Milé čtenářky a čtenáři,

po tříleté přestávce vás opět vítáme na stránkách nového čísla časopisu Kvaternion. Této přestávky jsme využili jednak k diskusím nad dalším zaměřením a směřováním tohoto časopisu vycházejícího od roku 2012 (nejprve s podporou projektu AMathNet, posléze s podporou Ústavu matematiky Fakulty strojního inženýrství), a jednak také k důkladné přípravě čísla nového. Důležitým krokem v této diskusi byla rekonstrukce redakční rady, jejíž noví členové přišli s řadou inspirativních podnětů a návrhů pro další rozvoj časopisu. Původní myšlenka, totiž vytvářet časopis především pro studenty matematického inženýrství a dalších oborů (nejen) na Fakultě strojního inženýrství, zůstává neměnná. Pro její naplnění se ale celá řada věcí změnila, doufáme, že k lepšímu.

Páteří toho čísla (a do budoucna i čísel dalších) zůstávají odborné články. Pro aktuální číslo se podařilo získat příspěvky od několika renomovaných matematiků střední generace, kteří pravidelně publikují ve významných mezinárodních časopisech. Příspěvek Petra Stehlíka nás zavede do speciální oblasti diskrétních dynamických systémů, totiž teorie buněčných automatů. Velmi přístupnou formou je zde popsána motivace i základní myšlenky této teorie s bohatým matematickým i aplikačním potenciálem. Článek Roberta Maříka pojednává o méně tradičních (o to však zajímavějších) důsledcích a aplikacích Greenovy věty, která je na školách technického typu tradiční součástí základního kursu matematické analýzy. Josef Šilhan a Vojtěch Žádník pak ve svém společném příspěvku seznamují čtenáře s elegantními metodami výpočtu křivostí křivek v prostorech vyšší dimenze a dalšími zajímavostmi z oblasti diferenciální geometrie.

Kromě těchto odborných článků jsou součástí aktuálního čísla i příspěvky, kterými bychom rádi založili tradici stálých rubrik časopisu Kvaternion. Představují je jednak články vycházející z vybraných bakalářských prací studentů oboru Matematického inženýrství na FSI VUT v Brně, které tak mohou být pro čtenáře z řad studentů inspirací při jejich vlastním výběru témat závěrečných prací. Druhý typ příspěvků, na které hodláme v dalších číslech navazovat, představuje článek Viery Štoudkové Růžičkové věnovaný podrobnější analýze řešení vybraných úloh Internetové matematické olympiády pro studenty středních škol. Tuto soutěž organizuje Ústav matematiky Fakulty strojního inženýrství za vydatné podpory studentů Matematického inženýrství, a proto doufáme, že tato rubrika může přispět k dalšímu rozvoji zmíněné soutěže.

Byli bychom rádi, kdyby čtenáři tohoto čísla, ať z řad studentů, pedagogických pracovníků, či jiných zájemců, shledali uveřejněné příspěvky zajímavé a inspirativní pro své vlastní studium a výzkum. Vítány jsou pak všechny čtenářské podněty a náměty vedoucí k vylepšení čísel budoucích.

Jan Čermák

# BUNĚČNÉ AUTOMATY – DYNAMICKÉ SYSTÉMY V DISKRÉTNÍM SVĚTĚ

PETR STEHLÍK

Abstrakt. Cílem tohoto článku je představení buněčných automatů jako matematických modelů a jejich srovnání s jinými dynamickými systémy. Ukážeme si, že tyto jednoduché plně diskrétní modely umožňují vznik bohatého množství jevů – periodického chování, cestujících profilů i chaotického chování. Jsou uvedeny jednoduché příklady elementárních buněčných automatů a Hry života jako významného dvourozměrného buněčného automatu.

## 1. Úvod

V obecném smyslu představují dynamické systémy matematické modely popisující vývoj veličin v čase. Zkoumaná veličina může být fyzikální (pozice pohybujícího se tělesa v prostoru), chemická (koncentrace reagujících látek), biologická (velikost populace), epidemiologická (nakaženost populace), ekonomická (inflace či HDP), atd. Nejčastěji používanými dynamickými systémy jsou spojité dynamické systémy, které jsou typicky reprezentovány obyčejnými či parciálními diferenciálními rovnicemi

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t) \in Y,\ t \in \mathbb{R}$$

kde $Y$ je abstraktní stavový prostor (typicky $\mathbb{R}$ v případě obyčejných diferenciálních rovnic).

V poslední době zaznamenáváme rozmach diskrétních dynamických systémů, ve kterých je čas uvažován diskrétní

$$x(t+1) = f(t, x(t)), \quad x(t) \in Y,\ t \in \mathbb{Z}. \tag{1.1}$$

Důvodem je jednak jejich zajímavé chování (např. teorie deterministického chaosu [13, 10]), přirozeně diskrétní vnímání času v biologických, ekonomických a dalších modelech [1, 3, 14] i rozmach informatiky a numerické matematiky.

Buněčné automaty lze z širšího pohledu vnímat jako dynamické systémy, ve kterých je čas, prostor i stavový prostor diskrétní, viz tabulku 1.

Vznik teorie buněčných automatů se váže na jméno Johna von Neumanna a čtyřicátá léta dvacátého století [15]. Není vůbec náhodou, že se časově i autorem překrývá se vznikem moderní informatiky. Cílem Johna von Neumanna

2010 *MSC.* Primární 37B15.
*Klíčová slova.* Buněčné automaty, dynamické systémy, chaos, diferenční rovnice.

| | Čas | Prostor | Stavový prostor |
|---|---|---|---|
| obyčejné diferenciální rovnice | spojitý | - | spojitý |
| obyčejné diferenční rovnice | diskrétní | - | spojitý |
| parciální diferenciální rovnice | spojitý | spojitý | spojitý |
| parciální diferenční rovnice | diskrétní | spojitý | spojitý |
| mřížkové diferenciální rovnice | spojitý | diskrétní | spojitý |
| buněčné automaty | diskrétní | diskrétní | diskrétní |

**Tabulka 1.** Příklady dynamických systémů v souvislosti s použitou povahou času, prostoru a stavového prostoru.

a jeho kolegů (např. Stanislawa Ulama) bylo vytvořit jednoduché modely napodobující přírodní systémy, které umožňují na základě jednoduchých lokálních pravidel komplexní globální chování. Mnohé fyzikální a biologické systémy mají vlastnosti buněčných automatů [8]. Z biologických aplikací získaly buněčné automaty i své jméno. Jednotlivým bodům diskrétního prostoru říkáme buňky.

Cílem tohoto článku je představení základních pojmů a vlastností týkajících se buněčných automatů. Po jeho přečtení by čtenář měl získat základní přehled o bohatém chování, které se u triviálních buněčných automatů vyskytuje – periodické chování, cestující profily i chaotické chování.

## 2. Buněčné automaty

Abstraktní definice buněčného automatu, se kterou budeme v tomto článku pracovat, je následující:

**Definice 2.1.** Buněčný automat $\mathcal{C} = (\mathbb{T}, X, S, f)$ je dynamický systém s diskrétním časem $\mathbb{T}$, diskrétním prostorem $X$, diskrétní množinou stavů $S$ a přepisovacím pravidlem $f : S^X \to S$.

Vzhledem k abstraktnosti a šířce tohoto pojmu, okomentujme jednotlivé součásti této definice.

Čas $\mathbb{T}$ je brán výlučně diskrétní, typicky jako podmnožina přirozených čísel $\mathbb{N}_0$ nebo celých čísel $\mathbb{Z}$. V každém časovém okamžiku $t \in \mathbb{T}$ dochází k aktualizaci všech buněk[1] diskrétního prostoru $X$ podle lokálního přepisovacího pravidla $f$.

Pro množiny $A, B$ budeme značit $A^B$ všechna zobrazení $B$ do $A$. V našem případě $S^X$ je množina všech různých zobrazení, které každé buňce $x \in X$ přiřadí jeden stav $s \in S$. Je-li např. stavová množina tříprvková $S = \{a, b, c\}$ a prostorová množina čtyřprvková $X = 0, 1, 2, 3$, pak je $S^X$ množina s $4^3 = 256$ prvky

$$S^X = \{aaaa, aaab, aaac, baaa, \ldots, cccb, cccc\}.$$

[1]V případě, že jde o současnou aktualizaci všech buněk, mluvíme o synchronním buněčném automatu, jinak jde o asynchronní buněčný automat. V tomto článku se budeme zabývat výlučně automaty synchronními, ale existují i asynchronní automaty, kde je např. v každém časovém okamžiku aktualizována vždy jedna jediná buňka, např. postupně, tzn. jedna za druhou dle daného pořadí - pak mluvíme o sekvenciálních asynchronních automatech.

Diskrétní prostor $X$ je tvořený tzv. buňkami a pro jednoduchost je typicky uvažována $d$-rozměrná mřížka $\mathbb{Z}^d$, kde $d \in \mathbb{N}$ je dimenze mřížky. Obecně ale může být stavovým prostorem libovolný neorientovaný graf $G = (V, E)$, např. pravidelná šestiúhelníková mřížka, apod. Jednotlivé vrcholy grafu $v \in V$ představují následně buňky a hrany $e \in E$ pak jejich sousedství.

Stavový prostor $S$ je také (na rozdíl např. od diferenčních rovnic) diskrétní, tj. konečná (výjimečně spočetná) množina stavů. Nejtriviálnější a nejčastěji studovaná situace je případ, kdy stavovým prostorem je dvouprvková (binární)[2] množina $S = \{0, 1\}$. Víceprvkové stavové prostory jsou již méně běžné a jsou vázány na specifické modely (např. počty onemocnění, dětí, počet obyvatel apod.).

Každá buňka $x \in X$ má své lokální okolí. Označme $N_1(x)$ všechny buňky ve vzdálenosti 1 od buňky $x$ a $N_{\leq 1}(x)$ všechny buňky ve vzdálenosti nejvýše jedna (tj. $N_{\leq 1}(x) = N_1(x) \cup \{x\}$). Obdobně definujeme i okolí $k$-tého řádu (nebo stručně $k$-okolí) $N_{\leq k}(x)$, představující sousedy nejvýše ve vzdálenosti $k \in \mathbb{N}$.

Lokální přepisovací pravidlo $f : S^m \to S$ udává, jakým způsobem se bude stav buňky měnit na základě jejího okolí. Typicky předpokládáme, že $m = m(x) = |N_{\leq k}(x)|$ je velikost nějakého $k$-okolí, a tedy počet buněk, které ovlivňují stav buňky v dalším kroku.

Lokální přepisovací pravidla následně generují globální přepisovací pravidlo (v teorii diskrétních dynamických systémů nazývané též time-1 map) $F\colon S^X \to S^X$. Pro danou konfiguraci $u(t, x) \in S$ v čase $t \in \mathbb{N}$ a buňce $x \in X$

$$u(t + 1, x) = F(u(t, x)),$$

což je dynamický zápis buněčného automatu odpovídající dynamické verzi diferenčních rovnic (1.1). Lokální i globální přepisovací pravidla mohou samozřejmě být i neautonomní (časově závislé)

$$u(t + 1, x) = F(t, u(t, x)).$$

Jejich složitost však již překračuje úvodní charakter tohoto textu.

## 3. Elementární buněčné automaty

Nejjednodušší třídou buněčných automatů (a zároveň jedinou třídou, o které lze říci, že je kompletně matematicky popsána) jsou tzv. elementární buněčné automaty.

**Definice 3.1.** Elementární buněčný automat $\mathcal{E} = (\mathbb{T}, X, S, f) = (\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \{0, 1\}, f)$ je buněčný automat s diskrétním časem $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ definovaný na jednodimenzionální mřížce $X = \mathbb{Z}$, nabývající binární množiny stavů $S = \{0, 1\}$ a autonomním lokálním přepisovacím pravidlem $f$ závisejícím pouze na 1-okolí dané buňky.

Díky podmínce na 1-okolí je stav v čase $t + 1$ určen vždy jen pomocí buňky samotné a jejích dvou sousedů. Uvažujeme tedy 1-okolí $N_{\leq 1}(x)$ a lokální pravidlo

[2] Kromě jednoduchosti nachází dvouprvkové množiny mnoho aplikací a dvojice prvků mohou reprezentovat např. stav živého organizmu (mrtvý $\times$ živý), stav v modelech spolupráce (nespolupráce $\times$ spolupráce), nakaženost organizmu (zdravý $\times$ nakažený), znalost informace (nezná $\times$ zná), apod.

bude zobrazení $f\colon S^3 \to S$. Existuje přesně $2^3$ konfigurací pro toto okolí (111, 110, 101, 100, 011, 010, 001, 000), kde budeme předpokládat vždy, že hodnoty jdou za sebou v pořadí levý soused, buňka samotná a pravý soused. Přepisovací pravidlo musí pro každou z těchto konfigurací jednoznačně určit stav v následujícím čase, možnosti jsou opět jen dvě (0 nebo 1). Následně existuje $2^8 = 256$ elementárních buněčných automatů.

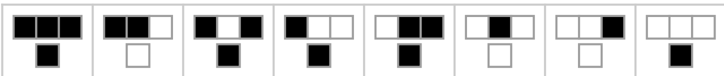
Tyto buněčné automaty jsou jednoduše očíslovatelné pomocí binárních kódů, takže např. elementární buněčný automat 185 (tzv. pravidlo 185) můžeme binárně rozepsat jako

$$185 = 1\,.\,2^7 + 0.2^6 + 1\,.\,2^5 + 1\,.\,2^4 + 1\,.\,2^3 + 0\,.\,2^2 + 0\,.\,2^1 + 1\,.\,2^0,$$

čemuž odpovídá, že centrální buňka bude v čase $t+1$ mít následující hodnoty na základě jakékoliv z osmi kombinací v čase $t$,

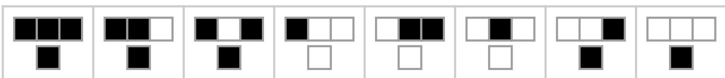
| v čase $t$ | 111 | 110 | 101 | 100 | 011 | 010 | 001 | 000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| v čase $t+1$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |

přičemž tuto tabulku lze vnímat jako definici přepisovacího pravidla $f\colon \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$. Pravidlo můžeme jednoduše vizualizovat[3] (černá odpovídá 1 a bílá 0)

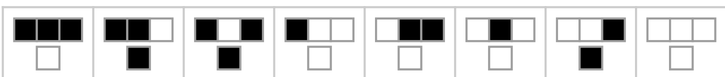


Existuje mnoho způsobů jak ztotožnit chování elementárních buněčných automatů. Tím nejjednodušším je možnost, kdy naivně vyměníme jedničky za nuly, apod. Proto se zavádí tzv. třídy ekvivalentních pravidel, které mohou mít jeden z následujících tří vztahů:

- zrcadlení (prohození zleva doprava). Např. zrcadlením pravidla 185 dostáváme pravidlo 227 (pořadí vizualizace jednotlivých konfigurací zůstává ale nezměněno, vždy podle binárního kódu, viz výše)

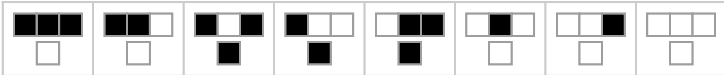


- přebarvení (prohození 0 na 1 a opačně jak u vstupu tak na výstupu). Např. přebarvením pravidla 185 dostáváme pravidlo 98.

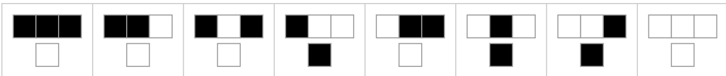


- kombinace zrcadlení a přebarvení. Např. zrcadlením a přebarvením z pravidla 185 dostáváme pravidlo 56.

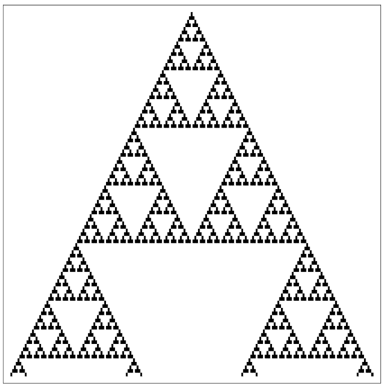
[3]Většina vizualizací v tomto textu byla vytvořena pomocí programu Wolfram Mathematica, ve kterém jsou, díky úzkému vztahu Steva Wolframa k buněčným automatům [15], elegantně a efektivně implementovány veškeré základní relevantní funkce. Čtenáři se zájmem doporučujeme jako první krok bohaté možnosti funkce `CellularAutomaton[]`.

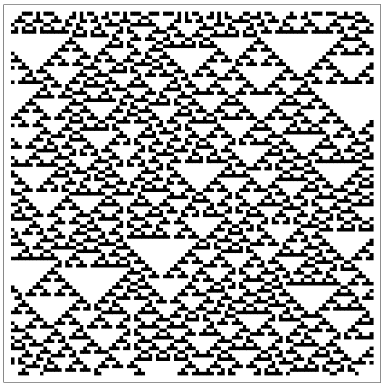


Dynamika těchto podmínek je následně vizualizována tak, že na ose $x$ je prostor a na ose $y$ je čas, s tím, že čas probíhá shora dolů, tj. první řádek odpovídá času $t = 0$, druhý řádek času $t = 1$, atd. Ilustrujme si na příkladu pravidla 22



Na následujících obrázcích vidíme vlevo aplikaci pravidla 22 na počáteční podmínku s jednou jedničkou a samými nulami[4] a vpravo aplikaci pravidla 22 na náhodnou počáteční podmínku





Lze ukázat (viz [15]), že existuje 88 jedinečných pravidel, které nelze těmito operacemi navzájem převést. Z každé třídy ekvivalence se jako reprezentant volí to nejmenší z nich. Např. výše uvedené ekvivalentní úpravy ukazují, že pravidla 185, 227, 98 a 56 jsou ekvivalentní a jako reprezentant této třídy ekvivalence se volí pravidlo 56, apod.[5]

---

[4] Počáteční podmínky s jednou jedničkou vedou na další zajímavou otázku, kterou se zde zabývat nebudeme. Jak vypadá posloupnost počtu jedniček či binárních rozvojů v čase $t$? Otázka je nezajímavá pro lichá pravidla (pravidla s lichým číslem), které kombinaci 000 připisují jedničku a tím pádem hned v druhém kroku je jedniček nekonečně, ale v případě sudých pravidel (pravidel se sudými čísly) existují zajímavé souvislosti s jednoduchými posloupnostmi. Např. pravidlo 220 umožňuje šíření jedniček směrem doprava (1, 11, 111, ...) a proto jejich počet je triviálně $p(n) = n + 1$, což vede na binární rozvoje čísel

$$1, 3, 7, 15, 31, 63, \dots,$$

což ale není nic jiného než posloupnost

$$b(n) = 2^{n+1} - 1.$$

Pro další pravidla příslušné posloupnosti nejsou již tak triviální, více v [15].

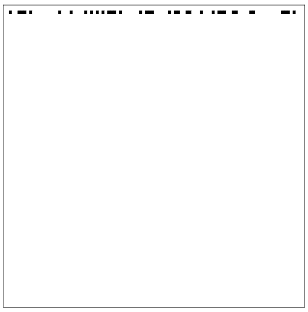
[5] Všimněme si, že ekvivalentních tříd je 88, což je více než $256 : 4 = 64$. Důvodem je, že mnohá pravidla (např. triviálně pravidlo 0 a 255) jsou zrcadlovým obrazem sama k sobě.

Těchto 88 pravidel má velmi odlišné chování, Steve Wolfram [15] je roztřídil na 4 třídy, které později Culik a Yu [5] mírně modifikovali a formálně definovali podle třídění dynamických systémů Ilji Prigogina, nositele Nobelovy ceny, jako stavy vedoucí k rovnováze, periodickému chování, deterministickému chaosu a komplexnímu nepopsatelnému chování:

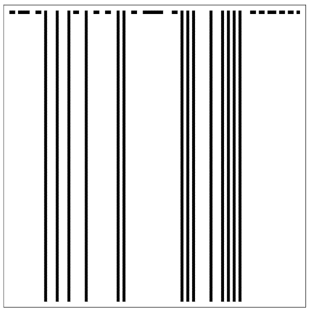
- **Třída 1 - Neměnné stavy.** Všechny konečné počáteční konfigurace $s \in S^X$ se vyvíjejí do homogenního stavu, tj. existuje $\rho \in S^X$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n > n_0$

$$F^n(s) = \rho.$$

Pravidlo 0



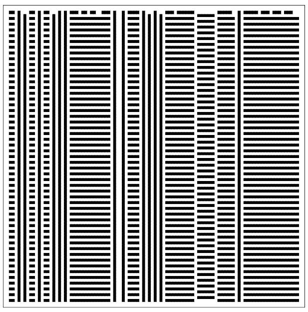
Pravidlo 4



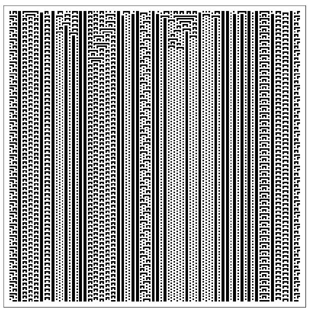
- **Třída 2 - Periodické stavy.** Všechny konečné počáteční konfigurace $s \in S^X$ se po konečném počtu kroků dostávají do opakujících se konfigurací, tj. existuje $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$ tak, že

$$F^n(s) = F^m(s).$$

Pravidlo 5



Pravidlo 73

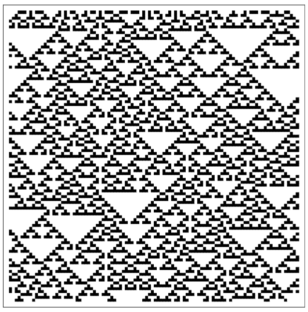


- **Třída 3 - (Deterministicky) chaotické chování.** Existuje algoritmus, který dokáže určit, zda-li konečná konfigurace $s_1 \in S^X$ patří do trajektorie[6] konfigurace $s_2 \in S^X$, tj. platí-li pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, že

$$F^n(s_2) = s_1.$$

[6](Kladná) trajektorie počáteční konfigurace $x_0$ diskrétního dynamického systému je posloupnost $(F^n(x_0))$, kde $n \in \mathbb{N}_0$.

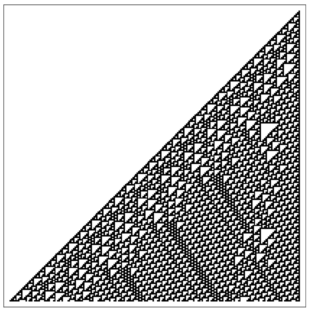
Pravidlo 22



Pravidlo 30

- **Třída 4 - Univerzalita.** Pravidla, u kterých nelze určit ani konečný stav, ani periodu ani algoritmus, zdali konečné konfigurace leží na vzájemných trajektoriích.

Pravidlo 110



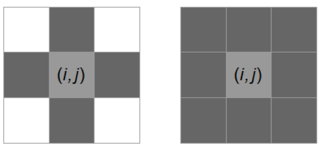
Velmi dlouho se nevědělo jistě, zda-li pravidlo 110 opravdu patří do Třídy 4. Jinými slovy, nejistá byla neprázdnost Třídy 4 pro elementární buněčné automaty. Autorem důkazu pro pravidlo 110 je Matthew Cook [4].

## 4. Dvourozměrné buněčné automaty

Už méně systematicky a zejména z pohledu rozdílů a komplikací se podívejme na dvourozměrné buněčné automaty

$$\mathcal{C}_2 = \left(\mathbb{N}, \mathbb{Z}^2, \{0,1\}, f\right).$$

První rozdíl je, že existuje více přístupů, co považovat za okolí. Dva hlavní přístupy jsou tzv. von Neumannovo okolí (4 sousedé vpravo, vlevo, nahoře a dole) a tzv. Mooreovo okolí (každá buňka má 8 sousedů, tj. oproti von Neumannově okolí nově i 4 diagonální sousedy), viz následující obrázek.



I když uvažujeme jen 1-okolí buňky, počet elementárních dvourozměrných buněčných automatů velmi výrazně vzroste, což lze ilustrovat jednoduchými výpočty.

V případě von Neumannova okolí rozhoduje o konfiguraci 5 buněk (střed a 4 sousedé), což vede na $2^5 = 32$ možných konfigurací v čase $t$ a následně dostáváme $2^{32}$, cca 4 miliardy, buněčných automatů.

V případě Mooreova okolí rozhoduje o konfiguraci 9 buněk (střed a 8 sousedé), což vede na $2^9 = 512$ možných konfigurací v čase $t$ a následně dostáváme $2^{512}$, cca $1,3 \,.\, 10^{154}$, buněčných automatů.

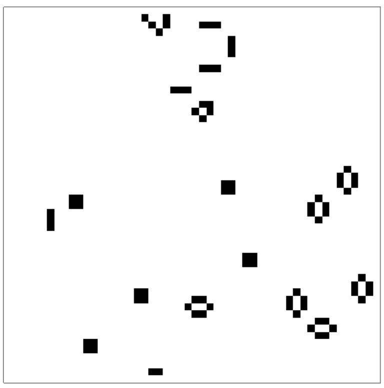
Kvůli těmto velkým počtům možností se zkoumají často pouze tzv. totalistické buněčné automaty, které vykazují určitou symetrii

**Definice 4.1.** Buněčný automat $\mathcal{C} = (\mathbb{T}, X, \{0,1\}, f)$ je totalistický, pokud $f$ závisí pouze na počtu 0 a 1 na okolí.

Nejslavnějším dvourozměrným buněčným automatem (a jediným, který si zde zmíníme) je Conwayova hra života. Milovník matematických rébusů, hlavolamů a her John Horton Conway, který se jinak zabýval mj. teorií grup, ji v roce 1970 zkonstruoval pro zábavu v korespondenci s redaktorem časopisu Scientific American Martinem Gardnerem [6]. Je uvažováno Mooreovo okolí, tj. buňka má 8 sousedů. Stav 1 má význam existence života v dané buňce a 0 naopak jeho neexistenci. Jedná se o totalistický dvoudimenzionální buněčný automat s následujícími pravidly (generujícími přepisovací pravidlo $f$)

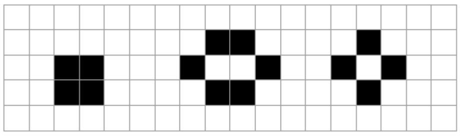
- Živá buňka s 0 nebo 1 živými sousedy umírá.
- Živá buňka s 2 nebo 3 živými sousedy přežívá.
- Živá buňka se 4 a více živými sousedy umírá.
- Mrtvá buňka s právě 3 sousedy ožívá.

Tento model se ukázal jako univerzální (podobně jako pravidlo 110), Berlekamp, Conway a Guy dokázali v roce 1982 [2], že nelze určit, jestli daná konečná počáteční podmínka vyhyne či ne. Následující obrázek ukazuje náhodný počáteční stav (vlevo) a stav po 10000 iteracích (vpravo).



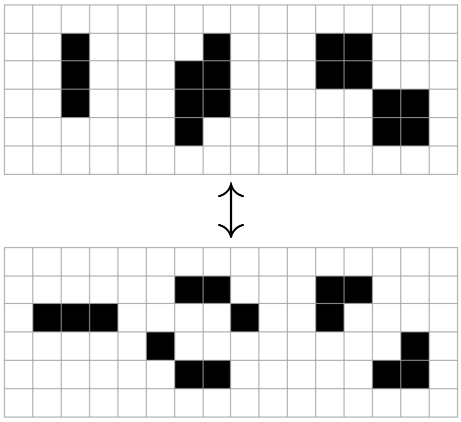
Pro svoji jednoduchost, univerzálnost si získala hra života zájem mnohých rekreačních i profesionálních matematiků, kteří následně klasifikovali některé počáteční podmínky jako:

- stabilní (stacionární, v čase neměnné) struktury, např. následující tři konfigurace,



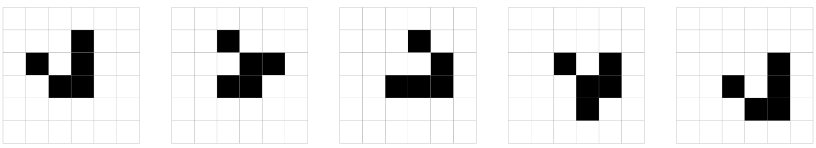
- periodické/opakující se struktury, např. následující obrázek ukazuje tři počáteční struktury vedoucí na trajektorie s periodou 2 (např. obdélník $3 \times 1$).

