poučenie: Pokiaľ chcete vymyslieť príklad na maticu s nenulovým determinantom, použite nejakú „náhodnejšiu“. (Tiež sa neodporúča používať zaradom idúce čísla „12345 . . . “ ako heslo.)

2. Príklad s neznámou funkciou

Takéto typy príkladov ma bavia. Hľadanie neznámej funkcie je trochu ako detektívka – mám stopu a hľadám páchateľov. A po vypátraní ich musím ešte usvedčiť.

Príklad 2 (2016, Příklad 8, autor Matej Dolník)**.** *Najděte nejméně dva funkční předpisy pro nenulovou spojitou funkci f, má-li platit*

$$f^2(x+y) = f^2(y) + f^2(x) - 2f^2(x)f^2(y) + f(2x)f(y)\cos(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Rovno sa priznám, že som to na prvý pokus nevyriešila správne. Začala som dobre – napísala som si asi dva vzťahy, ktoré musí hľadaná funkcia spĺňať, ale potom som sa niekde pomýlila a vyšlo mi veľmi rýchle, že jediné riešenie je nulová funkcia. A hneď potom som sa pozrela na stránky olympiády, či to mám správne. Tým som zistila, že mám niekde chybu, súčasne som sa ale nechtiac dopredu dozvedela skutočné riešenie.

Dobre, povedala som si, nevadí, postup som neštudovala, skúsim na to riešenie prísť sama. Zistila som ale vzápätí, že to v tomto prípade nejde – zadanie totiž predpokladá, že riešiteľ túto funkciu môže uhádnuť. A ako sa mám tváriť, že hádam funkciu, keď už ju viem? Nakoniec som to vymyslela tak, že si zadanie trochu upravím – nie „nájdite najmenej dve riešenia“ ale „nájdite všetky riešenia“. Takže to, že dve riešenia poznám, mi až tak nepomôže.

Toto je postup riešenia tohto upraveného zadania.

Skúsim vo vzťahu zo zadania prehodiť premenné x a y. Napíšem obidva vzťahy pod sebou

$$\begin{aligned} f^2(x+y) &= f^2(y) + f^2(x) - 2f^2(x)f^2(y) + f(2x)f(y)\cos(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \\ f^2(y+x) &= f^2(x) + f^2(y) - 2f^2(y)f^2(x) + f(2y)f(x)\cos(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vidím, že sa líšia len v poslednom sčítanci. Dostávam teda, že

$$f(2x)f(y)\cos(y) = f(2y)f(x)\cos(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Upravím túto rovnicu tak, aby naľavo boli len výrazy s x a napravo s y (tj. separujem premenné)

$$\frac{f(2x)}{f(x)\cos(x)} = \frac{f(2y)}{f(y)\cos(y)}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{x : f(x) = 0 \vee \cos(x) = 0\}.$$

Tento podiel je teda konštantný pre všetky x také, že $f(x) \neq 0$ a $\cos x \neq 0$. Označím túto konštantu K a rovnicu zbavím zlomku

$$\frac{f(2x)}{f(x)\cos(x)} = K, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x : f(x) = 0 \vee \cos(x) = 0\},$$

$$f(2x) = Kf(x)\cos(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x : f(x) = 0 \vee \cos(x) = 0\}.$$

Tento posledný vzťah je pekný, myslím si, že by mohol platiť aj pre x také, že $f(x) = 0$ alebo $\cos(x) = 0$. Skúsim to overiť. Vrátim sa ku vzťahu (2.1), z ktorého som to odvodila. A teraz vidím, že to môžem odvodiť jednoduchšie, stačí dosadiť za y také $\bar{y}$, že $f(\bar{y})\cos(\bar{y}) \neq 0$ a vydeliť to tým. Také $\bar{y}$ určite existuje, funkcia nemôže byť nulová všade, kde je $\cos(\bar{y}) \neq 0$, to by bola buď konštantne nulová alebo nespojitá. Dostávam

$$f(2x) = \frac{f(2\bar{y})}{f(\bar{y})\cos(\bar{y})} f(x)\cos(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$f(2x) = Kf(x)\cos(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Mohla som to tak urobiť hneď na začiatku. Postup by bol kratší, ale vtedy ma to nenapadlo. Tie medzikroky boli potrebné len k tomu, aby ma naviedli na ten lepší postup. Ako riešiteľka olympiády by som ich teda nechala len na pomocnom papieri.

