SCHUROVO-COHNOVO KRITÉRIUM A JEHO ALTERNATIVNÍ VYJÁDŘENÍ

JIŘÍ JÁNSKÝ

ABSTRAKT. V článku jsou popsána kritéria popisující lokalizaci kořenů polynomu (obecného stupně s obecnými koeficienty) ve vymezených částech komplexní roviny se speciálním zaměřením na jednotkový kruh. Dále jsou zde rozebrány případy, kdy je polynom ve speciálním tříčlenném tvaru. V těchto případech je možné obecná tvrzení zjednodušit a formulovat nové systémy podmínek, které jsou snáze aplikovatelné a rovněž názornější. Jsou zde popsány výhody a nevýhody jednotlivých formulací, které jsou rovněž ilustrovány na několika příkladech.

1. ÚVOD

Uvažujme polynom

$$P_k(\lambda) \equiv \lambda^k + p_{k-1}\lambda^{k-1} + p_{k-2}\lambda^{k-2} + \cdots + p_1\lambda + p_0\,, \tag{1.1}$$

jehož koeficienty $p_0, p_1, \ldots, p_{k-1}$ jsou reálná, nebo komplexní čísla. Problematika explicitního vyjádření kořenů polynomu (1.1) pomocí jeho koeficientů je dobře známa. Ačkoliv jsou odpovídající vyjádření kořenů pro polynomy nižších stupňů (menších, nebo rovno čtyřem) dobře popsány, často nelze pro jejich komplikovanost jednoduše posoudit některé jejich potřebné vlastnosti, například lokalizaci ve vymezené části komplexní roviny.

Jednou ze základních otázek, která se v souvislosti s lokalizací kořenů polynomu (1.1) diskutuje, je formulace podmínek zaručujících, že všechny kořeny daného polynomu mají zápornou reálnou část. Tento známý problém souvisí s otázkou stability diferenciálních dynamických systémů a je běžně diskutován v rámci základních kurzů teorie obyčejných diferenciálních rovnic. Odpověď na tento problém dává známé Routhovo-Hurvitzovo kritérium, jehož znění připomeneme.

Věta 1.1 (Routhova-Hurwitzova)**.** *Nechť $p_0, \ldots, p_{k-1}$ jsou reálná čísla. Nutná a postačující podmínka pro to, aby kořeny polynomu (1.1) měly záporné reálné*

2010 *MSC.* Primární 11C08, 30C15; Sekundární 12D10.
Klíčová slova. Polynom, kořeny polynomu.

části, je, aby determinanty D_n, $n = 1, 2, \dots, k$ byly kladné. Přitom je

$$D_n = \begin{vmatrix} p_{k-1} & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p_{k-3} & p_{k-2} & p_{k-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ p_{k-5} & p_{k-4} & p_{k-3} & p_{k-2} & p_{k-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{k-2n+1} & p_{k-2n+2} & p_{k-2n+3} & p_{k-2n+4} & \cdots & \cdots & p_{k-n} \end{vmatrix}$$

a pokud se vyskytne v D_n prvek p_m s indexem $m > k-1$, nahradí se nulou.

V diskrétním případě, kdy je daný diferenciální systém nahrazen systémem diferenčním, vede otázka stability na formulaci podmínek zaručujících, že všechny kořeny daného polynomu mají velikost menší než jedna, tj. leží v komplexní rovině uvnitř jednotkového kruhu. Tuto otázku řeší Schurovo[1]-Cohnovo[2] kritérium.

Předtím, než toto kritérium uvedeme, musíme pomocí (obecně komplexních) koeficientů polynomu (1.1) sestrojit pro $n = 1, 2, \dots, k$ čtvercové matice A_n, B_n řádu n, následovně: $A_1 = p_0$, $B_1 = 1$ a

$$A_n = \begin{pmatrix} p_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ p_1 & p_0 & \ddots & & \vdots \\ p_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & p_0 & 0 \\ p_{n-1} & \cdots & p_2 & p_1 & p_0 \end{pmatrix}, \quad B_n = \begin{pmatrix} 1 & p_{k-1} & p_{k-2} & \cdots & p_{k-n+1} \\ 0 & 1 & p_{k-1} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & p_{k-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & p_{k-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pro $n = 2, \dots, k$. Odtud sestrojíme čtvercové matice řádu $2n$

$$C_{2n} = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ \bar{B}_n^T & \bar{A}_n^T \end{pmatrix}, \qquad n = 1, 2, \dots, k, \tag{1.2}$$

kde $\bar{A}_n$, $\bar{B}_n$ získáme z A_n, B_n nahrazením koeficientů $p_0, p_1, \dots, p_{k-1}$ komplexně sdruženými $\bar{p}_0, \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_{k-1}$. Konečně označíme

$$d(n) = (-1)^n \det(C_{2n}), \qquad n = 1, 2, \dots, k.$$

Věta 1.2 (Schurova-Cohnova; redukovaná verze). *Nechť jsou všechny determinanty v posloupnosti*

$$1, d(1), d(2), \dots, d(k) \tag{1.3}$$

různé od nuly. Potom má polynom (1.1) všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu právě tehdy, když jsou všechny prvky posloupnosti (1.3) kladné.

[1]Issai Schur (1875–1941) byl ruský matematik židovského původu, který většinu života strávil v Německu. Za druhé světové války byl nucen emigrovat a zemřel v Izraeli (tehdejší Palestině). Byl žákem Frobenia, v jehož práci pokračoval. Přispěl fundamentálními výsledky zejména v algebře a teorii grup. Jeho záběr byl však obrovský a je autorem mnoha významných tvrzení. Například je po něm pojmenován Schurova vlastnost normovaných vektorových prostorů, Schurova dekompozice matic, Schurův komplement, Schurova algebra, a mnoho dalších. Celkem je jeho jméno spojováno s více než 25 důležitými matematickými pojmy a oblastmi matematiky.

[2]Arthur Cohn (1894–1940) byl Schurův doktorský student. Kromě spoluautorství výsledku zmíněného v tomto textu je rovněž také autorem formulace jednoduchých postačujících podmínek, aby daný polynom by ireducibilní v $\mathbb{Z}[x]$.

Tato věta se v literatuře vyskytuje v mnoha variantách. Kromě právě uvedené zde ještě zmíníme dvě další. První je formulace pro případ, kdy má polynom (1.1) reálné koeficienty. Potom lze větu 1.2 formulovat v jednodušším tvaru, a to zejména bez omezujících předpokladů. Toto vynechání podmínek kladených na (1.3) je podstatné, protože i tyto speciální případy jsou zpravidla početně velmi obtížně řešitelné (viz [9, str. 247]).

