BUNĚČNÉ AUTOMATY – DYNAMICKÉ SYSTÉMY V DISKRÉTNÍM SVĚTĚ

PETR STEHLÍK

ABSTRAKT. Cílem tohoto článku je představení buněčných automatů jako matematických modelů a jejich srovnání s jinými dynamickými systémy. Ukážeme si, že tyto jednoduché plně diskrétní modely umožňují vznik bohatého množství jevů – periodického chování, cestujících profilů i chaotického chování. Jsou uvedeny jednoduché příklady elementárních buněčných automatů a Hry života jako významného dvourozměrného buněčného automatu.

1. Úvod

V obecném smyslu představují dynamické systémy matematické modely popisující vývoj veličin v čase. Zkoumaná veličina může být fyzikální (pozice pohybujícího se tělesa v prostoru), chemická (koncentrace reagujících látek), biologická (velikost populace), epidemiologická (nakaženost populace), ekonomická (inflace či HDP), atd. Nejčastěji používanými dynamickými systémy jsou spojité dynamické systémy, které jsou typicky reprezentovány obyčejnými či parciálními diferenciálními rovnicemi

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t) \in Y, \; t \in \mathbb{R}$$

kde Y je abstraktní stavový prostor (typicky $\mathbb{R}$ v případě obyčejných diferenciálních rovnic).

V poslední době zaznamenáváme rozmach diskrétních dynamických systémů, ve kterých je čas uvažován diskrétní

$$x(t+1) = f(t, x(t)), \quad x(t) \in Y, \; t \in \mathbb{Z}. \tag{1.1}$$

Důvodem je jednak jejich zajímavé chování (např. teorie deterministického chaosu [13, 10]), přirozeně diskrétní vnímání času v biologických, ekonomických a dalších modelech [1, 3, 14] i rozmach informatiky a numerické matematiky.

Buněčné automaty lze z širšího pohledu vnímat jako dynamické systémy, ve kterých je čas, prostor i stavový prostor diskrétní, viz tabulku 1.

Vznik teorie buněčných automatů se váže na jméno Johna von Neumanna a čtyřicátá léta dvacátého století [15]. Není vůbec náhodou, že se časově i autorem překrývá se vznikem moderní informatiky. Cílem Johna von Neumanna

2010 *MSC.* Primární 37B15.
Klíčová slova. Buněčné automaty, dynamické systémy, chaos, diferenční rovnice.

	Čas	Prostor	Stavový prostor
obyčejné diferenciální rovnice	spojitý	-	spojitý
obyčejné diferenční rovnice	diskrétní	-	spojitý
parciální diferenciální rovnice	spojitý	spojitý	spojitý
parciální diferenční rovnice	diskrétní	spojitý	spojitý
mřížkové diferenciální rovnice	spojitý	diskrétní	spojitý
buněčné automaty	diskrétní	diskrétní	diskrétní

Tabulka 1. Příklady dynamických systémů v souvislosti s použitou povahou času, prostoru a stavového prostoru.

a jeho kolegů (např. Stanislawa Ulama) bylo vytvořit jednoduché modely napodobující přírodní systémy, které umožňují na základě jednoduchých lokálních pravidel komplexní globální chování. Mnohé fyzikální a biologické systémy mají vlastnosti buněčných automatů [8]. Z biologických aplikací získaly buněčné automaty i své jméno. Jednotlivým bodům diskrétního prostoru říkáme buňky.

Cílem tohoto článku je představení základních pojmů a vlastností týkajících se buněčných automatů. Po jeho přečtení by čtenář měl získat základní přehled o bohatém chování, které se u triviálních buněčných automatů vyskytuje – periodické chování, cestující profily i chaotické chování.

2. Buněčné automaty

Abstraktní definice buněčného automatu, se kterou budeme v tomto článku pracovat, je následující:

Definice 2.1. Buněčný automat $\mathcal{C} = (\mathbb{T}, X, S, f)$ je dynamický systém s diskrétním časem $\mathbb{T}$, diskrétním prostorem X, diskrétní množinou stavů S a přepisovacím pravidlem $f : S^X \to S$.