$t = 0, 2, 4, \ldots$



$t = 1, 3, 5, \ldots$

- cestující struktury, tzv. spaceships, nejjednodušší z nich, tzv. glider, se po 4 iteracích vrátí do stejné konfigurace ale v posunu o jednu $x$-ovou i $y$-ovou souřadnici dále.



$t = 0$ $t = 1$ $t = 2$ $t = 3$ $t = 4$

## 5. Závěr

Význam buněčných automatů obecně spočívá ve faktu, že umožňují velmi komplexní globální chování a to vše na základě triviálních lokálních pravidel. Podle mnohých teorie buněčných automatů ve spojení s obrovskou výpočetní silou avizuje revoluci ve vědě, viz ambiciózní pojetí monografie [15].

V nedávné době vznikly mnohé modely, na jejichž představení zde již není prostor, ale zvídavého čtenáře rádi odkazujeme např. na evoluční hry na grafech – soubor buněčných automatů popisujících vývoj spolupráce (stavy 0 a 1 odpovídají nespolupráci a spolupráci). Obecně jde o automaty, které nejsou elementární (vliv na lokální pravidlo mají i 2-sousedé). Navíc je typicky uvažována nejen dvoudimenzionální mřížka, ale obecné grafy. Pro hezký úvod doporučujeme přehledovou knihu [11] a simulace umožňující webovou stránku [7].

Velmi významným epidemiologickým modelem je tzv. Greenbergův-Hastingsův buněčný automat. Jde o diskrétní verzi slavného epidemiologického SIR modelu. Z matematického hlediska je významným faktem, že stavový prostor, na rozdíl od všech výše uvedených modelů, nemá jen 2 stavy, ale libovolné množství, v závislosti na délce nemoci $n \in \mathbb{N}$ a délce období, kdy jsou jedinci imunní vůči nákaze $i \in \mathbb{N}$. Stavový prostor lze zapsat

$$S = \{ZDRAVY, NEMOC_1, \ldots, NEMOC_n, IMUNNI_1, \ldots, IMUNNI_i\}$$

a počet stavů je následně

$$|S| = 1 + n + i.$$

Odkazujeme například do monografie de Vries et al. [14, Odstavec 6.2].

Pro čtenáře, který by se rád více dozvěděl o teoretických aspektech buněčných automatů, odkazujeme např. do článku Kari [9], kde jsou přehledně shrnuty např. otázky jako je dosažitelnost stavů, reversibilita (zpětný chod v čase) a zákony zachování (tj. za jakých podmínek se zachovávají počty jedniček a nul).

Buněčné automaty byly také zobecněny. Zejména v sociálních a ekonomických vědách se v nedávné době začaly studovat tzv. ABM modely (agent based models). Základní myšlenka je shodná s buněčnými automaty. Cílem je vytvořit z lokálních pravidel popis globálního komplexního chování. Nicméně, ABM modely, uvažují heterogenní agenty (jednotlivce) s množstvím vlastností (např. věk, rychlost, vzdělání, pohlaví, apod.), které následně ovlivňují lokální chování. Hezké a relativně jednoduché srovnání popisující vývoj dynamických systémů od tradičních spojitých a diskrétních dynamických systémů popsaných diferenciálními a diferenčními rovnicemi přes buněčné automaty až po ABM modely může čtenář nalézt např. v [12].

## Poděkování

Autor děkuje Vladimíru Švíglerovi, Pavlovi Řehákovi a anonymnímu recenzentovi za pečlivé přečtení předběžné verze tohoto článku a cenné připomínky.

## Reference

[1] L. J. S. Allen: *An Introduction to Mathematical Biology*, Pearson/Prentice Hall, 2007.

[2] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, R. K. Guy: *Winning Ways for Your Mathematical Plays II.*, Academic Press, 1982.

[3] A. C. Chiang, K. Wainwright: *Fundamental methods of mathematical economics*, McGraw-Hill, 2004.
[4] M. Cook: *Universality in Elementary Cellular Automata*, Complex Systems **15** (2004), 1–40.
[5] K. Culik, S.Yu: *Undecidability of CA classification schemes*, Complex Systems **2** (1988), 177–190.
[6] M. Gardner: *Mathematical Games – The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game life*, Scientific American **223** (1970), 120–123.
[7] C. Hauert: *VirtualLabs in evolutionary game theory*, dostupné na (verze 3.3. ze dne 9.5.2018) `https://www.univie.ac.at/virtuallabs/`.
[8] B. Chopart, M. Droz: *Cellular Automata Modeling of Physical Systems*, Cambrdige University Press, 1988.
[9] J. Kari: *Theory of cellular automata: A survey*, Theoretical Computer Science **334** (2005), 3–33.
[10] W. Kelley, A. Peterson: *Difference Equations. An Introduction with Applications*, Academic Press, London, 2001.
[11] M. Nowak: *Evolutionary dynamics: exploring the equations of life*, Belknap Press, 2006.
[12] H. Sayama: *Introduction to the modeling and analysis of complex systems*, Open SUNY textbooks, 2015 (dostupné online na `http://opensuny.org/`).
[13] A. N. Šarkovskij: *Coexistence of cycles of continuous mapping of the line into itself*, Ukrainian Math. J. **16** (1964), 61–71.
[14] G. de Vries et al.: *A Course in Mathematical Biology*, SIAM, 2006.
[15] S. Wolfram, *A new kind of science*, Wolfram Media, 2002.

Petr Stehlík, Katedra matematiky, Fakulta aplikovaných věd, Západočeská univerzita v Plzni, Univerzitní 8, 30614 Plzeň,
*e-mail*: `pstehlik@kma.zcu.cz`

# GREENOVA VĚTA A JEJÍ APLIKACE

ROBERT MAŘÍK

ABSTRAKT. V článku je diskutován vliv Greenovy věty mimo ryze matematické oblasti. Je zde zdůrazněn její význam při odvozování diferenciálních tvarů fyzikálních zákonů a dále je uvedena její role při vysvětlení funkce planimetru – přístroje pro měření obsahů rovinných obrazců obecného tvaru. Na rozdíl od jiných podobně zaměřených prací rekonstruujeme přímo vektorové pole planimetru a tím můžeme kromě vysvětlení planimetru ověřit i matematické zdůvodnění některých doporučení pro správnou práci s tímto přístrojem.

Greenova věta je klasické tvrzení z vektorové analýzy, dávající do souvislosti křivkový integrál druhého druhu po uzavřené křivce a dvojný integrál rotace vektorového pole přes množinu, která je touto křivkou ohraničena. V tomto článku si připomeneme význam Grenovy věty a představíme si planimetr – přístroj k měření obsahů dvourozměrných množin, jehož funkce s Greenovou větou úzce souvisí.

## 1. Úvod

Nejběžnější tvar Greenovy věty je

$$\oint_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}S, \tag{1.1}$$

kde $D$ je jednoduše souvislá oblast a $C = \partial D$ je kladně orientovaná hranice této množiny, o níž předpokládáme, že je tvořena po částech hladkou jednoduchou uzavřenou křivkou. Funkce $P$ a $Q$ jsou funkce proměnných $x$, $y$ definované v nějaké otevřené množině obsahující množinu $D$, mající v této množině spojité parciální derivace.

Pracujeme-li s vektorovým polem $\vec{F} = (P, Q)$ a uvažujeme-li dvourozměrnou rotaci $\operatorname{rot}_z \vec{F}$ jako $z$-ovou komponentu trojrozměrné rotace vektorového pole $(P, Q, 0)$, tj.

$$\operatorname{rot}_z \vec{F} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y},$$

dostává vztah (1.1) tvar

$$\oint_C \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = \iint_D \operatorname{rot}_z \vec{F}\,\mathrm{d}S.$$

2010 *MSC.* Primární 26B20; Sekundární 01A55.
*Klíčová slova.* Matematická analýza, vektorová analýza, Greenova věta, planimetr.

V kontextu vektorové analýzy se křivkový integrál na levé straně nazývá cirkulace vektorového pole $\vec{F}$ po orientované křivce $C$. Nejčastěji se s tímto integrálem v aplikacích setkáváme při výpočtu práce (v tomto případě je vektorové pole definováno působící silou) nebo při výpočtu elektrického napětí (příslušným vektorovým polem je pole elektrické intenzity).

Dalším běžným tvarem Greenovy věty je

$$\oint_C -Q\,\mathrm{d}x + P\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}S.$$

Matematicky tento vztah dostaneme prostou substitucí funkcí $-Q$ a $P$ za funkce $P$ a $Q$ v (1.1). Tento vztah je však zajímavý z fyzikálního hlediska, protože formálně nahrazuje pole $(P, Q)$ kolmým polem $(-Q, P)$ a pracuje tedy s normálovou složkou vektorového pole $\vec{F}$ namísto složky tečné. Proto má výraz na levé straně fyzikální interpretaci toku vektorového pole křivkou $C$. Na pravé straně vidíme divergenci vektorového pole $\vec{F}$, která je definována vztahem

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

## 2. Fyzikální význam Greenovy věty

Ve fyzice jsou známa a používanější rozšíření Greenovy věty do více dimenzí. Rozšířením Greenovy věty pro cirkulaci podél okraje plochy, která není rovinnou plochou, je Stokesova věta a rozšířením Greenovy věty pro tok uzavřenou plochou v prostoru je Gaussova-Ostrogradského věta. Ve spojení toku nebo cirkulace vektorového pole s jistým dvojným integrálem obsahujícím operátory divergence a rotace spočívá aplikační význam Greenovy věty a jejích rozšíření. Díky této větě je možné přecházet mezi lokálními (diferenciálními) a nelokálními (integrálními) tvary fyzikálních zákonů. Například Faradayův zákon elektromagnetické indukce

$$\oint_{\partial D} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_D \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{S}$$

vyjadřuje skutečnost, že velikost indukovaného napětí ve smyčce je rovna časové změně toku magnetické indukce touto smyčkou a působí proti této změně. Dává tedy do souvislosti makroskopické veličiny. Díky Greenově větě (resp. v obecném případě díky Stokesově větě) je možné Faradayův zákon převést na tvar

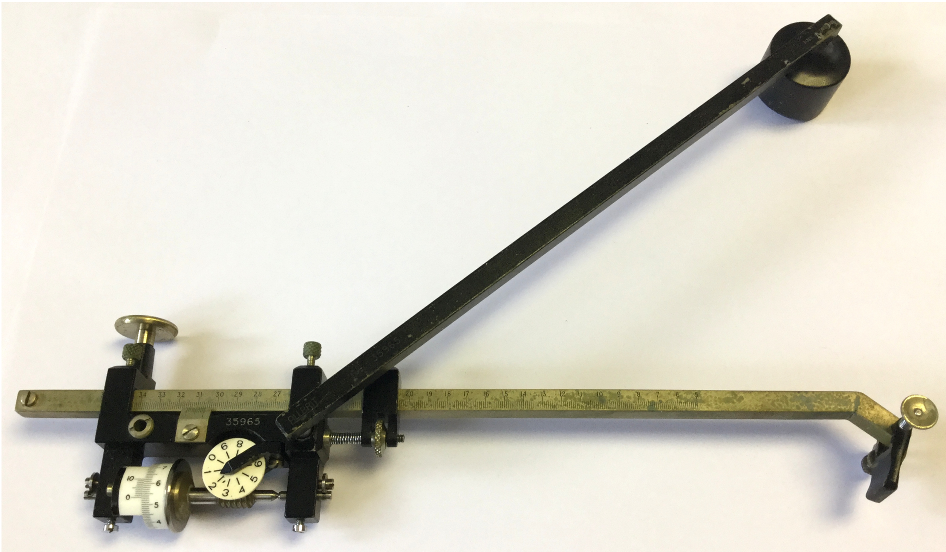
$$\iint_D \operatorname{rot}\vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_D \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{S}$$

a (po záměně pořadí derivování a integrování podle nezávislých proměnných)

$$\iint_D \operatorname{rot}\vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = \iint_D -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,\mathrm{d}\vec{S}.$$

Protože tato rovnost musí být splněna pro libovolnou plochu $D$, platí

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{2.1}$$




**Obrázek 1.** Polární kompenzační planimetr značky Allbrit.

což je třetí Maxwellova rovnice[1] v diferenciálním tvaru. Tato rovnice slovně vyjadřuje, že vír elektrického pole (tj. nenulová rotace intenzity elektrického pole) vzniká tam, kde se mění magnetické pole. Na rozdíl od Faradayova zákona, který je podle výše uvedeného vlastně třetí Maxwellovou rovnicí v integrálním tvaru, nepracuje rovnice (2.1) s makroskopicky měřitelnými veličinami, je však vhodnější pro pochopení fyzikální podstaty a dává také fyzikální interpretaci operátoru rotace.

Podobným způsobem je možné ze zákonů zachování makroskopických veličin odvodit příslušné diferenciální zákony a vztahy používané ve fyzice jako například rovnici kontinuity pro obecnou stlačitelnou tekutinu, rovnici vedení tepla nebo rovnici difuze, viz například [3, Kapitola 1].

## 3. Planimetr

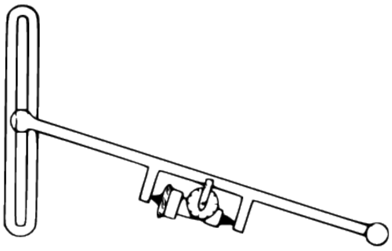
Jak bylo uvedeno v předchozí kapitole, Greenova věta má ve fyzikálním popisu světa zásadní postavení. Z matematického hlediska je zajímavé, že dává do souvislosti informaci rozloženou na množině v rovině a informaci získanou výhradně na hranici této množiny. V učebnicích (viz například [9, str. 1139]) i na přednáškách (viz například [2, čas cca 43:30]) bývá často jako mechanický přístroj pracující

[1] Maxwellovy rovnice jsou čtyři rovnice, které zcela popisují chování elektromagnetického pole. K nim zpravidla přidáváme materiálové vztahy podle studovaného prostředí a řešením těchto rovnic dostáváme fyzikální popis reálných situací. Jako důsledky Maxwellových rovnic můžeme získat například vlnovou rovnici pro elektromagnetickou vlnu, zákon odrazu a zákon lomu světla, Kirchhoffovy zákony v elektrických obvodech apod.

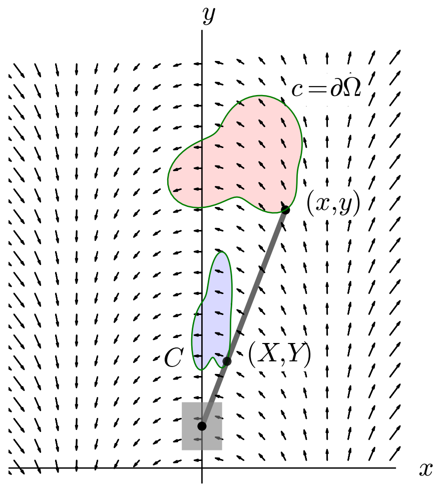
na základě Greenovy věty uváděn planimetr – přístroj na měření obsahů dvourozměrných obrazců. Pod pojmem planimetr se v praxi rozumí téměř výhradně polární planimetr, což je přístroj, jehož historie je zcela unikátní a vymyká se všem ostatním přístrojům vědců a přírodovědců. Posuďte sami: polární planimetr vynalezl v roce 1854 Švýcar Jacob Amsler a tento planimetr se běžně používal až do 80-tých let 20. století ke stanovení obsahů dvourozměrných obrazců všude, kde znalost obsahu byla podstatná pro další postup. Planimetry byly přítomny ze zřejmého důvodu v pracovnách kartografů a stavebních inženýrů, ale našly uplatnění i v biologii, lékařství, potravinářství, strojírenství, lesnictví, geologii a fyzice. Bez zásadní inovace planimetr přežil druhou polovinu 19. století a téměř celé 20. století, tedy dobu, kdy došlo k zásadním technickým inovacím prakticky ve všech oblastech života. Postupně byl vytěsněn až nástupem digitalizace a digitálního zpracování obrazu. Dnes se s ním v běžné laboratoři již nesetkáme. I tak je však zajímavé poznat souvislost mezi tímto jednoduchým aparátem a Greenovou větou.

Základním stavebním kamenem planimetru je rameno planimetru s integračním kolečkem a hrotem. Hrot je při měření veden po obvodu obrazce a druhý konec ramene je dodatečným mechanismem vázán na nějakou křivku – přímku v případě lineárního planimetru a kružnici v případě polárního planimetru.

Integrační kolečko je jednoduchý mechanický prostředek, který svazuje funkci planimetru s křivkovým integrálem. Je nasazeno kolmo na rameno planimetru a navrženo tak, aby se lehce otáčelo okolo své osy a současně bez odporu klouzalo do boku. Pokud se takové kolečko pohybuje po křivce se kterou svírá obecný úhel, rozkládá se jeho pohyb přirozeně na dvě komponenty: na komponentu ve směru kolečka (otáčení) a na komponentu kolmou (klouzání). Pouze komponenta ve směru kolečka způsobí pootočení kolečka. Je to podobné jako práce konaná silou, kdy jenom komponenta ve směru pohybu koná práci. Pro kvantitativní popis označme jednotkový normálový vektor k rameni planimetru (což je současně současně směr kolečka) $\vec{n}$. Při pohybu kolečka po úsečce definované vektorem posunutí $\vec{r}$ je celková dráha zaznamenaná kolečkem rovna délce projekce vektoru $\vec{r}$ do směru $\vec{n}$, tj. je dána skalárním součinem $\vec{n} \cdot \vec{r}$. Pokud se kolečko nepohybuje po úsečce, ale po obecné křivce $C$ přechází tento skalární součin v křivkový integrál druhého druhu $\int_C \vec{n} \mathrm{d}\vec{r}$ vektorového pole $\vec{n}$ po křivce $C$. To je možné nahlédnout buď s odvoláním na analogii s konáním práce, nebo obvyklými úvahami integrálního počtu založenými na dělení a limitním přechodu. V dalším rozboru musíme zjistit, jaká je souvislost mezi křivkovým integrálem $\int_C \vec{n} \mathrm{d}\vec{r}$ a pohybem měřicího hrotu po hranici měřené množiny[2].



**Obrázek 2.** Schematický nákres lineárního planimetru. Vlevo vazba na přímku, vpravo měřící hrot, uprostřed integrační kolečko se stupnicí. Převzato z `http://persweb.wabash.edu/facstaff/footer`.




**Obrázek 3.** Vektorové pole lineárního planimetru a křivka $C$, kterou opisuje integrační kolečko při měření obsahu $\Omega$.

### 3.1. Lineární planimetr

Lineární planimetr se vyznačuje tím, že druhý konec ramene planimetru (ten, kde není měřicí hrot) se volně pohybuje po přímce. V souřadnicích podle obrázku 3 má vektor určený ramenem planimetru souřadnice $(x, \sqrt{L^2 - x^2})$, kde $L$ je délka ramene. Jednotkový normálový vektor k rameni planimetru je tedy

$$\vec{n} = \frac{1}{L}\Big(-\sqrt{L^2 - x^2}, x\Big).$$

Jsou-li $(X, Y)$ souřadnice integračního kolečka a jsou-li $c$ a $C$ po řadě křivky opisované měřicím hrotem a integračním kolečkem, potom kolečko zaznamenává hodnotu

$$I = \frac{1}{L}\int_C -\sqrt{L^2 - x^2}\,\mathrm{d}X + x\,\mathrm{d}Y. \tag{3.1}$$

Tento integrál převedeme do vyjádření pomocí křivky $c$ a souřadnic měřicího hrotu $(x, y)$. Je-li $w$ vzdálenost integračního kolečka od konce ramene vázaného na přímku, snadno odvodíme

$$(X, Y) = \Big(\frac{w}{L}x, y - \Big(1 - \frac{w}{L}\Big)\sqrt{L^2 - x^2}\Big).$$

[2] V publikacích věnovaných funkci planimetru je tento postup zpravila zjednodušen tak, že se nejprve uvažuje integrační kolečko umístěné ve stejném bodě jako měřící hrot a poté se ukáže, že otáčky zaznamenané na kolečku po uzavření celé křivky nezáleží na skutečné poloze integračního kolečka na rameni planimetru. Jiný přístup je zanedbat už během výpočtu komponentu, která se na celkovém čtení planimetru neuplatní, viz například [5]. My se však budeme snažit najít přímou souvislost mezi pohybem planimetru a vektorovým polem přístroje, tj. přímou souvislost mezi pohybem planimetru a údaji zaznamenávanými na integračním kolečku i během pohybu.

Diferencováním získáme

$$(\mathrm{d}X, \mathrm{d}Y) = \left(\frac{w}{L}\mathrm{d}x, \mathrm{d}y + \left(1 - \frac{w}{L}\right)\frac{x}{\sqrt{L^2 - x^2}}\mathrm{d}x\right)$$

a po dosazení do (3.1) dostáváme

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{L}\int_c \left(-\sqrt{L^2 - x^2}\frac{w}{L} + \left(1 - \frac{w}{L}\right)\frac{x^2}{\sqrt{L^2 - x^2}}\right)\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{L}\int_c \frac{x^2 - Lw}{\sqrt{L^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Předpoklad $c = \partial\Omega$ a Greenova věta umožňují převod na dvojný integrál

$$I = \frac{1}{L}\iint_\Omega \mathrm{d}S$$

mající (až na konstantní násobek) význam obsahu množiny $\Omega$. Lineární planimetr tedy pracuje s vektorovým polem

$$(P, Q) = \left(\frac{x^2 - Lw}{\sqrt{L^2 - x^2}}, x\right)$$

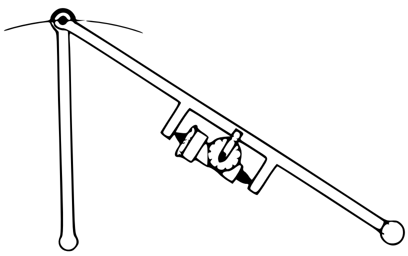
a integrál tohoto vektorového pole po křivce $c = \partial\Omega$ je roven obsahu množiny $\Omega$.

*Poznámka* 3.1. Díky translační invarianci při posunutí ve směru osy $y$ (viz obrázek 3) bylo přirozené očekávat, že vektorové pole lineárního planimetru nezávisí na proměnné $y$. Toto očekávání se skutečně potvrdilo. Dále je možno vypozorovat (přímým výpočtem nebo z obrázku 3), že velikost vektorů z vektorového pole planimetru je větší dál od osy $y$. To má snadno interpretovatelný důsledek: pokud se operátorovi obsluhujícímu planimetr zachvěje ruka a nekopíruje přesně křivku $c$ v místě, kde má vektorové pole větší velikost, způsobí se tím větší chyba, než když takováto nepozornost nastane v místě s menší velikostí vektorového pole. Proto se doporučuje měřit tak, aby rameno nebylo moc vychýlené. Pokud bychom netrvali na úplnosti našeho popisu planimetru, ale snažili se výklad zjednodušit úvahami naznačenými v poznámce pod čarou na straně 19, nebyl by důvod takového doporučení zřejmý. My však nyní toto doporučení máme podloženo výpočtem.

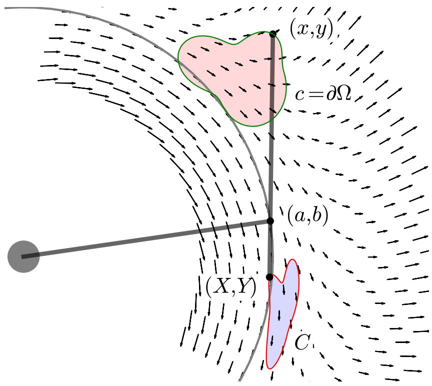
### 3.2. Polární planimetr

V polárním planimetru navrženém Amslerem je konec ramene planimetru, ve kterém není měřicí hrot, vázán na kružnici. Výhoda je, že takováto vazba je konstrukčně mnohem jednodušší než vazba na přímku, protože je možno ji realizovat pomocí nepohyblivého pólu a pomocného ramene definujícího kružnici.

Počátek soustavy souřadnic volme v nepohyblivém pólu. Nechť $L$ je délka měřícího ramene a buďte $(x, y)$ souřadnice měřícího hrotu a $(a(x, y), b(x, y))$ souřadnice druhého konce měřícího ramene (vázaného na kružnici). Měřící hrot se pohybuje po křivce $c = \partial\Omega$. Je-li hrot v bodě $(x, y)$, má jednotkový vektor mířící kolmo k měřícímu rameni vyjádření $\vec{n} = \frac{1}{L}(b - y, x - a)$ a jsou-li dále souřadnice $(X, Y)$



**Obrázek 4.** Schematický nákres polárního planimetru. Dolní konec svislého ramene tvoří pól planimetru. Pól se nepohybuje, ale rameno se okolo něj může otáčet. Šikmé rameno má na pravém konci hrot kopírující hranici měřené množiny a přibližně uprostřed integrační kolečko. Časté je i umístění kolečka až za spojem obou ramen, jako na obrázku vpravo a na obrázku 1. Převzato z `http://persweb.wabash.edu/facstaff/footer`.




**Obrázek 5.** Vektorové pole polárního planimetru. Délka měřícího ramene $L$ je měřena od spoje $(a, b)$ k měřícímu hrotu $(x, y)$. Při pohybu bodu $(x, y)$ po křivce $c$ je spoj ramen $(a, b)$ vázán na vyznačenou kružnici a integrační kolečko v bodě $(X, Y)$ se pohybuje po křivce $C$.

souřadnicemi integračního kolečka pohybujícího se po křivce $C$, je údaj na integračním kolečku roven

$$I = \frac{1}{L}\int_C (b-y)\,\mathrm{d}X + (x-a)\,\mathrm{d}Y. \tag{3.2}$$

Je-li integrační kolečko na rameni planimetru ve vzdálenosti $w$ od bodu $(a, b)$ směrem k bodu $(x, y)$, jsou souřadnice kolečka

$$(X, Y) = \left(\frac{w}{L}x + \left(1-\frac{w}{L}\right)a, \frac{w}{L}y + \left(1-\frac{w}{L}\right)b\right).$$

Tento vzorec zahrnuje i případ $w < 0$, kdy integrační kolečko není mezi oběma konci planimetru, ale je ve vzdálenosti $|w|$ od bodu $(a, b)$, směrem od bodu $(x, y)$. Připomeňme, že $a$ a $b$ jsou funkcemi proměnných $x$ a $y$. Diferencováním vztahů pro $X$ a $Y$ dostaneme

$$\mathrm{d}X = \frac{w}{L}\mathrm{d}x + \left(1-\frac{w}{L}\right)\left[\frac{\partial a}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial a}{\partial y}\mathrm{d}y\right],$$
$$\mathrm{d}Y = \frac{w}{L}\mathrm{d}y + \left(1-\frac{w}{L}\right)\left[\frac{\partial b}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial b}{\partial y}\mathrm{d}y\right]$$

a po dosazení do (3.2) získáme

$$I = \frac{1}{L}\cdot\frac{w}{L}\int_c (b-y)\,\mathrm{d}x + (x-a)\,\mathrm{d}y$$
$$+ \frac{L-w}{L^2}\int_c \left((b-y)\frac{\partial a}{\partial x} + (x-a)\frac{\partial b}{\partial x}\right)\mathrm{d}x + \left((b-y)\frac{\partial a}{\partial y} + (x-a)\frac{\partial b}{\partial y}\right)\mathrm{d}y,$$

kde pro snazší výpočet je integrál rozdělen na dvě části. Aplikace Greenovy věty pro křivku $c = \partial\Omega$ dává po jednoduchých úpravách

$$\begin{aligned} I = \frac{1}{L} \cdot \frac{w}{L} \iint_{\Omega} \left[ 2 - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y} \right] \mathrm{d}S \\ + \frac{1}{L} \left( 1 - \frac{w}{L} \right) \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} - 2 \begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial a}{\partial y} \\ \frac{\partial b}{\partial x} & \frac{\partial b}{\partial y} \end{vmatrix} \right) \mathrm{d}S. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Pokusíme se najít vyjádření výrazů vystupujících v těchto integrálech pomocí proměnných $x$ a $y$.