Před formulací následující věty musíme opět sestrojit jisté speciální čtvercové matice $\hat{C}_n$ řádu n, $n = 1, 2, \dots, k-1$ následujícím způsobem: $\hat{C}_1^\pm = 1 \pm p_0$ a

$$\hat{C}_n^\pm = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ p_{k-1} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ p_{k-n+1} & \cdots & p_{k-1} & 1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & p_0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & p_1 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ p_0 & p_1 & \cdots & p_{n-1} \end{pmatrix}$$

pro $n = 2, \dots, k-1$. Dále označíme

$$\hat{d}^\pm(n) = \det(\hat{C}_n^\pm), \qquad n = 1, 2, \dots, k-1.$$

Početně však bude stačit vyčíslit $\hat{d}^\pm(n)$ jen pro n sudé, nebo jen pro n liché, a to v závislosti na lichosti/sudosti řádu k polynomu, jak ukazuje následující věta (viz [7]).

Věta 1.3 (Schurova-Cohnova; případ reálných koeficientů)**.** *Předpokládejme, že $p_0, \dots, p_{k-1}$ jsou reálná čísla. Potom má polynom (1.1) všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu právě tehdy, když jsou splněny všechny tři následující podmínky:*

1. $P_k(1) > 0$,
2. $(-1)^k P_k(-1) > 0$,
3. *platí jedna z následujících podmínek:*
   (a) *k je sudé a všechny prvky obou posloupností*
   $$\hat{d}^+(1), \hat{d}^+(3), \hat{d}^+(5), \hat{d}^+(7), \dots, \hat{d}^+(k-1)$$
   a
   $$\hat{d}^-(1), \hat{d}^-(3), \hat{d}^+(5), \hat{d}^+(7), \dots, \hat{d}^-(k-1)$$
   jsou kladné,
   (b) *k je liché a všechny prvky obou posloupností*
   $$\hat{d}^+(2), \hat{d}^+(4), \hat{d}^+(6), \hat{d}^+(8), \dots, \hat{d}^+(k-1)$$
   a
   $$\hat{d}^-(2), \hat{d}^-(4), \hat{d}^+(6), \hat{d}^+(8), \dots, \hat{d}^-(k-1)$$
   jsou kladné.

Srovnáme-li věty 1.2 a 1.3, pak pro polynom stupně k s reálnými koeficienty stačí určit jen determinanty matic do řádu $k-1$. Požadavek na výpočet dvojice posledních determinantů $\hat{d}^+(k)$, $\hat{d}^-(k)$ je „nahrazen“ podmínkami 1 a 2.

Další varianta věty 1.2, která představuje naopak její rozšíření, popisuje počet kořenů daného polynomu uvnitř jednotkového kruhu (viz [12, str. 198]). Pro její formulaci nejprve označíme

$$\Delta(n) = \det(C_{2n}), \qquad n = 1, 2, \dots, k,$$

kde C_{2n} je dáno vztahem (1.2). Potom platí

Věta 1.4 (Schurova-Cohnova; obecná verze)**.** *Nechť jsou všechny determinanty v posloupnosti*

$$1, \Delta(1), \Delta(2), \dots, \Delta(k) \tag{1.4}$$

různé od nuly a nechť p je počet znaménkových změn v posloupnosti (1.4). Potom má polynom (1.1) celkem p kořenů uvnitř jednotkového kruhu a žádný kořen na jeho hranici.

Pro polynom s pevně daným stupněm k a pevně danými koeficienty p_i je tedy problém v zásadě vyřešen. Ukažme si použití Schurova-Cohnova kritéria na dvou příkladech.

Příklad 1.5. Uvažujme kvadratický polynom s reálnými, nebo komplexními koeficienty ve tvaru

$$P_2(\lambda) \equiv \lambda^2 + p_1\lambda + p_0 \tag{1.5}$$

a aplikujeme větu 1.2 s cílem získat efektivní podmínky zaručující lokalizaci obou kořenů polynomu P_2 uvnitř jednotkového kruhu. Nejprve si spočteme determinanty

$$d_1 = (-1)^1 \begin{vmatrix} p_0 & 1 \\ 1 & \bar{p}_0 \end{vmatrix} = 1 - |p_0|^2,$$

$$d_2 = (-1)^2 \begin{vmatrix} p_0 & 0 & 1 & p_1 \\ p_1 & p_0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \bar{p}_0 & \bar{p}_1 \\ \bar{p}_1 & 1 & 0 & \bar{p}_0 \end{vmatrix} = (1 - |p_0|^2)^2 - |p_1 - p_0\bar{p}_1|^2.$$

Nyní za podmínky $d_1 d_2 \neq 0$ Věta 1.2 říká, že oba kořeny polynomu $P_2(\lambda)$ mají velikost menší než jedna právě tehdy, když $d_1 > 0$ a $d_2 > 0$. Obě tyto podmínky se dají zapsat jednotně ve tvaru

$$|p_1 - p_0\bar{p}_1| < 1 - |p_0|^2. \tag{1.6}$$

Podmínky na nenulovost determinantů d_1, d_2 nejsou v tomto případě omezující. Pomocí Viétových vzorců pro polynom (1.1) dostáváme, že $(-1)^k a_0 = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k$, kde $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou kořeny polynomu (1.1). To v případě polynomu (1.5) znamená, že pro jeho kořeny λ_1, λ_2 platí $|\lambda_1\lambda_2| = |p_0|$. A proto pokud $d_1 = 0$, potom dostáváme $1 = |p_0| = |\lambda_1||\lambda_2|$, a tedy oba kořeny uvnitř jednotkového kruhu ležet nemohou. Případ $d_2 = 0$, $|p_0| < 1$ vede po složitějších úpravách na situaci, kdy má polynom (1.5) kořen o velikosti jedna.

Dostáváme tedy závěr, že oba kořeny kvadratického polynomu $P_2(\lambda)$ mají velikost menší než jedna právě tehdy, když platí (1.6).

Dále uvažujeme kvadratický polynom (1.5) jen s reálnými koeficienty. V tomto případě se podmínka (1.6) redukuje na tvar

$$|p_1| - 1 < p_0 < 1. \tag{1.7}$$

Poznamenejme, že tento tvar lze získat také z věty 1.3. Tvar oblasti vymezené těmito podmínkami je znázorněn na obrázku 1a) v němž $k = 2$, $\alpha = p_1$ a $\beta = p_0$.

