O KŘIVKÁCH A KŘIVOSTECH

JOSEF ŠILHAN a VOJTĚCH ŽÁDNÍK

Abstrakt. Vyjádření křivostí křivek v eukleidovské rovině a prostoru je velice standardním cvičením z diferenciální geometrie. Ve výsledných vzorcích vztažených k obecné parametrizaci křivky lze vidět obsahy rovnoběžníků, příp. objemy rovnoběžnostěnů určených prvními třemi derivacemi křivky. Analogické vztahy pro vyšší křivosti v prostorech vyšší dimenze se v literatuře hledají nesnadno, ačkoli jsou velmi snadno odvoditelné. V tomto příspěvku ukážeme, jak na to.

1. Úvod

Začneme s velmi hrubými, ale intuitivně správnými představami o křivkách v eukleidovském prostoru a jejich křivostech. Přímky nejsou křivé vůbec; jejich křivost je nulová. Kružnice jsou rovinné křivky, které jsou křivé všude stejně; jejich křivost je konstantní a nepřímo úměrná poloměru (kolikrát větší poloměr kružnice, tolikrát menší křivost). Všechny kružnice se stejným poloměrem, tedy se stejnou křivostí, jsou navzájem shodné. U obecných křivek v rovinně se jejich křivost může měnit. Pokud tuto vlastnost dokážeme nějak kvantifikovat, pak tušíme, že odpovídající veličina určuje křivku až na shodnost jednoznačně.

Šroubovice jsou křivky, které obdobně jako kružnice vypadají všude stejně křivě, ale na rozdíl od kružnic neleží v žádné rovině. K jejich popisu potřebujeme konstanty dvě, např. poloměr kružnice, která je kolmým průmětem šroubovice, a stoupání šroubovice. První konstanta souvisí s první křivostí křivky, druhá s druhou křivostí neboli torzí. Všechny šroubovice se stejnými prvními i druhými křivostmi jsou navzájem shodné. Šroubovice s nulovou torzí jsou kružnice. U obecných prostorových křivek se obě křivosti mohou měnit, ale opět tušíme, že určují křivku až na shodnost jednoznačně.

Právě popsané představy lze upřesnit několika způsoby. V odstavci 2 uvedeme pár definicí založených na pojmu styku křivek určitého řádu. Výhodou takového přístupu je zřejmý a názorný start, nevýhodou je nepříliš zřejmé zobecnění pro křivky v prostorech obecné dimenze. (Už vymezení torze v dimenzi tři se může nezasvěcenému čtenáři zdát trochu podezřelé.)

2010 *MSC.* Primární 53A04, 53A55.
Klíčová slova. Křivky, Frenetovy rovnice, invarianty relativní a absolutní.
Vznik článku byl podpořen grantem GAČR 15–11070S.

Alternativní vymezení v odstavcích 5 a 6 je založeno na existenci přirozené parametrizace křivky (parametrizace obloukem) a přirozeného ortonormálního (Frenetova) repéru podél křivky. Vyjádření infinitezimální změny tohoto přirozeného repéru vzhledem k přirozené parametrizaci vede k systému (Frenetových) rovnic, jejichž koeficienty definují podstatné invarianty křivky. Odtud je hned patrné, že takto definované invarianty určují křivku až na shodnost jednoznačně. Jednoduché cvičení ukazuje, že tyto invarianty odpovídají právě těm založených na styku křivek. Další jednoduché cvičení ukazuje, jaké je jejich vyjádření vzhledem k obecné parametrizaci křivky, viz formulky (5.3) a (6.4). Tyto vztahy lze najít (v mnoha mutacích) ve všech relevantních učebnicích a jiných zdrojích. V těchto vyjádřeních se objevují obsahy rovnoběžníků, příp. objemy rovnoběžnostěnů určených prvními třemi derivacemi křivky. To je výchozí bod našich dalších úvah.

Přístup pomocí Frenetova pohyblivého repéru má bezprostřední zobecnění pro křivky v prostorech obecné dimenze, viz odstavec 7. První překvapení skýtá až pátrání po analogiích vztahů (6.4) pro vyšší křivosti. Ty jsme nenašli v žádné nám dostupné učebnici, pouze v poměrně čerstvém článku [1] publikovaném v poměrně prestižním časopise. V tomto příspěvku chceme ukázat, že k témuž výsledku lze dospět poměrně jednoduchou kompilací dobře známých poznatků souvisejících právě s konstrukcí Frenetova repéru. Shrnutí a vyvrcholení celé diskuze nabízíme v odstavci 8, ve Větě 8.1.

Jako pomocný nástroj používáme pojem relativních invariantů křivky, viz odstavec 4. S trochou trpělivosti lze pracovat i bez nich, ale jejich použití velmi usnadňuje nejen mnohé formulace, ale také argumentace.