Dvě ramena polárního planimetru definují dvě vazby mezi body $(x, y)$ a funkcemi $a(x, y)$ a $b(x, y)$. Jsou-li délky ramen planimetru $L$ a $P$, mají tyto vazby tvar

$$a^2 + b^2 = P^2$$

a

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = L^2.$$

Derivováním každého z těchto vztahů podle $x$ a poté podle $y$ obdržíme čtyři rovnice, které je možno zapsat maticově ve tvaru

$$\begin{pmatrix} a & b \\ x - a & y - b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial a}{\partial y} \\ \frac{\partial b}{\partial x} & \frac{\partial b}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x - a & y - b \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Matice

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ x - a & y - b \end{pmatrix}$$

má inverzní matici $M^{-1}$, pokud je splněna podmínka $\det M = ay - bx \neq 0$. Potom platí

$$M^{-1} = \frac{1}{ay - bx} \begin{pmatrix} y - b & -b \\ a - x & a \end{pmatrix}$$

a z (3.4) dostaneme

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial a}{\partial y} \\ \frac{\partial b}{\partial x} & \frac{\partial b}{\partial y} \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x - a & y - b \end{pmatrix} = \frac{1}{ay - bx} \begin{pmatrix} -b(x - a) & -b(y - b) \\ a(x - a) & a(y - b) \end{pmatrix}.$$

Odtud okamžitě plyne

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} = 1.$$

Dále z existence $M^{-1}$ a z Cauchyovy věty (determinant součinu je součinem determinantů) aplikované na maticovou rovnici (3.4) plyne

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial a}{\partial y} \\ \frac{\partial b}{\partial x} & \frac{\partial b}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

S těmito vztahy dostává výraz (3.3) tvar

$$I = \frac{1}{L} \iint_{\Omega} \mathrm{d}S$$

a stejně jako u lineárního planimetru vidíme, že kolečko zobrazuje (až na multiplikativní konstantu) obsah množiny $\Omega$.

*Poznámka* 3.2. Konstrukce polárního planimetru umožňuje měnit délku $L$ ramene planimetru a pohodlně takto pracovat s podklady při různých zvětšeních. Skutečná podoba polárního planimetru se již ve 30. letech 20. století ustálila na snadno rozebíratelné konstrukci, kterou je možno při měření sestavit dvěma různými způsoby, kdy spojení obou ramen je jednou nalevo a jednou napravo od spojnice pólu a měřícího hrotu. Tím je možno kompenzovat případné výrobní nedostatky: měření se provede v obou konfiguracích a z naměřených hodnot se vypočte aritmetických průměr. Tento typ planimetru se již nenazývá Amslerův, ale kompenzační planimetr.

*Poznámka* 3.3. Při měření polárním planimetrem se doporučuje postupovat tak, aby při měření nebyl planimetr příliš otevřený nebo zavřený. Díky úplnému popisu vektorového pole planimetru si, podobně jako u planimetru lineárního, můžeme objasnit, odkud tento požadavek vyvstává. Požadavek na existenci inverzní matice $M^{-1}$ je ekvivalentní podmínce, že $(a, b)$ není násobkem $(x, y)$, tj. že ramena planimetru nejsou rovnoběžná. Čím dále jsme od rovnoběžné konfigurace ramen, tím lépe je soustava (3.4) podmíněna. Proto před měřením nastavíme planimetr tak, aby jeho ramena byla kolmá, když je měřicí hrot blízko těžiště měřeného obrazce.

*Poznámka* 3.4. Pravděpodobně první zmínka o souvislosti planimetru s Greenovou větou je v článku [1]. Dalšími vhodnými zdroji informací jsou například [4, 5]. Bez pomoci Greenovy věty je možno funkci planimetru vysvětlit pomocí Guldinovy věty nebo pomocí křivočarých souřadnic (viz [6]). Čistě geometrické vysvětlení je možno najít například v práci [7] a na webové stránce [8].

## Reference


[1] G. Ascoli: *Vedute sintetiche sugli strumenti integratori*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **18** (1947), 36–54, online `https://link.springer.com/article/10.1007/BF02938642`.

[2] D. Auroux: *Multivariable Calculus*, videopřednáška MIT Course 18.02, čas 43:30, online `https://youtu.be/tYdoS0tkAHA?t=43m30s` (březen 2018).

[3] P. Drábek, G. Holubová: *Parciální diferenciální rovnice*, online `http://mi21.vsb.cz/modul/parcialni-diferencialni-rovnice` (březen 2018).

[4] R. W. Gatterdam: *The planimeter as an example of Green's theorem*, American Mathematical Monthly **88** (1981), 701–704.

[5] T. Leise: *As the planimeter wheel turns*, College Math. J. **38** (2007), 24–31.

[6] L. I. Lowell: *Comments on the polar planimeter*, American Mathematical Monthly **61** (1954), 467–469, online `http://www.jstor.org/stable/pdf/2308082.pdf`.

[7] R. Mařík: *O měření obsahů planimetrem a koloběžkou*, Učitel matematiky **24** (2016) No. 2, 65–79.

[8] R. Mařík: *Za tajemstvím planimetru*, online `http://user.mendelu.cz/marik/mechmat/za_tajemstvim_planimetru/` (březen 2018).

[9] J. Stewart: *Calculus 8th Edition*, Brooks Cole, 2015.

Robert Mařík, Ústav matematiky, Lesnická a dřevařská fakulta, Mendelova univerzita v Brně, Zemědělská 1, 613 00 Brno, Česká republika,
*e-mail*: `marik@mendelu.cz`

# O KŘIVKÁCH A KŘIVOSTECH

JOSEF ŠILHAN a VOJTĚCH ŽÁDNÍK

Abstrakt. Vyjádření křivostí křivek v eukleidovské rovině a prostoru je velice standardním cvičením z diferenciální geometrie. Ve výsledných vzorcích vztažených k obecné parametrizaci křivky lze vidět obsahy rovnoběžníků, příp. objemy rovnoběžnostěnů určených prvními třemi derivacemi křivky. Analogické vztahy pro vyšší křivosti v prostorech vyšší dimenze se v literatuře hledají nesnadno, ačkoli jsou velmi snadno odvoditelné. V tomto příspěvku ukážeme, jak na to.

## 1. Úvod

Začneme s velmi hrubými, ale intuitivně správnými představami o křivkách v eukleidovském prostoru a jejich křivostech. Přímky nejsou křivé vůbec; jejich křivost je nulová. Kružnice jsou rovinné křivky, které jsou křivé všude stejně; jejich křivost je konstantní a nepřímo úměrná poloměru (kolikrát větší poloměr kružnice, tolikrát menší křivost). Všechny kružnice se stejným poloměrem, tedy se stejnou křivostí, jsou navzájem shodné. U obecných křivek v rovinně se jejich křivost může měnit. Pokud tuto vlastnost dokážeme nějak kvantifikovat, pak tušíme, že odpovídající veličina určuje křivku až na shodnost jednoznačně.

Šroubovice jsou křivky, které obdobně jako kružnice vypadají všude stejně křivě, ale na rozdíl od kružnic neleží v žádné rovině. K jejich popisu potřebujeme konstanty dvě, např. poloměr kružnice, která je kolmým průmětem šroubovice, a stoupání šroubovice. První konstanta souvisí s první křivostí křivky, druhá s druhou křivostí neboli torzí. Všechny šroubovice se stejnými prvními i druhými křivostmi jsou navzájem shodné. Šroubovice s nulovou torzí jsou kružnice. U obecných prostorových křivek se obě křivosti mohou měnit, ale opět tušíme, že určují křivku až na shodnost jednoznačně.

Právě popsané představy lze upřesnit několika způsoby. V odstavci 2 uvedeme pár definicí založených na pojmu styku křivek určitého řádu. Výhodou takového přístupu je zřejmý a názorný start, nevýhodou je nepříliš zřejmé zobecnění pro křivky v prostorech obecné dimenze. (Už vymezení torze v dimenzi tři se může nezasvěcenému čtenáři zdát trochu podezřelé.)

---

2010 *MSC.* Primární 53A04, 53A55.
*Klíčová slova.* Křivky, Frenetovy rovnice, invarianty relativní a absolutní.
Vznik článku byl podpořen grantem GAČR 15–11070S.

Alternativní vymezení v odstavcích 5 a 6 je založeno na existenci přirozené parametrizace křivky (parametrizace obloukem) a přirozeného ortonormálního (Frenetova) repéru podél křivky. Vyjádření infinitezimální změny tohoto přirozeného repéru vzhledem k přirozené parametrizaci vede k systému (Frenetových) rovnic, jejichž koeficienty definují podstatné invarianty křivky. Odtud je hned patrné, že takto definované invarianty určují křivku až na shodnost jednoznačně. Jednoduché cvičení ukazuje, že tyto invarianty odpovídají právě těm založených na styku křivek. Další jednoduché cvičení ukazuje, jaké je jejich vyjádření vzhledem k obecné parametrizaci křivky, viz formulky (5.3) a (6.4). Tyto vztahy lze najít (v mnoha mutacích) ve všech relevantních učebnicích a jiných zdrojích. V těchto vyjádřeních se objevují obsahy rovnoběžníků, příp. objemy rovnoběžnostěnů určených prvními třemi derivacemi křivky. To je výchozí bod našich dalších úvah.

Přístup pomocí Frenetova pohyblivého repéru má bezprostřední zobecnění pro křivky v prostorech obecné dimenze, viz odstavec 7. První překvapení skýtá až pátrání po analogiích vztahů (6.4) pro vyšší křivosti. Ty jsme nenašli v žádné nám dostupné učebnici, pouze v poměrně čerstvém článku [1] publikovaném v poměrně prestižním časopise. V tomto příspěvku chceme ukázat, že k témuž výsledku lze dospět poměrně jednoduchou kompilací dobře známých poznatků souvisejících právě s konstrukcí Frenetova repéru. Shrnutí a vyvrcholení celé diskuze nabízíme v odstavci 8, ve Větě 8.1.

Jako pomocný nástroj používáme pojem relativních invariantů křivky, viz odstavec 4. S trochou trpělivosti lze pracovat i bez nich, ale jejich použití velmi usnadňuje nejen mnohé formulace, ale také argumentace.

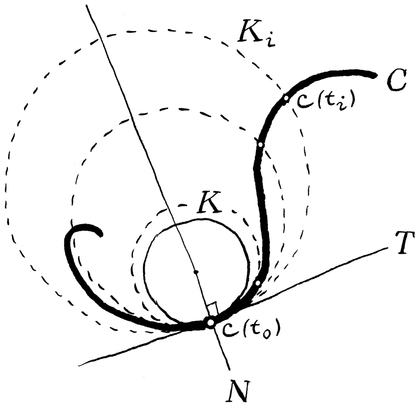
Všechny náležitosti k této klasické látce lze najít v nepřeberném množství literatury, viz např. naše oblíbené zdroje [3] a [4]. Relativní invarianty v učebnicích často nenajdeme, jednou z nemnoha výjimek je např. [2]. Při zpracovávání materiálu jsme se v mnohém inspirovali strukturou příslušného kurzu prof. Ivana Koláře, kterému tento článek věnujeme.

## 2. Styk křivek

V tomto odstavci nabízíme první upřesnění úvodních představ o křivostech křivek pomocí pojmu styku křivek určitého řádu. Celý odstavec je zamýšlen spíš motivačně, pročež si můžeme dovolit poměrně uvolněné formulace. Ke všem zde představeným pojmům se v dalších odstavcích vrátíme.

Styk křivek řádu 0 znamená společný bod, styk řádu 1 znamená společnou tečnu ve společném bodě. Obecně ***styk řádu*** $r$ znamená stejné derivace až do řádu $r$ ve společném bodě vzhledem k vhodným parametrizacím v okolí tohoto bodu[1]. Zde samozřejmě odkazujeme na odpovídající vektory: je-li $\mathbf{c}\colon I \to \mathbb{R}^n$ parametrizace křivky, pak pro $r = 1$ jde o tečný vektor $\mathbf{c}'$, pro $r = 2$ mluvíme o vektoru zrychlení $\mathbf{c}''$ atd. Abychom vůbec mohli uvažovat styk křivek řádu $r$, musí křivky samotné být alespoň řádu $r$, tzn. musí existovat derivace $\mathbf{c}', \mathbf{c}'', \dots$ až do řádu $r$ včetně. Proto v dalším předpokládáme pouze křivky dostatečně vysokého řádu, aniž bychom na

[1] Jedná se o podobný vztah, jaký vládne mezi funkcí a jejím Taylorovým polynomem stupně $r$.




**Obrázek 1.** Oskulační kružnice $K$ rovinné křivky $C$ v bodě $c(t_0)$ je limitou, pro $t_i \to t_0$, kružnic $K_i$ daných body $c(t_0), c(t_i) \in C$ a tečnou $T$ v bodě $c(t_0)$.

to neustále upozorňovali. Jakoukoli veličinu odvozenou z derivací křivky do řádu $r$ budeme zvát *veličinou řádu $r$*.

Tečna ke křivce v daném bodě je přímka, která s ní má v onom bodě styk prvního řádu. Je určena bodem a tečným vektorem $\mathbf{c}'$. Pokud je v nějakém bodě styk křivky a její tečny řádu vyššího, je tento bod *inflexní*. V takovém případě je vektor zrychlení $\mathbf{c}''$ (a tedy i derivované vektory vyšších řádů) násobkem tečného vektoru. Přímky jsou tedy křivky sestávající výhradně z inflexních bodů.

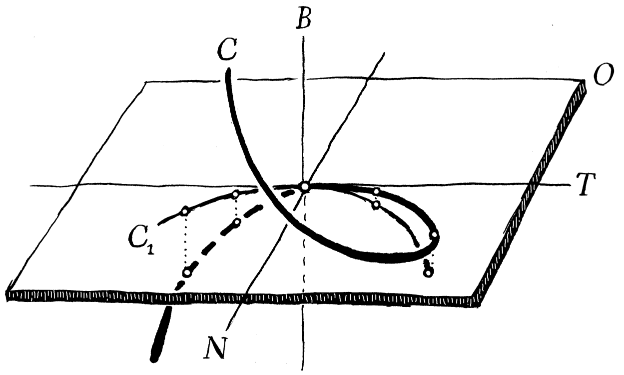
Pro rovinnou křivku v neinflexním bodě existuje kružnice, která s ní má v tomto bodě styk druhého řádu. Taková kružnice se jmenuje *oskulační* a převrácená hodnota jejího poloměru definuje *křivost* křivky v daném bodě. K oskulační kružnici lze názorně dojít limitní úvahou jako na obrázku 1.

Přitom rovinnost křivky lze charakterizovat tak, že třetí derivovaný vektor $\mathbf{c}'''$ (a tedy i derivované vektory vyšších řádů) v každém jejím bodě je (jsou) lineární kombinací tečného vektoru $\mathbf{c}'$ a vektoru zrychlení $\mathbf{c}''$. Pro prostorové křivky toto obecně neplatí; pokud náhodou ano, tak příslušné body se nazývají *planární*. Rovinné křivky jsou tedy křivky sestávající výhradně z planárních bodů.

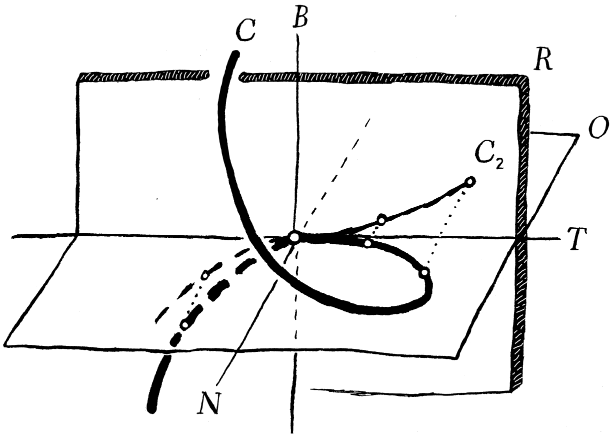
Pro prostorovou křivku v neinflexním bodě můžeme uvažovat rovinu určenou tímto bodem a prvními dvěma derivovanými vektory $\mathbf{c}'$ a $\mathbf{c}''$, tzv. *oskulační* rovinu. (První) *křivost* prostorové křivky zobecňuje předchozí definici pro křivky rovinné: je to křivost kolmého průmětu křivky do oskulační roviny.

Torze (druhá křivost) prostorové křivky je veličina, která měří, jak moc se mění její oskulační rovina, tedy jak moc křivka není rovinná. V předchozím duchu lze tuto veličinu upřesnit následovně. Rovina určená tečným vektorem křivky a normálou oskulační roviny je tzv. *rektifikační* rovina. V ní existuje kubická parabola[2],

[2]Tj. křivka určená rovnicí $z = ax^3$, kde souřadnice $x$ odpovídá tečnému směru, $z$ normále oskulační roviny a konstanta $a$ představuje *stoupání* kubické paraboly.




**Obrázek 2.** Křivost prostorové křivky $C$ odpovídá křivosti jejího kolmého průmětu $C_1$ do oskulační roviny $O$.




**Obrázek 3.** Torze prostorové křivky $C$ odpovídá stoupání jejího kolmého průmětu $C_2$ do rektifikační roviny $R$.

která má s kolmým průmětem křivky do této roviny styk třetího řádu. *Torze* prostorové křivky pak může být definována jako (jistý konstantní násobek) stoupání odpovídající kubické paraboly. Torze je nulová právě v planárních bodech.

Z uvedeného vidíme, že křivost je skalární veličina druhého řádu, torze je řádu třetího. V inflexních bodech není ani křivost ani torze definována, jako mezní případy předchozích úvah je však můžeme považovat za nulové.

## 3. Parametrizace obloukem

V dalším používáme následující konvence a značení. Křivka v reálném eukleidovském prostoru $E = \mathbb{R}^n$ je obrazem prostého zobrazení (dostatečně vysokého řádu) intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ do $E$. Píšeme $C = c(I)$, kde $c\colon I \to E$. Zobrazení samotné, $t \mapsto c(t)$, je *parametrizací* křivky. Odpovídající polohový vektor značíme tlustě,

$t \mapsto \mathbf{c}(t)$, derivované vektory dekorujeme čárkami, proměnnou $t$ zpravidla nepíšeme,

$$\mathbf{c}' := \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{c}, \quad \mathbf{c}'' := \tfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{c}, \quad \dots, \quad \mathbf{c}^{(i)} := \tfrac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i}\mathbf{c}.$$

Křivka je *regulární*, pokud její tečný vektor (vzhledem k libovolné parametrizaci) je všude nenulový. Všude v dalším se omezujeme pouze na regulární křivky.

Každá regulární křivka v eukleidovském prostoru má přirozenou parametrizaci odpovídající délce části křivky od jejího krajního bodu, tzv. *parametrizace obloukem*. Pro $I = [a, b]$ tento význačný parametr odpovídá reparametrizaci $s\colon [a, b] \to [0, L]$,

$$s(t) := \int_a^t \|\mathbf{c}'(u)\| \,\mathrm{d}u,$$

kde $t \in [a, b]$, $L$ značí celkovou délku křivky a $\|\mathbf{c}'\| = \sqrt{\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'}$ velikost vektoru (přičemž tečka mezi vektory pod odmocninou značí skalární součin). Derivace vzhledem k tomuto parametru budeme pro odlišení značit tečkami, proměnnou $s$ opět zpravidla nepíšeme,

$$\dot{\mathbf{c}} := \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbf{c}, \quad \ddot{\mathbf{c}} := \tfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\mathbf{c}, \quad \dots, \quad \overset{(i)}{\mathbf{c}} := \tfrac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}s^i}\mathbf{c}.$$

Z definice vyplývá, že tečný vektor vzhledem k této parametrizaci má konstantní velikost, a to jednotkovou, $\|\dot{\mathbf{c}}\| = 1$. Jinými slovy, parametrizace obloukem odpovídá rovnoměrnému pohybu podél křivky. Počínaje odstavcem 5 budeme právě takovou parametrizaci hojně využívat.

## 4. Reparametrizace a relativní invarianty

Velikost tečného vektoru je jednoduchým příkladem tzv. relativního invariantu křivky. Tímto slovním spojením označujeme veličiny, které jsou invariantní vzhledem ke všem shodným zobrazením a chovají se rozumně vzhledem k reparametrizacím křivky. Studium (metrických vlastností) křivek v eukleidovském prostoru znamená právě studium takových invariantů. Křivost a torze prostorové křivky jsou tzv. absolutní invarianty křivky. Oba nové pojmy hned upřesníme.

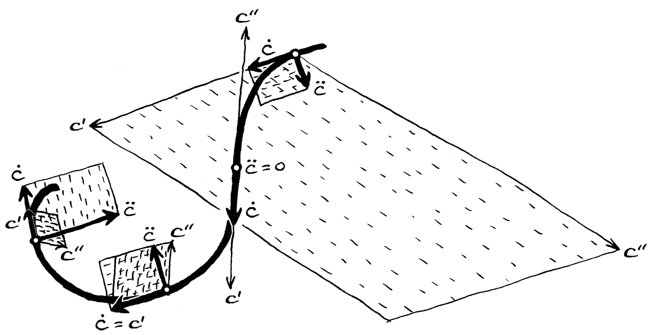
Uvažme křivku $C$ s parametrizací $t \mapsto \mathbf{c}(t)$ a obecnou reparametrizaci $\tilde{t} = g(t)$, kde $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} \neq 0$. Pro odpovídající tečné vektory podle řetězového pravidla platí $\frac{\mathrm{d}\mathbf{c}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{c}}{\mathrm{d}\tilde{t}} \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}$. Všechny objekty vztažené k parametru $\tilde{t}$ budeme pro jednoduchost značit vlnkou, tj. $\tilde{\mathbf{c}}' = \frac{\mathrm{d}\mathbf{c}}{\mathrm{d}\tilde{t}}$ apod. Při tomto značení máme

$$\tilde{\mathbf{c}}' = g'^{-1}\mathbf{c}', \tag{4.1}$$

a tedy $\|\tilde{\mathbf{c}}'\| = g'^{-1}\|\mathbf{c}'\|$. Obecně, funkce $I\colon C \to \mathbb{R}$, která je invariantní vzhledem ke shodnostem a která se vzhledem k uvedené reparametrizaci křivky $C$ mění jako

$$\tilde{I} = \pm g'^{-k} I,$$

se nazývá *relativním invariantem* křivky *váhy k*. Invarianty s váhou 0 jsou *absolutními invarianty* křivky, a o ty nám jde především.




**Obrázek 4.** Znázornění relativních invariantů $V_1$ a $V_2$ vzhledem k parametrizaci obloukem a k jisté exponenciální reparametrizaci.

Ve zbytku tohoto odstavce směřujeme k jednoduchému pomocnému tvrzení, na které se budeme záhy odkazovat. Vzhledem k právě zavedené terminologii je velikost tečného vektoru křivky, $V_1 := \|\mathbf{c}'\|$, relativním invariantem váhy 1. Derivací (4.1) dostáváme

$$\tilde{\mathbf{c}}'' = g'^{-2}\mathbf{c}'' - g'^{-3}g''\mathbf{c}'.$$

Obsah rovnoběžníku určeného vektory $\tilde{\mathbf{c}}'$ a $\tilde{\mathbf{c}}''$ je proto stejný jako obsah rovnoběžníku určeného vektory $g'^{-1}\mathbf{c}'$ a $g'^{-2}\mathbf{c}''$. Tyto obsahy (příp. za chvíli objemy) budeme značit $\mathrm{vol}(\dots)$. Z uvedeného plyne, že

$$\mathrm{vol}(\tilde{\mathbf{c}}', \tilde{\mathbf{c}}'') = g'^{-3}\,\mathrm{vol}(\mathbf{c}', \mathbf{c}''),$$

neboli funkce $V_2 := \mathrm{vol}(\mathbf{c}', \mathbf{c}'')$ je relativním invariantem váhy 3.

Obecně, pro libovolné $i$ platí, že vektor $\tilde{\mathbf{c}}^{(i)}$ je roven $g'^{-i}\mathbf{c}^{(i)}$ až na nějakou lineární kombinaci vektorů nižších řádů,

$$\tilde{\mathbf{c}}^{(i)} \equiv g'^{-i}\mathbf{c}^{(i)} \mod \langle \mathbf{c}', \dots, \mathbf{c}^{(i-1)} \rangle.$$

Odtud vidíme, že objem rovnoběžnostěnu určeného prvními $j$ derivovanými vektory je

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(\tilde{\mathbf{c}}', \tilde{\mathbf{c}}'', \dots, \tilde{\mathbf{c}}^{(j)}) &= g'^{-1-2-\dots-j}\,\mathrm{vol}(\mathbf{c}', \mathbf{c}'', \dots, \mathbf{c}^{(j)})\\ &= g'^{-\frac{j(j+1)}{2}}\,\mathrm{vol}(\mathbf{c}', \mathbf{c}'', \dots, \mathbf{c}^{(j)}).\end{aligned}$$

Celkem tedy dostáváme následující tvrzení.

**Věta 4.1.** *Funkce $V_j := \mathrm{vol}(\mathbf{c}', \dots, \mathbf{c}^{(j)})$ je relativním invariantem váhy $\frac{j(j+1)}{2}$.*

V trojrozměrném prostoru pochopitelně nemá smysl uvažovat jiné invarianty než $V_1$, $V_2$ a $V_3$, ostatní jsou automaticky nulové. Obecně, pokud je křivka obsažena v $k$-rozměrném podprostoru, potom nutně $V_l = 0$ pro všechna $l > k$.

Pro obecnou křivku v $n$-rozměrném prostoru je objem $V_n$ všude nenulový a odpovídá – až na znaménko – vnějšímu součinu vektorů $(\mathbf{c}', \dots, \mathbf{c}^{(n)})$. To je determinant matice utvořené ze souřadnic jednotlivých vektorů (vzhledem k libovolné ortonormální bázi), který budeme značit $\det(\mathbf{c}', \dots, \mathbf{c}^{(n)})$.

## 5. Frenetovy rovnice v rovině

Vzhledem k parametrizaci obloukem má tečný vektor (regulární) křivky konstantní velikost 1, tj. $\dot{\mathbf{c}} \cdot \dot{\mathbf{c}} = 1$. Proto $\ddot{\mathbf{c}} \cdot \dot{\mathbf{c}} = 0$, což znamená, že vektor zrychlení $\ddot{\mathbf{c}}$ je všude k tečnému vektoru kolmý. Tento vektor je nulový právě v inflexních bodech. V neinflexním bodě má jeho velikost geometrický význam související s křivostí křivky.

Pro rovinnou křivku lze ukázat, že velikost $\|\ddot{\mathbf{c}}\|$ odpovídá právě křivosti křivky vymezené v odstavci 2 (tedy, že převrácená hodnota $1/\|\ddot{\mathbf{c}}\|$ odpovídá právě poloměru oskulační kružnice). Jak v inflexním, tak v neinflexním bodě můžeme vektor $\mathbf{e}_1 := \dot{\mathbf{c}}$ doplnit o vektor $\mathbf{e}_2$ tak, aby tato dvojice tvořila ortonormální kladně orientovanou bázi, tzv. *Frenetův repér* rovinné křivky. Zřejmě platí

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = \kappa_1 \mathbf{e}_2, \tag{5.1}$$

kde $\kappa_1 = 0$ v inflexním bodě a $\kappa_1 = \pm\|\ddot{\mathbf{c}}\|$ v neinflexním bodě. Rovnost (5.1) můžeme chápat jako definici *křivosti* křivky. Rozdíl oproti předchozímu vymezení spočívá pouze ve znaménku: kladné, resp. záporné znaménko odpovídá tomu, zda se křivka „stáčí“ souhlasně, resp. nesouhlasně s orientací roviny, viz obrázek 5. V následujícím budeme zobecňovat právě tento přístup s vědomím, že znaménka nás příliš nezajímají.

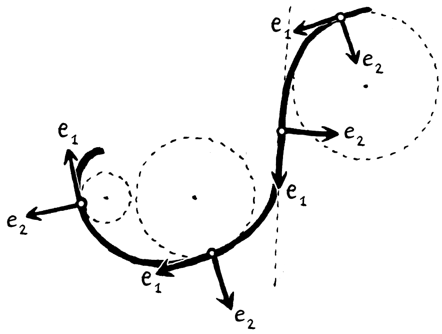
Ještě si všimněme několika věcí, které plynou z ortonormálnosti repéru $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Jednak po derivaci vztahů $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 1$ a $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$ zjišťujeme, že $\dot{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \dot{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$ a $\dot{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1 \cdot \dot{\mathbf{e}}_2$. Dále libovolný vektor v rovině lze vyjádřit jako $\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1)\,\mathbf{e}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2)\,\mathbf{e}_2$. Pro vektory $\dot{\mathbf{e}}_1$, resp. $\dot{\mathbf{e}}_2$, tak dostáváme $\dot{\mathbf{e}}_1 = (\dot{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{e}_2)\,\mathbf{e}_2$, resp. $\dot{\mathbf{e}}_2 = (\dot{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{e}_1)\,\mathbf{e}_1 = -(\dot{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{e}_2)\,\mathbf{e}_1$. Vzhledem ke značení zavedenému rovností (5.1) tedy platí

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_1 &= \kappa_1 \mathbf{e}_2, \\ \dot{\mathbf{e}}_2 &= -\kappa_1 \mathbf{e}_1. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Toto jsou tzv. *Frenetovy rovnice* pro rovinnou křivku. Dvě shodné křivky parametrizované obloukem zřejmě mají stejné křivosti. Naopak, všude nenulová funkce $s \mapsto \kappa_1(s)$ určuje křivku až na shodnost jednoznačně: pro libovolnou ortonormální bázi v libovolném bodě existuje jediné řešení systému diferenciálních rovnic (5.2), jímž je Frenetův pohyblivý repér určující křivku s křivostí $\kappa_1$[3]. Jiná počáteční podmínka určuje jinou křivku, ale protože oba počáteční repéry byly ortonormální, existuje shodnost zobrazující jeden na druhý. Tatáž shodnost pak zobrazuje i jedno řešení na druhé.