Pokusme se, pro srovnání, podmínku (1.7) získat pomocí kořenů polynomu (1.5) vyjádřených explicitně v závislosti na jeho koeficientech. Oba kořeny mají velikost menší než jedna právě tehdy, když

$$|\lambda_{1,2}| = \frac{1}{2}\left|-p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - 4p_0}\right| < 1.$$

Nejprve předpokládejme $p_1^2 - 4p_0 \geq 0$. Potom pro $p_1 \leq 0$ dostáváme

$$-p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_0} < 2, \quad \text{tj.} \quad -p_1 - 1 < p_0,$$

a pro $p_1 > 0$ dostáváme

$$p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_0} < 2, \quad \text{tj.} \quad p_1 - 1 < p_0.$$

Tedy pro oba předchozí případy dostáváme

$$|p_1| - 1 < p_0 \leq \frac{p_1^2}{4}\,. \tag{1.8}$$

V případě $p_1^2 - 4p_0 < 0$ dostáváme

$$\left|-p_1 \pm \mathrm{i}\sqrt{4p_0 - p_1^2}\right| < 2, \quad \text{tj.} \quad \frac{p_1^2}{4} < p_0 < 1. \tag{1.9}$$

Tedy celkem z (1.8) a druhé podmínky v (1.9) dostáváme (1.7). Je vidět že i v tomto jednoduchém případě bylo odvození potřebné podmínky z explicitně spočtených kořenů polynomu (1.5) početně náročnější, než přímé použití věty 1.2 nebo 1.3.

Pro polynomy vyšších stupňů není ověřování znamének determinantů v posloupnosti (1.3) jednoduchá záležitost. V případě reálných koeficientů lze s výhodou použít větu 1.3, která tento požadavek neuplatňuje. To ilustruje následující příklad.

Příklad 1.6. Uvažujme kubický polynom s reálnými koeficienty ve tvaru

$$P_3(\lambda) \equiv \lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_1\lambda + p_0\,. \tag{1.10}$$

Analýzou podmínek z věty 1.3 dostáváme:

i.

$$P_3(1) = 1 + p_2 + p_1 + p_0 > 0,$$

ii.

$$(-1)^3 P_3(-1) = (-1)^3(-1 + p_2 - p_1 + p_0) > 0,$$

iii. oba determinanty

$$\hat{d}^{+}(2) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & p_0 \\ p_0 & p_1 \end{pmatrix}\right) = 1 + p_1 - p_0 p_2 - p_0^2 > 0,$$
$$\hat{d}^{-}(2) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & p_0 \\ p_0 & p_1 \end{pmatrix}\right) = 1 - p_1 + p_0 p_2 - p_0^2 > 0$$

jsou kladné.

Jednoduchou početní analýzou případů i–iii zjistíme, že kubický polynom $P_3(\lambda)$ má všechny tři kořeny s velikosti menší než jedna právě tehdy, když

$$|p_2 + p_0| < 1 + p_1\,, \qquad |p_1 - p_0 p_2| < 1 - p_0^2. \tag{1.11}$$

Poznamenejme, že odvození podmínek (1.11) přímo z Cardanových vzorců pro polynom (1.10) by bylo velmi obtížné.

Předchozí dva příklady ilustrovaly jednak efektivitu Schurovy-Cohnovy věty, ale také naznačily určité problémy, se kterými se při její aplikaci můžeme setkat. Využití Schurovy-Cohnovy věty je jednoduché zejména v případě, kdy máme zadaný polynom s pevně zvoleným stupněm k a s konkrétně zvolenými reálnými koeficienty p_i. Potom při použití věty 1.3 dostáváme $k+1$ nerovností pro k liché (respektive $k+2$ pro k sudé), které snadno vyhodnotíme. Navíc zásadním, dosud nezmíněným přínosem předchozích vět je, že mohou být použity i u polynomů obecných (vyšších stupňů), kde nejsme schopni nalézt kořeny analyticky.

Všechny tři uvedené varianty Schurova-Cohnova kritéria v sobě skrývají také nedostatky. Tím prvním je nutnost počítat minimálně $k-1$ determinantů matic, jejichž řád se zvětšuje s rostoucím se stupněm polynomu. Navíc, v případě kdy některý z koeficientů není číselně specifikován, se podmínky s rostoucím stupněm daného polynomu začínají značně komplikovat. Dalším nedostatkem je také obtížně řešitelný případ, kdy má polynom komplexní koeficienty a posloupnost (1.3), uvedená ve větě 1.2 obsahuje jeden, nebo více nulových členů. (Připomeňme, že věta 1.2 platí za předpokladu jejich nenulovosti.)

Tyto nedostatky byly motivací pro hledání jiných systémů podmínek popisujících rozmístění kořenů (alespoň speciálních) polynomů vůči jednotkovému kruhu. První výsledek tohoto druhu se objevil v článku [11] zabývajícím se stabilitou některých diskrétních populačních modelů. V této souvislosti se objevila potřeba posoudit, zda charakteristický polynom

$$Q_k(\lambda) \equiv \lambda^k - \lambda^{k-1} + \beta, \qquad \beta \text{ je reálné číslo},$$

má všechny kořeny v jednotkovém kruhu. Vidíme, že věta 1.2 ani věta 1.3 přitom podmínky podobné těm v příkladu 1.5, nebo 1.6 nedá. Pro tento polynom byla ve zmíněném článku zformulována velmi jednoduchá nutná a postačující podmínka pro to, aby všech k kořenů tohoto polynomu mělo velikost menší než jedna (viz [11]).

Věta 1.7 (Levinova-Mayova). *Všechny kořeny polynomu $Q_k(\lambda)$ jsou v absolutní hodnotě menší než jedna právě tehdy, když platí*

$$0 < \beta < 2\cos\frac{(k-1)\pi}{2k-1}\,.$$

Přínosem tohoto článku nebylo jen odvození předchozích podmínek, ale také představení důkazové techniky, zvané „boundary locus technique“, která je využitelná i pro analýzu polohy kořenů vůči jednotkovému kruhu pro další typy polynomů. Následovaly další výsledky tohoto typu (viz [6, 10, 13, 14]). Jednotícím prvkem těchto článků bylo, že se jednalo o tříčlenné polynomy, avšak podmínky pro polohu jejich kořenů, odvozené v těchto článcích, nebyly tak efektivní, jako podmínka věty 1.7. K těmto otázkám se vyjádříme v následující kapitole.

2. Případ obecného tříčlenného polynomu s reálnými koeficienty

Budeme se zabývat tříčlenným polynomem (1.1), tedy polynomem ve speciálním tvaru

$$R_{k,m}(\lambda) \equiv \lambda^k + \alpha\lambda^m + \beta, \tag{2.1}$$

kde α, β, $\alpha\beta \neq 0$ jsou reálné koeficienty a mocniny $k > m > 0$ jsou celočíselné a nesoudělné.

