STABILITA A ŘÍZENÍ DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ POUŽITÝCH PŘI MODELOVÁNÍ POHYBU LETADLA

JIŘÍ NOVÁK

Abstrakt. Tento článek seznamuje čtenáře se základy dynamiky letu a řízení tak, jak byly popsány v bakalářské práci autora. Málokteré moderní letadlo (nebo jiný stroj pohybující se ve vzduchu) se spoléhá pouze na vlastní (konstrukční) stabilitu draku. Ve skutečnosti je pohyb „zastabilizováván“ prostřednictvím zpětnovazebního řízení, kdy dynamický systém (modelující např. pozici a orientaci letadla v čase) reaguje na stavové veličiny (tím je dynamicky upravován řídící signál). Cílem článku je seznámit čtenáře se základy matematického modelování pohybu letadla, možnostech řešení získaných rovnic a prostředcích teorie řízení při posilování stability letu.

1. Úvod

Moderní letadla se v současné době spoléhají na mnoho systémů, které zvyšují bezpečnost a pohodlí pilotů i cestujících. Mezi tyto systémy patří i posilovače stability, které umožňují rychlejší návrat letadla do ustáleného stavu při jeho vychýlení pomocí řídicích prvků. Abychom mohli problematiku hlouběji pochopit, je předně třeba odvodit matematický model pohybu letadla (letadlo zde uvažujeme jako těleso pohybující se ve vzduchu, tj. pracujeme se šesti stupni volnosti). V úvahách o řízení pohybu letadla vycházíme ze speciálních letových módů, jakým je např. ustálený přímočarý let. Protože nás obvykle zajímají pouze „malé“ odchylky od těchto letových módů (vlivem zásahu do řízení nebo turbulencí), bude kladen důraz na linearizovaný model, který je obvykle dostačující. Do jaké míry se nelineární a linearizovaný model liší, je v článku ukázáno v kapitole 3. Posílení stability je potom dosaženo zpětnovazebním řízením, aby bylo dosaženo lepších letových vlastností.

2. Pohybové a kinematické rovnice a jejich odvození

Při vytváření základního matematického modelu letadla nejprve uvažujme, že se letadlo pohybuje v inerciálním kartézském souřadném systému spojeném se Zemí.

2010 *MSC.* Primární 34Hxx.

Klíčová slova. Dynamika letu, pohybové rovnice, dynamické systémy, posílení stability, linearizace.

Vedoucím bakalářské práce autora byl Luděk Nechvátal z Ústavu matematiky FSI VUT v Brně.

Obecně má letadlo 6 stupňů volnosti, které popíšeme postupně silovými a momentovými rovnicemi. Při odvození pohybových rovnic budeme vycházet z 2. Newtonova zákona, který říká, že síla působící na těleso je rovna časové derivaci jeho hybnosti

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t}.$$

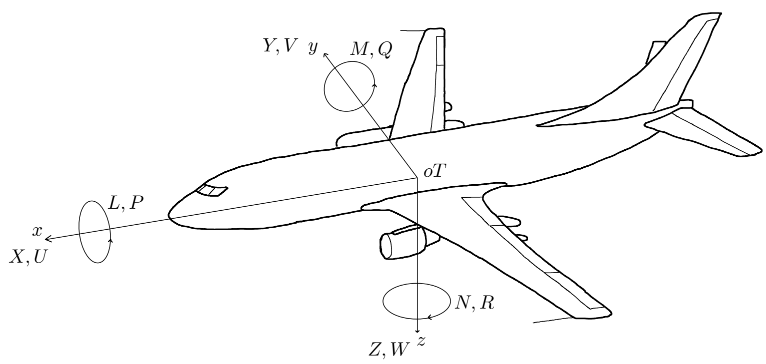
Po několika úpravách a rozepsání této vektorové rovnice do složek získáme tři silové rovnice. Druhou trojici rovnic dostaneme, rozepíšeme-li do složek momentovou rovnici

$$\mathbf{F} \times \mathbf{r} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{r},$$

kde $\mathbf{r}$ je polohový vektor elementu jdoucí z těžiště letadla. Po transformaci do souřadného systému spojeného s letadlem a několika dalších úpravách získáme soustavu šesti rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} m(\dot{U} - VR + WQ) &= X, \\ m(\dot{V} + UR - WP) &= Y, \\ m(\dot{W} - UQ + VP) &= Z, \\ I_{xx}\dot{P} - I_{xz}\dot{R} - I_{xz}PQ + (I_{zz} - I_{yy})RQ &= L, \\ I_{yy}\dot{Q} + (I_{xx} - I_{zz})PR + I_{xz}(P^2 - R^2) &= M, \\ I_{zz}\dot{R} - I_{xz}\dot{P} + (I_{yy} - I_{xx})PQ + I_{xz}QR &= N. \end{aligned} \tag{1}$$

kde U, V, W jsou rychlosti ve směrech souřadnicového systému letadla (myšleno systému s počátkem v těžišti letadla spojeného s jeho trupem), P, Q, R jsou úhlové rychlosti letadla kolem těchto os a X, Y, Z a L, M, N jsou složky výsledných sil a momentů působících na letadlo. Symbol m značí hmotnost letadla a symboly $I_{xx}, I_{xz}, \dots$ momenty setrvačnosti. V tomto tvaru ještě nelze rovnice řešit, nemáme vyjádřeny síly a momenty na pravé straně soustavy (1). Je také třeba promítnout gravitační sílu do os spojených s letadlem. Přehledně je značení znázorněno na obrázku 1.