Vzhledem k abstraktnosti a šířce tohoto pojmu, okomentujme jednotlivé součásti této definice.

Čas $\mathbb{T}$ je brán výlučně diskrétní, typicky jako podmnožina přirozených čísel $\mathbb{N}_0$ nebo celých čísel $\mathbb{Z}$. V každém časovém okamžiku $t \in \mathbb{T}$ dochází k aktualizaci všech buněk[1] diskrétního prostoru X podle lokálního přepisovacího pravidla f.

Pro množiny A, B budeme značit A^B všechna zobrazení B do A. V našem případě S^X je množina všech různých zobrazení, které každé buňce $x \in X$ přiřadí jeden stav $s \in S$. Je-li např. stavová množina tříprvková $S = \{a, b, c\}$ a prostorová množina čtyřprvková $X = 0, 1, 2, 3$, pak je S^X množina s $4^3 = 256$ prvky

$$S^X = \{aaaa, aaab, aaac, baaa, \dots, cccb, cccc\}.$$

[1] V případě, že jde o současnou aktualizaci všech buněk, mluvíme o synchronním buněčném automatu, jinak jde o asynchronní buněčný automat. V tomto článku se budeme zabývat výlučně automaty synchronními, ale existují i asynchronní automaty, kde je např. v každém časovém okamžiku aktualizována vždy jedna jediná buňka, např. postupně, tzn. jedna za druhou dle daného pořadí - pak mluvíme o sekvenciálních asynchronních automatech.

Diskrétní prostor X je tvořený tzv. buňkami a pro jednoduchost je typicky uvažována d-rozměrná mřížka $\mathbb{Z}^d$, kde $d \in \mathbb{N}$ je dimenze mřížky. Obecně ale může být stavovým prostorem libovolný neorientovaný graf $G = (V, E)$, např. pravidelná šestiúhelníková mřížka, apod. Jednotlivé vrcholy grafu $v \in V$ představují následně buňky a hrany $e \in E$ pak jejich sousedství.

Stavový prostor S je také (na rozdíl např. od diferenčních rovnic) diskrétní, tj. konečná (výjimečně spočetná) množina stavů. Nejtriviálnější a nejčastěji studovaná situace je případ, kdy stavovým prostorem je dvouprvková (binární)[2] množina $S = \{0, 1\}$. Víceprvkové stavové prostory jsou již méně běžné a jsou vázány na specifické modely (např. počty onemocnění, dětí, počet obyvatel apod.).

Každá buňka $x \in X$ má své lokální okolí. Označme $N_1(x)$ všechny buňky ve vzdálenosti 1 od buňky x a $N_{\leq 1}(x)$ všechny buňky ve vzdálenosti nejvýše jedna (tj. $N_{\leq 1}(x) = N_1(x) \cup \{x\}$). Obdobně definujeme i okolí k-tého řádu (nebo stručně k-okolí) $N_{\leq k}(x)$, představující sousedy nejvýše ve vzdálenosti $k \in \mathbb{N}$.

Lokální přepisovací pravidlo $f : S^m \to S$ udává, jakým způsobem se bude stav buňky měnit na základě jejího okolí. Typicky předpokládáme, že $m = m(x) = |N_{\leq k}(x)|$ je velikost nějakého k-okolí, a tedy počet buněk, které ovlivňují stav buňky v dalším kroku.

Lokální přepisovací pravidla následně generují globální přepisovací pravidlo (v teorii diskrétních dynamických systémů nazývané též time-1 map) $F\colon S^X \to S^X$. Pro danou konfiguraci $u(t, x) \in S$ v čase $t \in \mathbb{N}$ a buňce $x \in X$

$$u(t + 1, x) = F(u(t, x)),$$

což je dynamický zápis buněčného automatu odpovídající dynamické verzi diferenčních rovnic (1.1). Lokální i globální přepisovací pravidla mohou samozřejmě být i neautonomní (časově závislé)

$$u(t + 1, x) = F(t, u(t, x)).$$

Jejich složitost však již překračuje úvodní charakter tohoto textu.