V případě $\alpha\beta = 0$ lze kořeny polynomu (2.1) spočítat triviálně a není potřeba se jím dále zabývat. Požadavek k, m nesoudělné rovněž není omezující, protože pokud by polynom (2.1) byl tvaru

$$R_{\tilde{k},\tilde{m}}(\tilde{\lambda}) \equiv \tilde{\lambda}^{\tilde{k}} + \alpha\tilde{\lambda}^{\tilde{m}} + \beta, \tag{2.2}$$

kde $\tilde{k} = ak, \tilde{m} = am$, pro nějaké $a > 1$, potom substitucí $\tilde{\lambda} = \lambda^a$ dostáváme, že $\tilde{\lambda}$ je kořen polynomu $R_{\tilde{k},\tilde{m}}(\tilde{\lambda})$ právě tehdy když λ je kořen polynomu $R_{k,m}(\lambda)$. Proto polynom $R_{\tilde{k},\tilde{m}}(\tilde{\lambda})$ má všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu právě tehdy, když polynom $R_{k,m}(\lambda)$ má tutéž vlastnost. Budeme se tedy dále zabývat jen polynomem (2.1) s nesoudělnými mocninami k, m.

Pro tento polynom bylo formulováno několik různých variant podmínek popisujících nutné a postačující podmínky pro polohu všech kořenů uvnitř jednotkové kružnice. My zde představíme tři z nich. Nejprve uvedeme podmínky popsané v [6]. Autor zde formuloval tvrzení pro případy: k liché, m sudé; k liché, m liché; k sudé, m liché. Pro ilustraci zde uvedeme jen větu popisující podmínky pro k liché, m sudé.

Věta 2.1. *Nechť α, β jsou nenulová reálná čísla a nechť $k, m \in \mathbb{Z}^+$, $k > m$, jsou nesoudělná, lichá. Potom polynom (2.1) má všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu právě tehdy, když buď*

$$-1 < \alpha < 0, \quad |\beta| < 1 + \alpha,$$

nebo

$$0 < \alpha < 1, \quad |\beta| < \min_{\phi\in S} \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\cos((k-m)\phi) + 1}\,, \tag{2.3}$$

kde S je množina řešení rovnice

$$\frac{\sin(mx)}{\sin(kx)} = \frac{1}{-\alpha} \tag{2.4}$$

na intervalu $(0, \pi)$.

Podmínky popisující zbylé dva případy (k liché, m liché a k sudé, m liché) zde uvádět nebudeme a poznamenáme jen, že jsou „analogického“ tvaru, tedy podobné jako ve větě 2.1. Podmínka omezující parametr β vyžaduje nejprve nalézt numericky všechna řešení řešení nelineární rovnice (2.4) na intervalu $(0, \pi)$, a poté ještě určit minimum z příslušného nelineárního výrazu. Nejsnazší použití této věty je v případě, kdy má polynom (2.1) pevně zadané mocniny k, m a koeficient α. Potom, s podporou numerických metod, není problém nalézt všechna řešení rovnice (2.4) a stanovit z rovnice (2.3) podmínku na parametr β explicitně. V ostatních případech (například pevně zvolené α, β; hledáme k, m) je užití této věty závislé na dalších dodatečných výpočtech.

Odlišný typ podmínek popisující lokalizaci kořenů polynomu (2.1) byl publikován v [10]. Před jeho formulací však musíme uvést následující pomocné tvrzení.

Lemma 2.2. *Nechť $k, m \in \mathbb{Z}^+$, $k > m$, jsou nesoudělná. Potom existují celá čísla $j, s > 0$ taková, že*

$$|(k-m)j - ks| = 1, \quad j < k, \quad s \text{ liché.} \tag{2.5}$$

Pokud je $k - m$ liché, potom existuje tato dvojice (j, s) jediná. Pokud je $k - m$ sudé, potom existují právě dvě takové dvojice (v jedné je j liché a ve druhé sudé).

Potom můžeme formulovat následující větu:

Věta 2.3. *Nechť α, β jsou nenulová reálná čísla a nechť $k, m \in \mathbb{Z}^+$, $k > m$, jsou nesoudělné. Potom polynom (2.1) má všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu právě tehdy, když bod (α, β) leží uvnitř oblasti ohraničené dvěmi přímkami*

$$\alpha + \beta = -1, \qquad (-1)^{k-m}\alpha + (-1)^k \beta = -1 \tag{2.6}$$

a dvěma křivkami

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{\sin(k\theta)}{\sin(m\theta)}, & \beta &= \frac{\sin((k-m)\theta)}{\sin(m\theta)}, \\ \alpha &= -(-1)^{k-m}\frac{\sin(k\theta)}{\sin(m\theta)}, & \beta &= (-1)^k \frac{\sin((k-m)\theta)}{\sin(m\theta)}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

kde parametr θ leží v intervalu s krajními body $\frac{j\pi}{k}$ a $\frac{s\pi}{k-m}$. Zde $j, s > 0$ jsou celá čísla splňující (2.5) (pokud je $k - m$ sudé, potom může být volena libovolná dvojice (j, s) splňující (2.5)).

Poznámka 2.4. Předcházející tvrzení, mimo jiné, specifikuje krajní body $\frac{j\pi}{k}$ a $\frac{s\pi}{k-m}$ intervalu, ve kterém se nalézá jediné řešení ϕ_{opt} rovnice (2.4) (v tomto obecném zápisu neznáme jejich pořadí). Pro toto ϕ_{opt} se realizuje minimum výrazu na pravé straně vztahu (2.3) ve větě 2.1.

Hlavním přínosem věty 2.3 je parametrický popis (2.7) hraničních křivek uvažovaných v (α, β)-rovině. Pokud koeficienty α, β v dané oblasti leží, pak má polynom (2.1) všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu. Získání tohoto popisu z věty 2.1 je velmi náročné. S tímto popisem je však navíc spojena jedna nevýhoda spočívající v tom, že zde není popsán analytický způsob, jak o poloze bodu (α, β) vůči hranicím (2.6), (2.7) rozhodnout.

Obě předchozí formulace uvedené ve větách 2.1 a 2.3 lze snadno použít jen v těch případech, kdy jsou mocniny k, m zadané pevně. Pro případy kdy tomu tak není, byla nedávno odvozena v [2] následující věta.

Věta 2.5. *Nechť α, β jsou reálná čísla, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ a nechť $k, m \in \mathbb{Z}^+$, $k > m$, jsou nesoudělná. Potom polynom (2.1) má všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu právě tehdy, když nastane jedna z následujících podmínek:*

1.
$$|\alpha| + |\beta| < 1, \tag{2.8}$$

2.
$$|\alpha| + |\beta| \geq 1, \quad |\alpha| - 1 < |\beta| < 1, \quad (-\alpha)^k(-\beta)^{k-m} < 0, \tag{2.9}$$

$$k \arccos \frac{1 - \alpha^2 - \beta^2}{2|\alpha\beta|} - m \arccos \frac{1 - \alpha^2 + \beta^2}{2|\beta|} < \pi. \tag{2.10}$$

Poznámka 2.6.
a) Všimněme si, že podmínka 1 předchozí věty je nezávislá na mocninách polynomu (2.1).
b) Upozorněme dále na speciální případ podmínek 2, kdy se pro $|\alpha| + |\beta| = 1$ podmínky (2.9), (2.10) redukují na tvar $(-\alpha)^k(-\beta)^{k-m} < 0$.
c) Uvažujeme-li vztah (2.10) jako rovnost, pak tento vztah představuje implicitní vyjádření křivek (2.7) daných parametricky. Ekvivalenci obou vyjádření lze prokázat analyticky (početně jde o poměrně komplikovanou záležitost). Zdůrazněme však, že podmínky věty 2.5 byly odvozeny nezávisle na podmínkách věty 2.3. Konstruktivní odvození podmínek věty 2.5 pomocí věty 2.3 (tedy aniž bychom podmínky věty 2.5 dopředu znali) by bylo obtížně proveditelné.

