TVERBERGOVA VĚTA

IVAN CHAJDA

ABSTRAKT. Před 50-ti lety dokázal H. Tverberg svou proslulou větu, která tvrdí, že pro danou množinu M bodů v eukleidovském prostoru E s jistou restrikcí na počet těchto bodů a na dimenzi E existuje rozklad množiny M takový, že konvexní obaly tříd tohoto rozkladu mají neprázdný průnik. Prezentujeme elementární důkaz této věty, ilustrativní příklad a hypotézu pro eventuální další výzkum.

Před 50-ti lety dokázal Helge Tverberg větu, která znamenala pozoruhodný výsledek v teorii konvexních množin. Abychom čtenáře s tímto výsledkem seznámili, musíme nejprve připomenout několik pojmů z euklidovské geometrie.

Nechť $\mathbb{R}^d$ je d-rozměrný euklidovský prostor. Na něm uvažujeme skalární součin, pomocí něhož zavádíme pojem vzdálenosti dvou bodů tohoto prostoru; pro prvky x, y budeme tuto vzdálenost označovat symbolem $\|x-y\|$. Jsou-li x, y body prostoru $\mathbb{R}^d$, jejich *konvexním obalem* rozumíme úsečku s krajními body x a y. Jsou-li x, y, z tři body z $\mathbb{R}^d$, pak jejich *konvexním obalem* je trojúhelník, jehož vrcholy jsou x, y a z. Obecně, nechť je dáno n bodů $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$, pak lze tyto body uvažovat jako vektory v $\mathbb{R}^d$ a *konvexním obalem bodů* $x_1, \dots, x_n$ je množina

$$M = \{a_1\,\underline{x}_1 + a_2\,\underline{x}_2 + \cdots + a_n\,\underline{x}_n \mid a_i \geq 0 \text{ pro } i = 1, \dots, n \text{ a } \sum_{i=1}^{n} a_i = 1\}.$$

Další pojem, který budeme potřebovat, je tzv. *rozklad.* Nechť opět $x_1, \dots, x_n$ jsou body prostoru $\mathbb{R}^d$. Nechť $X_1, \dots, X_r$ jsou takové podmnožiny v $\mathbb{R}^d$, že každý bod x_i leží v jediné X_j, a pro každé $k \neq j$ je $X_k \cap X_j = \emptyset$. Množinám X_j říkáme *části rozkladu.*

Je-li X_j množina obsahující právě body $x_1, \dots, x_s$, tj. $X_j = \{x_1, \dots, x_s\}$, pak konvexním obalem množiny X_j rozumíme konvexní obal bodů $x_1, \dots, x_s$. Tento konvexní obal budeme označovat symbolem $\operatorname{conv} X_j$.

Tverbergrově větě předcházela tzv. Hellyho věta. Ta tvrdí, že každou množinu $d+2$ bodů v prostoru $\mathbb{R}^d$ lze rozdělit na dvě části X_1, X_2 tak, že konvexní obaly X_1 a X_2 nejsou disjunktní, tj.

$$\operatorname{conv} X_1 \cap \operatorname{conv} X_2 \neq \emptyset.$$

Tato věta motivovala Tverberga k následujícímu zobecnění.

2010 *MSC.* Primární 52A35; Sekundární 52A05, 52A20, 52A22.

Klíčová slova. Konvexní množina, n-rozměrný eukleidovský prostor, skalární součin, konvexní obal, rozklad.

Věta (Tvergbergova)**.** *Nechť je dáno* $(r-1)(d+1)+1$ *bodů v d-rozměrném euklidově prostoru* $\mathbb{R}^d$*. Pak existuje rozklad na r částí* $X_1, \dots, X_r$ *tak, že jejich konvexní obaly* $\operatorname{conv} X_1, \dots, \operatorname{conv} X_r$ *mají neprázdný průnik.*

Tverberg podal dva důkazy této věty, ale řada jiných autorů (Roudneff, Sarkaria, Zvagelskii) našli důkazy jednodušší (viz [1, 2, 3]). V tomto článku ukážeme důkaz J. P. Roudneffa.

Důkaz Tvergbergovy věty. Nechť je dáno $(r-1)(d+1)+1$ v prostoru $\mathbb{R}^d$ v obecných pozicích. Nechť $\mathcal{P} = \{X_1, \dots, X_r\}$ je některý rozklad, přičemž $1 \leq |X_j| \leq d+1$, definujeme funkci

$$f(x, \mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{r} \operatorname{dist}^2(x, \operatorname{conv} X_j),$$

kde $\operatorname{dist}(x, \operatorname{conv} X_j)$ je euklidovská vzdálenost bodu x od množiny $\operatorname{conv} X_j$, zde se uvažuje její druhá mocnina.

Pro daný rozklad $\mathcal{P}$ je funkce $f(x, \mathcal{P})$ konvexní v $\mathbb{R}^d$, přičemž pro $||x\| \to \infty$ roste nade všechny meze. Tedy má lokální minimum. To znamená, že existuje rozklad $\mathcal{P}$, pro který je toto minimum nejmenší a nabývá hodnoty μ. Ukážeme, že $\mu = 0$, což pro náš důkaz postačuje. Důkaz vedeme sporem.