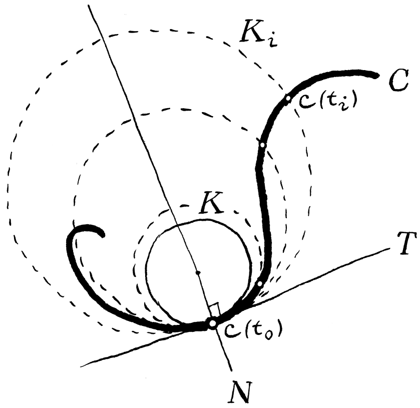
Všechny náležitosti k této klasické látce lze najít v nepřeberném množství literatury, viz např. naše oblíbené zdroje [3] a [4]. Relativní invarianty v učebnicích často nenajdeme, jednou z nemnoha výjimek je např. [2]. Při zpracovávání materiálu jsme se v mnohém inspirovali strukturou příslušného kurzu prof. Ivana Koláře, kterému tento článek věnujeme.

2. Styk křivek

V tomto odstavci nabízíme první upřesnění úvodních představ o křivostech křivek pomocí pojmu styku křivek určitého řádu. Celý odstavec je zamýšlen spíš motivačně, pročež si můžeme dovolit poměrně uvolněné formulace. Ke všem zde představeným pojmům se v dalších odstavcích vrátíme.

Styk křivek řádu 0 znamená společný bod, styk řádu 1 znamená společnou tečnu ve společném bodě. Obecně *styk řádu* r znamená stejné derivace až do řádu r ve společném bodě vzhledem k vhodným parametrizacím v okolí tohoto bodu[1]. Zde samozřejmě odkazujeme na odpovídající vektory: je-li $\mathbf{c}\colon I \to \mathbb{R}^n$ parametrizace křivky, pak pro $r = 1$ jde o tečný vektor $\mathbf{c}'$, pro $r = 2$ mluvíme o vektoru zrychlení $\mathbf{c}''$ atd. Abychom vůbec mohli uvažovat styk křivek řádu r, musí křivky samotné být alespoň řádu r, tzn. musí existovat derivace $\mathbf{c}', \mathbf{c}'', \dots$ až do řádu r včetně. Proto v dalším předpokládáme pouze křivky dostatečně vysokého řádu, aniž bychom na

[1] Jedná se o podobný vztah, jaký vládne mezi funkcí a jejím Taylorovým polynomem stupně r.



Obrázek 1. Oskulační kružnice K rovinné křivky C v bodě $c(t_0)$ je limitou, pro $t_i \to t_0$, kružnic K_i daných body $c(t_0), c(t_i) \in C$ a tečnou T v bodě $c(t_0)$.

to neustále upozorňovali. Jakoukoli veličinu odvozenou z derivací křivky do řádu r budeme zvát *veličinou řádu* r.

Tečna ke křivce v daném bodě je přímka, která s ní má v onom bodě styk prvního řádu. Je určena bodem a tečným vektorem $\mathbf{c}'$. Pokud je v nějakém bodě styk křivky a její tečny řádu vyššího, je tento bod *inflexní*. V takovém případě je vektor zrychlení $\mathbf{c}''$ (a tedy i derivované vektory vyšších řádů) násobkem tečného vektoru. Přímky jsou tedy křivky sestávající výhradně z inflexních bodů.

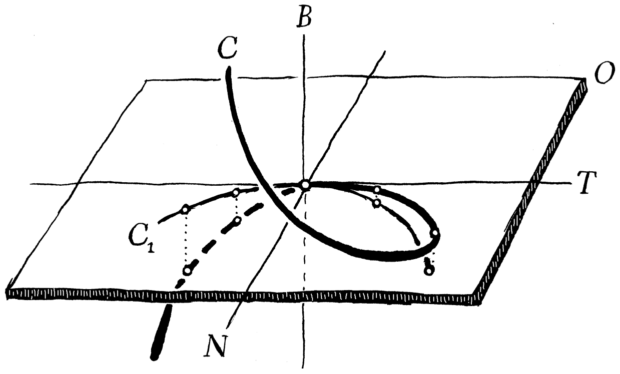
Pro rovinnou křivku v neinflexním bodě existuje kružnice, která s ní má v tomto bodě styk druhého řádu. Taková kružnice se jmenuje *oskulační* a převrácená hodnota jejího poloměru definuje *křivost* křivky v daném bodě. K oskulační kružnici lze názorně dojít limitní úvahou jako na obrázku 1.

Přitom rovinnost křivky lze charakterizovat tak, že třetí derivovaný vektor $\mathbf{c}'''$ (a tedy i derivované vektory vyšších řádů) v každém jejím bodě je (jsou) lineární kombinací tečného vektoru $\mathbf{c}'$ a vektoru zrychlení $\mathbf{c}''$. Pro prostorové křivky toto obecně neplatí; pokud náhodou ano, tak příslušné body se nazývají *planární*. Rovinné křivky jsou tedy křivky sestávající výhradně z planárních bodů.

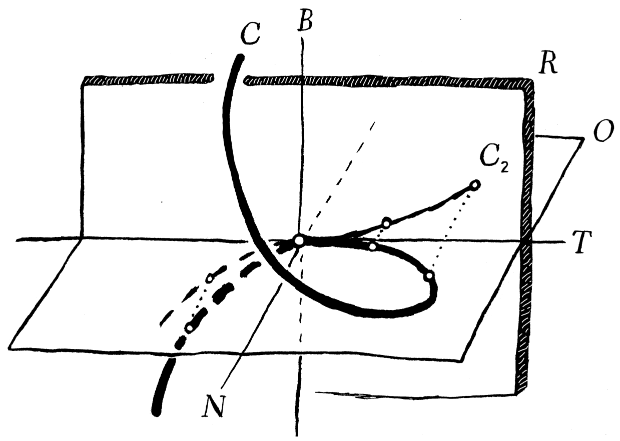
Pro prostorovou křivku v neinflexním bodě můžeme uvažovat rovinu určenou tímto bodem a prvními dvěma derivovanými vektory $\mathbf{c}'$ a $\mathbf{c}''$, tzv. *oskulační* rovinu. (První) *křivost* prostorové křivky zobecňuje předchozí definici pro křivky rovinné: je to křivost kolmého průmětu křivky do oskulační roviny.