Teraz sa vrátim ku vzťahu zo zadania. Za premennú y dosadím tiež x, potom

$$f^2(2x) = 2f^2(x) - 2f^4(x) + f(2x)f(x)\cos(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Teraz za $f(2x)$ dosadím $Kf(x)\cos(x)$ a dostávam

$$K^2 f^2(x)\cos^2(x) = 2f^2(x) - 2f^4(x) + Kf^2(x)\cos^2(x),$$

$$K^2\cos^2(x) = 2 - 2f^2(x) + K\cos^2(x),$$

$$f^2(x) = 1 + \cos^2(x)\frac{K - K^2}{2}. \tag{2.3}$$

To už je vlastne skoro odvodené, ako vyzerá $f(x)$, až na konštantu. Pre určenie K stačí zistiť hodnotu $f(x)$ pre nejaké x. Ako prvé ma napadlo dosadiť za x nulu. Mám, že

$$f^2(0) = 1 + \frac{K - K^2}{2}.$$

Dosadím nulu aj do vzťahu (2.2) a mám, že

$$f(0) = Kf(0).$$

Z týchto posledných dvoch rovníc vidím, že buď je $K = 1$ a $f^2(0) = 1$, alebo je $f(0) = 0$ a $\frac{K-K^2}{2} = -1$ (potom $K = 2$ alebo $K = -1$). Potom z (2.3) mám tieto dve možnosti

$$f^2(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{alebo} \quad f^2(x) = 1 - \cos^2(x) = \sin^2(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ďalšie vhodné číslo, ktoré môžem dosadiť do vzťahu (2.2), je $\frac{\pi}{2}$. Potom hneď dostávam

$$f(\pi) = 0.$$

Takže to vylučuje prvú možnosť. Jediná možná funkcia, spĺňajúca vzťah zo zadania, je taká, pre ktorú platí, že

$$|f(x)| = |\sin(x)|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Takže hľadaná funkcia je $\sin(x)$ až na znamienko. To znamienko môže byť v rôznych bodoch rôzne, označím si ho ako $z(x)$. Môžem teda napísať, že

$$f(x) = z(x)\sin(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad |z(x)| = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Toto teraz dosadím do vzťahu (2.2) a použitím vzorca $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ to upravím

$$\begin{aligned} f(2x) &= Kf(x)\cos(x), \\ z(2x)\sin(2x) &= Kz(x)\sin(x)\cos(x), \\ z(2x)2\sin(x)\cos(x) &= Kz(x)\sin(x)\cos(x), \\ z(2x) &= \frac{K}{2}z(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{x : x = k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$

Už skôr som zistila, že $K = 2$ alebo $K = -1$, z tohto posledného vzťahu vidím, že jediná možnosť je $K = 2$, a teda pre $z(x)$ platí, že

$$z(2x) = z(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{x : x = k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Pretože funkcia $f(x)$ má byť spojitá, jediné možné miesta, kde sa zmení znamienko $z(x)$, sú nulové body funkcie $\sin(x)$. Takže $z(x)$ je na celom intervale $(0, \pi)$ rovná 1 alebo je na celom intervale $(0, \pi)$ rovná -1.

Teraz pre každé $x > \pi$ mám, že $z(x) = z(\frac{x}{2}) = z(\frac{x}{4}) = \cdots = z(\frac{x}{2^n})$. Vždy nájdem také $n \in \mathbb{R}$, že $\frac{x}{2^n} < \frac{\pi}{2}$. Takže $z(x)$ je konštantná na celom intervale $(0, \infty)$. Z rovnakej úvahy vyplýva, že $z(x)$ je konštantná na celom intervale $(-\infty, 0)$.