3. Elementární buněčné automaty

Nejjednodušší třídou buněčných automatů (a zároveň jedinou třídou, o které lze říci, že je kompletně matematicky popsána) jsou tzv. elementární buněčné automaty.

Definice 3.1. Elementární buněčný automat $\mathcal{E} = (\mathbb{T}, X, S, f) = (\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \{0, 1\}, f)$ je buněčný automat s diskrétním časem $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ definovaný na jednodimenzionální mřížce $X = \mathbb{Z}$, nabývající binární množiny stavů $S = \{0, 1\}$ a autonomním lokálním přepisovacím pravidlem f závisejícím pouze na 1-okolí dané buňky.

Díky podmínce na 1-okolí je stav v čase $t + 1$ určen vždy jen pomocí buňky samotné a jejích dvou sousedů. Uvažujeme tedy 1-okolí $N_{\leq 1}(x)$ a lokální pravidlo

[2]Kromě jednoduchosti nachází dvouprvkové množiny mnoho aplikací a dvojice prvků mohou reprezentovat např. stav živého organizmu (mrtvý × živý), stav v modelech spolupráce (nespolupráce × spolupráce), nakaženost organizmu (zdravý × nakažený), znalost informace (nezná × zná), apod.

bude zobrazení $f\colon S^3 \to S$. Existuje přesně 2^3 konfigurací pro toto okolí (111, 110, 101, 100, 011, 010, 001, 000), kde budeme předpokládat vždy, že hodnoty jdou za sebou v pořadí levý soused, buňka samotná a pravý soused. Přepisovací pravidlo musí pro každou z těchto konfigurací jednoznačně určit stav v následujícím čase, možnosti jsou opět jen dvě (0 nebo 1). Následně existuje $2^8 = 256$ elementárních buněčných automatů.

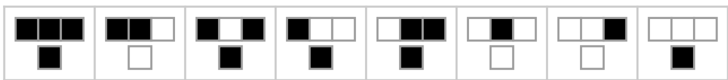
Tyto buněčné automaty jsou jednoduše očíslovatelné pomocí binárních kódů, takže např. elementární buněčný automat 185 (tzv. pravidlo 185) můžeme binárně rozepsat jako

$$185 = 1\,.\,2^7 + 0.2^6 + 1\,.\,2^5 + 1\,.\,2^4 + 1\,.\,2^3 + 0\,.\,2^2 + 0\,.\,2^1 + 1\,.\,2^0,$$

čemuž odpovídá, že centrální buňka bude v čase $t+1$ mít následující hodnoty na základě jakékoliv z osmi kombinací v čase t,

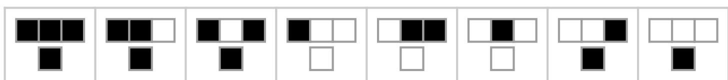
v čase t	111	110	101	100	011	010	001	000
v čase $t+1$	1	0	1	1	1	0	0	1

přičemž tuto tabulku lze vnímat jako definici přepisovacího pravidla $f\colon \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$. Pravidlo můžeme jednoduše vizualizovat[3] (černá odpovídá 1 a bílá 0)

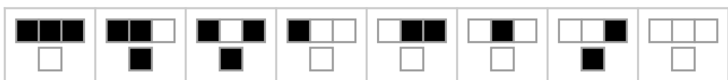


Existuje mnoho způsobů jak ztotožnit chování elementárních buněčných automatů. Tím nejjednodušším je možnost, kdy naivně vyměníme jedničky za nuly, apod. Proto se zavádí tzv. třídy ekvivalentních pravidel, které mohou mít jeden z následujících tří vztahů:

- zrcadlení (prohození zleva doprava). Např. zrcadlením pravidla 185 dostáváme pravidlo 227 (pořadí vizualizace jednotlivých konfigurací zůstává ale nezměněno, vždy podle binárního kódu, viz výše)

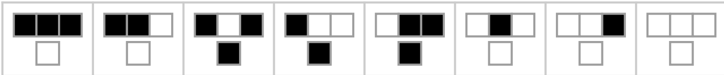


- přebarvení (prohození 0 na 1 a opačně jak u vstupu tak na výstupu). Např. přebarvením pravidla 185 dostáváme pravidlo 98.