Torze (druhá křivost) prostorové křivky je veličina, která měří, jak moc se mění její oskulační rovina, tedy jak moc křivka není rovinná. V předchozím duchu lze tuto veličinu upřesnit následovně. Rovina určená tečným vektorem křivky a normálou oskulační roviny je tzv. *rektifikační* rovina. V ní existuje kubická parabola[2],

[2]Tj. křivka určená rovnicí $z = ax^3$, kde souřadnice x odpovídá tečnému směru, z normále oskulační roviny a konstanta a představuje *stoupání* kubické paraboly.



Obrázek 2. Křivost prostorové křivky C odpovídá křivosti jejího kolmého průmětu C_1 do oskulační roviny O.



Obrázek 3. Torze prostorové křivky C odpovídá stoupání jejího kolmého průmětu C_2 do rektifikační roviny R.

která má s kolmým průmětem křivky do této roviny styk třetího řádu. *Torze* prostorové křivky pak může být definována jako (jistý konstantní násobek) stoupání odpovídající kubické paraboly. Torze je nulová právě v planárních bodech.

Z uvedeného vidíme, že křivost je skalární veličina druhého řádu, torze je řádu třetího. V inflexních bodech není ani křivost ani torze definována, jako mezní případy předchozích úvah je však můžeme považovat za nulové.

3. Parametrizace obloukem

V dalším používáme následující konvence a značení. Křivka v reálném eukleidovském prostoru $E = \mathbb{R}^n$ je obrazem prostého zobrazení (dostatečně vysokého řádu) intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ do E. Píšeme $C = c(I)$, kde $c\colon I \to E$. Zobrazení samotné, $t \mapsto c(t)$, je *parametrizací* křivky. Odpovídající polohový vektor značíme tlustě,

$t \mapsto \mathbf{c}(t)$, derivované vektory dekorujeme čárkami, proměnnou t zpravidla nepíšeme,

$$\mathbf{c}' := \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{c}, \quad \mathbf{c}'' := \tfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{c}, \quad \dots, \quad \mathbf{c}^{(i)} := \tfrac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i}\mathbf{c}.$$

Křivka je *regulární*, pokud její tečný vektor (vzhledem k libovolné parametrizaci) je všude nenulový. Všude v dalším se omezujeme pouze na regulární křivky.

Každá regulární křivka v eukleidovském prostoru má přirozenou parametrizaci odpovídající délce části křivky od jejího krajního bodu, tzv. *parametrizace obloukem*. Pro $I = [a, b]$ tento význačný parametr odpovídá reparametrizaci $s\colon [a, b] \to [0, L]$,

$$s(t) := \int_a^t \|\mathbf{c}'(u)\| \,\mathrm{d}u,$$

kde $t \in [a, b]$, L značí celkovou délku křivky a $\|\mathbf{c}'\| = \sqrt{\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'}$ velikost vektoru (přičemž tečka mezi vektory pod odmocninou značí skalární součin). Derivace vzhledem k tomuto parametru budeme pro odlišení značit tečkami, proměnnou s opět zpravidla nepíšeme,

$$\dot{\mathbf{c}} := \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbf{c}, \quad \ddot{\mathbf{c}} := \tfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\mathbf{c}, \quad \dots, \quad \overset{(i)}{\mathbf{c}} := \tfrac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}s^i}\mathbf{c}.$$

Z definice vyplývá, že tečný vektor vzhledem k této parametrizaci má konstantní velikost, a to jednotkovou, $\|\dot{\mathbf{c}}\| = 1$. Jinými slovy, parametrizace obloukem odpovídá rovnoměrnému pohybu podél křivky. Počínaje odstavcem 5 budeme právě takovou parametrizaci hojně využívat.

4. Reparametrizace a relativní invarianty

Velikost tečného vektoru je jednoduchým příkladem tzv. relativního invariantu křivky. Tímto slovním spojením označujeme veličiny, které jsou invariantní vzhledem ke všem shodným zobrazením a chovají se rozumně vzhledem k reparametrizacím křivky. Studium (metrických vlastností) křivek v eukleidovském prostoru znamená právě studium takových invariantů. Křivost a torze prostorové křivky jsou tzv. absolutní invarianty křivky. Oba nové pojmy hned upřesníme.