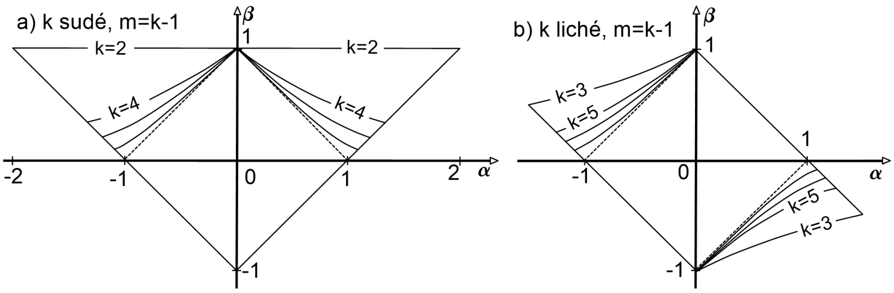
2.1. Ilustrační příklady

Při grafickém znázornění oblasti koeficientů v (α, β)-rovině, pro které má polynom (2.1) všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu zjistíme, že je tvar příslušných hraničních křivek typově různý podle mocnin k, m. Navíc odlišné chování vykazuje i případ $m = k - 1$, kterým se budeme zabývat nejprve.

Uvažujme polynom (2.1) s reálnými koeficienty, kde $m = k - 1$, tedy ve tvaru

$$R_k(\lambda) \equiv \lambda^k + \alpha\lambda^{k-1} + \beta.$$

Pro vykreslení křivek popsaných ve větě 2.3 musíme rozlišit případ k sudé a k liché. Na obrázku 1a) jsou vykresleny křivky pro $k = 2, 4, 6, 12$ a na obrázku 1b) jsou vykresleny křivky pro $k = 3, 5, 7, 13$.

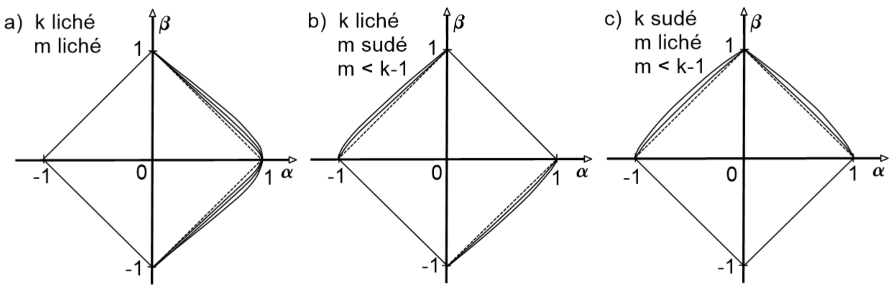


Obrázek 1. Hranice oblasti v (α, β)-rovině, ve které má polynom (2.11) všechny kořenu uvnitř jednotkového kruhu.

Uvažujme nyní polynom (2.1) opět s reálnými koeficienty, kde tentokrát $m < k - 1$, tedy ve tvaru

$$R_{k,m}(\lambda) \equiv \lambda^k + \alpha\lambda^m + \beta. \tag{2.11}$$

Na obrázku 2 jsou vykresleny křivky popsané ve větě 2.3 v závislosti na sudosti/lichosti mocnin k, m. Případ k sudé a m sudé zde popsán není, protože v tomto případě jsou k, m soudělné a je nutné postupovat podle popisu pod rovnicí (2.2).



Obrázek 2. Hranice oblasti v (α, β)-rovině, ve které má polynom (2.11) všechny kořenu uvnitř jednotkového kruhu. V obrázku a) jsou vykresleny křivky pro dvojice $(k, m) \in \{(5, 3), (7, 5), (13, 11)\}$. V obrázku b) jsou vykresleny křivky pro dvojice $(k, m) \in \{(5, 2), (13, 10)\}$ a v obrázku c) jsou vykresleny křivky pro dvojice $(k, m) \in \{(4, 1), (8, 5)\}$. S rostoucí mocninou k se plocha oblasti vymezená křivkami zmenšuje.

Poznámka 2.7. Podívejme se nyní na podmínky věty 2.5 geometricky.

a) Všimněme si nejprve, že podmínka $|\alpha| + |\beta| < 1$ této věty vymezuje oblast tvaru čtverce (viz obrázky 1 a 2).

b) Nyní si všimněme hraničních úseček této oblasti daných rovnicí $|\alpha|+|\beta| = 1$. Pokud koeficienty polynomu (2.11) leží na těchto úsečkách a v kvadrantech určených podmínkou $(-\alpha)^k(-\beta)^{k-m} > 0$, potom nemá všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu. Tyto úsečky jsou na předchozích obrázcích vyznačeny plnou čarou.

Naopak, jestliže koeficienty polynomu (2.11) leží na těchto úsečkách a v kvadrantech určených podmínkou $(-\alpha)^k(-\beta)^{k-m} < 0$, potom polynom (2.11) má všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu. Navíc není kladeno žádné omezení na maximální velikost mocnin k, m. Tyto úsečky jsou na předchozích obrázcích vyznačeny (ne příliš zřetelnou) tečkovanou čarou.

Jinými slovy, na úsečkách $|\alpha| + |\beta| = 1$ závisí počet kořenů polynomu (2.11) uvnitř jednotkového kruhu jen na sudosti/lichosti mocnin k, m. Jedná se o jakousi přechodovou oblast mezi tou popsanou v bodu a) a tou, kterou popíšeme v následujícím bodu c).

c) Na závěr se budeme věnovat oblastem vymezeným nerovností $|\alpha|+|\beta| > 1$ a v kvadrantech daných nerovností $(-\alpha)^k(-\beta)^{k-m} < 0$. Potom vztah (2.10) (společně s nerovnostmi $|\alpha| - 1 < |\beta| < 1$) představují omezení na hodnoty koeficientů α, β a mocnin k, m. (Přesněji, veškeré podmínky kladené na α, β, k, m jsou dány vztahem (2.10). Nerovnosti $|\alpha| - 1 < |\beta| < 1$ „pouze“ zajišťují, aby cyklometrické funkce v (2.10) byly dobře definované.)