Vzhledem k hlavnímu poslání tohoto článku ještě musíme vyjádřit křivost $\kappa_1$ obecně. Vzhledem k tomu, že $\|\dot{\mathbf{c}}\| = 1$ a $\|\ddot{\mathbf{c}}\| = \pm\kappa_1$, zřejmě platí $\kappa_1 = \pm\operatorname{vol}(\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}})$. Přitom znaménko koresponduje s výše diskutovanou orientací, a to tak, že $\kappa_1 = \det(\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}})$. Z odstavce 4 víme, že $\det(\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}})$ se vzhledem k obecné reparametrizaci

[3] Podmínka $\kappa_1 \neq 0$ je nutným předpokladem pro použití příslušné věty z teorie diferenciálních rovnic. Odpovídající omezení pro křivku znamená, že je bez inflexních bodů.




**Obrázek 5.** Frenetův repér rovinné křivky a oskulační kružnice.

transformuje jako $\det(\mathbf{c}', \mathbf{c}'') = \|\mathbf{c}'\|^3 \det(\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}})$. Celkem tak dostáváme známý vzoreček

$$\kappa_1 = \frac{\det(\mathbf{c}', \mathbf{c}'')}{\|\mathbf{c}'\|^3} = \pm \frac{V_2}{V_1^3}\,. \tag{5.3}$$

Vzhledem k výše zavedené terminologii můžeme vztah (5.3) zdůvodnit také takto: Jak veličina v čitateli, tak veličina ve jmenovateli je relativním invariantem váhy 3. Výsledek je proto váhy 0, tedy to je absolutní invariant, a ten vzhledem k parametrizaci obloukem souhlasí s křivostí křivky. Podobným způsobem budeme argumentovat i v dalších odstavcích.

## 6. Frenetovy rovnice v prostoru

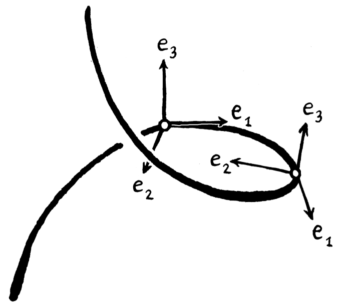
Pro prostorovou křivku můžeme postupovat obdobně, ale už o něco rychleji. Z dobrých důvodů se omezujeme pouze na křivky (nebo jejich části) bez inflexních bodů. Pokud dvojici ortonormálních vektorů $\dot{\mathbf{c}}$ a $\ddot{\mathbf{c}}/\|\ddot{\mathbf{c}}\|$ doplníme o jejich vektorový součin, dostáváme ortonormální kladně orientovanou bázi,

$$\mathbf{e}_1 := \dot{\mathbf{c}}, \qquad \mathbf{e}_2 := \frac{\ddot{\mathbf{c}}}{\|\ddot{\mathbf{c}}\|}\,, \qquad \mathbf{e}_3 := \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2,$$

tedy *Frenetův repér* prostorové křivky. Zřejmě opět platí (5.1), avšak s tím rozdílem, že (první) *křivost* je $\kappa_1 = \|\ddot{\mathbf{c}}\|$, tedy $\kappa_1 > 0$. Obdobné cvičení jako při odvozování vztahů (5.2) vede k následujícímu vyjádření infinitezimální změny Frenetova repéru, tj. k *Frenetovým rovnicím* pro prostorovou křivku

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_1 &= \kappa_1 \mathbf{e}_2, \\ \dot{\mathbf{e}}_2 &= -\kappa_1 \mathbf{e}_1 + \kappa_2 \mathbf{e}_3, \\ \dot{\mathbf{e}}_3 &= -\kappa_2 \mathbf{e}_2, \end{aligned} \tag{6.1}$$

pro nějakou funkci $\kappa_2$, kterou nazveme druhou křivostí neboli *torzí* křivky. Ze stejného důvodu jako výše, funkce $\kappa_1$ a $\kappa_2$ určují prostorovou křivku až na shodnost jednoznačně.




**Obrázek 6.** Frenetův repér prostorové křivky.

Lze ukázat, že tyto dva invarianty odpovídají právě křivosti a torzi vymezené v odstavci 2 (tedy pomocí kolmých průmětů křivky do oskulační a rektifikační roviny v každém bodě). Naznačíme, jak by se taková věc dokazovala, a to ze dvou důvodů: jednak chceme čtenáře průběžně utvrzovat v dojmu, že náš výklad je konzistentní, jednak část uvedených postřehů budeme záhy potřebovat.

Taylorův rozvoj parametrizace křivky v okolí bodu odpovídajícího parametru $s_0$ je tvaru

$$\mathbf{c}(s) = \mathbf{c}(s_0) + \dot{\mathbf{c}}(s_0)\, s + \tfrac{1}{2}\ddot{\mathbf{c}}(s_0)\, s^2 + \tfrac{1}{6}\dddot{\mathbf{c}}(s_0)\, s^3 + o(s^4),$$

kde $o(s^4)$ značí členy alespoň čtvrtého řádu. Z definice $\mathbf{e}_1 = \dot{\mathbf{c}}$ a Frenetových rovnic (6.1) postupně vyjádříme derivované vektory do řádu tři

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{c}} &= \dot{\mathbf{e}}_1 = \kappa_1 \mathbf{e}_2,\\ \dddot{\mathbf{c}} &= \dot{\kappa}_1 \mathbf{e}_2 + \kappa_1 \dot{\mathbf{e}}_2 = -\kappa_1^2 \mathbf{e}_1 + \dot{\kappa}_1 \mathbf{e}_2 + \kappa_1 \kappa_2 \mathbf{e}_3.\end{aligned} \tag{6.2}$$

Dosazením do předchozího rozvoje, po zřejmé úpravě, dostáváme

$$\begin{aligned}\mathbf{c}(s) = \mathbf{c}(s_0) &+ \mathbf{e}_1 \left(s - \tfrac{1}{6}\kappa_1^2(s_0)\, s^3\right)\\ &+ \mathbf{e}_2 \left(\tfrac{1}{2}\kappa_1(s_0)\, s^2 + \tfrac{1}{6}\dot{\kappa}_1(s_0)\, s^3\right)\\ &+ \mathbf{e}_3 \left(\tfrac{1}{6}\kappa_1(s_0)\kappa_2(s_0)\, s^3\right) + o(s^4).\end{aligned}$$

Oskulační rovina je určena vektory $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$, rektifikační rovina je určena vektory $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_3$. Z právě uvedeného je patrné, jak vyjádřit kolmé průměty křivky do těchto rovin a také jak s nimi případně nakládat: máme jejich analytický popis do řádu tři a oba invarianty, se kterými chceme tyto průměty porovnávat, jsou řádu nejvýše tři.

Vzhledem k hlavnímu poslání tohoto článku ještě musíme vyjádřit křivosti prostorové křivky obecně. Vyjádření křivosti $\kappa_1$ je stejné jako v odstavci 5 až na znaménko. Zejména $\kappa_1 = \operatorname{vol}(\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}}) > 0$. K vyjádření torze $\kappa_2$ si stačí povšimnout, že

$$\det(\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}}, \dddot{\mathbf{c}}) = \det(\mathbf{e}_1, \kappa_1\mathbf{e}_2, \kappa_1\kappa_2\mathbf{e}_3) = \kappa_1^2\kappa_2 \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \kappa_1^2\kappa_2, \tag{6.3}$$

což plyne z (6.2), vlastností determinantu a faktu, že trojice $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ tvoří kladnou ortonormální bázi. Odtud dostáváme

$$\kappa_2 = \frac{\det(\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}}, \dddot{\mathbf{c}})}{\operatorname{vol}(\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}})^2}\,.$$

Vzhledem k závěrům odstavce 4 víme, že jak veličina v čitateli, tak veličina ve jmenovateli je relativním invariantem váhy 6. Výsledek je proto váhy 0 a uvedený vztah je platný vzhledem k libovolné parametrizaci křivky. Celkem tak dostáváme známé vzorečky

$$\kappa_1 = \frac{\operatorname{vol}(\mathbf{c}', \mathbf{c}'')}{\|\mathbf{c}'\|^3} = \frac{V_2}{V_1^3}\,, \qquad \kappa_2 = \frac{\det(\mathbf{c}', \mathbf{c}'', \mathbf{c}''')}{\operatorname{vol}(\mathbf{c}', \mathbf{c}'')^2} = \pm\frac{V_3}{V_2^2}\,. \tag{6.4}$$

Podobně jako u křivosti rovinné křivky, znaménko torze prostorové křivky nám říká něco o tom, jak se křivka „kroutí“ vzhledem k orientaci prostoru. V planárních bodech je torze zřejmě nulová a naopak.

## 7. Frenetovy rovnice v obecné dimenzi

Pro křivku v eukleidovském prostoru obecné dimenze $n$ můžeme její *Frenetův repér* budovat pomocí Gramova–Schmidtova nakolmovacího procesu,

$$\mathbf{f}_i := \overset{(i)}{\mathbf{c}} - \sum_{j=1}^{i-1} (\overset{(i)}{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{e}_j)\, \mathbf{e}_j, \qquad \mathbf{e}_i := \frac{\mathbf{f}_i}{\|\mathbf{f}_i\|}, \tag{7.1}$$

pro $i = 1, 2, \ldots$. Skutečný repér dostaneme pouze v případě, že prvních $n-1$ derivovaných vektorů křivky je nezávislých[4]. V takovém případě je posloupnost $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}$ ortonormální a jejich vektorový součin $\mathbf{e}_n := \mathbf{e}_1 \times \cdots \times \mathbf{e}_{n-1}$ ji doplňuje do ortonormální kladně orientované báze celého prostoru. Pokud je křivka obsažena v podprostoru dimenze $k$ (a žádném menším), potom je prvních $k$ vektorů z posloupnosti (7.1) nezávislých, ostatní jsou nulové. Zúžením na příslušný podprostor můžeme křivku uspokojivě studovat ve stejném duchu. V následujícím se proto dobrovolně omezujeme pouze na křivky splňující výše uvedenou podmínku.

Obdobně jako před (5.2) a (6.1) si uvědomujeme, že z ortonormálnosti repéru $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ plyne jednak obecné vyjádření

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \sum_{j=1}^{i+1} (\dot{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j)\, \mathbf{e}_j \tag{7.2}$$

pro $i = 1, \ldots, n$ a jednak vztahy

$$\dot{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} 0, & \text{pro } i = j, \\ -\mathbf{e}_i \cdot \dot{\mathbf{e}}_j, & \text{pro } i \neq j. \end{cases}$$

[4]Pro $n = 2$, resp. 3 tato podmínka koresponduje právě s podmínkou regulárnosti, resp. neinflexnosti.

Odtud je patrné, že většina koeficientů v (7.2) je automaticky nulová a mezi zbylými vládnou přísné (anti-)symetrie. Tím dospíváme k *Frenetovým rovnicím* pro obecnou křivku v $n$-rozměrném prostoru

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}_1 &= \kappa_1 \mathbf{e}_2,\\ \dot{\mathbf{e}}_i &= -\kappa_{i-1}\mathbf{e}_{i-1} + \kappa_i \mathbf{e}_{i+1} \qquad \text{pro } i = 2,\dots,n-1,\\ \dot{\mathbf{e}}_n &= -\kappa_{n-1}\mathbf{e}_{n-1}\end{aligned} \tag{7.3}$$

pro nějaké funkce $\kappa_1,\dots,\kappa_{n-1}$, které nazýváme ***křivostmi*** křivky. Ty určují křivku až na shodnost jednoznačně. Prvních $n-2$ křivostí je kladných, poslední (také přezdívaná *torze*) může mít znaménko jakékoli. Obecná $i$-tá křivost je zřejmě řádu $i+1$.

Z uvedeného mimo jiné známe vyjádření křivostí pomocí vektorů z Frenetova repéru vzhledem k parametrizaci obloukem,

$$\kappa_i = \dot{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_{i+1}.$$

V následujícím odstavci konečně představíme vyjádření pomocí původních vektorů vzhledem k obecné parametrizaci.

## 8. Absolutní invarianty v obecné parametrizaci

Nejprve vzhledem k Frenetovu repéru vyjádříme derivované vektory křivky při parametrizaci obloukem. Z definice $\mathbf{e}_1 = \dot{\mathbf{c}}$ a Frenetových vztahů (7.3) postupně dostáváme (6.2) atd. Obecně, pro $i = 1,\dots,n$, platí

$$\overset{(i)}{\mathbf{c}} \equiv \kappa_1 \cdots \kappa_{i-1}\mathbf{e}_i \mod \langle \mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_{i-1}\rangle. \tag{8.1}$$

Z konstrukce Frenetova repéru víme, že

$$\overset{(i)}{\mathbf{c}} \equiv \pm\|\mathbf{f}_i\|\,\mathbf{e}_i \mod \langle \mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_{i-1}\rangle$$

pro všechna $i$, viz (7.1). Přitom znaménko na pravé straně je kladné pro všechna $i = 1,\dots,n-1$, pouze pro $i = n$ může být jakékoli. Z předchozích dvou rovností dostáváme

$$\kappa_1 \cdots \kappa_{i-1} = \pm\|\mathbf{f}_i\|.$$

Tedy, pro všechna přípustná $i$, platí

$$\kappa_{i-1} = \pm\frac{\|\mathbf{f}_i\|}{\|\mathbf{f}_{i-1}\|}\,. \tag{8.2}$$

Z konstrukce Frenetova repéru také víme, že velikost $\|\mathbf{f}_i\|$ představuje výšku rovnoběžnostěnu určeného vektory $\dot{\mathbf{c}},\dots,\overset{(i)}{\mathbf{c}}$ vzhledem ke stěně určené vektory $\dot{\mathbf{c}},\dots,\overset{(i-1)}{\mathbf{c}}$. Pro odpovídající objemy proto platí

$$V_i = V_{i-1}\cdot\|\mathbf{f}_i\|.$$

Odtud a z (8.2) se tedy dozvídáme, že, pro libovolné $i = 1,\dots,n-1$, platí

$$\kappa_i = \pm\frac{V_{i+1}\cdot V_{i-1}}{V_i^2}\,. \tag{8.3}$$

Tím jsme vyjádřili jednotlivé křivosti pomocí objemů příslušných rovnoběžnostěnů asociovaných k dané křivce. Ty jsme až dosud vztahovali k parametrizaci obloukem. Vzhledem k tomu, že se jedná o relativní invarianty křivky, umíme bez jakéhokoli zvláštního úsilí přejít ke slibovanému obecnému vyjádření.

**Věta 8.1.** *Pro libovolnou křivku s libovolnou parametrizací a pro libovolné* $i = 1, \ldots, n-1$ *platí*

$$\kappa_i = \pm \frac{V_{i+1} \cdot V_{i-1}}{V_1 \cdot V_i^2}\,. \tag{8.4}$$

*Důkaz.* Podle Věty 4.1 je výraz na pravé straně (8.4) relativním invariantem váhy

$$\frac{(i+1)(i+2)}{2} + \frac{(i-1)i}{2} - 1 - i(i+1) = 0,$$

tedy to je absolutní invariant. Pro parametrizaci obloukem je $V_1 = 1$, tedy (8.4) souhlasí s (8.3). □

Pro upřesnění: všechny křivosti až na poslední jsou kladné, znaménko $\kappa_{n-1}$ může být jakékoliv.

Pro ověření: dosazením $i = 1$ a 2 do (8.4) skutečně dostáváme vzorečky (5.3), resp. (6.4).

Pro zajímavost: přímo z (8.1) plyne následující zobecnění vztahu (6.3),

$$V_i = \pm \prod_{j=1}^{i} \kappa_j^{i-j}.$$

Odtud lze matematickou indukcí dokázat platnost (8.3), aniž bychom odkazovali na vektory $\mathbf{f}_i$ a jejich velikosti. Výše představené odvození se nám zdá přímější, tedy pro tento typ výkladu příhodnější.

## Reference


[1] J. Gutkin: *Curvatures, volumes and norms of derivatives for curves in Riemannian manifolds*, Journal of Geometry and Physics **61** (2011), No. 11, 2147–2161.

[2] V. Hlavatý: *Diferenciální geometrie křivek a ploch a tensorový počet*, Jednota čsl. matematiků a fysiků, Praha, 1937.

[3] W. Kuehnel: *Differential geometry: curves, surfaces, manifolds*, American Mathematical Society, Providence, 2015.

[4] M. Spivak: *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. 2*, Publish or Perish, Houston, 1999.



Josef Šilhan, Přírodovědecká fakulta, Masarykova Univerzita, Kotlářská 2, 611 37, Brno,
*e-mail*: `silhan@math.muni.cz`

Vojtěch Žádník, Pedagogická fakulta, Masarykova Univerzita, Poříčí 31, 603 00 Brno,
*e-mail*: `zadnik@mail.muni.cz`

# SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ MODELY POPULAČNÍ BIOLOGIE

LUCIE ONDROVÁ

Abstrakt. Článek se zabývá analýzou logistického modelu jednodruhové populace ve spojitém i diskrétním tvaru. U každého modelu je komentován rovnovážný stav, jeho stabilita a chování řešení při různých počátečních podmínkách. Článek poukazuje na velké rozdíly v kvalitativních vlastnostech, zejména na periodické chování řešení diskrétního modelu. V diskrétním modelu se také navíc objevuje chaotické chování řešení. Chování řešení je závislé na parametru, který charakterizuje míru růstu zkoumané populace. Pro vybrané hodnoty tohoto parametru jsou jednotlivé druhy chování obou modelů graficky interpretovány[1].

Populační biologie je vědní disciplína zkoumající nejen vývoj a změny uvnitř populace jednoho druhu, ale také interakci mezi více živočišnými druhy. Takový vývoj nebo interakci je možné popsat matematickým modelem, jehož analýzou lze ukázat jisté vlastnosti zkoumaného systému. V závislosti na volbě časové osy se modely dělí na spojité a diskrétní. Spojitý model popisuje systém na souvislém časovém intervalu a je tvořen soustavou diferenciálních rovnic. Diskrétní model popisuje systém na intervalu stejně dlouhých časových úseků, a je tvořen soustavou diferenčních rovnic.

Mezi nejznámější modely populační biologie patří logistický model, který popisuje změnu velikosti populace daného druhu v čase $t$. Tato změna je závislá na parametrech $r$ a $K$, které z biologického hlediska charakterizují daný druh. Parametr $r$ vyjadřuje míru růstu (nebo poklesu) populace a parametr $K$ vyjadřuje únosnou kapacitu prostředí, ve kterém daná populace žije (tedy takovou velikost populace, jejíž potřeby jsou ještě uspokojitelné dostupnými zdroji). Analýzou logistického modelu lze najít rovnovážné stavy velikosti populace a určit, zda v takovém stavu populace setrvá (označováno jako rovnováha systému a její stabilita), případně zda změna velikosti populace systému může vykazovat opakované chování (označováno jako periodické chování systému).

Spojitý logistický model je sestaven z diferenciální rovnice prvního řádu tvaru

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right),$$

2010 *MSC.* Primární 39A12; Sekundární 34D20,39A30.

*Klíčová slova.* Diferenciální rovnice, diferenční rovnice, logistická rovnice, rovnováha modelu, cyklus řádu $k$, stabilita řešení, periodické chování, chaotické chování.

[1]Článek vznikl na základě bakalářské práce autorky v oboru Matematické inženýrství na FSI VUT v Brně. Vedoucím práce byl Jan Čermák z Ústavu matematiky FSI VUT v Brně.

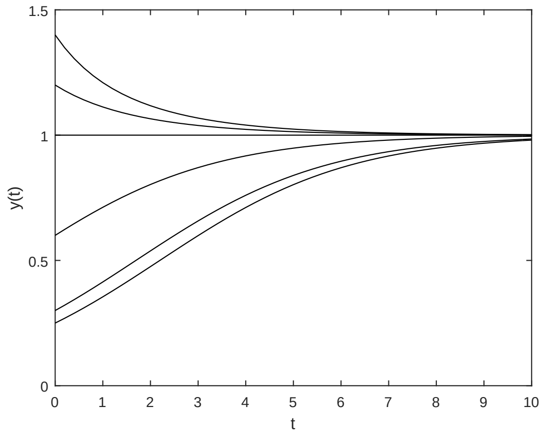
kterou lze snadno řešit pomocí separace proměnných a dostat tak řešení ve tvaru

$$y(t) = \frac{Ky_0}{y_0 + (K - y_0)e^{-rt}},$$

kde $y_0$ vyjadřuje počáteční velikost populace a $y(t)$ velikost populace v čase $t$. Pro tento model existují dva rovnovážné stavy

$$y_1^* = 0, \qquad y_2^* = K.$$

Stabilita jednotlivých rovnováh závisí na velikosti parametru $r$. Rovnováha $y_1^*$ je stabilní pro $r < 0$, naopak rovnováha $y_2^*$ je stabilní pro $r > 0$. Tyto výsledky lze vidět na obrázcích 1 a 2. Je také zřejmé, že při $r > 0$ se velikost popu-




**Obrázek 1.** Graf řešení spojitého modelu pro $K = 1$, $r = 0,5$.

lace bude s rostoucím časem přibližovat únosné kapacitě prostředí $K$, a to při jakékoliv počáteční velikosti populace. Tento systém nevykazuje periodické chování při žádné hodnotě parametru $r$.

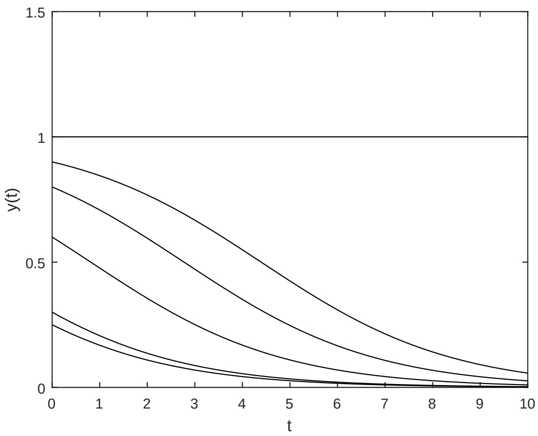
Oproti předchozímu systému, diskrétní logistický model vykazuje podstatně bohatší chování systému. Je tvořený diferenční rovnicí prvního řádu tvaru

$$x_{n+1} = x_n + rx_n\left(1 - \frac{x_n}{K}\right),$$

která však navzdory poměrně jednoduchému tvaru není obecně řešitelná. Lze sice postupně určovat velikosti populace $x_1, x_2, \ldots$ v jednotlivých časových úsecích za pomoci počáteční velikosti populace $x_0$, ovšem tento proces je velmi zdlouhavý a nedává žádné informace o vlastnostech řešení pro velká $n$. Tento systém má opět dvě rovnováhy

$$x_1^* = 0, \qquad x_2^* = K,$$

které se však od rovnováh spojitého modelu liší oblastí stability. Rovnováha $x_1^*$ je stabilní pouze pro $r \in (-1, 0)$, rovnováha $x_2^*$ je stabilní pouze pro $r \in (0, 2)$. Velikost populace tak bude konvergovat k únosné kapacitě prostředí $K$ při jakékoliv




**Obrázek 2.** Graf řešení spojitého modelu pro $K = 1$, $r = -0,5$.

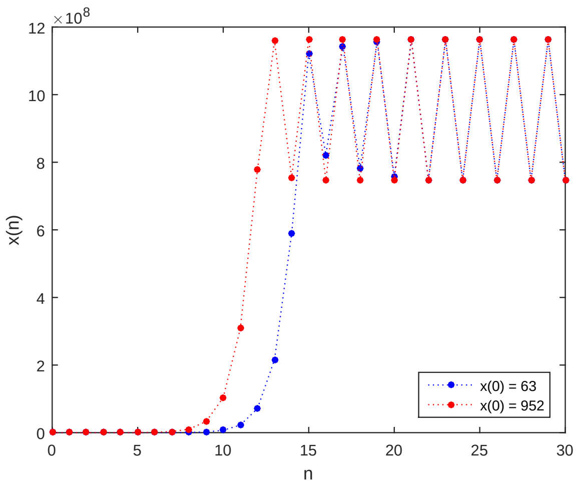
počáteční velikosti populace pouze, pokud bude míra růstu populace v intervalu $r \in (0, 2)$. Pro $r > 2$ je tedy chování systému odlišné, avšak nastává otázka, do jaké míry.

I pro tyto hodnoty parametru $r$ lze ukázat jisté zákonitosti v chování systému. Velikost populace se po nějakém časovém úseku začne opakovat v určitých cyklech (označováno jako cyklus řádu $k$), jejichž periodu $k$ a existenci lze potvrdit $k$-tou iterací pravé strany tohoto modelu. Cyklus řádu $k$ je tedy tvořen $k$ body ($k$ velikostmi populace), které se od určitého časového úseku začnou opakovat. Každý cyklus je navíc stabilní pro určitý interval hodnot parametru $r$. Tabulka 1 popisuje oblasti stability jednotlivých cyklů i rovnováh obou modelů. Je nutné

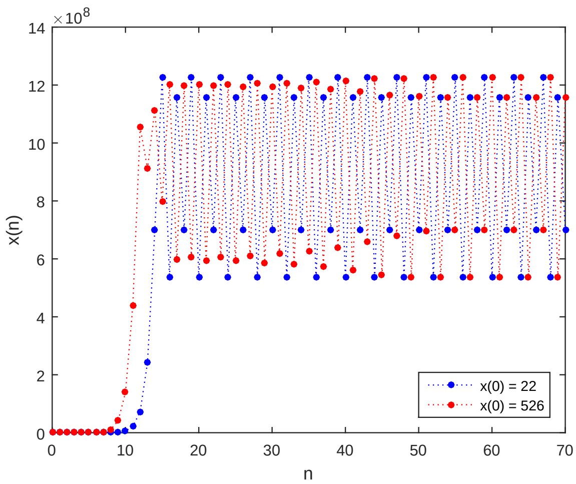
<table>
<tr><th colspan="2">Spojitý model</th><th colspan="2">Diskrétní model</th></tr>
<tr><th>Druh řešení</th><th>Asymptotická stabilita</th><th>Druh řešení</th><th>Asymptotická stabilita</th></tr>
<tr><td>Rovnováha $y^* = 0$</td><td>$r < 0$</td><td>Rovnováha $x^* = 0$</td><td>$-1 < r < 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Rovnováha<br>$y^* = K$</td><td rowspan="7">$r > 0$</td><td>Rovnováha $x^* = K$</td><td>$0 < r \leq 2$</td></tr>
<tr><td>Cyklus řádu 2</td><td>$2 < r < \sqrt{6}$</td></tr>
<tr><td>Cyklus řádu 4</td><td>$\sqrt{6} < r < 2{,}544$</td></tr>
<tr><td>Cyklus řádu 8</td><td>$2{,}544 < r < 2{,}564$</td></tr>
<tr><td>Cyklus řádu 16</td><td>$2{,}564 < r < 2{,}568$</td></tr>
<tr><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td></tr>
<tr><td>Cyklus řádu 3</td><td>$r = \sqrt{8}$</td></tr>
</table>

**Tabulka 1.** Tabulka shrnutí obou modelů.

podotknout, že se tyto cykly objevují v řešení postupně se zvyšujícím se $r$. Pokud se v řešení objeví cyklus daného řádu, je ihned stabilní, a jakmile ztrácí svoji stabilitu, objeví se stabilní cyklus následujícího řádu (který doposud neexistoval). Pořadí, ve kterém se cykly objevují, je dané Šarkovského větou. Obrázky 3–5 ukazují příklady periodických řešení tohoto modelu.