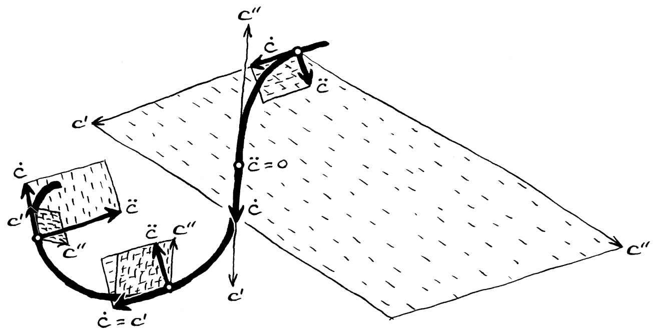
Uvažme křivku C s parametrizací $t \mapsto \mathbf{c}(t)$ a obecnou reparametrizaci $\tilde{t} = g(t)$, kde $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} \neq 0$. Pro odpovídající tečné vektory podle řetězového pravidla platí $\frac{\mathrm{d}\mathbf{c}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{c}}{\mathrm{d}\tilde{t}} \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}$. Všechny objekty vztažené k parametru $\tilde{t}$ budeme pro jednoduchost značit vlnkou, tj. $\tilde{\mathbf{c}}' = \frac{\mathrm{d}\mathbf{c}}{\mathrm{d}\tilde{t}}$ apod. Při tomto značení máme

$$\tilde{\mathbf{c}}' = g'^{-1}\mathbf{c}', \tag{4.1}$$

a tedy $\|\tilde{\mathbf{c}}'\| = g'^{-1}\|\mathbf{c}'\|$. Obecně, funkce $I\colon C \to \mathbb{R}$, která je invariantní vzhledem ke shodnostem a která se vzhledem k uvedené reparametrizaci křivky C mění jako

$$\tilde{I} = \pm g'^{-k} I,$$

se nazývá *relativním invariantem* křivky *váhy* k. Invarianty s váhou 0 jsou *absolutními invarianty* křivky, a o ty nám jde především.



Obrázek 4. Znázornění relativních invariantů V_1 a V_2 vzhledem k parametrizaci obloukem a k jisté exponenciální reparametrizaci.

Ve zbytku tohoto odstavce směřujeme k jednoduchému pomocnému tvrzení, na které se budeme záhy odkazovat. Vzhledem k právě zavedené terminologii je velikost tečného vektoru křivky, $V_1 := \|\mathbf{c}'\|$, relativním invariantem váhy 1. Derivací (4.1) dostáváme

$$\tilde{\mathbf{c}}'' = g'^{-2}\mathbf{c}'' - g'^{-3}g''\mathbf{c}'.$$

Obsah rovnoběžníku určeného vektory $\tilde{\mathbf{c}}'$ a $\tilde{\mathbf{c}}''$ je proto stejný jako obsah rovnoběžníku určeného vektory $g'^{-1}\mathbf{c}'$ a $g'^{-2}\mathbf{c}''$. Tyto obsahy (příp. za chvíli objemy) budeme značit $\mathrm{vol}(\dots)$. Z uvedeného plyne, že

$$\mathrm{vol}(\tilde{\mathbf{c}}', \tilde{\mathbf{c}}'') = g'^{-3}\,\mathrm{vol}(\mathbf{c}', \mathbf{c}''),$$

neboli funkce $V_2 := \mathrm{vol}(\mathbf{c}', \mathbf{c}'')$ je relativním invariantem váhy 3.

Obecně, pro libovolné i platí, že vektor $\tilde{\mathbf{c}}^{(i)}$ je roven $g'^{-i}\mathbf{c}^{(i)}$ až na nějakou lineární kombinaci vektorů nižších řádů,

$$\tilde{\mathbf{c}}^{(i)} \equiv g'^{-i}\mathbf{c}^{(i)} \mod \langle \mathbf{c}', \dots, \mathbf{c}^{(i-1)} \rangle.$$

Odtud vidíme, že objem rovnoběžnostěnu určeného prvními j derivovanými vektory je

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(\tilde{\mathbf{c}}', \tilde{\mathbf{c}}'', \dots, \tilde{\mathbf{c}}^{(j)}) &= g'^{-1-2-\dots-j}\,\mathrm{vol}(\mathbf{c}', \mathbf{c}'', \dots, \mathbf{c}^{(j)})\\ &= g'^{-\frac{j(j+1)}{2}}\,\mathrm{vol}(\mathbf{c}', \mathbf{c}'', \dots, \mathbf{c}^{(j)}).\end{aligned}$$

Celkem tedy dostáváme následující tvrzení.

Věta 4.1. *Funkce* $V_j := \mathrm{vol}(\mathbf{c}', \dots, \mathbf{c}^{(j)})$ *je relativním invariantem váhy* $\frac{j(j+1)}{2}$.

V trojrozměrném prostoru pochopitelně nemá smysl uvažovat jiné invarianty než V_1, V_2 a V_3, ostatní jsou automaticky nulové. Obecně, pokud je křivka obsažena v k-rozměrném podprostoru, potom nutně $V_l = 0$ pro všechna $l > k$.

Pro obecnou křivku v n-rozměrném prostoru je objem V_n všude nenulový a odpovídá – až na znaménko – vnějšímu součinu vektorů $(\mathbf{c}', \dots, \mathbf{c}^{(n)})$. To je determinant matice utvořené ze souřadnic jednotlivých vektorů (vzhledem k libovolné ortonormální bázi), který budeme značit $\det(\mathbf{c}', \dots, \mathbf{c}^{(n)})$.