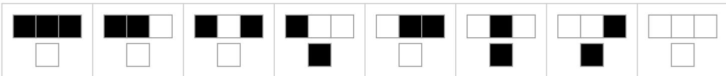


- kombinace zrcadlení a přebarvení. Např. zrcadlením a přebarvením z pravidla 185 dostáváme pravidlo 56.

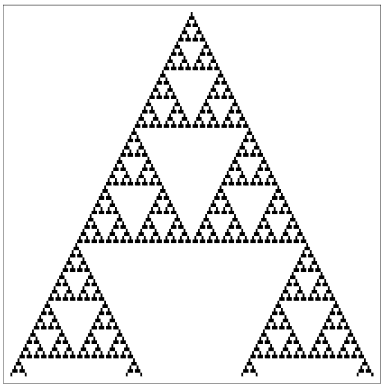
[3] Většina vizualizací v tomto textu byla vytvořena pomocí programu Wolfram Mathematica, ve kterém jsou, díky úzkému vztahu Steva Wolframa k buněčným automatům [15], elegantně a efektivně implementovány veškeré základní relevantní funkce. Čtenáři se zájmem doporučujeme jako první krok bohaté možnosti funkce `CellularAutomaton[]`.

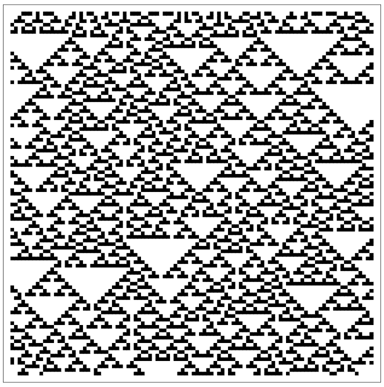


Dynamika těchto podmínek je následně vizualizována tak, že na ose x je prostor a na ose y je čas, s tím, že čas probíhá shora dolů, tj. první řádek odpovídá času $t = 0$, druhý řádek času $t = 1$, atd. Ilustrujme si na příkladu pravidla 22



Na následujících obrázcích vidíme vlevo aplikaci pravidla 22 na počáteční podmínku s jednou jedničkou a samými nulami[4] a vpravo aplikaci pravidla 22 na náhodnou počáteční podmínku





Lze ukázat (viz [15]), že existuje 88 jedinečných pravidel, které nelze těmito operacemi navzájem převést. Z každé třídy ekvivalence se jako reprezentant volí to nejmenší z nich. Např. výše uvedené ekvivalentní úpravy ukazují, že pravidla 185, 227, 98 a 56 jsou ekvivalentní a jako reprezentant této třídy ekvivalence se volí pravidlo 56, apod.[5]

---

[4] Počáteční podmínky s jednou jedničkou vedou na další zajímavou otázku, kterou se zde zabývat nebudeme. Jak vypadá posloupnost počtu jedniček či binárních rozvojů v čase t? Otázka je nezajímavá pro lichá pravidla (pravidla s lichým číslem), které kombinaci 000 připisují jedničku a tím pádem hned v druhém kroku je jedniček nekonečně, ale v případě sudých pravidel (pravidel se sudými čísly) existují zajímavé souvislosti s jednoduchými posloupnostmi. Např. pravidlo 220 umožňuje šíření jedniček směrem doprava (1, 11, 111, ...) a proto jejich počet je triviálně $p(n) = n + 1$, což vede na binární rozvoje čísel

$$1, 3, 7, 15, 31, 63, \dots,$$

což ale není nic jiného než posloupnost

$$b(n) = 2^{n+1} - 1.$$

Pro další pravidla příslušné posloupnosti nejsou již tak triviální, více v [15].