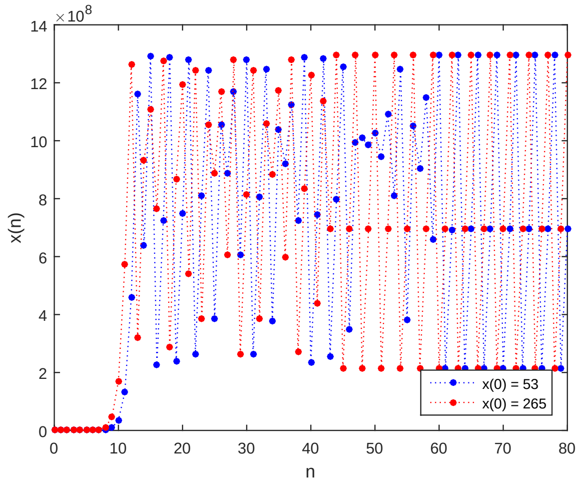



**Obrázek 3.** Periodické řešení tvořené dvojcyklem.

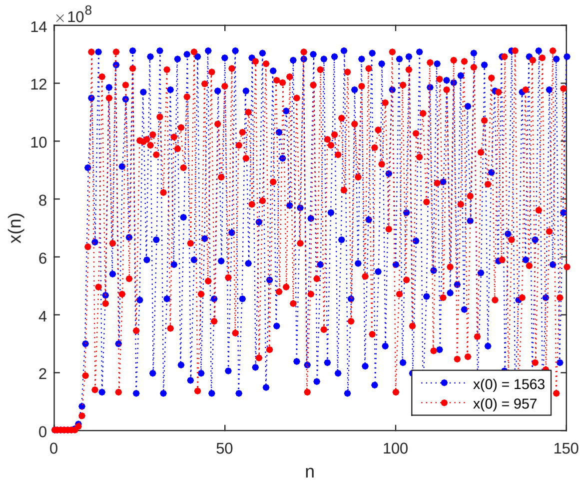



**Obrázek 4.** Periodické řešení tvořené čtyřcyklem.

Poslední stabilní řešení tohoto modelu je řešení tvořené trojcyklem při hodnotě parametru $r = \sqrt{8}$. Pro $r > \sqrt{8}$ se pak každé řešení s libovolnou počáteční velikostí

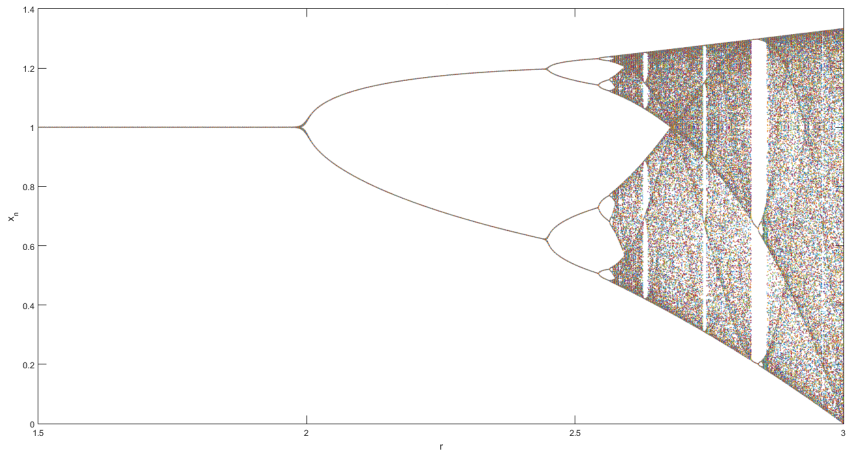



**Obrázek 5.** Periodické řešení tvořené trojcyklem.




**Obrázek 6.** Chaotické chování řešení.

populace chová odlišně. Mohou se objevovat jak periodická řešení kteréhokoliv řádu, přičemž každá výchylka počáteční velikosti populace zapříčíní odlišné chování, tak i řešení, jejichž chování je zcela nahodilé. Takové chování se nazývá chaotické a lze jej zachytit v bifurkačním diagramu. Pro tento model je vstupním parametrem do bifurkačního diagramu právě parametr $r$. Na obrázcích je vidět chaotické chování systému (viz obrázek 6) a bifurkační diagram (viz obrázek 7), který




**Obrázek 7.** Bifurkační diagram.

ilustruje cestu od existence stabilní rovnováhy až po chaotické chování v závislosti na rostoucím parametru $r$.

Rozdíly v chování spojitého a diskrétního modelu jsou opravdu velké. Různorodé chování diskrétního modelu je v případě spojitého modelu redukováno pouze do dvou rovnovážných stavů. Je to způsobeno faktem, že diskrétní model představuje diskretizaci spojitého modelu s jednotkovým diskretizačním krokem. Zmenšení diskretizačního kroku ovšem vede k prodloužení intervalu stability jednotlivých řešení diskrétního modelu (rovnováh i periodických řešení). Tedy pokud se délka diskretizačního kroku limitně blíží k nule, periodické a chaotické chování řešení je potlačeno („posunuto"do nekonečna), přičemž diskrétní model přechází na model spojitý.

Lucie Ondrová, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
*e-mail*: `ondrova.lu@gmail.com`

# OPTIMALIZACE PARAMETRŮ MODIFIKOVANÉ FÁZOVÉ KORELACE PRO SUBPIXELOVOU REGISTRACI OBRAZU

PETRA KOSOVÁ

Abstrakt. Tento článek přiblíží čtenáři postupy pro optimalizaci parametrů váhové funkce, která je použita v procedurách pro nalezení posunutí se subpixelovou přesností mezi dvěma obrazy. Jsou použity standardní techniky pro registraci obrazů jako je Fourierova transformace, fázová korelace, bilineární interpolace aj. Dále bude prezentován program, který byl k tomuto účelu vytvořen[1].

## 1. Matematický aparát

Fázová korelace je jednou ze základních technik registrace obrazu, která se používá pro určení transformace mezi dvěma podobnými obrazy, v našem případě pro určení posunu mezi dvěma obrazy. Její algoritmus je založen na Fourierově transformaci. Podrobnější informace o fázové korelaci lze najít v [2].

Nejdříve si připomeneme Fourierovu transformaci (více například v [1]).

**Definice 1.1** (Fourierova transformace funkce v $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$)**.** Nechť $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. *Fourierova transformace* funkce $f$ je funkce $\mathcal{F}\{f\} = F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ definovaná vztahem

$$F(\xi,\eta) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{e}^{-i(x\xi+y\eta)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Funkci $F$ nazýváme také *Fourierovým spektrem* funkce $f$.

**Definice 1.2** (Inverzní Fourierova transformace funkce v $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$)**.** Nechť $G \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. *Inverzní Fourierova transformace* funkce $G$ je funkce $\mathcal{F}^{-1}\{G\} = g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ definovaná vztahem

$$g(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{\mathbb{R}^2} G(\xi,\eta)\mathrm{e}^{i(x\xi+y\eta)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.$$

Pro zavedení fázové korelace potřebujeme ještě normalizované cross-power spektrum.

**Definice 1.3** (Normalizované cross-power spektrum)**.** Nechť funkce $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ mají Fourierova spektra $F_1$, $F_2$. *Normalizovaným cross-power spektrem*

---

2010 *MSC.* Primární 68U10.

*Klíčová slova.* Fourierova transformace, fázová korelace, subpixelová přesnost, optimalizace.

[1]Článek vznikl na základě bakalářské práce autorky v oboru Matematické inženýrství na FSI VUT v Brně. Vedoucí práce byla Jana Hoderová z Ústavu matematiky FSI VUT v Brně.

funkcí $f_1$, $f_2$ nazýváme funkci $Z_{f_1,f_2}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ definovanou vztahem

$$Z_{f_1,f_2}(\xi,\eta) = \frac{F_1(\xi,\eta)\cdot F_2^*(\xi,\eta)}{|F_1(\xi,\eta)\cdot F_2(\xi,\eta)|}\,,$$

kde $F_2^*$ je komplexně sdružená funkce k funkci $F_2$.

Nyní již můžeme zavést fázovou korelaci.

**Definice 1.4** (Fázová korelace)**.** Nechť funkce $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ mají Fourierova spektra $F_1$, $F_2$. Funkce $P_{f_1,f_2}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ definovaná vztahem

$$P_{f_1,f_2}(x,y) = \mathcal{F}^{-1}\{Z_{f_1,f_2}(\xi,\eta)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{F_1(\xi,\eta)\cdot F_2^*(\xi,\eta)}{|F_1(\xi,\eta)\cdot F_2(\xi,\eta)|}\right\}$$

se nazývá *fázová korelace* funkcí $f_1$, $f_2$.

## 2. Registrace obrazů

Registrace obrazů je proces srovnávání dvou obrazů, tedy přesněji porovnávání bodů se stejnými souřadnicemi.

### Registrace posunutých obrazů

Předpokládejme, že oba obrazy, tedy funkce $f_1$, $f_2$, jsou identické až na vzájemné posunutí o vektor $(x_0, y_0)$, tj.

$$f_2(x,y) = f_1(x - x_0, y - y_0).$$

Vektor posunutí zjistíme pomocí fázové korelace. V jednoduchých případech bychom dostali diskrétní impulsní funkci (diskrétní Diracovo delta). Při použití skutečného obrazu máme nejasný výsledek z důvodu velkého rozdílu hodnot pixelů na hranách obrazu. Potřebujeme tedy tyto hrany zjemnit.

Toho dosáhneme, vynásobíme-li náš obraz vhodnou funkcí $g$ nazvanou *okenní funkce*. Tato funkce musí být rovna nule nebo skoro nule, na hranách obrazu a spojitě přecházet v jedničku na zbývající ploše obrazu.

Existuje mnoho takových funkcí. My používáme tzv. Hanningovu okenní funkci, jejíž definici lze nalézt například v [3].

### Registrace reálných obrazů

Skutečné dva obrazy pořízené v jiný čas, nebo ve stejný čas jiným aparátem, nemůžou být nikdy identické. Reálné obrazy mohou obsahovat aditivní šum, impulsní šum, defekty způsobené optickým aparátem, prachové částice, difuzní světlo aj.

Aditivní a impulsní šum zasahují informace různých frekvencí, primárně však ty nejvyšší. Naopak nízké frekvence obsahují informace o optické vinětaci a difuzním světle. To znamená, že tyto frekvence jsou nepoužitelné pro registraci. Odstraníme je tedy vynásobením Fourierova spektra obrazu vhodnou váhovou funkcí.

Existuje více vhodných váhových funkcí, my jsme vybrali Gaussovu low-pass high-pass váhovou funkci.

**Definice 2.1** (Gaussova low-pass high-pass váhová funkce)**.** Nechť $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_0^+$ a $N \in \mathbb{N}$ je velikost domény obrazu $f$.

Funkce $H_{\lambda_1} : \mathbb{R}^2 \to \langle 0, 1)$ definovaná vztahem

$$H_{\lambda_1}(\xi, \eta) = \mathrm{e}^{-\lambda_1 \frac{\xi^2+\eta^2}{N^2}}$$

je nazývaná *Gaussova low-pass váhová funkce* s parametrem $\lambda_1$.

Funkce $H^{\lambda_2} : \mathbb{R}^2 \to \langle 0, 1)$ definovaná vztahem

$$H^{\lambda_2}(\xi, \eta) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda_2 \frac{\xi^2+\eta^2}{N^2}}$$

je nazývaná *Gaussova high-pass váhová funkce* s parametrem $\lambda_2$.

Funkce $H_{\lambda_1}^{\lambda_2} : \mathbb{R}^2 \to \langle 0, 1)$ definovaná vztahem

$$H_{\lambda_1}^{\lambda_2}(\xi, \eta) = H_{\lambda_1}(\xi, \eta) \cdot H^{\lambda_2}(\xi, \eta)$$

je nazývaná *Gaussova low-pass high-pass váhová funkce.*

### Registrace se subpixelovou přesností

Vektor $(x_0, y_0)$ je celočíselný odhad vektoru posunutí mezi obrazy $f_1$, $f_2$. Existuje mnoho metod, jak určit neceločíselný posun. Jedna z těchto metod je metoda geometrických momentů, která je blíže popsaná v [1]. Další metodou je například bilineární interpolace, tu jsme používali pro vytvoření vlastních obrazů se subpixelovým posunem. Tato metoda je mnohem rychlejší, avšak je méně přesná.

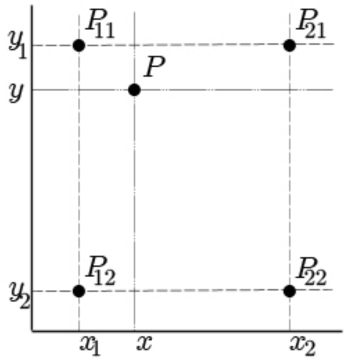
**Definice 2.2.** Mějme body $P_{11} = (x_1, y_1)$, $P_{12} = (x_1, y_2)$, $P_{21} = (x_2, y_1)$, $P_{22} = (x_2, y_2)$ (viz obrázek 1) a předpokládejme že známe hodnotu pixelů obrazu $f$ v těchto bodech. Pak klademe

$$\begin{aligned} f(x, y_1) &\approx \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(P_{11}) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(P_{21}), \\ f(x, y_2) &\approx \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(P_{12}) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(P_{22}), \\ f(x, y) &\approx \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1} f(x, y_1) + \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1} f(x, y_2). \end{aligned}$$

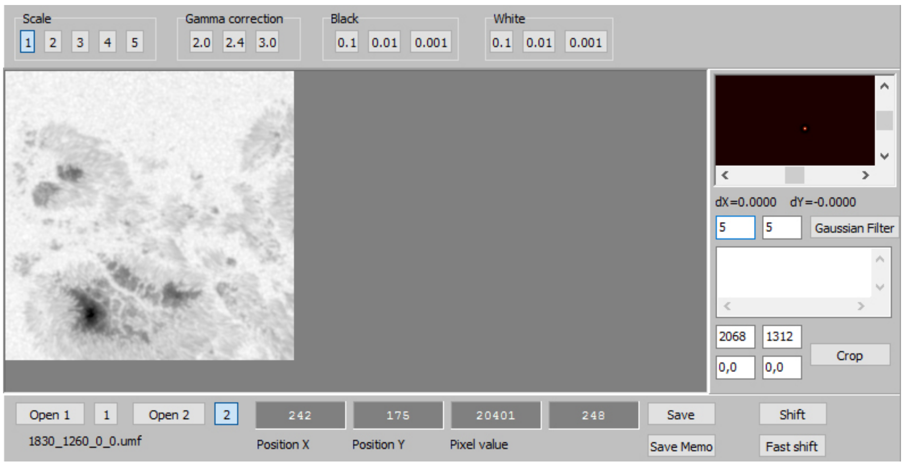
## 3. Program

Pro nalezení parametrů váhové funkce zmíněné dříve jsme použili 10 000 obrazů s předem známým subpixelovým posunem, proto bylo nutné vytvořit pro naše účely speciální program. Ten byl vytvořen v Delphi XE6 s použitím knihoven od Miloslava Druckmüllera.

V tomto programu došlo k inovacím předchozích procedur ze zmíněných knihoven. Byli vytvořeny i procedury na změnu měřítka, gamma korekce a histogramu. Uživatel tohoto programu si může vyříznout část obrazu s určitým posunem a také jej uložit. Grafickou stránku programu lze vidět na obrázku 2. Samotný program a informace k němu jsou k dispozici v [3].




**Obrázek 1.** Příklad 2D mřížky pro bilineární interpolaci.

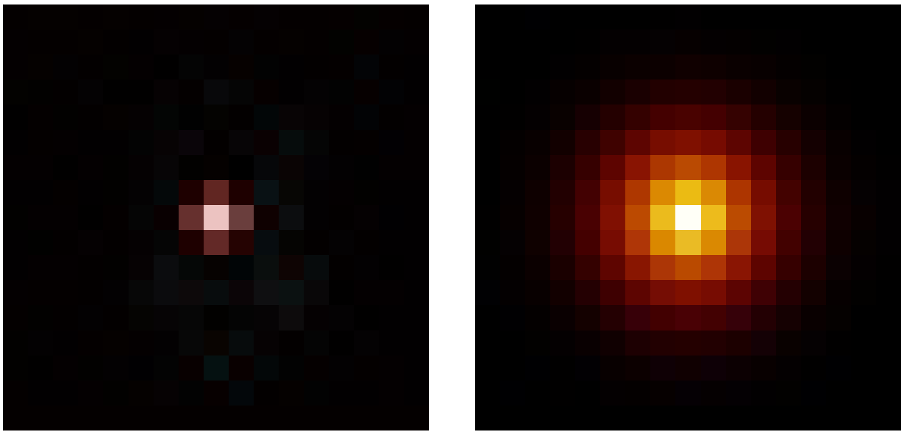



**Obrázek 2.** Spuštěný program se základním obrazem a spočítaným posunem.

## 4. Optimalizace parametrů

Hledáme vhodnou kombinaci hodnot parametrů $\lambda_1$ a $\lambda_2$ tak, abychom odstranili pouze frekvence obsahující šum a jiné pro danou analýzu nepotřebné informace. Parametr okenní funkce jsme použili z předchozích studií. Výsledek fázové korelace je zobrazen jako bod na černém pozadí (viz obrázek 3).

Na začátku jsme zkoušeli různé hodnoty parametrů $\lambda_1$ a $\lambda_2$ na pár obrazech, abychom našli vhodné skupiny hodnot pro další optimalizaci. Na obrázku 3 vidíme jak to funguje. Pro malé $\lambda_1$ dostaneme malý vrchol, to znamená, že odstraníme pouze malé množství vysokých frekvencí a náš maximální vrchol je velmi příkrý. Pro velké $\lambda_1$ odstraníme více vysokých frekvencí a náš maximální vrchol je více



a) b)

**Obrázek 3.** Zobrazený výsledek fázové korelace po vynásobení Gassovou low-pass high-pass váhovou funkcí. Použité parametry jsou $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = 13$ pro obraz a) a $\lambda_1 = 7$ a $\lambda_2 = 13$ pro obraz b).

oblý. Parametr $\lambda_2$ mění informace v nízkých frekvencích, takže nemůžeme vidět žádný rozdíl v zobrazeném obrázku.

Skupiny hodnot parametrů byly vybrány takto: $\lambda_1 \in \{4, 5, 6\}$, $\lambda_2 \in \{11, 12, 13, 14\}$. S těmito parametry dostaneme odhady posunu s přesností na tisíciny. Všechny možné kombinace jsme aplikovali na všech 10 000 obrazů. Následně jsme pro každou kombinaci hledali maximální odchylku od skutečného posunu a vytvořili jsme graf jejich závislosti (viz obrázek 4).

## 5. Výsledek

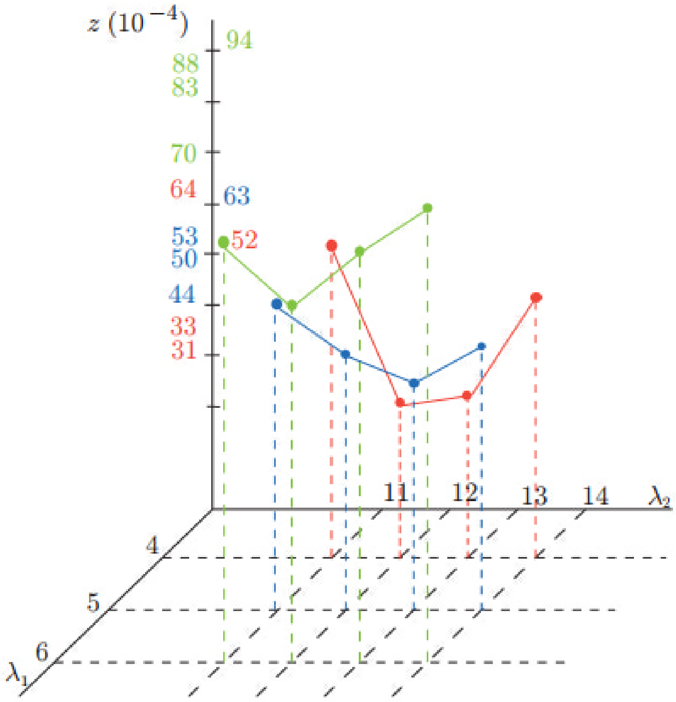
Z obrázku 4 můžeme vidět, že nejlepší kombinace parametrů je $\lambda_1 = 4$ a $\lambda_2 = 12$. Maximální odchylka v tomto případě je $0,0031$. Pomocí fázové korelace a správné volby parametrů pro váhovou funkci jsme spočítali vektor posunu dvou obrazů s přesností na tisíciny, což předčilo naše očekávání.

## Reference


[1] H. Druckmüllerová: *Phase-correlation based image registration*, Diplomová práce, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Brno, 2010.

[2] A. K. Katsaggelos: *Phase correlation*, In: Coursera [online]. Fundamentals of Digital Image and Video Processing: Northwestern University [cit. 2017–04–29], online `https://www.coursera.org/learn/digital/lecture/a60Ui/phasecorrelation`.

[3] P. Kosová: *Parameter optimization of the modified phase correlation method for sub-pixel image registration*, Bakalářská práce, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Brno, 2017.




**Obrázek 4.** Graf použitelných parametrů a maximální odchylky.

Petra Kosová, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
*e-mail*: `170185@vutbr.cz`

# STEFANŮV PROBLÉM A JEHO ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ

RENÉ KESLER

Abstrakt. Tento článek je věnován analytickému řešení úloh vedení tepla s fázovou přeměnou, které jsou nazvány jako klasický Stefanův problém. Nejprve je odvozena diferenciální rovnice vedení tepla a také je vytvořen matematický model Stefanova problému. Důležitou částí je následné odvození analytického řešení pro úlohu tání[1].

## 1. Úvod

Jako Stefanův problém je označována úloha vedení tepla zahrnující tání nebo tuhnutí a je nazvána po Jožefu Stefanovi[2], který na konci 19. století ve své práci formuloval problém rozložení teploty při tuhnutí vody. Dále se problém rozšiřoval o mnohem komplexnější děje a postupně, jak rostlo pole jeho aplikací, tak vzrůstal také zájem o jeho výzkum, a to především z matematického hlediska [2].

Stefanův problém je proces, který je nám všem nejspíše velice dobře znám. V každodenním životě se setkáváme například s mražením nebo naopak rozmrazováním potravin, výrobou ledu nebo táním vosku při hoření svíčky. Ovšem znalost přesného řešení nabývá důležitosti v mnoha technických aplikacích, jako je například odlévání oceli a slitin, kde dochází k tuhnutí materiálu. Další důležitou aplikací je uchovávání energie, jež je v materiálu uložena ve formě latentního tepla [3]. Principem je akumulace energie (například ze slunečního záření během dne), kterou materiál spotřebuje během tání a tím ji v sobě uchová. Následně, když je této energie potřeba (během noci může sloužit k ohřevu vzduchu), se může zpětně uvolnit při tuhnutí.

Řešení problému nabývá složitosti především díky rozhraní mezi tuhou a kapalnou fází, které se pohybuje v důsledku absorpce nebo uvolňování latentního tepla, a tak je jeho poloha neznámou, jež se musí vyšetřit v rámci řešení.

## 2. Přenos tepla

Přenos tepla obecně probíhá třemi způsoby (viz [8]):

2010 *MSC.* Primární 35Q79.

*Klíčová slova.* Stefanův problém, vedení tepla, fázová přeměna, tání, tuhnutí.

[1]Článek vznikl na základě bakalářské práce autora v oboru Matematické inženýrství na FSI VUT v Brně. Vedoucím práce byl Lubomír Klimeš z Energetického ústavu FSI VUT v Brně.

[2]Jožef Stefan (1835-1893) byl slovinský fyzik, matematik a básník působící na Vídeňské univerzitě.

- **Vedením (kondukcí)**. Kinetická energie molekul se předává vzájemnými srážkami při jejich neuspořádaném pohybu. Vedení převládá v pevných látkách a také tekutinách bez proudění.
- **Prouděním (konvekcí)**. Při nuceném nebo přirozeném proudění se přemístěním molekul přenáší i tepelná energie. Konvekce převládá v tekutinách.
- **Zářením (sáláním)**. Probíhá ve formě elektromagnetického vlnění v určitém rozsahu vlnových délek. Nositeli tepelné energie jsou v tomto případě fotony.

V tomto článku je uvažován pouze přenos tepla vedením.

### 2.1. Odvození diferenciální rovnice vedení tepla

Nejprve je vhodné uvést pár základních vztahů z termomechaniky, jež byly čerpány z [7], pomocí kterých se odvodí diferenciální rovnice vedení tepla.

**Tepelný tok.** Vzniknou-li v tělese teplotní rozdíly, začne teplo podle druhého zákona termodynamiky přecházet z míst s vyšší teplotou do míst s teplotou nižší. Množství tepla transportované za jednotku času se nazývá tepelný tok $\dot{Q}$ [W]. Tepelný tok procházející plochou o jednotkové velikosti, která stojí kolmo ke směru toku, se označuje jako měrný tepelný tok $\dot{q}$ $[\mathrm{Wm}^{-2}]$ a platí

$$\mathrm{d}\dot{Q} = \dot{q}\,\mathrm{d}S. \tag{2.1}$$

**Fourierův zákon.** Měrný tepelný tok $\dot{q}$ v látce je přímo úměrný teplotnímu gradientu

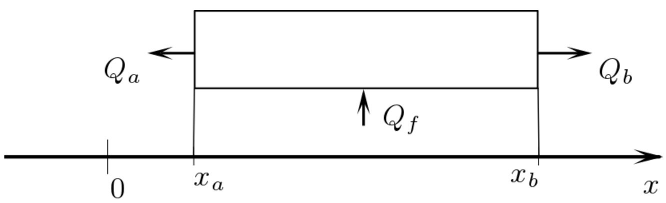
$$\dot{q} = -k\,\frac{\partial T}{\partial x}, \tag{2.2}$$

kde $k$ $[\mathrm{Wm}^{-1}\mathrm{K}^{-1}]$ je součinitel tepelné vodivosti, což je fyzikální vlastnost daného materiálu, která udává jaký odpor klade látka proti přenosu tepla.

**Zákon zachování energie.** Nebudeme-li uvažovat ztráty do okolí, můžeme napsat tepelnou bilanci

$$\Delta E = Q_f - Q_a - Q_b, \tag{2.3}$$

což nám udává, že změna vnitřní energie $\Delta E$ úseku mezi $x_a$ a $x_b$ během časového intervalu $(t_\alpha, t_\beta)$ se rovná teplu $Q_f$ dodaného do úseku známými zdroji a zmenšené o tepla $Q_a$ a $Q_b$, která vytečou přes konce $x_a$ a $x_b$ (viz obrázek 1).




**Obrázek 1.** Energetická bilance pro tyč.

**Diferenciální rovnice vedení tepla.** Aby byl problém řešitelný analyticky, budeme uvažovat pouze případ v jedné prostorové dimenzi (např. dlouhá tenká tyč). Hledanou neznámou je potom funkce $T = T(x,t)$, jež popisuje teplotu v bodě $x$ a čase $t$. Z předchozích vztahů lze odvodit (viz [5]) rovnici popisující $T$ pro homogenní tyč ve tvaru

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f,$$

kde $\rho$ [$\mathrm{kg\,m^{-1}}$] uvažujeme jako délkovou hustotu, $c$ [$\mathrm{J\,kg^{-1}K^{-1}}$] je měrná tepelná kapacita za konstantního tlaku, která udává množství tepla potřebné ke zvýšení teploty jednoho kilogramu materiálu o 1K a $f(x,t)$ [$\mathrm{Wm^{-1}}$] je tzv. hustota vnitřních zdrojů. Zjednodušeně rovnici zapíšeme jako

$$T_t = \kappa T_{xx} + f^*, \tag{2.4}$$

kde

$$\kappa = \frac{k}{\rho c}$$

je nově zavedená veličina, známá jako součinitel teplotní vodivosti, a $f^* = f/(\rho c)$. Dostali jsme parciální diferenciální rovnici druhého řádu, jejíž kvadratická forma $Q(x,t) = x^2$ je semidefinitní, a proto je rovnice parabolická.