5. Frenetovy rovnice v rovině

Vzhledem k parametrizaci obloukem má tečný vektor (regulární) křivky konstantní velikost 1, tj. $\dot{\mathbf{c}} \cdot \dot{\mathbf{c}} = 1$. Proto $\ddot{\mathbf{c}} \cdot \dot{\mathbf{c}} = 0$, což znamená, že vektor zrychlení $\ddot{\mathbf{c}}$ je všude k tečnému vektoru kolmý. Tento vektor je nulový právě v inflexních bodech. V neinflexním bodě má jeho velikost geometrický význam související s křivostí křivky.

Pro rovinnou křivku lze ukázat, že velikost $\|\ddot{\mathbf{c}}\|$ odpovídá právě křivosti křivky vymezené v odstavci 2 (tedy, že převrácená hodnota $1/\|\ddot{\mathbf{c}}\|$ odpovídá právě poloměru oskulační kružnice). Jak v inflexním, tak v neinflexním bodě můžeme vektor $\mathbf{e}_1 := \dot{\mathbf{c}}$ doplnit o vektor $\mathbf{e}_2$ tak, aby tato dvojice tvořila ortonormální kladně orientovanou bázi, tzv. *Frenetův repér* rovinné křivky. Zřejmě platí

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = \kappa_1 \mathbf{e}_2, \tag{5.1}$$

kde $\kappa_1 = 0$ v inflexním bodě a $\kappa_1 = \pm\|\ddot{\mathbf{c}}\|$ v neinflexním bodě. Rovnost (5.1) můžeme chápat jako definici *křivosti* křivky. Rozdíl oproti předchozímu vymezení spočívá pouze ve znaménku: kladné, resp. záporné znaménko odpovídá tomu, zda se křivka „stáčí“ souhlasně, resp. nesouhlasně s orientací roviny, viz obrázek 5. V následujícím budeme zobecňovat právě tento přístup s vědomím, že znaménka nás příliš nezajímají.

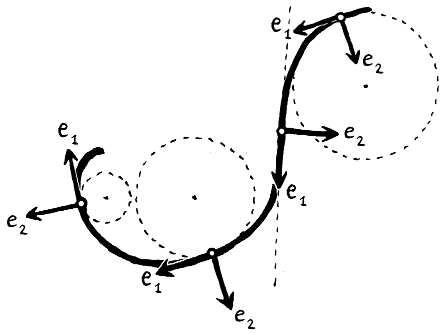
Ještě si všimněme několika věcí, které plynou z ortonormálnosti repéru $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Jednak po derivaci vztahů $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 1$ a $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$ zjišťujeme, že $\dot{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \dot{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$ a $\dot{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1 \cdot \dot{\mathbf{e}}_2$. Dále libovolný vektor v rovině lze vyjádřit jako $\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1)\,\mathbf{e}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2)\,\mathbf{e}_2$. Pro vektory $\dot{\mathbf{e}}_1$, resp. $\dot{\mathbf{e}}_2$, tak dostáváme $\dot{\mathbf{e}}_1 = (\dot{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{e}_2)\,\mathbf{e}_2$, resp. $\dot{\mathbf{e}}_2 = (\dot{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{e}_1)\,\mathbf{e}_1 = -(\dot{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{e}_2)\,\mathbf{e}_1$. Vzhledem ke značení zavedenému rovností (5.1) tedy platí

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_1 &= \kappa_1 \mathbf{e}_2, \\ \dot{\mathbf{e}}_2 &= -\kappa_1 \mathbf{e}_1. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Toto jsou tzv. *Frenetovy rovnice* pro rovinnou křivku. Dvě shodné křivky parametrizované obloukem zřejmě mají stejné křivosti. Naopak, všude nenulová funkce $s \mapsto \kappa_1(s)$ určuje křivku až na shodnost jednoznačně: pro libovolnou ortonormální bázi v libovolném bodě existuje jediné řešení systému diferenciálních rovnic (5.2), jímž je Frenetův pohyblivý repér určující křivku s křivostí κ_1[3]. Jiná počáteční podmínka určuje jinou křivku, ale protože oba počáteční repéry byly ortonormální, existuje shodnost zobrazující jeden na druhý. Tatáž shodnost pak zobrazuje i jedno řešení na druhé.

Vzhledem k hlavnímu poslání tohoto článku ještě musíme vyjádřit křivost κ_1 obecně. Vzhledem k tomu, že $\|\dot{\mathbf{c}}\| = 1$ a $\|\ddot{\mathbf{c}}\| = \pm\kappa_1$, zřejmě platí $\kappa_1 = \pm \operatorname{vol}(\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}})$. Přitom znaménko koresponduje s výše diskutovanou orientací, a to tak, že $\kappa_1 = \det(\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}})$. Z odstavce 4 víme, že $\det(\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}})$ se vzhledem k obecné reparametrizaci

[3] Podmínka $\kappa_1 \neq 0$ je nutným předpokladem pro použití příslušné věty z teorie diferenciálních rovnic. Odpovídající omezení pro křivku znamená, že je bez inflexních bodů.