Zostáva zistiť, či je konštantná úplne všade. Na to sa musím vrátiť ku vzťahu zo zadania a dosadiť tam x a y s rôznymi znamienkami. Ako prvé ma napadlo dosadiť za y priamo hodnotu $-x$. Postupnými úpravami dostávam

$$\begin{aligned} \sin^2(0) &= \sin^2(x) + \sin^2(x) - 2\sin^2(x)\sin^2(x) - z(2x)z(-x)\sin(2x)\sin(x)\cos(x), \\ 0 &= 2\sin^2(x) - 2\sin^4(x) - 2z(2x)z(-x)\sin^2(x)\cos^2(x), \\ 0 &= (1 - z(2x)z(-x))\left(\sin^2(x) - \sin^4(x)\right), \\ 1 &= z(2x)z(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x : \sin^2(x) - \sin^4(x) = 0\}, \\ 1 &= z(2)z(-1). \end{aligned}$$

To už stačí na to, aby som mohla tvrdiť, že $z(x)$ nezmení znamienko ani v nule. Takže mi zostali len dve možnosti, buď $f(x) = \sin(x)$ alebo $f(x) = -\sin(x)$. Tieto dve funkcie teda mohli riešitelia aj uhádnuť. Aj oni ale museli ukázať, že obidve funkcie spĺňajú vzťah v zadaní.

Po dosadení funkcie $f(x) = \sin(x)$ alebo $f(x) = -\sin(x)$ do ľavej strany vzťahu v oboch prípadoch dostávam to isté. Postupnými úpravami z toho dostanem výraz vpravo, teda

$$\begin{aligned}
f^2(x+y) &= \sin^2(x+y) = (\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y))^2 \\
&= \sin^2(x)\cos^2(y) + \cos^2(x)\sin^2(y) + 2\sin(x)\cos(y)\cos(x)\sin(y) \\
&= \sin^2(x)\left(1 - \sin^2(y)\right) + \left(1 - \sin^2(x)\right)\sin^2(y) + \sin(2x)\cos(y)\sin(y) \\
&= \sin^2(y) + \sin^2(x) - 2\sin^2(x)\sin^2(y) + \sin(2x)\sin(y)\cos(y) \\
&= \sin^2(y) + \sin^2(x) - 2\sin^2(x)\sin^2(y) + (-\sin(2x))\,(-\sin(y))\cos(y) \\
&= f^2(y) + f^2(x) - 2f^2(x)f^2(y) + f(2x)f(y)\cos(y).
\end{aligned}$$

Teraz celý ten postup zhrniem: V prvej časti som zistila, že neznáma funkcia je $\sin(x)$ až na znamienko, v druhej časti som zistila, že to znamienko je všade rovnaké a teda sú nanajvýš dve riešenia, v tretej časti som ukázala, že tieto dve riešenia už vyhovujú zadaniu. A vidím, že to určovanie znamienka bolo skoro rovnako namáhavé ako tá prvá časť.

Keď som si to počítala na papieri, tak som dospela ku vzťahu $f^2(x) = \sin^2(x)$ a ďalej som už nepokračovala. V domnení, že ďalej to už bude jednoduché, som to začala hneď prepisovať sem. Teraz, keď som to urobila poriadne, som žiaden rýchly a jednoduchý spôsob vylúčenia ostatných možností nenašla a trochu ma to mrzí. Ak nejaký nájdete, môžete mi dať vedieť.

3. Príklad s kvaterniónom

Tento príklad je zaujímavý tým, že sa z neho riešiteľ dozvie, čo je to kvaternión a keďže sa takto nazýva aj tento časopis, je celkom vhodné si tento pojem pripomenúť.