Obecně platí, že oblast na koeficienty α, β, pro které má polynom (2.11) všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu, se s rostoucím stupněm k polynomu (2.11) zmenšuje.

Nyní uvedeme pět ilustračních příkladů, které lze také nalézt v [3, 4, 8].

Příklad 2.8. Uvažujme polynom (2.1) s reálnými koeficienty ve tvaru

$$R_{k,m}(\lambda) \equiv \lambda^k + 0{,}55\lambda^m + 0{,}5\,. \tag{2.12}$$

Cílem je nalézt množinu k, m takových, aby měl polynom (2.12) všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu. Stanovení této množiny pomocí věty 2.1 nebo 2.3 by bylo hodně složité. Oproti tomu věta 2.5 nám dává přehledné podmínky po jejichž vyhodnocení dostáváme

$$\begin{aligned}(k,m) \in \bigcup_{\ell\in\mathbb{Z}^+} \Big\{&(2\ell,\ell),(4\ell,3\ell),(6\ell,5\ell),\\ &(8\ell,7\ell),(3\ell,\ell),(5\ell,3\ell),(7\ell,5\ell),(4\ell,\ell),(5\ell,\ell)\Big\}.\end{aligned}$$

Na závěr této kapitoly uvedeme užití předchozích vět v případě, kdy koeficient α a mocniny k, m jsou dány, přičemž hledáme podmínky na druhý (volný) koeficient β zaručující, že polynom (2.1) má všechny kořeny v absolutní hodnotě menší než jedna.

Příklad 2.9. Nechť $k = 5$, $m = 3$ a $\alpha = 0{,}8$. Budeme se tedy zabývat polynomem

$$R_{5,3}(\lambda) = \lambda^5 + 0{,}8\lambda^3 + \beta, \tag{2.13}$$

kde β je reálné číslo. Věta 2.1 vyžaduje řešit nelineární rovnici

$$\frac{\sin(3x)}{\sin(5x)} = \frac{1}{-0{,}8}, \qquad x \in (0,\pi). \tag{2.14}$$

Jejím řešením získáme množinu

$$S = \{0{,}7591; 1{,}4161; 1{,}7255; 2{,}3824\}. \tag{2.15}$$

Potom dostáváme podmínku ve tvaru

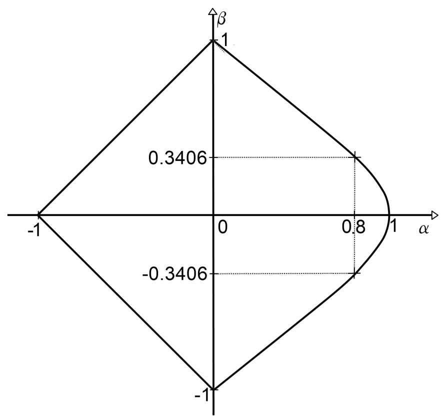
$$|\beta| < \min\{1{,}3130; 0{,}3406; 0{,}3406; 1{,}3130\}, \tag{2.16}$$

tj. polynom (2.13) má všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu právě tehdy, když $\beta \in (-0{,}3406; 0{,}3406)$. Tento interval je zobrazen na obrázku 3.

Dodejme ještě, že podle poznámky 2.4 je možno specifikovat interval na kořen x v (2.14) tak, aby množina řešení S byla jednoprvková. Řešením rovnice (2.5), která je nyní ve tvaru

$$|2j - 5s| = 1, \quad j < 5, \quad s \text{ liché}$$

dostáváme $j = 3$ a $s = 1$. Potom $S = \{\phi_{\mathrm{opt}}\}$, kde ϕ_{opt} je řešení rovnice (2.14) v intervalu s krajními body $\frac{s\pi}{k-m} = \frac{1}{2}\pi \approx 1{,}57$ a $\frac{j\pi}{k} = \frac{3}{5}\pi \approx 1{,}88$. Nyní podle (2.15) je $\phi_{\mathrm{opt}} = 1{,}7255$ a tady dostáváme podmínku $\beta \in (-0{,}3406; 0{,}3406)$ bez nutnosti hledání minima ve výrazu (2.16).



Obrázek 3. Grafické znázornění oblasti v (α, β)-rovině, ve které má polynom (2.13) všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu. Hranice oblasti byla vykreslena pomocí věty 2.3.

Nyní na zadaný problém aplikujeme podmínky věty 2.3. Z geometrického hlediska jde o nalezení průsečíků přímky $\alpha = 0{,}8$ s křivkami (2.7), kde $m = 3$, $k = 5$ a parametr θ leží v intervalu s krajními body 1,57 a 1,88 po zaokrouhlení. Nalezením těchto průsečíků v (α, β)-rovině dospějeme k hodnotám $-0{,}3406$ a $0{,}3406$, které tvoří krajní body příslušného intervalu na parametr β.

Na závěr aplikujeme větu 2.5. Podmínka (2.8) dává $|\beta| < 0{,}2$. Podmínky (2.9) a (2.10) dávají $0{,}2 \le |\beta| < 1$ a

$$5 \arccos \frac{1 - 0{,}64 - \beta^2}{1{,}6|\beta|} - 3 \arccos \frac{1 - 0{,}64 + \beta^2}{2|\beta|} < \pi.$$

Odtud opět dospějeme k výsledku $\beta \in (-0{,}3406; 0{,}3406)$.

3. Případ obecného tříčlenného polynomu s komplexními koeficienty

V této kapitole se budeme zabývat polynomem (2.1) s komplexními koeficienty. Uvažujme tedy polynom

$$S_{k,m}(\lambda) \equiv \lambda^k + \alpha\lambda^m + \beta, \tag{3.1}$$

kde $\alpha = |\alpha|e^{\theta_\alpha \mathrm{i}}$, $\beta = |\beta|e^{\theta_\beta \mathrm{i}}$ jsou komplexní čísla a mocniny $k > m > 0$ jsou celočíselné a nesoudělné. O argumentech θ_α, θ_β komplexních koeficientů budeme předpokládat, že náleží do intervalu $(-\pi, \pi]$. Dále budeme také nadále předpokládat, že $\alpha\beta \neq 0$. Pro tento polynom byla věta 2.5 v článku [5] zobecněna následovně.