## 3. Matematická formulace Stefanova problému

Zformulujme si například úlohu pro případ tání. Uvažujme tedy látku v tuhé fázi, která má v čase $t = 0$ počáteční teplotu $T_i$ nižší než je teplota tání $T_m$. Mějme tuto látku definovanou na intervalu $x \in \langle 0, \infty)$. Na začátku děje je náhle teplota okraje $x = 0$ zvýšena na hodnotu $T_0$, která je vyšší než teplota tání $T_m$, a je na této teplotě udržován po celou dobu $t > 0$, což nám představuje Dirichletovu podmínku, která je konstantní v čase. Můžeme si tedy představit, že tání započne právě na okraji $x = 0$ a dále se bude rozhraní $s(t)$ mezi fázemi pohybovat v kladném směru osy $x$ (viz [6]). Jednotlivé teploty $T_l(x,t)$ pro kapalné skupenství a $T_s(x,t)$ pro skupenství tuhé jsou popsány parabolickými rovnicemi tvaru (2.4) odvozeného v předchozí kapitole (viz také [2]). Tedy

$$\frac{\partial T_l(x,t)}{\partial t} = \kappa_l \frac{\partial^2 T_l(x,t)}{\partial x^2} \qquad \text{pro} \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \tag{3.1a}$$

$$\frac{\partial T_s(x,t)}{\partial t} = \kappa_s \frac{\partial^2 T_s(x,t)}{\partial x^2} \qquad \text{pro} \quad s(t) < x < \infty, \quad t > 0. \tag{3.1b}$$

K rovnicím dodáme počáteční podmínku

$$T_s(x,0) = T_i \qquad \text{pro} \quad x > 0 \tag{3.2}$$

a podmínky okrajové

$$T_l(0,t) = T_0 \qquad \text{pro} \quad t > 0, \tag{3.3a}$$

$$T_s(x \to \infty, t) \to T_i \qquad \text{pro} \quad t > 0. \tag{3.3b}$$

Ale protože máme dvě rovnice, úloha ještě není dobře formulována. Potřebujeme navíc ještě dodat pro každou rovnici jednu okrajovou podmínku na rozhraní fází.

Změna skupenství probíhá na konstantní teplotě $T_m$, dodáme tedy podmínku na rozhraní, která zastoupí obě potřebné okrajové podmínky a zároveň zajistí spojitost řešení (viz [6])

$$T_l(s(t),t) = T_m = T_s(s(t),t) \qquad \text{pro} \quad t > 0.$$

Počátečně okrajovou úlohu již máme dobře formulovánu, ovšem problém ještě vyřešit nedokážeme, protože máme pouze dvě difereneciální rovnice a celkově tři neznámé $T_s(x,t)$, $T_l(x,t)$ a $s(t)$, kde $s(t)$ je rozhraní pohybující se v čase. Další potřebnou rovnici získáme vyšetřením energetické bilance na rozhraní $x = s(t)$. Vezmeme tedy tepelný tok z kapalné fáze v kladném směru osy $x$, který je zmenšený o teplo spotřebovávané na fázovou přeměnu (tání), a ten se musí rovnat v izolované tyči tepelnému toku vstupujícího do tuhé fáze ve směru osy $x$. Matematicky bilanci vyjádříme pomocí Fourierova zákona (viz [6]) vztahem

$$-k_l \frac{\partial T_l}{\partial x} - \rho L \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = -k_s \frac{\partial T_s}{\partial x},$$

což můžeme přepsat do tvaru

$$k_s \frac{\partial T_s(x,t)}{\partial x} - k_l \frac{\partial T_l(x,t)}{\partial x} = \rho L \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \text{pro} \quad x = s(t), \quad t > 0, \tag{3.4}$$

kde $L$ je latentní teplo vztažené na jednotku hmotnosti $[\mathrm{J\,kg^{-1}}]$. Hustota $\rho$ bude uvažována konstantní pro obě skupenství, tedy $\rho_l = \rho_s = \rho$.

Nyní již máme dobře formulovanou a řešitelnou úlohu. Rovnice (3.1a), (3.1b), (3.4) jsou tři diferenciální rovnice pro řešení neznámých $T_s(x,t)$, $T_l(x,t)$ a $s(t)$. Máme také všechny potřebné počáteční a okrajové podmínky.

Formulaci pro tuhnutí bychom odvodili analogicky.

## 4. Analytická řešení

Obecně jsou problémy s fázovou přeměnou řešitelné především numericky, nicméně v některých zjednodušených případech splňujících určitá omezení je možné nalézt analytické řešení. Princip odvození analytického řešení si ukážeme na případu tání polonekonečné tyče, tedy problém budeme řešit na polopřímce $x > 0$. Je třeba vyšetřit teplotu kapalné a tuhé fáze a také pozice rozhraní mezi fázemi.

Matematickou formulaci úlohy jsme odvodili v předešlé kapitole. Rovnice pro popis teplotního pole tedy jsou (3.1a), (3.1b) s počáteční podmínkou (3.2) a okrajovými podmínkami (3.3a), (3.3b). Dodáme podmínky na rozhraní $x = s(t)$ tvaru

$$T_l(x,t) = T_m = T_s(x,t) \qquad \text{pro} \quad x = s(t), \quad t > 0, \tag{4.1a}$$

$$k_s \frac{\partial T_s(x,t)}{\partial x} - k_l \frac{\partial T_l(x,t)}{\partial x} = \rho L \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \text{pro} \quad x = s(t), \quad t > 0. \tag{4.1b}$$

Budeme hledat tzv. *similarity solution* (viz [4]) úlohy (3.1a)–(3.3b), (4.1a), (4.1b), které je složením funkce jedné proměnné a transformace $(x,t) \mapsto \xi(x,t)$ sdružující dvě nezávislé proměnné $x, t$ do jedné proměnné $\xi$. Řešení parabolické rovnice (3.1a) pro kapalnou fázi budeme tedy hledat ve tvaru

$$T_l(x,t) = F(\xi(x,t)),$$

kde $F$ je neznámá funkce jedné proměnné třídy $C^2$ a podle [2] je $\xi(x,t) = \frac{x}{\sqrt{t}}$. Spočteme parciální derivace složené funkce $F(\xi)$, dosadíme do rovnice (3.1a) a po úpravách dostaneme diferenciální rovnici pro hledanou funkci $F$ tvaru

$$F'' + F' \frac{1}{2\kappa_l} \xi = 0.$$

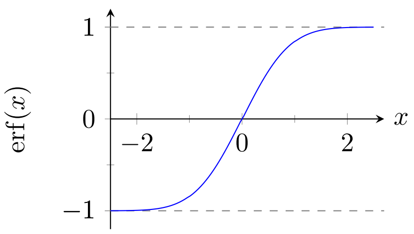
Převedli jsme tak parciální diferenciální rovnici na obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu, kterou už můžeme vyřešit, a dostaneme

$$F(\xi) = F(0) + C_1 \operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\kappa_l}}\right), \qquad C_1 \neq 0,$$

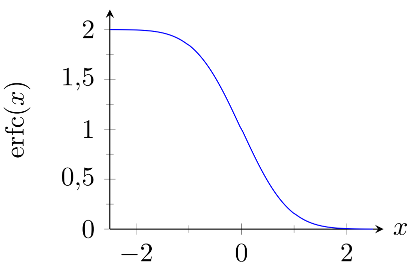
kde $\operatorname{erf}(\eta)$ je tzv. *error function*, nebo-li Gaussova chybová funkce, která je definována (viz [1]) vztahem

$$\operatorname{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-t^2} \mathrm{d}t$$

(viz obrázek 2). Vyšetříme ještě člen $F(0)$, tedy hodnotu funkce $F$ v bodě $\xi = 0$.




**Obrázek 2.** Gaussova chybová funkce.




**Obrázek 3.** Doplňková Gaussova chybová funkce.

Ta odpovídá hodnotě $x = 0$ a pomocí okrajové podmínky (3.3a) proto dostaneme

$$F(0) = T_l(0,t) = T_0.$$

Našli jsme tedy řešení rovnice (3.1a) ve tvaru

$$T_l(x,t) = T_0 + C_1 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa_l t}}\right). \tag{4.2}$$

Řešení rovnice (3.1b) pro tuhou fázi získáme podobným postupem ve tvaru

$$T_s(x,t) = T_i + C_2 \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa_s t}}\right), \qquad C_2 \neq 0, \tag{4.3}$$

kde $\operatorname{erfc}(\eta)$ je doplňková Gaussova chybová funkce definována (viz [1]) vztahem

$$\operatorname{erfc}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_\eta^\infty e^{-t^2} \mathrm{d}t = 1 - \operatorname{erf}(\eta)$$

(viz obrázek 3). Zatím neznámé konstanty $C_1$ a $C_2$ se nyní pokusíme vyšetřit pomocí podmínek na rozhraní $s(t)$. Nejprve využijeme podmínku (4.1a), do níž dosadíme a dostaneme

$$T_0 + C_1 \operatorname{erf}\left(\frac{s(t)}{2\sqrt{\kappa_l t}}\right) = T_m = T_i + C_2 \operatorname{erfc}\left(\frac{s(t)}{2\sqrt{\kappa_s t}}\right) \qquad \text{pro} \quad t > 0 \tag{4.4}$$

Odtud je vidět, že členy

$$\frac{s(t)}{2\sqrt{\kappa_l t}} \quad \text{a} \quad \frac{s(t)}{2\sqrt{\kappa_s t}}$$

musí být konstantní. Zavedeme parametr

$$\lambda = \frac{s(t)}{2\sqrt{\kappa_l t}}, \qquad \text{neboli} \qquad s(t) = 2\lambda\sqrt{\kappa_l t}, \tag{4.5}$$

a z rovností (4.4) tak můžeme postupně určit hledané konstanty

$$C_1 = \frac{T_m - T_0}{\operatorname{erf}(\lambda)}, \qquad C_2 = \frac{T_m - T_i}{\operatorname{erfc}\left(\lambda\sqrt{\frac{\kappa_l}{\kappa_s}}\right)}.$$

Získali jsme řešení ve tvaru

$$T_l(x,t) = T_0 + \frac{T_m - T_0}{\operatorname{erf}(\lambda)} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa_l t}}\right), \tag{4.6}$$

$$T_s(x,t) = T_i + \frac{T_m - T_i}{\operatorname{erfc}\left(\lambda\sqrt{\frac{\kappa_l}{\kappa_s}}\right)} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa_s t}}\right). \tag{4.7}$$

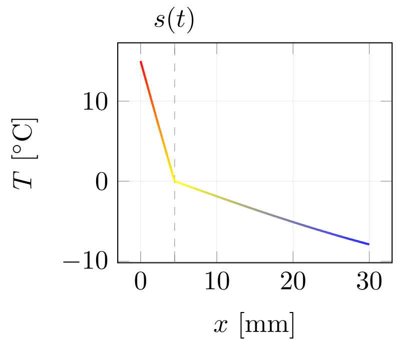
Zbývá najít hodnotu parametru $\lambda$, kterou určíme z podmínky (4.1b). Dosazením do této podmínky a následnými úpravami dostáváme

$$\frac{k_s\sqrt{\kappa_l}}{k_l\sqrt{\kappa_s}} \cdot \frac{(T_m - T_i)e^{-\frac{\kappa_l}{\kappa_s}\lambda^2}}{\operatorname{erfc}\left(\lambda\sqrt{\frac{\kappa_l}{\kappa_s}}\right)} + \frac{(T_m - T_0)e^{-\lambda^2}}{\operatorname{erf}(\lambda)} = -\frac{L\lambda\sqrt{\pi}}{c_l}.$$

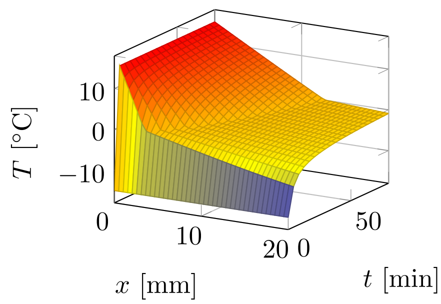
Výsledná rovnice je tzv. *transcendentní rovnice*, kterou nelze analyticky vyřešit. K jejímu řešení proto využijeme některou z numerických metod, například metodu bisekce nebo metodu tečen. Jakmile nalezneme řešení $\lambda > 0$, problém je vyřešen. Pozici rozhraní $s(t)$ získáme ze vztahu (4.5), rozložení teploty v kapalné fázi z (4.6) a rozložení teploty v tuhé fázi z (4.7).

Obrázky 4–6 vyobrazují získané řešení pro případ tání ledu s hodnotou $T_i = -15°\mathrm{C}$ v počáteční podmínce a hodnotou $T_0 = 15°\mathrm{C}$ v podmínce okrajové. Obrázek 4 představuje rozložení teploty v čase $t = 10\,\mathrm{min}$, obrázek 5 zobrazuje průběh tání pro $t \in \langle 0, 80 \rangle$ min a obrázek 6 je pohyb rozhraní $s(t)$ mezi kapalnou a tuhou fází v závislosti na čase.

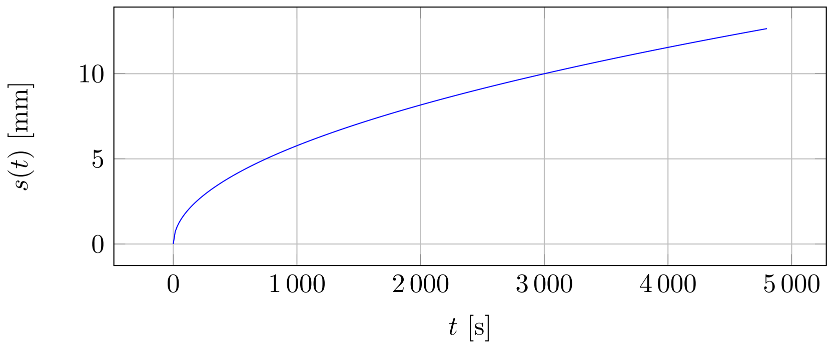
Při řešení úlohy tuhnutí bychom postupovali analogicky.




**Obrázek 4.** Rozložení teploty při tání.




**Obrázek 5.** Rozložení teploty při tání.




**Obrázek 6.** Pozice rozhraní $s(t)$ v čase.

## 5. Závěr

Cílem tohoto textu bylo přiblížit čtenáři téma Stefanova problému a jeho analytického řešení. Nejprve bylo ve zkratce pojednáno o odvození diferenciální rovnice vedení tepla pomocí základních vztahů z termomechaniky. Následně bylo pro ukázku odvozeno analytické řešení pro případ tání, kde se využila možnost převodu parciální diferenciální rovnice na obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu. Při dalším odvozování se objevil problém s vyřešením transcendentní rovnice, která se musí řešit nějakou numerickou metodou. Výsledky byly nakonec pro názornost vyobrazeny graficky a to prostřednictvím prostředí MATLAB.

## Reference


[1] M. Abramowitz, I. A. Stegun (ed.): *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs and mathematical tables*, Dover Publications, New York, 1965.

[2] V. Alexiades, A. D. Solomon: *Mathematical modeling of melting and freezing processes*, Hemisphere Pub., Washington, 1993.

[3] C. Arkar, T. Šuklje, B. Vidrih, S. Medved: *Performance analysis of a solar air heating system with latent heat storage in a lightweight building*, Applied Thermal Engineering **95** (2016), 281–287.

[4] J. Crank: *Free and moving boundary problems*, Oxford University Press, New York, 1984.

[5] J. Franců: *Parciální diferenciální rovnice*, Akademické nakladatelství CERM, Brno, 2011.

[6] D. W. Hahn, M. N. Özişik: *Heat conduction*, Wiley, Hoboken, New Jersey, 2012.

[7] J. Kalčík, K. Sýkora: *Technická termomechanika*, Academia, Praha, 1973.

[8] M. Pavelek: *Termomechanika*, Akademické nakladatelství CERM, Brno, 2011.

René Kesler, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,

*e-mail*: keslerrene@seznam.cz

# RESTAURACE POŠKOZENÝCH AUDIOSIGNÁLŮ POMOCÍ ŘÍDKÝCH REPREZENTACÍ

ONDŘEJ MOKRÝ

Abstrakt. V tomto článku se zabýváme problematikou doplnění chybějícího úseku vzorků v audiosignálu. Problém formulujeme jako konvexní minimalizační úlohu, kterou řešíme vhodným iterativním algoritmem. U rekonstruovaného signálu přitom požadujeme řídkost jeho reprezentace ve vybraném Gaborově systému. Následně navrhujeme modifikaci metody za účelem kompenzace poklesu energie v rekonstruovaném úseku signálu. Porovnání základní a modifikované metody stručně ilustrujeme vybranými experimentálními výsledky[1].

## 1. Úvod

Restaurace audiosignálů je aktuální problematikou a ačkoliv k řešení mnohých poruch existují rozšířené nástroje, objevují se nové přístupy, které cílí buď na větší přesnost rekonstrukce, nebo naopak na co nejvyšší rychlost a zpracování v reálném čase. Jedním z běžných modelů poruchy je chybějící úsek vzorků. Při přenosu signálu může dojít ke chvilkové poruše, čímž vznikne výpadek vzorků, nebo máme k dispozici signál s chybějícími či znehodnocenými úseky – příkladem je záznam na gramofonové desce, která je fyzicky poškozená a digitalizovaný signál tak obsahuje rušivé praskání.

Motivace pro použití řídkých reprezentací vychází z fyzikální podstaty audiosignálu, konkrétně z harmonické struktury hudebního tónu. Díky tomu lze audiosignál lokálně vyjádřit jako součet nemnoha harmonických funkcí (sinus, kosinus) o různé periodě a amplitudě, tedy s vhodnou množinou vektorů (příkladem je níže popsaný Gaborův systém) lze získat řídkou reprezentaci audiosignálu, čehož při řešení problému restaurace audiosignálu využijeme.

Poznamenejme, že ačkoliv tento příspěvek pojednává pouze o doplnění chybějícího úseku signálu, koncept řídkosti audiosignálu lze využít i pro odstraňování šumu nebo tzv. *audio declipping*, při němž je cílem doplnit vzorky, jejichž amplituda přesáhla dovolený dynamický rozsah a signál je v těchto místech omezen určitou hodnotou výchylky.

---

2010 *MSC.* Primární 42Cxx.

*Klíčová slova.* Audiosignál, doplňování chybějících dat, Gaborova transformace, řídké reprezentace, Douglasův-Rachfordův algoritmus, kompenzace poklesu energie, inpainting.

[1]Článek vznikl na základě bakalářské práce autora v oboru Matematické inženýrství na FSI VUT v Brně. Vedoucím práce byl Pavel Rajmic z Ústavu telekomunikací FEKT VUT v Brně.

## 2. Řídké reprezentace

Jak již bylo nastíněno v úvodu, prezentovaný algoritmus bude vyžadovat řídkou reprezentaci signálů. Digitální signál budeme chápat jako vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^p$, kde $p$ je počet vzorků signálu[2]. Nyní popíšeme takovou množinu vektorů $G = \{\mathbf{g}_i, i = 1, \dots, q\} \subset \mathbb{C}^p$, která bude generovat prostor $\mathbb{C}^p$ a daný audiosignál $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^p$ bude možné vyjádřit jako lineární kombinaci malého počtu prvků z $G$.

### 2.1. Gaborovy systémy

Gaborův systém je množina konstruovaná na základě zvoleného vektoru $\mathbf{g}$, který nazveme oknem a jehož nosič je kompaktní a délky $w \ll p$. Toto okno slouží k časové lokalizaci spektra signálu[3]. Systém $G$ pak získáme translacemi a modulacemi okna $\mathbf{g}$ a můžeme jej úplně popsat pomocí okna $\mathbf{g}$ a parametrů $a$ (posun mezi sousedními okny, neboli parametr translace) a $M$ (počet modulací okna).

Pro systém $G$ definujeme (lineární) operátor syntézy $\mathcal{G}\colon \mathbb{C}^q \to \mathbb{C}^p$,

$$\mathbf{y} = \mathcal{G}\mathbf{c} = \sum_{i=1}^{q} c_i \mathbf{g}_i, \tag{2.1}$$

a k němu adjungovaný operátor analýzy $\mathcal{G}^*\colon \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}^q$. Poznamenejme, že protože předpokládáme $q > p$, může pro daný signál $\mathbf{y}$ existovat více vektorů koeficientů $\mathbf{c}$ takových, že $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{q} c_i \mathbf{g}_i$. Bližší teoretický rozbor operátorů $\mathcal{G}$ a $\mathcal{G}^*$ je nad rámec tohoto textu, na tomto místě proto pouze uvedeme, že pro vhodné okno $\mathbf{g}$ a nastavení parametrů $a$ a $M$ je systém $G$ tzv. Parsevalovým framem (blíže viz [4, 3]), který je z výpočetních důvodů výhodný. Dále budeme pracovat právě s Parsevalovým framem a jeho prvky budeme nazývat atomy.

## 3. Formulace problému a algoritmus

Úlohu doplnění chybějícího úseku signálu budeme nyní formulovat jako optimalizační problém, ve kterém budeme hledat nejřidší vektor koeficientů $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^q$ rekonstruovaného signálu (samotný signál pak snadno dostaneme jako $\mathcal{G}\mathbf{x}$). Množina přípustných řešení $\Gamma$ je množina takových reprezentací, že z nich syntetizovaný signál se od původního neliší v nepoškozených úsecích. Formálně

$$\mathbf{x} = \arg\min_{\mathbf{z}} \|\mathbf{z}\|_0 \quad \text{vzhledem k} \quad \mathbf{z} \in \Gamma. \tag{3.1}$$

Protože minimalizace $\ell_0$-pseudonormy (neboli maximalizace řídkosti) je NP-těžký problém, řešíme relaxovanou úlohu

$$\mathbf{x} = \arg\min_{\mathbf{z}} \|\mathbf{z}\|_1 \quad \text{vzhledem k} \quad \mathbf{z} \in \Gamma. \tag{3.2}$$

---

[2]Signál chápeme jako komplexní vektor z důvodu Gaborovy transformace, která se obvykle zavádí pro komplexní vektory [3]. V aplikacích, kde jsou signály reálné, se pak omezujeme pouze na reálnou složku $\mathbf{y}$.

[3]Proto hovoříme o tzv. časově-frekvenční reprezentaci signálu.

Úloha (3.2) je již úlohou konvexní optimalizace, k jejímu řešení tudíž známe efektivní algoritmy.

### 3.1. Algoritmus

Definujeme-li *indikátorovou funkci* $\iota_\Gamma$ množiny $\Gamma$ vztahem

$$\iota_\Gamma(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \mathbf{x} \in \Gamma, \\ \infty & \mathbf{x} \notin \Gamma, \end{cases}$$

můžeme úlohu (3.2) formulovat v neomezeném tvaru

$$\mathbf{x} = \arg\min_{\mathbf{z}} \|\mathbf{z}\|_1 + \iota_\Gamma(\mathbf{z}). \tag{3.3}$$

Pro řešení úlohy (3.3) použijeme proximální Douglasův-Rachfordův algoritmus (viz [1]), jehož zjednodušená verze pro náš problém je v algoritmu 1. Funkce $\mathrm{soft}_\tau$ (tzv. měkké prahování) a $\mathrm{proj}_\Gamma$ (projekce na množinu $\Gamma$) jsou tzv. proximální operátory $\ell_1$-normy, resp. indikátorové funkce (blíže viz [1]).

**Algoritmus 1:** Douglasův-Rachfordův algoritmus pro zaplnění chybějícího úseku signálu

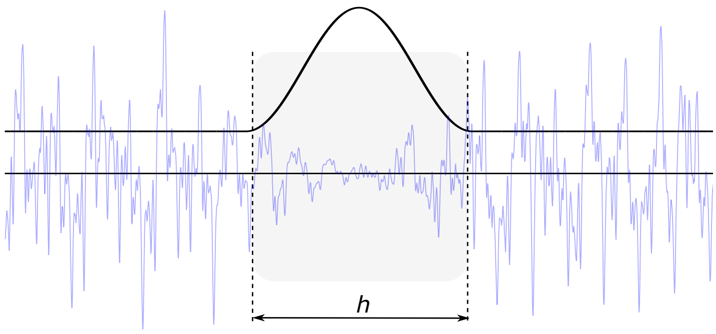
zvolíme $\tau > 0, \mathbf{q}_0 \in \mathbb{C}^q$
**for** $n = 0, 1, 2, \dots$ **do**
  $\mathbf{x}_n = \mathrm{soft}_\tau(\mathbf{q}_n)$
  $\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + \mathrm{proj}_\Gamma(2\mathbf{x}_n - \mathbf{q}_n) - \mathbf{x}_n$
**end**
$\mathbf{x} = \mathrm{proj}_\Gamma(\mathbf{x}_n)$

Poslední krok algoritmu 1 je oproti obecné formě algoritmu přidán navíc, protože volíme konzervativní přístup, při kterém požadujeme příslušnost výsledného vektoru $\mathbf{x}$ do množiny $\Gamma$, i když algoritmus skončí v důsledku zvoleného ukončovacího kritéria dříve, než je dosaženo optimální řešení.

### 3.2. Kompenzace poklesu energie v rekonstruovaném signálu

Signály rekonstruované výše popsaným algoritmem obecně vykazují pokles energie v místě zaplněné díry (tento jev symbolicky ukazuje obrázek 1). Pro kompenzaci tohoto poklesu energie navrhujeme dvě metody: váhování atomů a kompenzaci v časové oblasti.

**3.2.1. Váhování atomů.** V důsledku $\ell_1$ relaxace dochází při optimalizaci kromě požadovaného nulování složek Gaborovy reprezentace též k snižování složek, které zůstanou nenulové a ze kterých tedy syntetizujeme výslednou rekonstrukci. K tomuto dochází realizací operátoru $\mathrm{soft}_\tau$, který (zjednodušeně řečeno) zmenšuje složky argumentu o hodnotu $\tau$. Váhování atomů v našem případě znamená přiřazení různých hodnot $\tau_i$ jednotlivým složkám Gaborovy reprezentace (namísto konstantního parametru $\tau$). To činíme tak, že atomům, které více přispívají k rekonstrukci díry, přiřadíme menší hodnotu $\tau_i$, aby byly operátorem měkkého prahování




**Obrázek 1.** Ukázka poklesu energie v místě doplněné díry (díru délky $h$ symbolizuje šedá oblast). Černá křivka zobrazuje návrh na kompenzaci poklesu energie v časové oblasti.

méně penalizovány. Určit váhy splňující tento požadavek lze mnoha způsoby a předem nelze odhadnout, jaký postup dosáhne nejlepších výsledků. Dále tedy navrhujeme čtyři různé možnosti, které reflektují vliv jednotlivých atomů na doplnění chybějícího úseku a jednotlivé možnosti se liší rozptylem vypočítaných hodnot $\tau_i$.