Príklad 3 (2014, Příklad 10, autor Matej Dolník). *Pro dvě pevně daná čísla a, b nazveme kvaternionem výraz ve tvaru $p+xi+yj+zk$, pro který platí,že $i^2 = a$, $j^2 = b$, $ij = -ji = k$. (Pro volbu $a = -1$, $b = -1$ bychom dostali takzvané Hamiltonovy kvaterniony, na které lze nahlížet jako na rozšíření komplexních čísel přidáním dalších dvou komplexních jednotek j a k.) Kvaterniony lze mezi sebou sčítat složku po složce a násobit tak, jako bychom násobili dva výrazy s neznámými i, j, k. Při výpočtech je však třeba mít na paměti, že pro násobení kvaternionů neplatí komutativní zákon, neboť $ij = -ji$. Výsledkem sčítání i násobení kvaternionů je opět kvaternion.*

Pro obecná a, b spočtěte třetí mocninu kvaternionu $3 + 5i + 7j + k$ a následně vyjádřete h, l, m, n z rovnice $(3 + 5i + 7j + k)^3 = h + li + mj + nk$.

Sedím práve vo vlaku, mám síce pri sebe zošit a ceruzku, ale vo vlaku sa píše zle, tak sa budem aj z tohto dôvodu snažiť o čo najúspornejší postup.

Najskôr si napíšem, čo dostanem, ked vynásobím nejaký všeobecný kvaternión $p + xi + yj + zk$ jednotkovým kvaterniónom 1, i, j alebo k, teda

$$\begin{aligned} 1(p + xi + yj + zk) &= p + xi + yj + zk, \\ i(p + xi + yj + zk) &= ax + pi + azj + yk, \\ j(p + xi + yj + zk) &= by - bzi + pj - xk, \\ k(p + xi + yj + zk) &= -abz + byi - axj + pk. \end{aligned}$$

Využila som tam, že $ik = iij = aj$, $jk = -jji = -bi$, $ki = -jii = -aj$, $kj = ijj = bi$, $kk = -ijji = -bii = -ab$. (Tieto pomocné vzťahy som kvôli úspore nezapisovala.)

Teraz z toho jednoducho spočítam, čo dostanem, keď vynásobím všeobecný kvaternión $p + xi + yj + zk$ sám so sebou: Je to p-krát výraz v prvom riadku vpravo plus x-krát výraz v druhom riadku vpravo plus y-krát ten v treťom plus z-krát ten vo štvrtom, teda $p(p + xi + yj + zk) + x(ax + pi + azj + yk) + y(by - bzi + pj - xk) + z(-abz + byi - axj + pk)$. Píšem to rovno po koeficientoch (nech to nemusím znova prepisovať) a dostávam

$$(p + xi + yj + zk)^2 = p^2 + ax^2 + by^2 - abz^2 + 2pxi + 2pyj + 2pzk. \tag{3.1}$$

Vyšlo to lepšie, než som čakala. Veľa sa toho navzájom poodčítavalo. V zadaní chcú spočítať tretiu mocninu, tak ešte rovnakým postupom pokračujem a kvaterniónom $(p+xi+yj+zk)^2$ vynásobím kvaternión $p+xi+yj+zk$. Je to $(p^2+ax^2+by^2-abz^2)$-krát výraz v prvom riadku vpravo plus $2px$-krát ten v druhom $2py$-krát ten v treťom $2pz$-krát ten vo štvrtom. Zase rovno zapisujem koeficienty, sú to dlhé výrazy, tak ich píšem pod sebou a dostávam

$$\begin{aligned} h &= p^3 + apx^2 + bpy^2 - abpz^2 + 2apx^2 + 2bpy^2 - 2abpz^2 \\ &= p^3 + 3apx^2 + 3bpy^2 - 3abpz^2, \\ l &= p^2x + ax^3 + bxy^2 - abxz^2 + 2p^2x, \\ m &= p^2y + ax^2y + by^3 - abyz^2 + 2p^2y, \\ n &= p^2z + ax^2z + by^2z - abz^3 + 2p^2z. \end{aligned}$$

Na záver už len dosadím za p, x, y, z hodnoty 3, 5, 7, 1 zo zadania, potom

$$\begin{aligned} h &= 3^3 + 3a.3.5^2 + 3b.3.7^2 - 3ab.3 = 27 + 225a + 441b - 9ab, \\ l &= 3.3^2.5 + a.5^3 + b.5.7^2 - ab.5 = 135 + 125a + 245b - 5ab, \\ m &= 3.3^2.7 + a.5^2.7 + b.7^3 - ab.7 = 189 + 175a + 343b - 7ab, \\ n &= 3.3^2 + a.5^2 + b.7^2 - ab + 2.3^2 = 27 + 25a + 49b - ab. \end{aligned}$$