Obrázek 1. Přehled symboliky.

Protože nejsou souřadné osy letadla obecně rovnoběžné se souřadným systémem spojeným se Zemí, je potřeba vztah mezi souřadnými systémy matematicky popsat, abychom byli schopni určit orientaci letadla v prostoru. Postupným otáčením jednoho souřadného systému kolem jednotlivých os jsme schopni dostat jakýkoliv jiný pootočený systém. Úhlům, o které osy postupně otáčíme, se říká Eulerovy úhly a označují se v dynamice letu jako ψ – precesní úhel (heading angle), θ – nutační úhel (elevation angle) a ϕ – rotační úhel (bank angle). Při znalosti těchto úhlů budeme schopni transformovat souřadnice vektorů z jednoho systému do druhého. V dynamice letu však rychle narazíme na problém, protože letadlo svoji orientaci může v čase měnit, tedy Eulerovy úhly, které dávají systémy do vztahu se také budou v čase měnit. Proto se při modelování pohybu letadla objevují tzv. kinematické rovnice. Změna natočení letadla závisí na hodnotách úhlových rychlostí, přičemž lze odvodit, že platí

$$\mathbf{i}P + \mathbf{j}Q + \mathbf{k}R = \dot{\boldsymbol{\psi}} + \dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\phi}}$$

($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ značí vektory standardní ortonormální báze v $\mathbb{R}^3$). Po dalším odvození lze určit jednotlivé složky P, Q, R ve tvaru

$$\begin{aligned} P &= \dot{\phi} - \dot{\psi}\sin\theta, \\ Q &= \dot{\psi}\sin\phi\cos\theta + \dot{\theta}\cos\phi, \\ R &= \dot{\psi}\cos\theta\cos\phi - \dot{\theta}\sin\phi. \end{aligned} \tag{2}$$

Dalším důležitým krokem je vyjádření sil a momentů na pravé straně soustavy (1), což je mezioborový problém, který sahá zejména do aerodynamiky. Obecně se tyto síly a momenty skládají z několika složek, např. silovou složku X lze psát ve tvaru

$$X = X_g + X_a + X_t + X_c.$$

Jednotlivé indexy naznačují, že je zde zahrnut vliv gravitace, aerodynamiky, tahu motorů a řídicích členů letadla. Silové i momentové členy závisí komplexně na mnoha mnoha faktorech, převládá však vliv jednotlivých stavových proměnných (rychlostí, úhlových rychlostí). Myšlenkou pak je vyjádřit každou silovou nebo momentovou složku přibližně pomocí Taylorova polynomu 1. stupně v nějakém ustáleném stavu (trim condition), tj. provedeme linearizaci. Konstanty vystupující polynomech závisejí na konstrukci letadla a říká se jim stabilitní derivace. V literatuře je najdeme pod označením např. $\frac{\partial X_a}{\partial u} = \mathring{X}_u$.

3. Linearizace a řešení systému (1),(2)

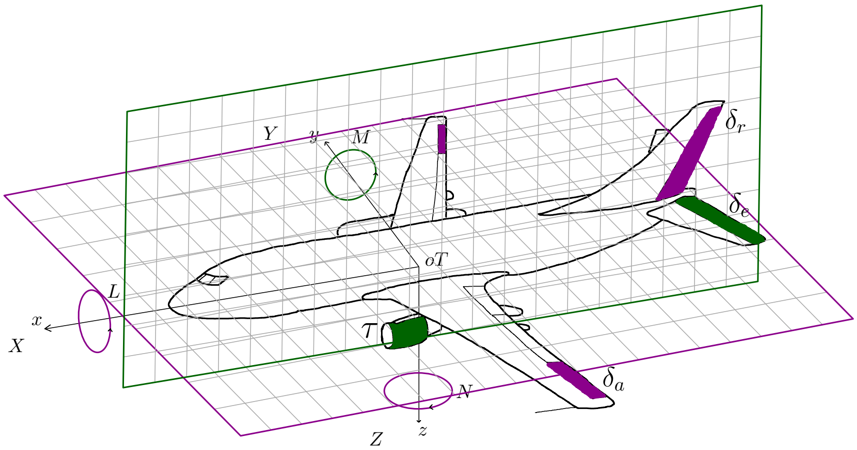
Pro další práci soustavu (1), (2) přepíšeme do vektorového tvaru