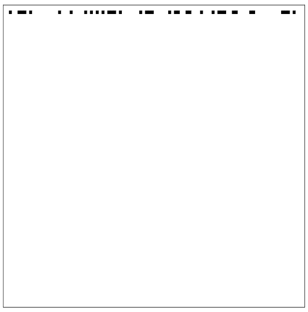
[5] Všimněme si, že ekvivalentních tříd je 88, což je více než $256 : 4 = 64$. Důvodem je, že mnohá pravidla (např. triviálně pravidlo 0 a 255) jsou zrcadlovým obrazem sama k sobě.

Těchto 88 pravidel má velmi odlišné chování, Steve Wolfram [15] je roztřídil na 4 třídy, které později Culik a Yu [5] mírně modifikovali a formálně definovali podle třídění dynamických systémů Ilji Prigogina, nositele Nobelovy ceny, jako stavy vedoucí k rovnováze, periodickému chování, deterministickému chaosu a komplexnímu nepopsatelnému chování:

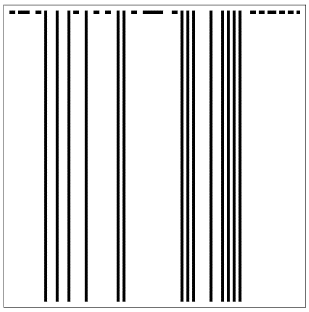
- **Třída 1 - Neměnné stavy.** Všechny konečné počáteční konfigurace $s \in S^X$ se vyvíjejí do homogenního stavu, tj. existuje $\rho \in S^X$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n > n_0$

$$F^n(s) = \rho.$$

Pravidlo 0



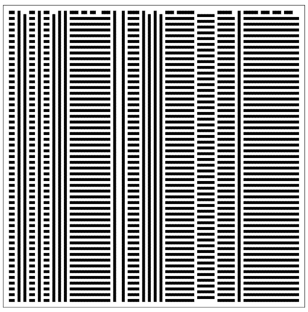
Pravidlo 4



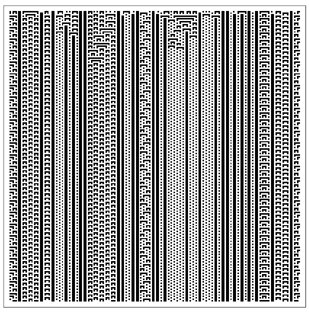
- **Třída 2 - Periodické stavy.** Všechny konečné počáteční konfigurace $s \in S^X$ se po konečném počtu kroků dostávají do opakujících se konfigurací, tj. existuje $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$ tak, že

$$F^n(s) = F^m(s).$$

Pravidlo 5



Pravidlo 73

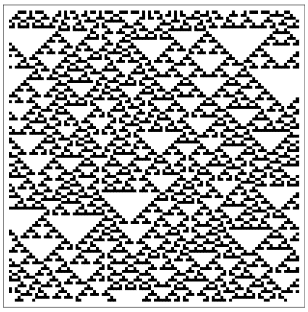


- **Třída 3 - (Deterministicky) chaotické chování.** Existuje algoritmus, který dokáže určit, zda-li konečná konfigurace $s_1 \in S^X$ patří do trajektorie[6] konfigurace $s_2 \in S^X$, tj. platí-li pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, že

$$F^n(s_2) = s_1.$$

[6](Kladná) trajektorie počáteční konfigurace x_0 diskrétního dynamického systému je posloupnost $(F^n(x_0))$, kde $n \in \mathbb{N}_0$.

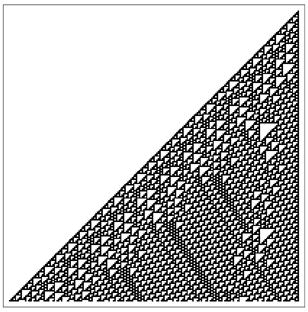
Pravidlo 22



Pravidlo 30

- **Třída 4 - Univerzalita.** Pravidla, u kterých nelze určit ani konečný stav, ani periodu ani algoritmus, zdali konečné konfigurace leží na vzájemných trajektoriích.