Celý postup aj s výsledkom sa mi vošiel do zošita na štrnásť riadkov, naviac je dostatočne prehľadný, takže som sa dokonca ani raz nepomýlila, napriek zhoršeným podmienkam (počítala som pri rýchlosti 160 km/h).

Vrátim sa teraz ešte ku druhej mocnine kvaterniónu. Všimla som si, že po úprave vzťahu (3.1) dostanem, že platí

$$(p + xi + yj + zk)^2 = 2p(p + xi + yj + zk) - p^2 + ax^2 + by^2 - abz^2.$$

Takže umocnením kvaterniónu $K = p+xi+yj+zk$ na druhú dostanem $2p$-násobok tohto kvaterniónu plus číslo $c = -p^2 + ax^2 + by^2 - abz^2$, teda

$$K^2 = 2pK + c.$$

Pomocou tohto vzťahu odvodím, čo dostanem pre tretiu mocninu. Teda

$$\begin{aligned} K^3 &= K(2pK + c) = 2pK^2 + cK = 2p(2pK + c) + cK = (4p^2 + c)K + 2pc \\ &= (3p^2 + ax^2 + by^2 - abz^2)K - 2p^3 + 2apx^2 + 2bpy^2 - 2abpz^2. \end{aligned}$$

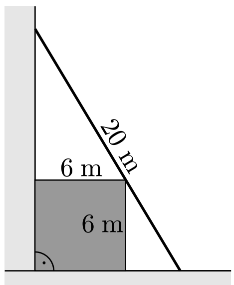
Tento poznatok je zaujímavý, ale s prekvapením zisťujem, že postup pri výpočte tretej mocniny daného kvaterniónu by nebol s jeho použitím o nič kratší a asi ani prehľadnejší.

4. Príklad s tyčou a debnou

Na záver som nechala ten najzložitejší príklad, aspoň čo sa týka počtu stránok, ktoré zaberá v tomto časopise.

Príklad 4 (2010, Příklad 2, autorka Jana Hoderová)**.** *Tyč délky* 20 m *je svým horním koncem opřená o zeď a zároveň se dotýká bedny o rozměrech* 6 m × 6 m*, viz obrázek* 1*. V jaké výšce se nachází horní konec tyče?*

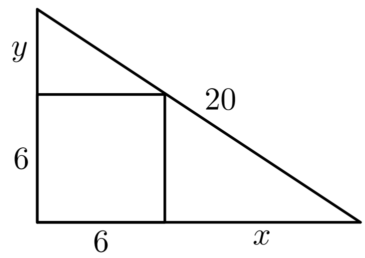
Poznámka: Tento příklad je možno řešit několika více či méně elegantními způsoby. Týmy, které řešení povedou přes rovnici čtvrtého stupně, kterou následně vyřeší pouze přibližně numericky, získají za příklad koeficient maximálně 0,50.



Obrázek 1. .

Tento príklad ma zaujal pekným obrázkom. Obrázok je jednoduchý a súčasne má príbeh – žiadne anonymné úsečky XY, ale tyč a debna. (Poznámka: Toto nie je preklep, po slovensky sa „bedna“ povie „debna“.) Tak som sa do toho hneď dala, s úmyslom nájsť jeden z tých viac elegantných postupov, ktorého existenciu mi sľubujú v zadaní.

Označím si neznámu dĺžku úseku medzi debnou a tyčou na zemi ako x a neznámu dĺžku úseku medzi debnou a tyčou na stene ako y. Hľadaná výška je potom $y + 6$, viď obrázok 2.



Obrázek 2. .