Označme nyní $\mathbf{g}_i^{\mathrm{r}}$ část atomu $\mathbf{g}_i$, která odpovídá neporušené části signálu. Váhy $\tau_i$ pak navrhujeme mimo konstantní (neváhované) varianty dle následujících vzorců:

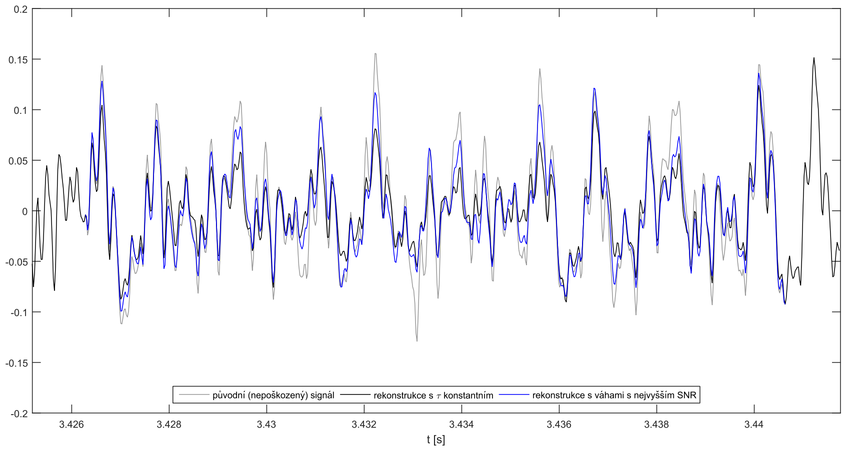
$$\text{I.}\quad \tau_i = \frac{|\operatorname{supp}(\mathbf{g}_i^{\mathrm{r}})|}{|\operatorname{supp}(\mathbf{g}_i)|}, \qquad \text{II.}\quad \tau_i = \frac{\|\mathbf{g}_i^{\mathrm{r}}\|_1}{\|\mathbf{g}_i\|_1},$$

$$\text{III.}\quad \tau_i = \frac{\|\mathbf{g}_i^{\mathrm{r}}\|_2}{\|\mathbf{g}_i\|_2}, \qquad \text{IV.}\quad \tau_i = \frac{\|\mathbf{g}_i^{\mathrm{r}}\|_2^2}{\|\mathbf{g}_i\|_2^2}.$$

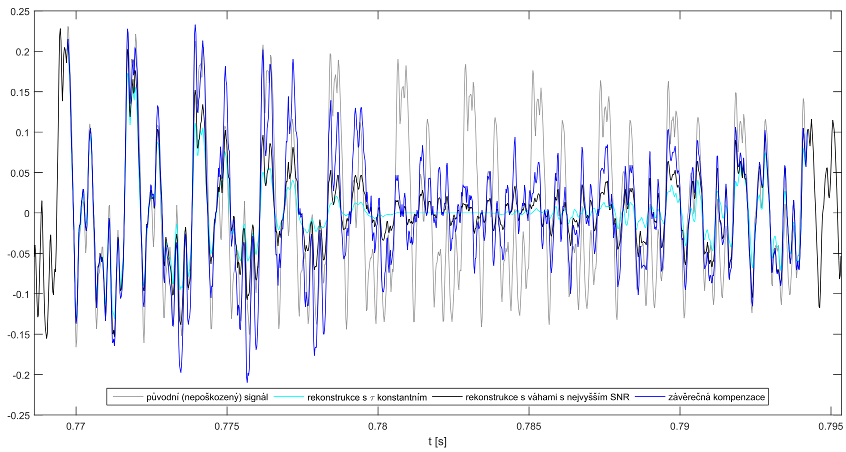
**3.2.2. Kompenzace v časové oblasti.** Cílem této metody není reagovat přímo na příčinu poklesu energie, jak tomu bylo u váhování atomů. Zde se snažíme amplitudu doplněné části signálu zvýšit prostým vynásobením rekonstruovaného signálu po složkách vhodnou funkcí. Pro ilustraci zde máme na tuto funkci pouze požadavek hladkosti, volíme tedy její hodnoty dle jedné periody (délky $h$) funkce kosinus posunuté podél osy $y$ tak, aby na hranicích díry hladce navazovala na konstantní funkci s hodnotou 1 (mimo díru signál neměníme). Tento jednoduchý model je ilustrován v obrázku 1.

## 4. Ukázkové výsledky

Obrázky 2 a 3 ilustrují použití navržených metod v praxi. V obou je viditelný nárůst amplitudy, je-li použit algoritmus s váhováním atomů. Ačkoliv v případě uvedeném v obrázku 3 je pokles energie zřejmý i s použitím obou navržených kompenzačních metod po sobě, dochází zde oproti základní metodě (tyrkysová barva) k eliminaci úseku pouze nulových vzorků a rozdíl mezi nepoškozeným signálem a rekonstrukcí je sluchem nerozeznatelný.




**Obrázek 2.** Porovnání variant algoritmu (váhování voleno dle varianty IV). Testovaný signál byl záznam zvuku houslí a violy, délka díry $h = 632$ vzorků (se vzorkovací frekvencí 44,1 kHz, tedy přibližně 14 ms).




**Obrázek 3.** Porovnání variant algoritmu (váhování voleno dle varianty I). Testovaný signál byl záznam zvuku houslí, délka díry $h = 1080$ vzorků (se vzorkovací frekvencí 44,1 kHz, tedy přibližně 24 ms).

## 5. Závěr

Prezentovali jsme algoritmus pro doplnění chybějícího úseku audiosignálu založený na předpokladu řídkosti Gaborovy reprezentace signálu. Z dosažených výsledků jsme se omezili na ukázku dvou jednoduchých experimentů. Širší analýza výsledků provedená v [2] ukazuje, že z hlediska objektivního hodnocení jsou navržené kompenzační metody zlepšením oproti základnímu algoritmu 1, ovšem ne ve všech případech.

## Reference


[1] P. L. Combettes, J.-C. Pesquet: *Proximal splitting methods in signal processing*, in Fixed-Point Algorithms for Inverse Problems in Science and Engineering, H. H. Bauschke, R. Burachik, P. L. Combettes, V. Elser, D. R. Luke, H. Wolkowicz (eds.), 185–212, Springer-Verlag, New York, 2011.

[2] O. Mokrý: *Restaurace poškozených audiosignálů pomocí řídkých reprezentací*, Bakalářská práce, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Brno, 2017.

[3] G. E. Pfander: *Gabor Frames in Finite Dimensions*, 193–239, Birkhäuser Boston, Boston, 2013.

[4] P. Rajmic, M. Daňková: *Úvod do řídkých reprezentací signálů a komprimovaného snímání*, Vysoké učení technické v Brně, Brno, 2014.



Ondřej Mokrý, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,

*e-mail*: `ondrej.mokry@mail.com`

# URČENÍ TERMOFYZIKÁLNÍCH VLASTNOSTÍ OKUJÍ NA OCELI PRO VYSOKÉ TEPLOTY

TOMÁŠ ONDRUCH

Abstrakt. Příspěvek seznamuje čtenáře s problematikou bakalářské práce řešené studentem oboru Matematické inženýrství na FSI VUT v Brně ve spolupráci s Laboratoří přenosu tepla a proudění[1]. Cílem textu je poukázat na využití matematického aparátu při řešení reálné technické úlohy z oblasti přenosu tepla. Zde matematika poskytuje nástroje jak pro popis zkoumaných fyzikálních jevů, tak i pro analýzu dat a vyhodnocení kvality vypočítaných výsledků.

## 1. Úvod

Při výrobě oceli a během procesů jejího zpracování za vysokých teplot je ocel běžně vystavena oxidačnímu prostředí. Za takových podmínek dochází na jejím povrchu k oxidaci železa a následnému vzniku vrstev okují. Jejich význam je důležitý jak z hlediska dosažení požadované kvality oceli, tak i pro optimalizaci dílčích procesů zpracování, zejména postupného chlazení ocelových produktů a jejich válcování.

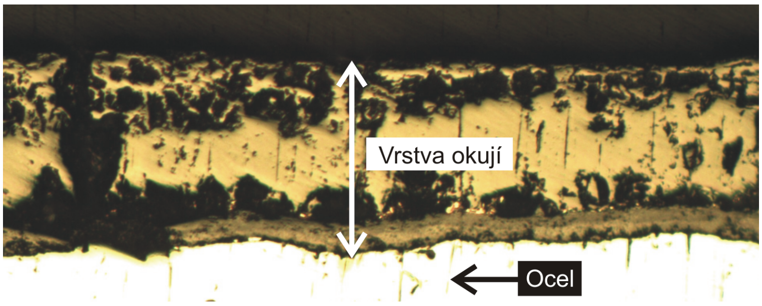
Vliv okují by tedy rozhodně neměl být zanedbáván a jejich výzkumu by se měla věnovat patřičná pozornost. Z důvodu značné závislosti struktury okují na parametrech oxidačního prostředí a složení oceli je však zkoumání jejich vlastností velmi složité. K této obtíži přispívá také výrazná nehomogenita, křehká struktura a obecně proměnlivá poréznost vrstvy okují. Mikrofotografie zokujeného povrchu oceli je přiložena na obrázku 1.

Bakalářská práce se zabývá určením tepelné difuzivity $\alpha$ a součinitele tepelné vodivosti $\lambda$ vrstvy okují na oceli. Řešení úlohy zahrnuje experimentální část s využitím měřicího aparátu pro tzv. laserovou zábleskovou metodu, která je velmi vhodná zejména pro měření vzorků za vysokých teplot přesahujících 600 °C. Získané výsledky jsou počítačově zpracovány a v dalším postupu srovnány s výstupy konečněprvkového numerického modelu, který simuluje provedené měření. Výsledky získané těmito dvěma vědeckými přístupy lze následně porovnat a s pomocí metody odezvové plochy založené na principech regresní analýzy určit hodnoty hledaných termofyzikálních vlastností.

2010 *MSC.* Primární 80A20; Sekundární 00A06.

*Klíčová slova.* Okuje, termofyzikální vlastnosti, laserová záblesková metoda, diferenciální rovnice vedení tepla, metoda odezvové plochy.

[1]Vedoucím bakalářské práce autora byl Michal Pohanka z Laboratoře přenosu tepla a proudění FSI VUT v Brně.




**Obrázek 1.** Mikrofotografie vrstvy okují na povrchu oceli.

## 2. Základy přenosu tepla

Nedílnou součástí procesů výroby a zpracování oceli je přenos tepla. Z hlediska fyzikální podstaty dějů lze u něj rozlišovat tři základní mechanismy: vedení, proudění a záření. V hutnickém průmyslu i v řešeném problému souvisejícím s určením termofyzikálních vlastností zastává nejvýznamnější roli přenos tepla vedením, který lze formálně popsat pomocí diferenciální rovnice vedení tepla, známé také jako rovnice tepelné difuze.

### 2.1. Diferenciální rovnice vedení tepla

Pro základní případ jednorozměrné úlohy nestacionárního vedení tepla, například v tenké tyči nebo skrze rovinnou stěnu, lze diferenciální rovnici vedení tepla zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x}\right) + q(x,t), \tag{2.1}$$

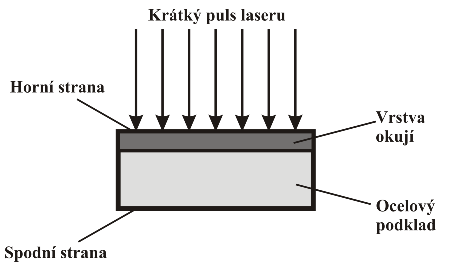
kde $T = T(x,t)$ je hledaná funkce popisující teplotu ve zkoumaném tělese v místě se souřadnicí $x$ a čase $t$, člen $q(x,t)$ reprezentuje vnitřní zdroje tepla a součinitel $\alpha$ se nazývá tepelná difuzivita. Při řešení úlohy vedení tepla je rovnice dále doplněna o počáteční podmínku a vhodné okrajové podmínky.

Pro fyzikální vyjádření tepelné difuzivity platí vztah $\alpha = \frac{\lambda}{\rho c}$, kde člen $\lambda$ na pozici čitatele představuje součinitel tepelné vodivosti, jmenovatel vyjadřuje součin hustoty $\rho$ a měrné tepelné kapacity $c$ materiálu. Z hlediska interpretace vyjadřuje tepelná difuzivita schopnost látky vyrovnávat rozdílné teploty při neustáleném šíření tepla vedením v homogenním prostředí. Oproti tomu součinitel tepelné vodivosti $\lambda$ charakterizuje schopnost látky vést teplo. Určení číselných hodnot těchto dvou termofyzikálních vlastností se v praxi provádí experimentálně. V případě měření zokujených vzorků za vysokých teplot je vhodným postupem použití tzv. laserové zábleskové metody.

## 3. Laserová záblesková metoda

V Laboratoři přenosu tepla a proudění bylo provedeno měření zokujených vzorků oceli 54SiCr6 pomocí měřicího zařízení pro laserovou zábleskovou metodu. Její princip spočívá v ozáření malého vzorku tvaru disku výkonným pulsním laserem, jehož paprsek dopadá na horní stranu měřeného vzorku a způsobí jeho zahřátí. Odezva na spodní straně vzorku odpovídající postupnému nárůstu teploty je následně měřena vysoce citlivým infračerveným senzorem a pomocí systému pro sběr dat zaznamenávána do paměti počítače. Z růstu křivky odezvy a známých rozměrů vzorku lze pak v případě měření homogenních vzorků určit hodnotu tepelné difuzivity a součinitele tepelné vodivosti materiálu.

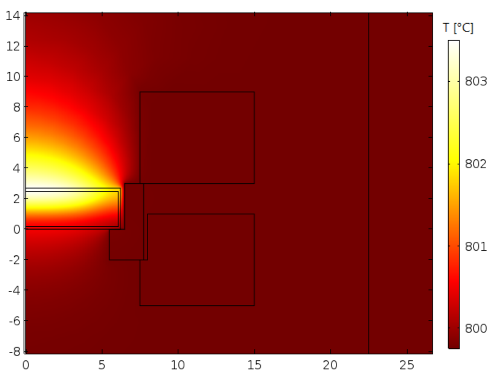
Ozáření nehomogenního vzorku vrstvy okují na oceli je graficky znázorněno na obrázku 2. V takovém případě je však samotná laserová záblesková metoda nedostačující, neboť neumožňuje určení termofyzikálních vlastností okují jakožto dílčí vrstvy zkoumaného vzorku. Z důvodu křehké struktury okují navíc nelze tuto vrstvu oxidů od substrátu oceli pro účely měření oddělit. Vhodné řešení problému nabízí využití numerické simulace.




**Obrázek 2.** Ozáření zokujeného vzorku.

## 4. Numerický model

Ve vývojovém prostředí programu COMSOL Multiphysics v 5.2a byl vytvořen konečněprvkový numerický model měřicího zařízení, který simuluje provedený experiment laserové zábleskové metody. Model zahrnuje geometrii elektrické pece spolu se zokujeným vzorkem uchyceným v držáku uvnitř pece a simuluje časově závislý přenos tepla probíhající po ozáření vzorku pulzem laseru. Žádaným výstupem numerického výpočtu je podobně jako v případě reálného měření konečná posloupnost hodnot popisující teplotní odezvu na spodní straně ozářeného vzorku. Na obrázku 3 je zachyceno vypočítané teplotní




**Obrázek 3.** Teplotní pole v oblasti držáku pece.

pole v oblasti držáku pece bezprostředně po simulovaném ozáření vzorku při počáteční teplotě 800 °C.

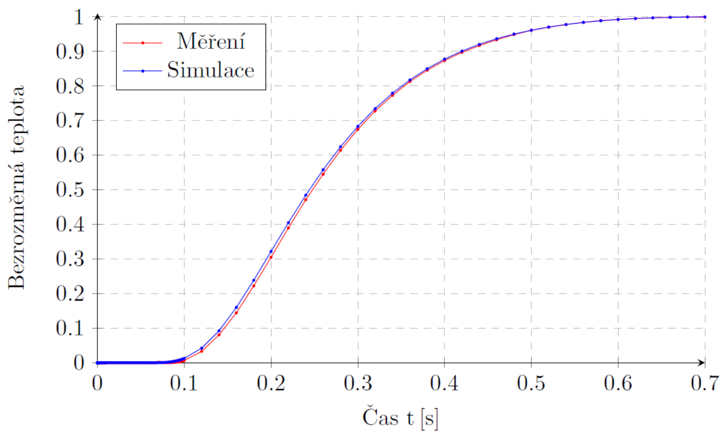
## 5. Výpočet termofyzikálních vlastností

Pro určení termofyzikálních vlastností zkoumané vrstvy okují byly srovnávány teplotní odezvy na spodní straně vzorku získané z numerického modelu s odezvou naměřenou infračerveným snímačem při experimentu. Konkrétně byly sledovány tvary křivek v časovém rozmezí od vyzáření pulsu laseru až po bod maxima křivky.

Účelem tohoto procesu bylo minimalizovat funkcionál $S$ představující součet čtverců odchylek hodnot získaných z numerického modelu vůči hodnotám naměřeným při experimentu. Nalezení minima pak přímo vede na určení hledané dvojice termofyzikálních vlastností okují. Matematicky lze úlohu zapsat ve tvaru

$$(\hat{\alpha}, \hat{\lambda}) = \underset{\alpha,\lambda}{\operatorname{argmin}}\ S(\alpha, \lambda) = \underset{\alpha,\lambda}{\operatorname{argmin}} \sum_{t=0}^{n} \big(U_t - T_t(\alpha, \lambda)\big)^2,$$

kde $U_t$ jsou data získaná z experimentu, $T_t$ jsou hodnoty získané ze simulace. Čas $t = 0$ označuje okamžik ozáření vzorku pulsem laseru, $t = n$ se pak vztahuje k bodu, kdy $U_t$ nabývá své maximální hodnoty. Nutno poznamenat, že jak posloupnost diskrétních hodnot $U_t$, tak i $T_t$ je pro účely vzájemného srovnávání křivek potřeba přeškálovat do bezrozměrného tvaru v rozsahu $\langle 0, 1\rangle$. Graficky je myšlenka porovnávání křivek ve smyslu metody nejmenších čtverců zachycena na obrázku 4.



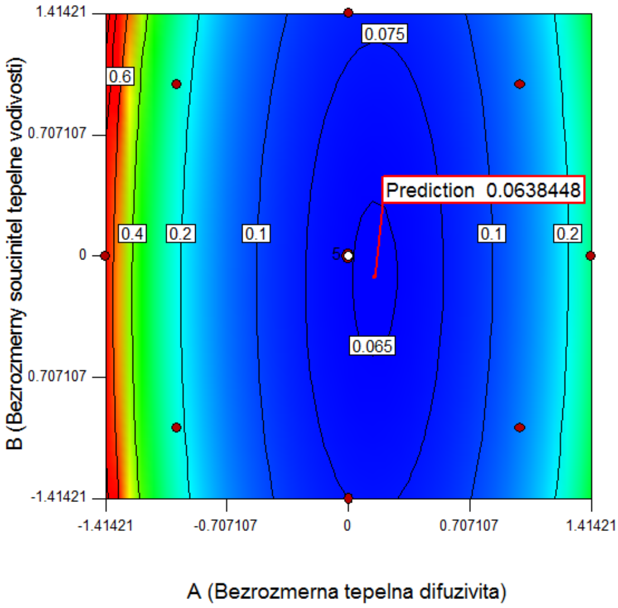

**Obrázek 4.** Princip srovnávání tvaru křivek ve smyslu metody nejmenších čtverců.

### 5.1. Metoda odezvové plochy

Základní myšlenka řešení úlohy využívá fakt, že volbou dvojice parametrů $(\alpha, \lambda)$ v nastavení numerického modelu lze měnit výstupní hodnoty $T_t$ numerického výpočtu, a tedy i výsledný součet čtverců odchylek. Metoda odezvové plochy představuje efektivní nástroj, který umožňuje úlohu řešit při provedení poměrně nízkého počtu simulačních výpočtů, přičemž testovací dvojice parametrů $(\alpha, \lambda)$ jsou voleny systematicky podle tzv. plánu experimentu. Přitom se využívá předpokladu, že empirický model vlivu vstupních proměnných modelu na výstupní proměnnou můžeme aproximovat vhodnou matematickou funkcí ve smyslu nejmenších čtverců.

### 5.2. Výpočet termofyzikálních vlastností

Ve statistickém software Design - Expert 10 určeném pro návrh a analýzu experimentu byla použita metoda odezvové plochy pro nalezení optimální dvojice parametrů $(\hat{\alpha}, \hat{\lambda})$ minimalizující funkcionál $S$ pro součet čtverců odchylek naměřených a simulovaných hodnot na křivce odezvy. Pro regresi byl v uživatelském rozhraní programu zvolen polynomiální kvadratický model. Program po provedení výpočtu poskytnul uživateli číselné hodnoty nalezených termofyzikálních vlastností i grafickou reprezentaci nalezené odezvové plochy, která je znázorněna formou konturového diagramu na obrázku 5. Výstup rovněž zahrnoval analýzu rozptylu (ANOVA), která umožňuje vyhodnotit kvalitu vytvořeného modelu a případně identifikovat jeho nedostatky. Tyto poznatky jsou prezentovány a okomentovány v textu přílohy vypracované bakalářské práce.




**Obrázek 5.** Konturový diagram nalezené odezvové plochy.

## 6. Diskuze a závěr

Vypočítané hodnoty tepelné difuzivity $\hat{\alpha} = 4,74 \,.\, 10^{-3}\,\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$ a součinitele tepelné vodivosti $\hat{\lambda} = 0,37$ W/m K vrstvy okují pro měření při teplotě 800 °C byly v závěru srovnány s hodnotami z dalších dostupných publikací. Zejména nezanedbatelná míra poréznosti zkoumaných okují, u kterých vzduchové póry tvoří až 37% celkového objemu, je pravděpodobně hlavním důvodem, že nalezené hodnoty jsou ve srovnání s dostupnými daty značně nižší. Vyhodnocení míry vlivu poréznosti okují na výsledky výpočtu jejich termofyzikálních vlastností nabízí prostor pro navazující pokrok v této oblasti výzkumu.

Tomáš Ondruch, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
*e-mail*: `tomas.ondruch@vutbr.cz`

# VYBRANÉ PRÍKLADY Z INTERNETOVEJ MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

VIERA ŠTOUDKOVÁ RŮŽIČKOVÁ

ABSTRAKT. V článku sú riešené štyri vybrané príklady z Internetovej matematickej olympiády pre študentov stredných škôl. V prvom príklade sa rozhoduje o lineárnej závislosti vektorov daného tvaru, v druhom príklade sa hľadá neznáma funkca spĺňajúca daný vzťah, v treťom príklade sa počíta tretia mocnina daného kvaterniónu a vo štvrtom príklade sa počíta dĺžka stany pravouhlého trojuholníka s danými vlastnosťami.

Ústav matematiky na FSI VUT v Brne každoročne organizuje Internetovú matematickú olympiádu pre študentov stredných škôl ČR a SR. V roku 2017 prebehol už jej desiaty ročník. Na príprave príkladov a ich vyhodnotení sa nemalou mierou podieľajú študenti oboru Matematické inženýrství. Podľa pravidiel tejto súťaže rieši desať príkladov skupina siedmich stredoškolákov maximálne dve hodiny. Skladba príkladov býva pestrá, sú zaradené príklady rôznej obťažnosti. Cieľom je, aby aj študenti nižších ročníkov (ktorí môžu byť buď členmi tímu namiešaného z rôznych ročníkov alebo majú svoj tím) mali šancu dotiahnuť do konca aspoň nejaký príklad a zbierali do budúcna skúsenosti.

Na stránkach `http://matholymp.fme.vutbr.cz` je možné nájsť zadania aj riešenia príkladov zo všetkých ročníkov.

Tento príspevok píšem z pohľadu riešiteľa. Vybrala som niektoré z tých náročnejších príkladov (podľa výsledného bodového hodnotenia) a uvádzam pri každom pôvodné zadanie a potom moje postupné úvahy – ukážku toho, nad čím všetkým uvažuje riešiteľ, než sa dopracuje k riešeniu a niekedy ešte aj potom.

Poznámka: V zátvorke je vždy uvedený rok, kedy sa daný príklad vyskytol na olympiáde, pod akým číslom a meno autora príkladu.

## 1. PRÍKLAD S VEKTORMI

Na úvod som vybrala príklad z lineárnej algebry.

2010 *MSC.* Primární 00A09; Sekundární 00A35.
*Klíčová slova.* Matematická olympiáda, kvaternión.

**Príklad 1** (2014, Příklad 9, autorka Hana Druckmüllerová). *Mějme v* $\mathbb{R}^n$ *dáno* $n$ *vektorů o* $n$ *složkách, kde* $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, *takto*

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1 &= (1, 2, 3, \dots, n),\\
\vec{v}_2 &= (n+1, n+2, \dots, 2n),\\
&\ \vdots\\
\vec{v}_n &= \big((n-1)n+1, (n-1)n+2, \dots, n^2\big).
\end{aligned}$$

*Rozhodněte, zda tyto vektory jsou lineárně závislé.*

Príklad má zložito vyzerajúce zadanie, pracuje sa tam s $n$-rozmernými vektormi, to asi mnohých stredoškolákov odradilo. Pre získanie predstavy, o čo vlastne ide, je dobré prepísať si zadanie pre konkrétne $n$. Napríklad pre štvorku dostanem

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1 &= (1, 2, 3, 4),\\
\vec{v}_2 &= (5, 6, 7, 8),\\
\vec{v}_3 &= (9, 10, 11, 12),\\
\vec{v}_4 &= (13, 14, 15, 16).
\end{aligned}$$

Spomenula som si pri tom na matice – keď chce niekto napísať vymyslenú, ale „peknú“ maticu, častokrát prvá, ktorá ho napadne, je matica poskladaná z práve takýchto vektorov

$$\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ 9 & 10 & 11 & 12\\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}, \quad \dots$$

Otázka v zadaní je, či sú tieto vektory lineárne nezávislé. Ak nie sú, znamená to, že tá matica má nulový determinant. Aj mne sa už stalo, že som vymyslela príklad s takouto maticou $3 \times 3$ a pamätám si, že jej determinant vyšiel nulový (bol to práve príklad na výpočet determinantu matice). Platí to ale pre všetky takéto matice? Pozriem sa ešte raz na tie vektory a hneď vidím, že platí

$$\begin{aligned}
\vec{v}_2 - \vec{v}_1 &= (5, 6, 7, 8) - (1, 2, 3, 4) = (4, 4, 4, 4),\\
\vec{v}_3 - \vec{v}_2 &= (9, 10, 11, 12) - (5, 6, 7, 8) = (4, 4, 4, 4).
\end{aligned}$$

S $n$-rozmernými vektormi je to podobné,

$$\begin{aligned}
\vec{v}_2 - \vec{v}_1 &= (n+1, n+2, \dots, 2n) - (1, 2, 3, \dots, n) = (n, n, \dots, n),\\
\vec{v}_3 - \vec{v}_2 &= (2n+1, 2n+2, \dots, 3n) - (n+1, n+2, \dots, 2n) = (n, n, \dots, n).
\end{aligned}$$

Takže pre každé $n > 2$ platí, že

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_3 - \vec{v}_2,$$

a teda

$$\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3 = (0, 0, \dots, 0).$$

Našla som lineárnu kombináciu prvých troch vektorov, ktorá mi dá nulový vektor. Sú teda vždy lineárne závislé.

Poučenie: Pokiaľ chcete vymyslieť príklad na maticu s nenulovým determinantom, použite nejakú „náhodnejšiu“. (Tiež sa neodporúča používať zaradom idúce čísla „12345 . . . “ ako heslo.)

## 2. Príklad s neznámou funkciou

Takéto typy príkladov ma bavia. Hľadanie neznámej funkcie je trochu ako detektívka – mám stopu a hľadám páchateľov. A po vypátraní ich musím ešte usvedčiť.

**Príklad 2** (2016, Příklad 8, autor Matej Dolník)**.** *Najděte nejméně dva funkční předpisy pro nenulovou spojitou funkci* $f$*, má-li platit*

$$f^2(x+y) = f^2(y) + f^2(x) - 2f^2(x)f^2(y) + f(2x)f(y)\cos(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Rovno sa priznám, že som to na prvý pokus nevyriešila správne. Začala som dobre – napísala som si asi dva vzťahy, ktoré musí hľadaná funkcia spĺňať, ale potom som sa niekde pomýlila a vyšlo mi veľmi rýchle, že jediné riešenie je nulová funkcia. A hneď potom som sa pozrela na stránky olympiády, či to mám správne. Tým som zistila, že mám niekde chybu, súčasne som sa ale nechtiac dopredu dozvedela skutočné riešenie.

Dobre, povedala som si, nevadí, postup som neštudovala, skúsim na to riešenie prísť sama. Zistila som ale vzápätí, že to v tomto prípade nejde – zadanie totiž predpokladá, že riešiteľ túto funkciu môže uhádnuť. A ako sa mám tváriť, že hádam funkciu, keď už ju viem? Nakoniec som to vymyslela tak, že si zadanie trochu upravím – nie „nájdite najmenej dve riešenia“ ale „nájdite všetky riešenia“. Takže to, že dve riešenia poznám, mi až tak nepomôže.

Toto je postup riešenia tohto upraveného zadania.