Pravidlo 110



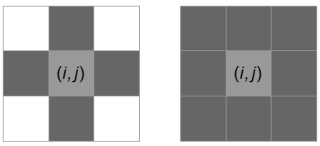
Velmi dlouho se nevědělo jistě, zda-li pravidlo 110 opravdu patří do Třídy 4. Jinými slovy, nejistá byla neprázdnost Třídy 4 pro elementární buněčné automaty. Autorem důkazu pro pravidlo 110 je Matthew Cook [4].

4. Dvourozměrné buněčné automaty

Už méně systematicky a zejména z pohledu rozdílů a komplikací se podívejme na dvourozměrné buněčné automaty

$$\mathcal{C}_2 = \left(\mathbb{N}, \mathbb{Z}^2, \{0,1\}, f\right).$$

První rozdíl je, že existuje více přístupů, co považovat za okolí. Dva hlavní přístupy jsou tzv. von Neumannovo okolí (4 sousedé vpravo, vlevo, nahoře a dole) a tzv. Mooreovo okolí (každá buňka má 8 sousedů, tj. oproti von Neumannově okolí nově i 4 diagonální sousedy), viz následující obrázek.



I když uvažujeme jen 1-okolí buňky, počet elementárních dvourozměrných buněčných automatů velmi výrazně vzroste, což lze ilustrovat jednoduchými výpočty.

V případě von Neumannova okolí rozhoduje o konfiguraci 5 buněk (střed a 4 sousedé), což vede na $2^5 = 32$ možných konfigurací v čase t a následně dostáváme 2^{32}, cca 4 miliardy, buněčných automatů.

V případě Mooreova okolí rozhoduje o konfiguraci 9 buněk (střed a 8 sousedé), což vede na $2^9 = 512$ možných konfigurací v čase t a následně dostáváme 2^{512}, cca $1,3\,.\,10^{154}$, buněčných automatů.

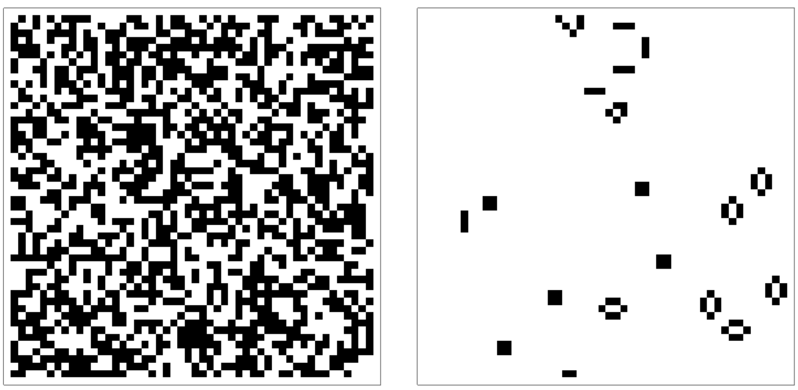
Kvůli těmto velkým počtům možností se zkoumají často pouze tzv. totalistické buněčné automaty, které vykazují určitou symetrii

Definice 4.1. Buněčný automat $\mathcal{C} = (\mathbb{T}, X, \{0,1\}, f)$ je totalistický, pokud f závisí pouze na počtu 0 a 1 na okolí.

Nejslavnějším dvourozměrným buněčným automatem (a jediným, který si zde zmíníme) je Conwayova hra života. Milovník matematických rébusů, hlavolamů a her John Horton Conway, který se jinak zabýval mj. teorií grup, ji v roce 1970 zkonstruoval pro zábavu v korespondenci s redaktorem časopisu Scientific American Martinem Gardnerem [6]. Je uvažováno Mooreovo okolí, tj. buňka má 8 sousedů. Stav 1 má význam existence života v dané buňce a 0 naopak jeho neexistenci. Jedná se o totalistický dvoudimenzionální buněčný automat s následujícími pravidly (generujícími přepisovací pravidlo f)

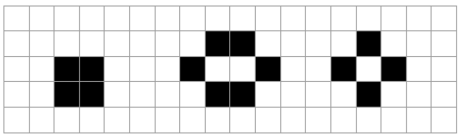
- Živá buňka s 0 nebo 1 živými sousedy umírá.
- Živá buňka s 2 nebo 3 živými sousedy přežívá.
- Živá buňka se 4 a více živými sousedy umírá.
- Mrtvá buňka s právě 3 sousedy ožívá.