Stačí nájsť dva vzťahy medzi x a y a mám dve rovnice o dvoch neznámych. Na obrázku sú tri pravouhlé trojuholníky a všetky sú navzájom podobné. Takže jeden vzťah dostanem zo známeho $a^2 + b^2 = c^2$, ďalšie z podobnosti trojuholníkov, teda

$$(x + 6)^2 + (y + 6)^2 = 20^2,$$
$$\frac{x + 6}{y + 6} = \frac{x}{6} = \frac{6}{y}.$$

Je ľahké overiť, že rovnosť v druhom riadku má síce dve =, ale je to v skutočnosti len jeden vzťah. To nevadí, dva by mali stačiť. Snažím sa o čo najelegantnejší postup, tak z toho druhého vzťahu nevyjadrím x, ale rovno $x + 6$ a dosadím do prvého, potom

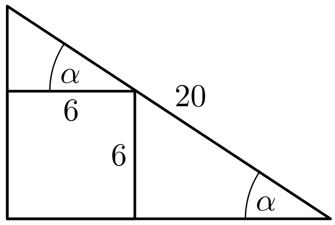
$$x + 6 = \frac{6(y + 6)}{y},$$
$$\frac{36(y + 6)^2}{y^2} + (y + 6)^2 = 400.$$

Túto rovnicu vynásobím y^2 a dostanem ... rovnicu štvrtého rádu, pred ktorou ma varovali v zadaní, teda

$$36(y + 6)^2 + y^2(y + 6)^2 = 400y^2,$$
$$y^2(y + 6)^2 + 36(y + 6)^2 - 400y^2 = 0. \tag{4.1}$$

Nevyzerá až tak „zle“, ale nenapadá ma, ako by sa dali nájsť nejakým elegantným postupom jej riešenia.

Cez neznáme dĺžky to nevyšlo, a čo takto skúsiť to cez neznáme uhly? Vlastne je tam len jeden neznámy uhol a jeho doplnok do 90°. Na obrázku 3 je označený ako α. Ako sa na to dívam, vo vzťahoch, ktoré mi tam vychádzajú, sa vyskytuje samé $\sin(\alpha)$ a $\cos(\alpha)$. Praktickejšie teda bude pracovať priamo s týmito hodnotami. Označím si $s := \sin(\alpha)$ a $c := \cos(\alpha)$.



Obrázek 3. .

Dĺžka tyče je súčet dĺžok prepôn dvoch pravouhlých trojuholníkov, ktoré vyjadrím pomocou s a c zo vzťahov pre sínus a kosínus uhla v pravouhlom trojuholníku. Mám teda vzťah v tvare

$$\frac{6}{s} + \frac{6}{c} = 20,$$
$$\text{a z toho} \quad s + c = \frac{20}{6} sc. \tag{4.2}$$

Zatiaľ tam nechávam tých nevykrátených $\frac{20}{6}$.

Mám ale dve neznáme, čo druhý vzťah? Ten je predsa zrejmý

$$s^2 + c^2 = 1.$$

Teraz hneď vidím, že po umocnení rovnice (4.2) na druhú a dosadením jednotky za $s^2 + c^2$ dostanem celkom obyčajnú kvadratickú rovnicu s neznámou sc. Tým je v podstate príklad vyriešený. Aspoň v hlave. (Totiž v skutočnosti som práve bola v autobuse a nemala možnosť si nič zapisovať.)

Potom som sa pokúsila to podrobne previesť na papier, odkiaľ

$$s^2 + c^2 + 2sc = \left(\frac{20}{6}\right)^2 (sc)^2,$$
$$1 + 2sc = \left(\frac{20}{6}\right)^2 (sc)^2,$$
$$sc = \frac{1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{20}{6}\right)^2}}{\left(\frac{20}{6}\right)^2}.$$

Tých $\frac{20}{6}$ mi tam už začína trochu vadiť, ale než namiesto toho písať $\frac{10}{3}$, to si ich rovno nejako označím. Napríklad ako A. Vezmem len kladné riešenie, lebo α je ostrý uhol a označím túto hodnotu ako B. Takže mám

$$sc = B = \frac{1 + \sqrt{1 + A^2}}{A^2}, \quad A = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}.$$

Teraz mám tri vzťahy pre dve neznáme

$$sc = B, \tag{4.3}$$
$$s + c = AB, \tag{4.4}$$
$$s^2 + c^2 = 1. \tag{4.5}$$

Je niekoľko možností, ako z toho dopočítať hľadanú výšku konca tyče, čiže hodnotu $20s$. Vyskúšam tri varianty, zaujíma ma, ktorá vyjde najlepšie – s najmenším počtom nutných úprav.