Věta 3.1. *Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ je takové, že $\alpha\beta \neq 0$. Potom má polynom (2.1) všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu právě tehdy když platí jedna z následujících možností:*

i. $|\alpha| + |\beta| < 1$,
ii. $|\alpha| + |\beta| = 1$ *a zároveň* $k(\theta_\alpha - \theta_\beta) + m(\theta_\beta + \pi) \neq 2\ell\pi$ *pro* $\ell \in \mathbb{Z}$,
iii. $|\alpha| + |\beta| > 1$, $|\alpha| - 1 < |\beta| < 1$ *a zároveň*

$$\begin{aligned} k \arccos \frac{1 - |\alpha|^2 - |\beta|^2}{2|\alpha\beta|} - m \arccos \frac{1 - |\alpha|^2 + |\beta|^2}{2|\beta|} \\ < \arccos(\cos(k(\theta_\alpha - \theta_\beta) + m(\theta_\beta + \pi))). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Poznámka 3.2. Případy ii a iii v předchozí větě je možno zapsat jednotně ve tvaru

$$|\alpha| + |\beta| \geq 1, \quad |\alpha| - 1 < |\beta| < 1 \quad \text{a zároveň} \quad (3.2). \tag{3.3}$$

Poznámka 3.3. Důkazy vět 3.1 a 2.5 není možné v rámci tohoto příspěvku uvést. Omezme se tedy jen na konstatování, že zde bylo využito přeformulování Schurova-Cohnova kritéria do „explicitního“ tvaru (základní myšlenka je také popsána v [1]), a dále některých výsledků teorie polynomů.

Použití věty 3.1 si ilustrujeme na následujících příkladech.

Příklad 3.4. Uvažujme polynom (3.1) ve tvaru

$$S_k(\lambda) \equiv \lambda^k + e^{(0{,}6-\pi)\mathrm{i}}\lambda^{k-1} + 0{,}05e^{(6-\pi)\mathrm{i}}. \tag{3.4}$$

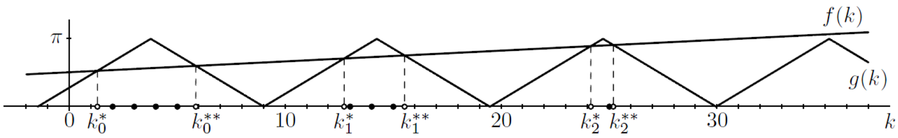
Dosazením do předchozí věty za $|\alpha| = 1$, $|\beta| = 0{,}05$ zjišťujeme že nastane případ iii. Potom nerovnost (3.2) je tvaru

$$k \arccos \frac{-1}{40} - (k-1) \arccos \frac{1}{40} < \arccos(\cos(-5{,}4k + (k-1)6)),$$

tj.

$$k \arccos \frac{799}{800} + \arccos \frac{1}{40} < \arccos(\cos(0{,}6k - 6)). \tag{3.5}$$

Pro účely grafické interpretace nerovnosti (3.5) budeme považovat obě strany této nerovnosti jako funkce spojité proměnné k. Potom levá strana této nerovnosti je lineární funkce $f(k)$ ve tvaru $f(k) \approx 0{,}05k + 1{,}5458$. Pravá strana nerovnosti (3.5) je po částech lineární funkce a označíme ji $g(k)$. Obě tyto funkce jsou vykresleny na obrázku 4.



Obrázek 4. Nerovnost $f(k) < g(k)$ dává podmínku na řád polynomu k, při kterém má polynom (3.4) všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu.

Podle podmínky (3.5) má polynom (3.4) všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu právě tehdy, když $f(k) < g(k)$. Z obrázku 4 je patrno, že to nastává pro $k \in \{2, 3, 4, 5\} \cup \{13, 14, 15\} \cup \{25\}$.

K tomuto závěru poznamenejme, že je kvalitativně odlišný od výsledků získaných v případě reálných koeficientů. Požadovaná kořenová vlastnost je splněna pro izolované „ostrovy“ hodnot k, které se postupně zmenšují až nakonec vymizí. Dodejme, že tento efekt se v teorii diferenčních rovnic popisuje jako existence „přepínačů stability“.

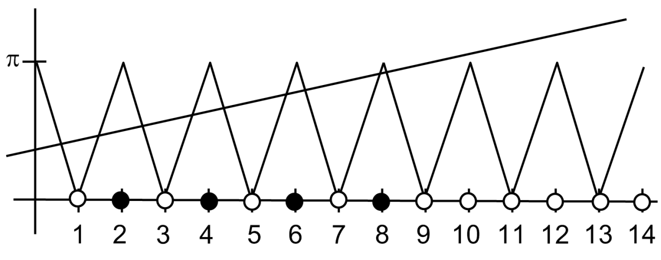
Věta 3.1 lze samozřejmě také použít na případ, kdy má polynom (3.1) reálné koeficienty, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 3.5. Mějme polynom (3.1) ve tvaru

$$S_k(\lambda) \equiv \lambda^k + 0{,}8\lambda^{k-1} + 0{,}3. \tag{3.6}$$

Nejprve použijme větu 2.5. Potom z podmínky (2.10) a $(-0{,}8)^k(-0{,}3) < 0$ plyne, že polynom (3.6) má všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu právě tehdy, když $k < 9{,}65$ a k je sudé.

Nyní dojdeme k témuž závěru aplikací věty 3.1. Opět nastane případ iii, kde levá strana nerovnosti (3.2) reprezentuje lineární funkci proměnné k a pravá strana nerovnosti (3.2) reprezentuje po částech lineární funkci proměnné k. Zatímco levá strana nerovnosti (3.2) je rostoucí lineární funkce, pravá strana je rovna π (pro k sudé), nebo nule (pro k liché), jak je znázorněno na obrázku 5.



Obrázek 5. Grafické znázornění nerovnosti (3.2), kde proměnná je řád k polynomu (3.6). Polynom (3.6) má všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu právě tehdy, když $k \in \{2, 4, 6, 8\}$.

Hraniční situaci, kdy nastane ve větě 3.1 případ ii ilustrujeme na následujícím příkladu.

Příklad 3.6. Uvažujme polynom

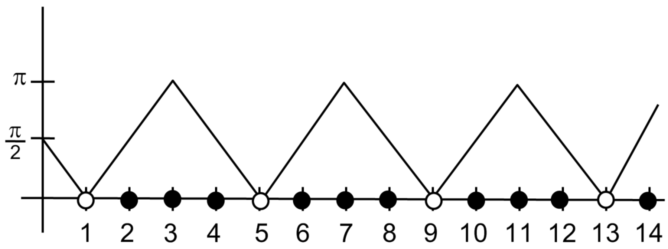
$$S_k(\lambda) \equiv \lambda^k - 0{,}7\mathrm{i}\,\lambda^{k-1} - 0{,}3\,\mathrm{i}\,. \tag{3.7}$$

Abychom mohli aplikovat větu 3.1, musíme jej nejprve přepsat do tvaru

$$S_k(\lambda) \equiv \lambda^k + 0{,}7e^{-(\pi/2)\mathrm{i}}\,\lambda^{k-1} + 0{,}3e^{-(\pi/2)\mathrm{i}}\,.$$

Protože je $|\alpha| + |\beta| = 1$, nastane ve větě 3.1 případ ii. Potom dostáváme, že polynom (3.7) má všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu právě tehdy, když $k \geq 2$ a $k \neq 4\ell + 1, \ell \in \mathbb{Z}^+$.