Nechť $\mu > 0$ pro některé $z \in \mathbb{R}^d$. Označme y_j bod (jediný!) z $\operatorname{conv} X_j$ pro nějž $\operatorname{dist}(z, \operatorname{conv} X_j) = \|z - y_j\|$. Pak funkce

$$x \mapsto \sum_{j=1}^{r} \|x - y_j\|^2$$

dosahuje minima také pro $x = z$, a tedy

$$\sum_{j=1}^{r} (z - y_j) = 0. \tag{1}$$

Poznamenejme, že $z = y_j$ je možné, ale neplatí pro všechna j, neboť předpokládáme $\mu > 0$.

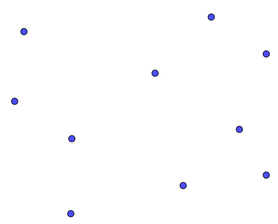
Definujme $Y_j \subset X_j$ pro $j = 1, \dots, n$ tak, aby $y_j \in \operatorname{conv} Y_j$. Tvrdíme, že $\bigcap_{j=1}^{r} \operatorname{aff} Y_j = \emptyset$, kde $\operatorname{aff} Y_j$ značí afinní podprostor $\mathbb{R}^d$ generovaný množinou Y_j. Totiž v opačném případě existuje bod $v \in \bigcap_{j=1}^{r} \operatorname{aff} Y_j$, a pak skalární součin $\langle z - v, z - y_j \rangle > 0$ pro $y_j \neq z$ (neboť y_j je bod nejbližší z množiny $\operatorname{conv} Y_j$ bodu z). Dohromady platí $\left\langle z - v, \sum_{j=1}^{r} (z - y_j) \right\rangle > 0$, což je spor s (1).

Tedy dle argumentace ze začátku důkazu pro dimenzi plyne, že $\sum_{j=1}^{r} |Y_j| \leq (n-1)(d+1)$, a tedy aspoň jeden ze zadaných bodů, např. x, neleží v žádné z množin Y_j. Pak $\langle x - y_j, z - y_j\rangle \le 0$ musí platit pro každé j, a tedy

$$0 \ge \sum_{j=1}^{r} \langle x - y_j, z - y_j\rangle = \sum_{j=1}^{r} \langle (x - z) + (z - y_j), z - y_j\rangle$$
$$= \Big\langle x - z, \sum_{j=1}^{r} (z - y_j)\Big\rangle + \sum_{j=1}^{r} \langle z - y_j, z - y_j\rangle = 0 + \mu > 0,$$

což je spor. □

Tverbergovu větu můžeme názorně ilustrovat v euklidovské rovině, tedy zvolme $d = 2$ a např. $r = 4$. Pak $(r-1)(d+1)+1 = 10$, tedy uvažujeme 10 bodů v $\mathbb{R}^2$ např. jako v na obrázku 1.



Obrázek 1. Dané body v rovině.

Podle Tverbergovy věty bude existovat rozklad na konvexní podmnožiny těchto bodů tak, že průnik těchto množin bude neprázdný. Takový rozklad je např. na obrázku 2.

Rozklad se skládá ze 4 konvexních množin, z nichž X_1 a X_3 jsou trojúhelníky, X_2 a X_4 jsou úsečky. Jejich průnik je zřejmě neprázdný, obsahuje bod v.

Čtenáře může samozřejmě zajímat případ, zda tento rozklad je jediný možný. Otázka počtu možných rozkladů dosud vyřešena nebyla, tedy případný zájemce má volné pole působnosti. Byla pouze formulována následující hypotéza, autorem je G. Sierksma.

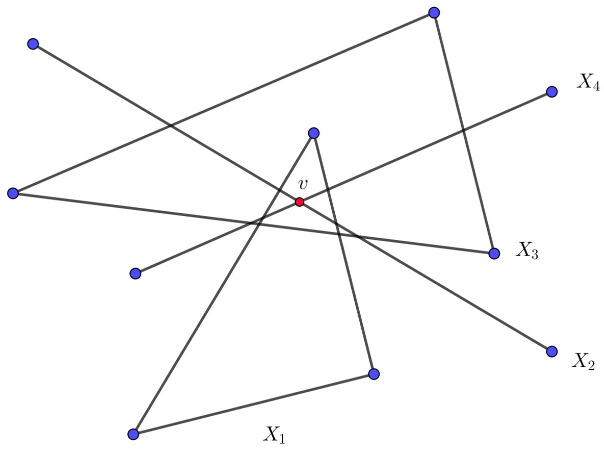
Hypotéza. *Pro daných $(r-1)(d+1)+1$ bodů v prostoru $\mathbb{R}^d$ existuje alespoň $(r-1)!^d$ různých Tverbergových rozkladů.*

Reference

[1] J. Bárány, P. Soberón: *Tverberg theorem is* 50 *years old: a survey*, Noticies Amer. Math. Soc. (N. S.) **55** (2018), No. 4, 459–492.

[2] J. P. Roudneff: *Partitions of points into simplices with k-dimensional intersection. II. Proof of Reay's conjecture in dimensions* 4 *and* 5, European J. Combin. **22** (2001), No. 5, 745–765.

[3] H. Tverberg: *A generalization of Radon's theorem*, J. London Math. Soc. **41** (1966), 123–128.



Obrázek 2. Rozklad na konvexní podmnožiny.

Ivan Chajda, Katedra algebry a geometrie, Přírodovědecká fakulta, Univerzita Palackého v Olomouci, 17. listopadu, 771 46, Olomouc,
e-mail: `ivan.chajda@upol.cz`