1. Použitím prvých dvoch vzťahov (4.3), (4.4), dostanem kvadratickú rovnicu s neznámou s, teda

$$c = AB - s \quad \Rightarrow \quad s\,(AB - s) = B \quad \Rightarrow \quad s^2 - ABs + B = 0.$$

Riešenia tejto kvadratickej rovnice dostanem v tvare

$$s_{1,2} = \frac{AB \pm \sqrt{(AB)^2 - 4B}}{2}.$$

2. Pokiaľ by som použila druhé dva vzťahy (4.4), (4.5), dostanem tiež kvadratickú rovnicu, kde

$$c = AB - s \quad \Rightarrow \quad s^2 + (AB - s)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 2s^2 - 2ABs + (AB)^2 - 1 = 0.$$

Vyzerá zložitejšie, ale je to v skutočnosti tá istá rovnica, lebo $1 + 2B = (AB)^2$. Riešenia tejto kvadratickej rovnice dostanem v tvare

$$s_{1,2} = \frac{AB \pm \sqrt{2 - (AB)^2}}{2}.$$

3. Pokiaľ by som použila prvý a tretí vzťah (4.3), (4.5), dostanem rovnicu štvrtého rádu, ale tentoraz ľahko riešiteľnú. (Takáto rovnica sa nazýva bikvadratická.) Teda

$$c = \frac{B}{s} \quad \Rightarrow \quad s^2 + \left(\frac{B}{s}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad s^4 - s^2 + B^2 = 0.$$

Riešenia tejto rovnice štvrtého rádu dostanem v tvare

$$s_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4B^2}}{2}}\,.$$

Vezmem samozrejme len dve kladné.

Na zistenie hľadanej hodnoty $20s$ potrebujem dosadiť za A, B. Najviac sa mi pozdáva tá druhá varianta, kde dosadzujem len za AB a je tam len jedna odmocnina. Tie zvyšné už tu neuvádzam.

Najskôr spočítam, že

$$AB = \frac{1 + \sqrt{1 + A^2}}{A} = \frac{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{10}{3}\right)^2}}{\frac{10}{3}} = \frac{3 + \sqrt{109}}{10}\,.$$

Mám teda

$$\begin{aligned}20s_{1,2} &= 10\left(AB \pm \sqrt{2-(AB)^2}\right)\\ &= 3+\sqrt{109} \pm \sqrt{200-\left(3+\sqrt{109}\right)^2}\\ &= 3+\sqrt{109} \pm \sqrt{82-6\sqrt{109}}\,.\end{aligned}$$

Hotovo. Horný koniec tyče sa nachádza zhruba vo výške $9,04\,\mathrm{m}$ alebo $17,84\,\mathrm{m}$.

Ešte pre zaujímavosť odvodím vzťah medzi hľadanou výškou a dĺžkou tyče a hrany debny. Označím si tieto hodnoty postupne h, t, d a nedosadím za A tých $\frac{10}{3}$ ale $\frac{t}{d}$ a upravím na tvar

$$\begin{aligned}h_{1,2} = ts_{1,2} &= \frac{t}{2}\left(\frac{1+\sqrt{1+A^2}}{A} \pm \sqrt{2-\left(\frac{1+\sqrt{1+A^2}}{A}\right)^2}\right)\\ &= \frac{\frac{t}{A}+t\sqrt{\frac{1}{A^2}+1} \pm t\sqrt{1-\frac{2}{A^2}-2\sqrt{\frac{1}{A^4}+\frac{1}{A^2}}}}{2}\\ &= \frac{d+t\sqrt{\frac{d^2}{t^2}+1} \pm t\sqrt{1-\frac{2d^2}{t^2}-2\sqrt{\frac{d^4}{t^4}+\frac{d^2}{t^2}}}}{2}\\ &= \frac{d+\sqrt{d^2+t^2} \pm \sqrt{t^2-2d^2-2d\sqrt{d^2+t^2}}}{2}\\ &= \frac{d+\sqrt{d^2+t^2} \pm \sqrt{\left(d-\sqrt{d^2+t^2}\right)^2-4d^2}}{2}\,.\end{aligned}$$