Obrázek 5. Frenetův repér rovinné křivky a oskulační kružnice.

transformuje jako $\det(\mathbf{c}', \mathbf{c}'') = \|\mathbf{c}'\|^3 \det(\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}})$. Celkem tak dostáváme známý vzoreček

$$\kappa_1 = \frac{\det(\mathbf{c}', \mathbf{c}'')}{\|\mathbf{c}'\|^3} = \pm\frac{V_2}{V_1^3}\,. \tag{5.3}$$

Vzhledem k výše zavedené terminologii můžeme vztah (5.3) zdůvodnit také takto: Jak veličina v čitateli, tak veličina ve jmenovateli je relativním invariantem váhy 3. Výsledek je proto váhy 0, tedy to je absolutní invariant, a ten vzhledem k parametrizaci obloukem souhlasí s křivostí křivky. Podobným způsobem budeme argumentovat i v dalších odstavcích.

6. Frenetovy rovnice v prostoru

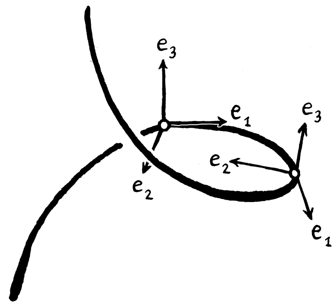
Pro prostorovou křivku můžeme postupovat obdobně, ale už o něco rychleji. Z dobrých důvodů se omezujeme pouze na křivky (nebo jejich části) bez inflexních bodů. Pokud dvojici ortonormálních vektorů $\dot{\mathbf{c}}$ a $\ddot{\mathbf{c}}/\|\ddot{\mathbf{c}}\|$ doplníme o jejich vektorový součin, dostáváme ortonormální kladně orientovanou bázi,

$$\mathbf{e}_1 := \dot{\mathbf{c}}, \qquad \mathbf{e}_2 := \frac{\ddot{\mathbf{c}}}{\|\ddot{\mathbf{c}}\|}\,, \qquad \mathbf{e}_3 := \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2,$$

tedy *Frenetův repér* prostorové křivky. Zřejmě opět platí (5.1), avšak s tím rozdílem, že (první) *křivost* je $\kappa_1 = \|\ddot{\mathbf{c}}\|$, tedy $\kappa_1 > 0$. Obdobné cvičení jako při odvozování vztahů (5.2) vede k následujícímu vyjádření infinitezimální změny Frenetova repéru, tj. k *Frenetovým rovnicím* pro prostorovou křivku

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_1 &= \kappa_1 \mathbf{e}_2, \\ \dot{\mathbf{e}}_2 &= -\kappa_1 \mathbf{e}_1 + \kappa_2 \mathbf{e}_3, \\ \dot{\mathbf{e}}_3 &= -\kappa_2 \mathbf{e}_2, \end{aligned} \tag{6.1}$$

pro nějakou funkci κ_2, kterou nazveme druhou křivostí neboli *torzí* křivky. Ze stejného důvodu jako výše, funkce κ_1 a κ_2 určují prostorovou křivku až na shodnost jednoznačně.



Obrázek 6. Frenetův repér prostorové křivky.

Lze ukázat, že tyto dva invarianty odpovídají právě křivosti a torzi vymezené v odstavci 2 (tedy pomocí kolmých průmětů křivky do oskulační a rektifikační roviny v každém bodě). Naznačíme, jak by se taková věc dokazovala, a to ze dvou důvodů: jednak chceme čtenáře průběžně utvrzovat v dojmu, že náš výklad je konzistentní, jednak část uvedených postřehů budeme záhy potřebovat.

Taylorův rozvoj parametrizace křivky v okolí bodu odpovídajícího parametru s_0 je tvaru

$$\mathbf{c}(s) = \mathbf{c}(s_0) + \dot{\mathbf{c}}(s_0)\, s + \tfrac{1}{2}\ddot{\mathbf{c}}(s_0)\, s^2 + \tfrac{1}{6}\dddot{\mathbf{c}}(s_0)\, s^3 + o(s^4),$$

kde $o(s^4)$ značí členy alespoň čtvrtého řádu. Z definice $\mathbf{e}_1 = \dot{\mathbf{c}}$ a Frenetových rovnic (6.1) postupně vyjádříme derivované vektory do řádu tři

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{c}} &= \dot{\mathbf{e}}_1 = \kappa_1 \mathbf{e}_2, \\ \dddot{\mathbf{c}} &= \dot{\kappa}_1 \mathbf{e}_2 + \kappa_1 \dot{\mathbf{e}}_2 = -\kappa_1^2 \mathbf{e}_1 + \dot{\kappa}_1 \mathbf{e}_2 + \kappa_1 \kappa_2 \mathbf{e}_3. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Dosazením do předchozího rozvoje, po zřejmé úpravě, dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(s) = \mathbf{c}(s_0) &+ \mathbf{e}_1 \left(s - \tfrac{1}{6}\kappa_1^2(s_0)\, s^3\right) \\ &+ \mathbf{e}_2 \left(\tfrac{1}{2}\kappa_1(s_0)\, s^2 + \tfrac{1}{6}\dot{\kappa}_1(s_0)\, s^3\right) \\ &+ \mathbf{e}_3 \left(\tfrac{1}{6}\kappa_1(s_0)\kappa_2(s_0)\, s^3\right) + o(s^4). \end{aligned}$$

Oskulační rovina je určena vektory $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$, rektifikační rovina je určena vektory $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_3$. Z právě uvedeného je patrné, jak vyjádřit kolmé průměty křivky do těchto rovin a také jak s nimi případně nakládat: máme jejich analytický popis do řádu tři a oba invarianty, se kterými chceme tyto průměty porovnávat, jsou řádu nejvýše tři.