Skúsim vo vzťahu zo zadania prehodiť premenné $x$ a $y$. Napíšem obidva vzťahy pod sebou

$$f^2(x+y) = f^2(y) + f^2(x) - 2f^2(x)f^2(y) + f(2x)f(y)\cos(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$
$$f^2(y+x) = f^2(x) + f^2(y) - 2f^2(y)f^2(x) + f(2y)f(x)\cos(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Vidím, že sa líšia len v poslednom sčítanci. Dostávam teda, že

$$f(2x)f(y)\cos(y) = f(2y)f(x)\cos(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Upravím túto rovnicu tak, aby naľavo boli len výrazy s $x$ a napravo s $y$ (tj. separujem premenné)

$$\frac{f(2x)}{f(x)\cos(x)} = \frac{f(2y)}{f(y)\cos(y)}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{x : f(x) = 0 \vee \cos(x) = 0\}.$$

Tento podiel je teda konštantný pre všetky $x$ také, že $f(x) \neq 0$ a $\cos x \neq 0$. Označím túto konštantu K a rovnicu zbavím zlomku

$$\frac{f(2x)}{f(x)\cos(x)} = K, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x : f(x) = 0 \vee \cos(x) = 0\},$$

$$f(2x) = Kf(x)\cos(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x : f(x) = 0 \vee \cos(x) = 0\}.$$

Tento posledný vzťah je pekný, myslím si, že by mohol platiť aj pre $x$ také, že $f(x) = 0$ alebo $\cos(x) = 0$. Skúsim to overiť. Vrátim sa ku vzťahu (2.1), z ktorého som to odvodila. A teraz vidím, že to môžem odvodiť jednoduchšie, stačí dosadiť za $y$ také $\bar{y}$, že $f(\bar{y})\cos(\bar{y}) \neq 0$ a vydeliť to tým. Také $\bar{y}$ určite existuje, funkcia nemôže byť nulová všade, kde je $\cos(\bar{y}) \neq 0$, to by bola buď konštantne nulová alebo nespojitá. Dostávam

$$f(2x) = \frac{f(2\bar{y})}{f(\bar{y})\cos(\bar{y})} f(x)\cos(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$f(2x) = Kf(x)\cos(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Mohla som to tak urobiť hneď na začiatku. Postup by bol kratší, ale vtedy ma to nenapadlo. Tie medzikroky boli potrebné len k tomu, aby ma naviedli na ten lepší postup. Ako riešiteľka olympiády by som ich teda nechala len na pomocnom papieri.

Teraz sa vrátim ku vzťahu zo zadania. Za premennú $y$ dosadím tiež $x$, potom

$$f^2(2x) = 2f^2(x) - 2f^4(x) + f(2x)f(x)\cos(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Teraz za $f(2x)$ dosadím $Kf(x)\cos(x)$ a dostávam

$$K^2 f^2(x)\cos^2(x) = 2f^2(x) - 2f^4(x) + Kf^2(x)\cos^2(x),$$

$$K^2\cos^2(x) = 2 - 2f^2(x) + K\cos^2(x),$$

$$f^2(x) = 1 + \cos^2(x)\frac{K - K^2}{2}\,. \tag{2.3}$$

To už je vlastne skoro odvodené, ako vyzerá $f(x)$, až na konštantu. Pre určenie $K$ stačí zistiť hodnotu $f(x)$ pre nejaké $x$. Ako prvé ma napadlo dosadiť za $x$ nulu. Mám, že

$$f^2(0) = 1 + \frac{K - K^2}{2}\,.$$

Dosadím nulu aj do vzťahu (2.2) a mám, že

$$f(0) = Kf(0).$$

Z týchto posledných dvoch rovníc vidím, že buď je $K = 1$ a $f^2(0) = 1$, alebo je $f(0) = 0$ a $\frac{K-K^2}{2} = -1$ (potom $K = 2$ alebo $K = -1$). Potom z (2.3) mám tieto dve možnosti

$$f^2(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{alebo} \quad f^2(x) = 1 - \cos^2(x) = \sin^2(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ďalšie vhodné číslo, ktoré môžem dosadiť do vzťahu (2.2), je $\frac{\pi}{2}$. Potom hneď dostávam
$$f(\pi) = 0.$$
Takže to vylučuje prvú možnosť. Jediná možná funkcia, spĺňajúca vzťah zo zadania, je taká, pre ktorú platí, že
$$|f(x)| = |\sin(x)|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
Takže hľadaná funkcia je $\sin(x)$ až na znamienko. To znamienko môže byť v rôznych bodoch rôzne, označím si ho ako $z(x)$. Môžem teda napísať, že
$$f(x) = z(x)\sin(x), \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad |z(x)| = 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$
Toto teraz dosadím do vzťahu (2.2) a použitím vzorca $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ to upravím
$$\begin{aligned} f(2x) &= Kf(x)\cos(x), \\ z(2x)\sin(2x) &= Kz(x)\sin(x)\cos(x), \\ z(2x)2\sin(x)\cos(x) &= Kz(x)\sin(x)\cos(x), \\ z(2x) &= \frac{K}{2}z(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{x : x = k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$
Už skôr som zistila, že $K = 2$ alebo $K = -1$, z tohto posledného vzťahu vidím, že jediná možnosť je $K = 2$, a teda pre $z(x)$ platí, že
$$z(2x) = z(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{x : x = k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$
Pretože funkcia $f(x)$ má byť spojitá, jediné možné miesta, kde sa zmení znamienko $z(x)$, sú nulové body funkcie $\sin(x)$. Takže $z(x)$ je na celom intervale $(0, \pi)$ rovná 1 alebo je na celom intervale $(0, \pi)$ rovná $-1$.

Teraz pre každé $x > \pi$ mám, že $z(x) = z(\frac{x}{2}) = z(\frac{x}{4}) = \cdots = z(\frac{x}{2^n})$. Vždy nájdem také $n \in \mathbb{R}$, že $\frac{x}{2^n} < \frac{\pi}{2}$. Takže $z(x)$ je konštantná na celom intervale $(0, \infty)$. Z rovnakej úvahy vyplýva, že $z(x)$ je konštantná na celom intervale $(-\infty, 0)$.

Zostáva zistiť, či je konštantná úplne všade. Na to sa musím vrátiť ku vzťahu zo zadania a dosadiť tam $x$ a $y$ s rôznymi znamienkami. Ako prvé ma napadlo dosadiť za $y$ priamo hodnotu $-x$. Postupnými úpravami dostávam
$$\begin{aligned} \sin^2(0) &= \sin^2(x) + \sin^2(x) - 2\sin^2(x)\sin^2(x) - z(2x)z(-x)\sin(2x)\sin(x)\cos(x), \\ 0 &= 2\sin^2(x) - 2\sin^4(x) - 2z(2x)z(-x)\sin^2(x)\cos^2(x), \\ 0 &= (1 - z(2x)z(-x))\left(\sin^2(x) - \sin^4(x)\right), \\ 1 &= z(2x)z(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x : \sin^2(x) - \sin^4(x) = 0\}, \\ 1 &= z(2)z(-1). \end{aligned}$$
To už stačí na to, aby som mohla tvrdiť, že $z(x)$ nezmení znamienko ani v nule. Takže mi zostali len dve možnosti, buď $f(x) = \sin(x)$ alebo $f(x) = -\sin(x)$. Tieto dve funkcie teda mohli riešitelia aj uhádnuť. Aj oni ale museli ukázať, že obidve funkcie spĺňajú vzťah v zadaní.

Po dosadení funkcie $f(x) = \sin(x)$ alebo $f(x) = -\sin(x)$ do ľavej strany vzťahu v oboch prípadoch dostávam to isté. Postupnými úpravami z toho dostanem výraz vpravo, teda

$$\begin{aligned}
f^2(x+y) &= \sin^2(x+y) = \left(\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)\right)^2 \\
&= \sin^2(x)\cos^2(y) + \cos^2(x)\sin^2(y) + 2\sin(x)\cos(y)\cos(x)\sin(y) \\
&= \sin^2(x)\left(1 - \sin^2(y)\right) + \left(1 - \sin^2(x)\right)\sin^2(y) + \sin(2x)\cos(y)\sin(y) \\
&= \sin^2(y) + \sin^2(x) - 2\sin^2(x)\sin^2(y) + \sin(2x)\sin(y)\cos(y) \\
&= \sin^2(y) + \sin^2(x) - 2\sin^2(x)\sin^2(y) + (-\sin(2x))\,(-\sin(y))\cos(y) \\
&= f^2(y) + f^2(x) - 2f^2(x)f^2(y) + f(2x)f(y)\cos(y).
\end{aligned}$$

Teraz celý ten postup zhrniem: V prvej časti som zistila, že neznáma funkcia je $\sin(x)$ až na znamienko, v druhej časti som zistila, že to znamienko je všade rovnaké a teda sú nanajvýš dve riešenia, v tretej časti som ukázala, že tieto dve riešenia už vyhovujú zadaniu. A vidím, že to určovanie znamienka bolo skoro rovnako namáhavé ako tá prvá časť.

Keď som si to počítala na papieri, tak som dospela ku vzťahu $f^2(x) = \sin^2(x)$ a ďalej som už nepokračovala. V domnení, že ďalej to už bude jednoduché, som to začala hneď prepisovať sem. Teraz, keď som to urobila poriadne, som žiaden rýchly a jednoduchý spôsob vylúčenia ostatných možností nenašla a trochu ma to mrzí. Ak nejaký nájdete, môžete mi dať vedieť.

## 3. Príklad s kvaterniónom

Tento príklad je zaujímavý tým, že sa z neho riešiteľ dozvie, čo je to kvaternión a keďže sa takto nazýva aj tento časopis, je celkom vhodné si tento pojem pripomenúť.

**Príklad 3** (2014, Příklad 10, autor Matej Dolník). *Pro dvě pevně daná čísla $a$, $b$ nazveme kvaternionem výraz ve tvaru $p+xi+yj+zk$, pro který platí,že $i^2 = a$, $j^2 = b$, $ij = -ji = k$. (Pro volbu $a = -1$, $b = -1$ bychom dostali takzvané Hamiltonovy kvaterniony, na které lze nahlížet jako na rozšíření komplexních čísel přidáním dalších dvou komplexních jednotek $j$ a $k$.) Kvaterniony lze mezi sebou sčítat složku po složce a násobit tak, jako bychom násobili dva výrazy s neznámými $i$, $j$, $k$. Při výpočtech je však třeba mít na paměti, že pro násobení kvaternionů neplatí komutativní zákon, neboť $ij = -ji$. Výsledkem sčítání i násobení kvaternionů je opět kvaternion.*

*Pro obecná $a$, $b$ spočtěte třetí mocninu kvaternionu $3 + 5i + 7j + k$ a následně vyjádřete $h$, $l$, $m$, $n$ z rovnice $(3 + 5i + 7j + k)^3 = h + li + mj + nk$.*

Sedím práve vo vlaku, mám síce pri sebe zošit a ceruzku, ale vo vlaku sa píše zle, tak sa budem aj z tohto dôvodu snažiť o čo najúspornejší postup.

Najskôr si napíšem, čo dostanem, ked vynásobím nejaký všeobecný kvaternión $p+xi+yj+zk$ jednotkovým kvaterniónom 1, $i$, $j$ alebo $k$, teda

$$\begin{aligned}1(p+xi+yj+zk) &= p+xi+yj+zk,\\ i(p+xi+yj+zk) &= ax+pi+azj+yk,\\ j(p+xi+yj+zk) &= by-bzi+pj-xk,\\ k(p+xi+yj+zk) &= -abz+byi-axj+pk.\end{aligned}$$

Využila som tam, že $ik=iij=aj$, $jk=-jji=-bi$, $ki=-jii=-aj$, $kj=ijj=bi$, $kk=-ijji=-bii=-ab$. (Tieto pomocné vzťahy som kvôli úspore nezapisovala.)

Teraz z toho jednoducho spočítam, čo dostanem, keď vynásobím všeobecný kvaternión $p+xi+yj+zk$ sám so sebou: Je to $p$-krát výraz v prvom riadku vpravo plus $x$-krát výraz v druhom riadku vpravo plus $y$-krát ten v treťom plus $z$-krát ten vo štvrtom, teda $p(p+xi+yj+zk)+x(ax+pi+azj+yk)+y(by-bzi+pj-xk)+z(-abz+byi-axj+pk)$. Píšem to rovno po koeficientoch (nech to nemusím znova prepisovať) a dostávam

$$(p+xi+yj+zk)^2 = p^2+ax^2+by^2-abz^2+2pxi+2pyj+2pzk. \tag{3.1}$$

Vyšlo to lepšie, než som čakala. Veľa sa toho navzájom poodčítavalo. V zadaní chcú spočítať tretiu mocninu, tak ešte rovnakým postupom pokračujem a kvaterniónom $(p+xi+yj+zk)^2$ vynásobím kvaternión $p+xi+yj+zk$. Je to $(p^2+ax^2+by^2-abz^2)$-krát výraz v prvom riadku vpravo plus $2px$-krát ten v druhom $2py$-krát ten v treťom $2pz$-krát ten vo štvrtom. Zase rovno zapisujem koeficienty, sú to dlhé výrazy, tak ich píšem pod sebou a dostávam

$$\begin{aligned}h &= p^3+apx^2+bpy^2-abpz^2+2apx^2+2bpy^2-2abpz^2\\ &= p^3+3apx^2+3bpy^2-3abpz^2,\\ l &= p^2x+ax^3+bxy^2-abxz^2+2p^2x,\\ m &= p^2y+ax^2y+by^3-abyz^2+2p^2y,\\ n &= p^2z+ax^2z+by^2z-abz^3+2p^2z.\end{aligned}$$

Na záver už len dosadím za $p$, $x$, $y$, $z$ hodnoty 3, 5, 7, 1 zo zadania, potom

$$\begin{aligned}h &= 3^3+3a.3.5^2+3b.3.7^2-3ab.3 = 27+225a+441b-9ab,\\ l &= 3.3^2.5+a.5^3+b.5.7^2-ab.5 = 135+125a+245b-5ab,\\ m &= 3.3^2.7+a.5^2.7+b.7^3-ab.7 = 189+175a+343b-7ab,\\ n &= 3.3^2+a.5^2+b.7^2-ab+2.3^2 = 27+25a+49b-ab.\end{aligned}$$

Celý postup aj s výsledkom sa mi vošiel do zošita na štrnásť riadkov, naviac je dostatočne prehľadný, takže som sa dokonca ani raz nepomýlila, napriek zhoršeným podmienkam (počítala som pri rýchlosti 160 km/h).

Vrátim sa teraz ešte ku druhej mocnine kvaterniónu. Všimla som si, že po úprave vzťahu (3.1) dostanem, že platí

$$(p + xi + yj + zk)^2 = 2p(p + xi + yj + zk) - p^2 + ax^2 + by^2 - abz^2.$$

Takže umocnením kvaterniónu $K = p+xi+yj+zk$ na druhú dostanem $2p$-násobok tohto kvaterniónu plus číslo $c = -p^2 + ax^2 + by^2 - abz^2$, teda

$$K^2 = 2pK + c.$$

Pomocou tohto vzťahu odvodím, čo dostanem pre tretiu mocninu. Teda

$$\begin{aligned} K^3 &= K(2pK + c) = 2pK^2 + cK = 2p(2pK + c) + cK = (4p^2 + c)K + 2pc \\ &= (3p^2 + ax^2 + by^2 - abz^2)K - 2p^3 + 2apx^2 + 2bpy^2 - 2abpz^2. \end{aligned}$$

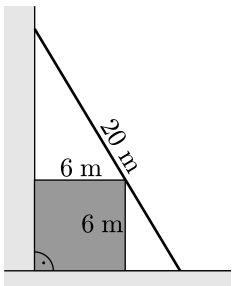
Tento poznatok je zaujímavý, ale s prekvapením zisťujem, že postup pri výpočte tretej mocniny daného kvaterniónu by nebol s jeho použitím o nič kratší a asi ani prehľadnejší.

## 4. Príklad s tyčou a debnou

Na záver som nechala ten najzložitejší príklad, aspoň čo sa týka počtu stránok, ktoré zaberá v tomto časopise.

**Príklad 4** (2010, Příklad 2, autorka Jana Hoderová)**.** *Tyč délky* 20 m *je svým horním koncem opřená o zeď a zároveň se dotýká bedny o rozměrech* 6 m × 6 m, *viz obrázek 1. V jaké výšce se nachází horní konec tyče?*

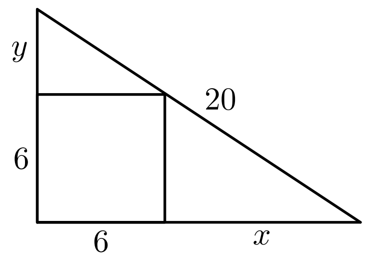
*Poznámka: Tento příklad je možno řešit několika více či méně elegantními způsoby. Týmy, které řešení povedou přes rovnici čtvrtého stupně, kterou následně vyřeší pouze přibližně numericky, získají za příklad koeficient maximálně* 0,50.




**Obrázek 1**

Tento príklad ma zaujal pekným obrázkom. Obrázok je jednoduchý a súčasne má príbeh – žiadne anonymné úsečky XY, ale tyč a debna. (Poznámka: Toto nie je preklep, po slovensky sa „bedna“ povie „debna“.) Tak som sa do toho hneď dala, s úmyslom nájsť jeden z tých viac elegantných postupov, ktorého existenciu mi sľubujú v zadaní.

Označím si neznámu dĺžku úseku medzi debnou a tyčou na zemi ako $x$ a neznámu dĺžku úseku medzi debnou a tyčou na stene ako $y$. Hľadaná výška je potom $y+6$, viď obrázok 2.




**Obrázek 2**

Stačí nájsť dva vzťahy medzi $x$ a $y$ a mám dve rovnice o dvoch neznámych. Na obrázku sú tri pravouhlé trojuholníky a všetky sú navzájom podobné. Takže jeden vzťah dostanem zo známeho $a^2+b^2=c^2$, ďalšie z podobnosti trojuholníkov, teda

$$(x+6)^2+(y+6)^2=20^2,$$
$$\frac{x+6}{y+6}=\frac{x}{6}=\frac{6}{y}.$$

Je ľahké overiť, že rovnosť v druhom riadku má síce dve =, ale je to v skutočnosti len jeden vzťah. To nevadí, dva by mali stačiť. Snažím sa o čo najelegantnejší postup, tak z toho druhého vzťahu nevyjadrím $x$, ale rovno $x+6$ a dosadím do prvého, potom

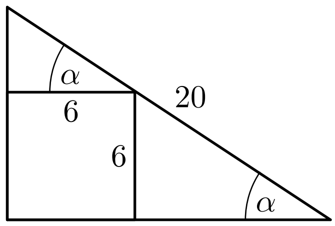
$$x+6=\frac{6(y+6)}{y},$$
$$\frac{36(y+6)^2}{y^2}+(y+6)^2=400.$$

Túto rovnicu vynásobím $y^2$ a dostanem … rovnicu štvrtého rádu, pred ktorou ma varovali v zadaní, teda

$$36(y+6)^2+y^2(y+6)^2=400y^2,$$
$$y^2(y+6)^2+36(y+6)^2-400y^2=0. \tag{4.1}$$

Nevyzerá až tak „zle“, ale nenapadá ma, ako by sa dali nájsť nejakým elegantným postupom jej riešenia.

Cez neznáme dĺžky to nevyšlo, a čo takto skúsiť to cez neznáme uhly? Vlastne je tam len jeden neznámy uhol a jeho doplnok do 90°. Na obrázku 3 je označený ako $\alpha$. Ako sa na to dívam, vo vzťahoch, ktoré mi tam vychádzajú, sa vyskytuje samé $\sin(\alpha)$ a $\cos(\alpha)$. Praktickejšie teda bude pracovať priamo s týmito hodnotami. Označím si $s:=\sin(\alpha)$ a $c:=\cos(\alpha)$.




**Obrázek 3**

Dĺžka tyče je súčet dĺžok prepôn dvoch pravouhlých trojuholníkov, ktoré vyjadrím pomocou $s$ a $c$ zo vzťahov pre sínus a kosínus uhla v pravouhlom trojuholníku. Mám teda vzťah v tvare

$$\frac{6}{s} + \frac{6}{c} = 20,$$

$$\text{a z toho} \quad s + c = \frac{20}{6} sc. \tag{4.2}$$

Zatiaľ tam nechávam tých nevykrátených $\frac{20}{6}$.

Mám ale dve neznáme, čo druhý vzťah? Ten je predsa zrejmý

$$s^2 + c^2 = 1.$$

Teraz hneď vidím, že po umocnení rovnice (4.2) na druhú a dosadením jednotky za $s^2 + c^2$ dostanem celkom obyčajnú kvadratickú rovnicu s neznámou $sc$. Tým je v podstate príklad vyriešený. Aspoň v hlave. (Totiž v skutočnosti som práve bola v autobuse a nemala možnosť si nič zapisovať.)

Potom som sa pokúsila to podrobne previesť na papier, odkiaľ

$$s^2 + c^2 + 2sc = \left(\frac{20}{6}\right)^2 (sc)^2,$$

$$1 + 2sc = \left(\frac{20}{6}\right)^2 (sc)^2,$$

$$sc = \frac{1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{20}{6}\right)^2}}{\left(\frac{20}{6}\right)^2}.$$

Tých $\frac{20}{6}$ mi tam už začína trochu vadiť, ale než namiesto toho písať $\frac{10}{3}$, to si ich rovno nejako označím. Napríklad ako $A$. Vezmem len kladné riešenie, lebo $\alpha$ je ostrý uhol a označím túto hodnotu ako $B$. Takže mám

$$sc = B = \frac{1 + \sqrt{1 + A^2}}{A^2}, \quad A = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}.$$

Teraz mám tri vzťahy pre dve neznáme

$$sc = B, \tag{4.3}$$

$$s + c = AB, \tag{4.4}$$

$$s^2 + c^2 = 1. \tag{4.5}$$

Je niekoľko možností, ako z toho dopočítať hľadanú výšku konca tyče, čiže hodnotu $20s$. Vyskúšam tri varianty, zaujíma ma, ktorá vyjde najlepšie – s najmenším počtom nutných úprav.

1. Použitím prvých dvoch vzťahov (4.3), (4.4), dostanem kvadratickú rovnicu s neznámou $s$, teda

$$c = AB - s \quad \Rightarrow \quad s\,(AB - s) = B \quad \Rightarrow \quad s^2 - ABs + B = 0.$$

Riešenia tejto kvadratickej rovnice dostanem v tvare

$$s_{1,2} = \frac{AB \pm \sqrt{(AB)^2 - 4B}}{2}.$$

2. Pokiaľ by som použila druhé dva vzťahy (4.4), (4.5), dostanem tiež kvadratickú rovnicu, kde

$$c = AB - s \quad \Rightarrow \quad s^2 + (AB - s)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 2s^2 - 2ABs + (AB)^2 - 1 = 0.$$

Vyzerá zložitejšie, ale je to v skutočnosti tá istá rovnica, lebo $1 + 2B = (AB)^2$. Riešenia tejto kvadratickej rovnice dostanem v tvare

$$s_{1,2} = \frac{AB \pm \sqrt{2 - (AB)^2}}{2}.$$

3. Pokiaľ by som použila prvý a tretí vzťah (4.3), (4.5), dostanem rovnicu štvrtého rádu, ale tentoraz ľahko riešiteľnú. (Takáto rovnica sa nazýva bikvadratická.) Teda

$$c = \frac{B}{s} \quad \Rightarrow \quad s^2 + \left(\frac{B}{s}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad s^4 - s^2 + B^2 = 0.$$

Riešenia tejto rovnice štvrtého rádu dostanem v tvare

$$s_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4B^2}}{2}}\,.$$

Vezmem samozrejme len dve kladné.

Na zistenie hľadanej hodnoty $20s$ potrebujem dosadiť za $A, B$. Najviac sa mi pozdáva tá druhá varianta, kde dosadzujem len za $AB$ a je tam len jedna odmocnina. Tie zvyšné už tu neuvádzam.

Najskôr spočítam, že

$$AB = \frac{1 + \sqrt{1 + A^2}}{A} = \frac{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{10}{3}\right)^2}}{\frac{10}{3}} = \frac{3 + \sqrt{109}}{10}\,.$$

Mám teda

$$\begin{aligned}20s_{1,2} &= 10\left(AB \pm \sqrt{2-(AB)^2}\right)\\ &= 3+\sqrt{109} \pm \sqrt{200-\left(3+\sqrt{109}\right)^2}\\ &= 3+\sqrt{109} \pm \sqrt{82-6\sqrt{109}}\,.\end{aligned}$$

Hotovo. Horný koniec tyče sa nachádza zhruba vo výške $9,04\,\mathrm{m}$ alebo $17,84\,\mathrm{m}$.

Ešte pre zaujímavosť odvodím vzťah medzi hľadanou výškou a dĺžkou tyče a hrany debny. Označím si tieto hodnoty postupne $h$, $t$, $d$ a nedosadím za $A$ tých $\frac{10}{3}$ ale $\frac{t}{d}$ a upravím na tvar

$$\begin{aligned}h_{1,2} = ts_{1,2} &= \frac{t}{2}\left(\frac{1+\sqrt{1+A^2}}{A} \pm \sqrt{2-\left(\frac{1+\sqrt{1+A^2}}{A}\right)^2}\right)\\ &= \frac{\frac{t}{A}+t\sqrt{\frac{1}{A^2}+1} \pm t\sqrt{1-\frac{2}{A^2}-2\sqrt{\frac{1}{A^4}+\frac{1}{A^2}}}}{2}\\ &= \frac{d+t\sqrt{\frac{d^2}{t^2}+1} \pm t\sqrt{1-\frac{2d^2}{t^2}-2\sqrt{\frac{d^4}{t^4}+\frac{d^2}{t^2}}}}{2}\\ &= \frac{d+\sqrt{d^2+t^2} \pm \sqrt{t^2-2d^2-2d\sqrt{d^2+t^2}}}{2}\\ &= \frac{d+\sqrt{d^2+t^2} \pm \sqrt{\left(d-\sqrt{d^2+t^2}\right)^2-4d^2}}{2}\,.\end{aligned}$$

Ten tvar vyzerá podozrivo, skoro ako keby to boli dve riešenia nejakej kvadratickej rovnice. Úplne to nesedí, ale môžem to ešte trochu upraviť a mám

$$h_{1,2} = d + \frac{\sqrt{d^2+t^2}-d \pm \sqrt{\left(d-\sqrt{d^2+t^2}\right)^2-4d^2}}{2}\,.$$

Z tohto tvaru už vidno, že hodnoty $y_{1,2} = h_{1,2} - d$ sú riešeniami kvadratickej rovnice

$$y^2 + \left(d-\sqrt{d^2+t^2}\right)y + d^2 = 0.$$

Takže teraz viem napísať ten polynóm štvrtého rádu z rovnice (4.1), ktorá mi vyšla z prvého postupu, ako súčin dvoch polynómov druhého rádu

$$\begin{aligned}&y^2(y+d)^2 + d^2(y+d)^2 - t^2y^2\\ &\qquad = \left(y^2 + \left(d-\sqrt{d^2+t^2}\right)y + d^2\right)(a_2y^2+a_1y+a_0),\end{aligned}$$

kde koeficienty $a_0$, $a_1$, $a_2$ dopočítam tak, aby sa výrazy rovnali. Dostanem potom, že $a_0 = d^2$, $a_1 = d + \sqrt{d^2 + t^2}$ a $a_2 = 1$. Mám teda

$$\begin{aligned} y^2(y+d)^2 &+ d^2(y+d)^2 - t^2y^2 \\ &= \left(y^2 + \left(d - \sqrt{d^2+t^2}\right) y + d^2\right)\left(y^2 + \left(d + \sqrt{d^2+t^2}\right) y + d^2\right) \\ &= (y^2 + dy + d^2)^2 - (d^2+t^2)y^2. \end{aligned}$$

Rovnica štvrtého rádu (4.1) sa teda predsa len dala prepísať do pekného tvaru

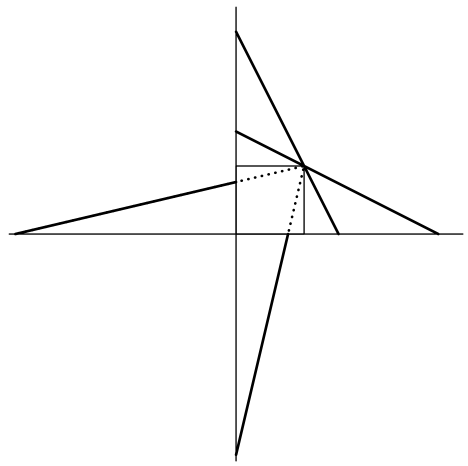
$$y^2(y+6)^2 + 36(y+6)^2 - 400y^2 = (y^2 + 6y + 36)^2 - 436y^2 = 0.$$

Napadlo vás to?

Zaujímalo by ma ešte, čo sú zač jej ďalšie dve riešenia. Je ľahké dopočítať, že ďalšie dve výšky horného konca tyče vychádzajú

$$h_{3,4} = y_{3,4} + d = 3 - \sqrt{109} \pm \sqrt{82 + 6\sqrt{109}},$$

jedna hodnota je kladná a jedna záporná, zhruba je to $4,59$ a $-19,48$. Čo znamenajú, sa dá vidieť na obrázku 4.



**Obrázek 4**

Viera Štoudková Růžičková, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
*e-mail*: `ruzickova@fme.vutbr.cz`