Ten tvar vyzerá podozrivo, skoro ako keby to boli dve riešenia nejakej kvadratickej rovnice. Úplne to nesedí, ale môžem to ešte trochu upraviť a mám

$$h_{1,2} = d + \frac{\sqrt{d^2+t^2}-d \pm \sqrt{\left(d-\sqrt{d^2+t^2}\right)^2-4d^2}}{2}\,.$$

Z tohto tvaru už vidno, že hodnoty $y_{1,2} = h_{1,2} - d$ sú riešeniami kvadratickej rovnice

$$y^2 + \left(d-\sqrt{d^2+t^2}\right)y + d^2 = 0.$$

Takže teraz viem napísať ten polynóm štvrtého rádu z rovnice (4.1), ktorá mi vyšla z prvého postupu, ako súčin dvoch polynómov druhého rádu

$$\begin{aligned}&y^2(y+d)^2 + d^2(y+d)^2 - t^2y^2\\ &\qquad = \left(y^2+\left(d-\sqrt{d^2+t^2}\right)y+d^2\right)\left(a_2y^2+a_1y+a_0\right),\end{aligned}$$

kde koeficienty a_0, a_1, a_2 dopočítam tak, aby sa výrazy rovnali. Dostanem potom, že $a_0 = d^2$, $a_1 = d + \sqrt{d^2+t^2}$ a $a_2 = 1$. Mám teda

$$\begin{aligned} &y^2(y+d)^2 + d^2(y+d)^2 - t^2y^2 \\ &\qquad = \left(y^2 + \left(d - \sqrt{d^2+t^2}\right)y + d^2\right)\left(y^2 + \left(d + \sqrt{d^2+t^2}\right)y + d^2\right) \\ &\qquad = (y^2 + dy + d^2)^2 - (d^2+t^2)y^2. \end{aligned}$$

Rovnica štvrtého rádu (4.1) sa teda predsa len dala prepísať do pekného tvaru

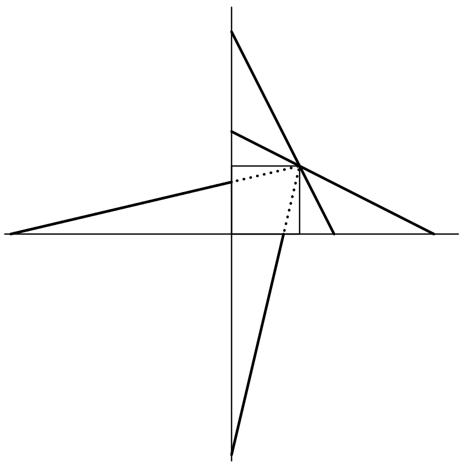
$$y^2(y+6)^2 + 36(y+6)^2 - 400y^2 = (y^2+6y+36)^2 - 436y^2 = 0.$$

Napadlo vás to?

Zaujímalo by ma ešte, čo sú zač jej ďalšie dve riešenia. Je ľahké dopočítať, že ďalšie dve výšky horného konca tyče vychádzajú

$$h_{3,4} = y_{3,4} + d = 3 - \sqrt{109} \pm \sqrt{82 + 6\sqrt{109}},$$

jedna hodnota je kladná a jedna záporná, zhruba je to $4,59$ a $-19,48$. Čo znamenajú, sa dá vidieť na obrázku 4.



Obrázek 4. .

Viera Štoudková Růžičková, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: `ruzickova@fme.vutbr.cz`