Vzhledem k hlavnímu poslání tohoto článku ještě musíme vyjádřit křivosti prostorové křivky obecně. Vyjádření křivosti κ_1 je stejné jako v odstavci 5 až na znaménko. Zejména $\kappa_1 = \mathrm{vol}(\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}}) > 0$. K vyjádření torze κ_2 si stačí povšimnout, že

$$\det(\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}}, \dddot{\mathbf{c}}) = \det(\mathbf{e}_1, \kappa_1 \mathbf{e}_2, \kappa_1\kappa_2 \mathbf{e}_3) = \kappa_1^2 \kappa_2 \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \kappa_1^2 \kappa_2, \tag{6.3}$$

což plyne z (6.2), vlastností determinantu a faktu, že trojice $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ tvoří kladnou ortonormální bázi. Odtud dostáváme

$$\kappa_2 = \frac{\det(\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}}, \dddot{\mathbf{c}})}{\operatorname{vol}(\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}})^2}\,.$$

Vzhledem k závěrům odstavce 4 víme, že jak veličina v čitateli, tak veličina ve jmenovateli je relativním invariantem váhy 6. Výsledek je proto váhy 0 a uvedený vztah je platný vzhledem k libovolné parametrizaci křivky. Celkem tak dostáváme známé vzorečky

$$\kappa_1 = \frac{\operatorname{vol}(\mathbf{c}', \mathbf{c}'')}{\|\mathbf{c}'\|^3} = \frac{V_2}{V_1^3}\,, \qquad \kappa_2 = \frac{\det(\mathbf{c}', \mathbf{c}'', \mathbf{c}''')}{\operatorname{vol}(\mathbf{c}', \mathbf{c}'')^2} = \pm\frac{V_3}{V_2^2}\,. \tag{6.4}$$

Podobně jako u křivosti rovinné křivky, znaménko torze prostorové křivky nám říká něco o tom, jak se křivka „kroutí“ vzhledem k orientaci prostoru. V planárních bodech je torze zřejmě nulová a naopak.

7. Frenetovy rovnice v obecné dimenzi

Pro křivku v eukleidovském prostoru obecné dimenze n můžeme její *Frenetův repér* budovat pomocí Gramova–Schmidtova nakolmovacího procesu,

$$\mathbf{f}_i := \overset{(i)}{\mathbf{c}} - \sum_{j=1}^{i-1} (\overset{(i)}{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{e}_j)\, \mathbf{e}_j, \qquad \mathbf{e}_i := \frac{\mathbf{f}_i}{\|\mathbf{f}_i\|}, \tag{7.1}$$

pro $i = 1, 2, \ldots$. Skutečný repér dostaneme pouze v případě, že prvních $n-1$ derivovaných vektorů křivky je nezávislých[4]. V takovém případě je posloupnost $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}$ ortonormální a jejich vektorový součin $\mathbf{e}_n := \mathbf{e}_1 \times \cdots \times \mathbf{e}_{n-1}$ ji doplňuje do ortonormální kladně orientované báze celého prostoru. Pokud je křivka obsažena v podprostoru dimenze k (a žádném menším), potom je prvních k vektorů z posloupnosti (7.1) nezávislých, ostatní jsou nulové. Zúžením na příslušný podprostor můžeme křivku uspokojivě studovat ve stejném duchu. V následujícím se proto dobrovolně omezujeme pouze na křivky splňující výše uvedenou podmínku.

Obdobně jako před (5.2) a (6.1) si uvědomujeme, že z ortonormálnosti repéru $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ plyne jednak obecné vyjádření

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \sum_{j=1}^{i+1} (\dot{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j)\, \mathbf{e}_j \tag{7.2}$$

pro $i = 1, \ldots, n$ a jednak vztahy

$$\dot{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} 0, & \text{pro } i = j, \\ -\mathbf{e}_i \cdot \dot{\mathbf{e}}_j, & \text{pro } i \neq j. \end{cases}$$

[4] Pro $n = 2$, resp. 3 tato podmínka koresponduje právě s podmínkou regulárnosti, resp. neinflexnosti.

Odtud je patrné, že většina koeficientů v (7.2) je automaticky nulová a mezi zbylými vládnou přísné (anti-)symetrie. Tím dospíváme k *Frenetovým rovnicím* pro obecnou křivku v n-rozměrném prostoru

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_1 &= \kappa_1 \mathbf{e}_2, \\ \dot{\mathbf{e}}_i &= -\kappa_{i-1}\mathbf{e}_{i-1} + \kappa_i \mathbf{e}_{i+1} \qquad \text{pro } i = 2, \dots, n-1, \\ \dot{\mathbf{e}}_n &= -\kappa_{n-1}\mathbf{e}_{n-1} \end{aligned} \tag{7.3}$$

pro nějaké funkce $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$, které nazýváme ***křivostmi*** křivky. Ty určují křivku až na shodnost jednoznačně. Prvních $n-2$ křivostí je kladných, poslední (také přezdívaná *torze*) může mít znaménko jakékoli. Obecná i-tá křivost je zřejmě řádu $i+1$.