Tento model se ukázal jako univerzální (podobně jako pravidlo 110), Berlekamp, Conway a Guy dokázali v roce 1982 [2], že nelze určit, jestli daná konečná počáteční podmínka vyhyne či ne. Následující obrázek ukazuje náhodný počáteční stav (vlevo) a stav po 10000 iteracích (vpravo).



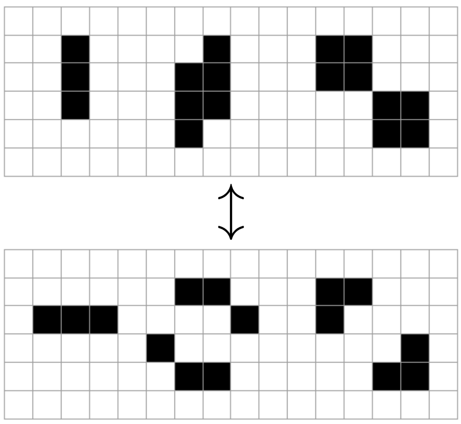
Pro svoji jednoduchost, univerzálnost si získala hra života zájem mnohých rekreačních i profesionálních matematiků, kteří následně klasifikovali některé počáteční podmínky jako:

- stabilní (stacionární, v čase neměnné) struktury, např. následující tři konfigurace,



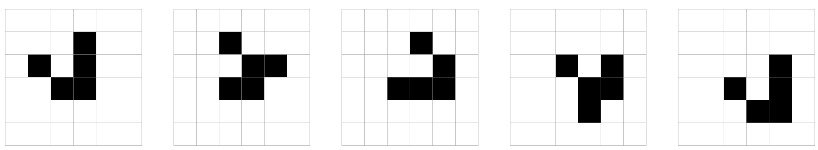
- periodické/opakující se struktury, např. následující obrázek ukazuje tři počáteční struktury vedoucí na trajektorie s periodou 2 (např. obdélník 3×1).

$t = 0, 2, 4, \dots$



$t = 1, 3, 5, \dots$

- cestující struktury, tzv. spaceships, nejjednodušší z nich, tzv. glider, se po 4 iteracích vrátí do stejné konfigurace ale v posunu o jednu x-ovou i y-ovou souřadnici dále.



$t = 0$ $t = 1$ $t = 2$ $t = 3$ $t = 4$

5. Závěr

Význam buněčných automatů obecně spočívá ve faktu, že umožňují velmi komplexní globální chování a to vše na základě triviálních lokálních pravidel. Podle mnohých teorie buněčných automatů ve spojení s obrovskou výpočetní silou avizuje revoluci ve vědě, viz ambiciózní pojetí monografie [15].

V nedávné době vznikly mnohé modely, na jejichž představení zde již není prostor, ale zvídavého čtenáře rádi odkazujeme např. na evoluční hry na grafech – soubor buněčných automatů popisujících vývoj spolupráce (stavy 0 a 1 odpovídají nespolupráci a spolupráci). Obecně jde o automaty, které nejsou elementární (vliv na lokální pravidlo mají i 2-sousedé). Navíc je typicky uvažována nejen dvoudimenzionální mřížka, ale obecné grafy. Pro hezký úvod doporučujeme přehledovou knihu [11] a simulace umožňující webovou stránku [7].