Ke stejnému závěru se dostaneme použitím vztahů (3.3). Zatímco levá strana nerovnosti (3.2) je rovna nule, pravá strana je rovna nule nebo π v závislosti na k. Tato situace je znázorněna na obrázku 6.



Obrázek 6. Grafické znázornění nerovnosti (3.2).

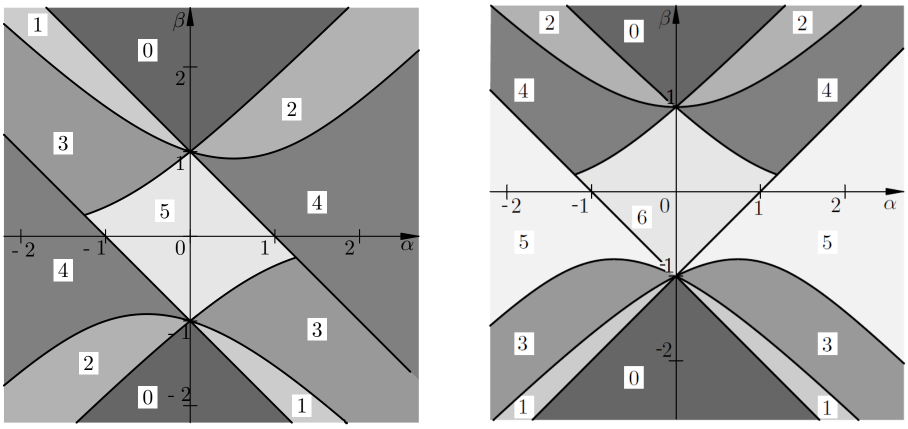
Na závěr ještě uveďme, že předchozí výsledky lze rozšířit ve smyslu stanovení oblastí s počtem kořenů daného polynomu ležících uvnitř jednotkového kruhu. (Předchozí výsledky byly speciální v tom, že jsme požadovali, aby všechny kořeny ležely uvnitř jednotkového kruhu.)

Pro ilustraci, jakých výsledků lze v tomto směru dosáhnout uvedeme následující příklad (bez teoretického zázemí, které lze nalézt například v [3]).

Příklad 3.7. Uvažujme polynom (2.11) s reálnými koeficienty. Naším cílem je rozdělit (α, β)-rovinu na jednotlivé oblasti tak, aby pro koeficienty z dané oblasti měl polynom (2.11) vždy konstantní počet kořenů uvnitř jednotkového kruhu. Tento problém byl částečně rozebrán v předchozím textu, kde jsme na obrázku 1 znázornili oblast v (α, β)-rovině, ve které má polynom (2.11) stupně k právě k kořenů uvnitř jednotkového kruhu. Tehdy bylo nutné typově rozlišit dva případy podle sudosti/lichosti jeho stupně k. Proto není velkým překvapením, že pro rozdělení (α, β)-roviny na jednotlivé oblasti s požadovanou vlastností, je opět nutno rozlišovat zvlášť případ, kdy je stupeň polynomu (2.11) sudý a kdy je lichý. Pro účely grafické interpretace zde budeme uvažovat dva polynomy (2.11) s pevně zvolenými stupni ve tvarech

$$R_5(\lambda) \equiv \lambda^5 + \alpha\lambda^4 + \beta, \qquad R_6(\lambda) \equiv \lambda^6 + \alpha\lambda^5 + \beta, \tag{3.8}$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Závislost počtu kořenů polynomů (3.8) uvnitř jednotkového kruhu na měnících se koeficientech je ilustrována na obrázku 7. Z tohoto obrázku je také



Obrázek 7. Počet kořenů polynomů (3.8) velikosti menší než jedna v závislosti na $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Vlevo pro $k = 5$ a vpravo pro $k = 6$.

patrno, že zmíněná závislost může být dost složité povahy.

3.1. Závěr

Tento příspěvek pojednával o kritériích popisujících lokalizaci kořenů polynomu ve vymezené části komplexní roviny. Speciální důraz je zde kladen na Schurovo-Cohnovo kritérium, zaručující lokalizaci všech kořenů daného polynomu uvnitř jednotkového kruhu, které je zde uvedeno ve třech variantách. V dalších částech věnujeme pozornost speciálním typům polynomů, pro které jsou odvozeny efektivnější systémy podmínek umožňující detekovat požadovanou lokalizaci kořenů.

Reference

[1] J. Čermák, J. Jánský: *Elementární důkaz Levinovy-Mayovy věty*, Kvaternion **2** (2013), 57–68.

[2] J. Čermák, J. Jánský: *Explicit stability conditions for a linear trinomial delay difference equation*, Applied Mathematics Letters **43** (2015), 56–60.

[3] J. Čermák, J. Jánský: *Stability and periodic investigations of linear planar difference systems*, Math. Methods Appl. Sci. **39** (2016), 5343–5354.

[4] J. Čermák, J. Jánský: *Stability switches in linear delay difference equations*, Appl. Math. Comput. **243** (2014), 755–766.

[5] J. Čermák, J. Jánský, H. Matsunaga: *On stability and stabilization of some discrete dynamical systems*, Math. Methods Appl. Sci. **41** (2018), 3684–3695.

[6] F. Dannan: *The asymptotic stability of* $x(n+k)+ax(n)+bx(n-\ell)=0$, J. Difference Equ. Appl. **10** (2004), No. 6, 589–599.

[7] S. Elaydi: *An introduction to difference equations*, 3rd ed., Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 2005.

[8] J. Jánský: *On a three term linear difference equation with complex coefficients*, Tatra Mt. Math. Publ. **63** (2015), 153–161.

[9] E. I. Jury: *Theory and application of the* $\mathcal{Z}$*-transform methods*, Wiley, New York, 1964.

[10] M. M. Kipnis, R. M. Nigmatullin: *Stability of the trinomial linear difference equations with two delays*, Autom. Remote Control **65** (2004), No. 11, 1710–1723.

[11] S. A. Levin, R. May: *A note on difference-delay equations*, Theor. Popul. Biol. **9** (1976), 178–187.
[12] M. Marden: *Geometry of polynomials*, Mathematical Surveys and Monographs, No. 3, Providence, 1966.
[13] H. Matsunaga, C. Hajiri: *Exact stability sets for a linear difference system with diagonal delay*, J. Math. Anal. App. **369** (2010) 616–622.
[14] V. G. Papanicolaou: *On the asymptotic stability of a class of linear difference equations*, Math. Mag. **69** (1996), No. 1, 34–43.

Jiří Jánský, Katedra matematiky a fyziky, Fakulta vojenských technologií, Univerzita obrany v Brně, Kounicova 65, 662 10 Brno, Česká republika