Z uvedeného mimo jiné známe vyjádření křivostí pomocí vektorů z Frenetova repéru vzhledem k parametrizaci obloukem,

$$\kappa_i = \dot{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_{i+1}.$$

V následujícím odstavci konečně představíme vyjádření pomocí původních vektorů vzhledem k obecné parametrizaci.

8. Absolutní invarianty v obecné parametrizaci

Nejprve vzhledem k Frenetovu repéru vyjádříme derivované vektory křivky při parametrizaci obloukem. Z definice $\mathbf{e}_1 = \dot{\mathbf{c}}$ a Frenetových vztahů (7.3) postupně dostáváme (6.2) atd. Obecně, pro $i = 1, \dots, n$, platí

$$\overset{(i)}{\mathbf{c}} \equiv \kappa_1 \cdots \kappa_{i-1} \mathbf{e}_i \mod \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{i-1} \rangle. \tag{8.1}$$

Z konstrukce Frenetova repéru víme, že

$$\overset{(i)}{\mathbf{c}} \equiv \pm \|\mathbf{f}_i\|\, \mathbf{e}_i \mod \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{i-1} \rangle$$

pro všechna i, viz (7.1). Přitom znaménko na pravé straně je kladné pro všechna $i = 1, \dots, n-1$, pouze pro $i = n$ může být jakékoli. Z předchozích dvou rovností dostáváme

$$\kappa_1 \cdots \kappa_{i-1} = \pm \|\mathbf{f}_i\|.$$

Tedy, pro všechna přípustná i, platí

$$\kappa_{i-1} = \pm \frac{\|\mathbf{f}_i\|}{\|\mathbf{f}_{i-1}\|}\,. \tag{8.2}$$

Z konstrukce Frenetova repéru také víme, že velikost $\|\mathbf{f}_i\|$ představuje výšku rovnoběžnostěnu určeného vektory $\dot{\mathbf{c}}, \dots, \overset{(i)}{\mathbf{c}}$ vzhledem ke stěně určené vektory $\dot{\mathbf{c}}, \dots, \overset{(i-1)}{\mathbf{c}}$. Pro odpovídající objemy proto platí

$$V_i = V_{i-1} \cdot \|\mathbf{f}_i\|.$$

Odtud a z (8.2) se tedy dozvídáme, že, pro libovolné $i = 1, \dots, n-1$, platí

$$\kappa_i = \pm \frac{V_{i+1} \cdot V_{i-1}}{V_i^2}\,. \tag{8.3}$$

Tím jsme vyjádřili jednotlivé křivosti pomocí objemů příslušných rovnoběžnostěnů asociovaných k dané křivce. Ty jsme až dosud vztahovali k parametrizaci obloukem. Vzhledem k tomu, že se jedná o relativní invarianty křivky, umíme bez jakéhokoli zvláštního úsilí přejít ke slibovanému obecnému vyjádření.

Věta 8.1. *Pro libovolnou křivku s libovolnou parametrizací a pro libovolné* $i = 1, \dots, n-1$ *platí*

$$\kappa_i = \pm \frac{V_{i+1} \cdot V_{i-1}}{V_1 \cdot V_i^2}\,. \tag{8.4}$$

Důkaz. Podle Věty 4.1 je výraz na pravé straně (8.4) relativním invariantem váhy

$$\frac{(i+1)(i+2)}{2} + \frac{(i-1)i}{2} - 1 - i(i+1) = 0,$$

tedy to je absolutní invariant. Pro parametrizaci obloukem je $V_1 = 1$, tedy (8.4) souhlasí s (8.3). □

Pro upřesnění: všechny křivosti až na poslední jsou kladné, znaménko κ_{n-1} může být jakékoliv.

Pro ověření: dosazením $i = 1$ a 2 do (8.4) skutečně dostáváme vzorečky (5.3), resp. (6.4).

Pro zajímavost: přímo z (8.1) plyne následující zobecnění vztahu (6.3),

$$V_i = \pm \prod_{j=1}^{i} \kappa_j^{i-j}.$$

Odtud lze matematickou indukcí dokázat platnost (8.3), aniž bychom odkazovali na vektory $\mathbf{f}_i$ a jejich velikosti. Výše představené odvození se nám zdá přímější, tedy pro tento typ výkladu příhodnější.

Reference

[1] J. Gutkin: *Curvatures, volumes and norms of derivatives for curves in Riemannian manifolds*, Journal of Geometry and Physics **61** (2011), No. 11, 2147–2161.

[2] V. Hlavatý: *Diferenciální geometrie křivek a ploch a tensorový počet*, Jednota čsl. matematiků a fysiků, Praha, 1937.

[3] W. Kuehnel: *Differential geometry: curves, surfaces, manifolds*, American Mathematical Society, Providence, 2015.

[4] M. Spivak: *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. 2*, Publish or Perish, Houston, 1999.

Josef Šilhan, Přírodovědecká fakulta, Masarykova Univerzita, Kotlářská 2, 611 37, Brno, *e-mail*: `silhan@math.muni.cz`

Vojtěch Žádník, Pedagogická fakulta, Masarykova Univerzita, Poříčí 31, 603 00 Brno, *e-mail*: `zadnik@mail.muni.cz`