Velmi významným epidemiologickým modelem je tzv. Greenbergův-Hastingsův buněčný automat. Jde o diskrétní verzi slavného epidemiologického SIR modelu. Z matematického hlediska je významným faktem, že stavový prostor, na rozdíl od všech výše uvedených modelů, nemá jen 2 stavy, ale libovolné množství, v závislosti na délce nemoci $n \in \mathbb{N}$ a délce období, kdy jsou jedinci imunní vůči nákaze $i \in \mathbb{N}$. Stavový prostor lze zapsat

$$S = \{ZDRAVY, NEMOC_1, \ldots, NEMOC_n, IMUNNI_1, \ldots, IMUNNI_i\}$$

a počet stavů je následně

$$|S| = 1 + n + i.$$

Odkazujeme například do monografie de Vries et al. [14, Odstavec 6.2].

Pro čtenáře, který by se rád více dozvěděl o teoretických aspektech buněčných automatů, odkazujeme např. do článku Kari [9], kde jsou přehledně shrnuty např. otázky jako je dosažitelnost stavů, reversibilita (zpětný chod v čase) a zákony zachování (tj. za jakých podmínek se zachovávají počty jedniček a nul).

Buněčné automaty byly také zobecněny. Zejména v sociálních a ekonomických vědách se v nedávné době začaly studovat tzv. ABM modely (agent based models). Základní myšlenka je shodná s buněčnými automaty. Cílem je vytvořit z lokálních pravidel popis globálního komplexního chování. Nicméně, ABM modely, uvažují heterogenní agenty (jednotlivce) s množstvím vlastností (např. věk, rychlost, vzdělání, pohlaví, apod.), které následně ovlivňují lokální chování. Hezké a relativně jednoduché srovnání popisující vývoj dynamických systémů od tradičních spojitých a diskrétních dynamických systémů popsaných diferenciálními a diferenčními rovnicemi přes buněčné automaty až po ABM modely může čtenář nalézt např. v [12].

Poděkování

Autor děkuje Vladimíru Švíglerovi, Pavlovi Řehákovi a anonymnímu recenzentovi za pečlivé přečtení předběžné verze tohoto článku a cenné připomínky.

Reference

[1] L. J. S. Allen: *An Introduction to Mathematical Biology*, Pearson/Prentice Hall, 2007.
[2] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, R. K. Guy: *Winning Ways for Your Mathematical Plays II.*, Academic Press, 1982.

[3] A. C. Chiang, K. Wainwright: *Fundamental methods of mathematical economics*, McGraw-Hill, 2004.
[4] M. Cook: *Universality in Elementary Cellular Automata*, Complex Systems **15** (2004), 1–40.
[5] K. Culik, S.Yu: *Undecidability of CA classification schemes*, Complex Systems **2** (1988), 177–190.
[6] M. Gardner: *Mathematical Games – The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game life*, Scientific American **223** (1970), 120–123.
[7] C. Hauert: *VirtualLabs in evolutionary game theory*, dostupné na (verze 3.3. ze dne 9.5.2018) https://www.univie.ac.at/virtuallabs/.
[8] B. Chopart, M. Droz: *Cellular Automata Modeling of Physical Systems*, Cambrdige University Press, 1988.
[9] J. Kari: *Theory of cellular automata: A survey*, Theoretical Computer Science **334** (2005), 3–33.
[10] W. Kelley, A. Peterson: *Difference Equations. An Introduction with Applications*, Academic Press, London, 2001.
[11] M. Nowak: *Evolutionary dynamics: exploring the equations of life*, Belknap Press, 2006.
[12] H. Sayama: *Introduction to the modeling and analysis of complex systems*, Open SUNY textbooks, 2015 (dostupné online na http://opensuny.org/).
[13] A. N. Šarkovskij: *Coexistence of cycles of continuous mapping of the line into itself*, Ukrainian Math. J. **16** (1964), 61–71.
[14] G. de Vries et al.: *A Course in Mathematical Biology*, SIAM, 2006.
[15] S. Wolfram, *A new kind of science*, Wolfram Media, 2002.

Petr Stehlík, Katedra matematiky, Fakulta aplikovaných věd, Západočeská univerzita v Plzni, Univerzitní 8, 30614 Plzeň,
e-mail: pstehlik@kma.zcu.cz