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}),$$

kde $\mathbf{u}$ je vektor řídících členů a $\mathbf{x} = [U, V, W, P, Q, R, \theta, \phi, \psi]$ jsou stavové proměnné. Dostáváme tedy soustavu devíti nelineárních diferenciálních rovnic, kterou je možné při daných počátečních podmínkách řešit vhodnou numerickou metodou. Mezi častá zjednodušení patří linearizace pomocí tzv. Jacobiho matice. Věta o linearizaci pak říká, že chování získaného lineárního systému v okolí počátku dobře aproximuje chování původního systému v okolí uvažovaného rovnovážného stavu. Uveďme definici rovnovážného stavu.

Definice 3.1 (rovnovážný stav)**.** Vektor $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ nazýváme rovnovážným stavem soustavy $\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ při vstupu $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}$, jestliže platí $\boldsymbol{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}$.

Systém linearizovaných rovnic tvoří soustavu lineárních diferenciálních rovnic. Protože však mnoho aerodynamických stabilitních i řídících derivací je pro malé odchylky zanedbatelně malých, je možné pohyb rozložit na podélný a příčný. Na



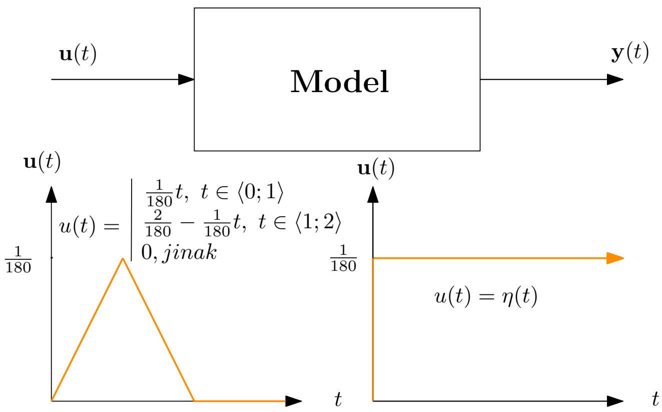
Obrázek 2. Separace na příčný a podélný pohyb.

obrázku 2 můžeme vidět podélnou i příčnou rovinu spolu s řídícími členy, které mají významný vliv na pohyb v těchto rovinách. Získáme tak soustavy tvaru

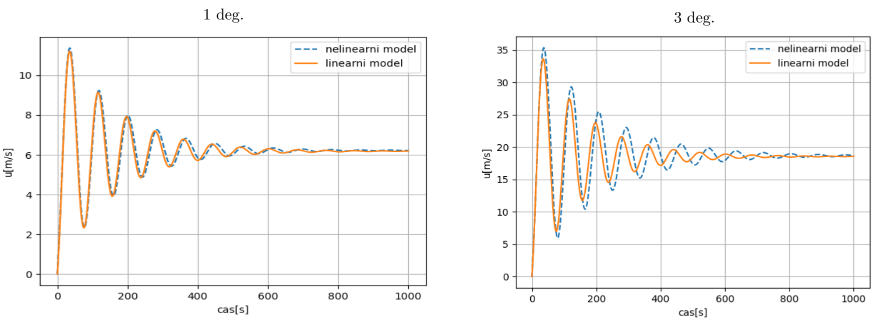
$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{B}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \boldsymbol{C}\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned} \tag{3}$$

s počáteční podmínkou $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0}$. Počáteční úlohu pro tyto separované systémy můžeme řešit například metodou stavového prostoru, která využívá Laplaceovy transformace a je možné pak takového tvaru využít v teorii řízení.

V práci [2] byla studována odezva systému na vstup typu „náběžná hrana s návratem“ a „skok“ (viz obrázek 3). Nelineární model byl na rozdíl od linerizovaného řešen Adamsovou vícekrokovou metodou. Pro letadlo McDonnell F–4C Phantom bylo nalezeno řešení všech pohybových proměnných. Data byla převzata z knihy [1]. Ukažme srovnání odezvy pohybové proměnné u lineárního modelu s řešením nelineární soustavy při zvyšování výchylky výškovky na vstupu. Na obrázku 4 lze vidět, jak rychle se od sebe řešení vzdalují při dvou různých výchylkách výškovky. Abychom lépe viděli rozdíl v řešení, vykreslíme graf odchylek řešení linearizovaného a nelineárního modelu pro různé vstupy na výškovce (viz obrázek 5). Je zřetelné, že pro zvyšující se vstup na výškovce se řešení linearizovaného modelu vzdaluje od řešení modelu nelineárního.



Obrázek 3. Schéma modelu.



Obrázek 4. Porovnání odezvy.

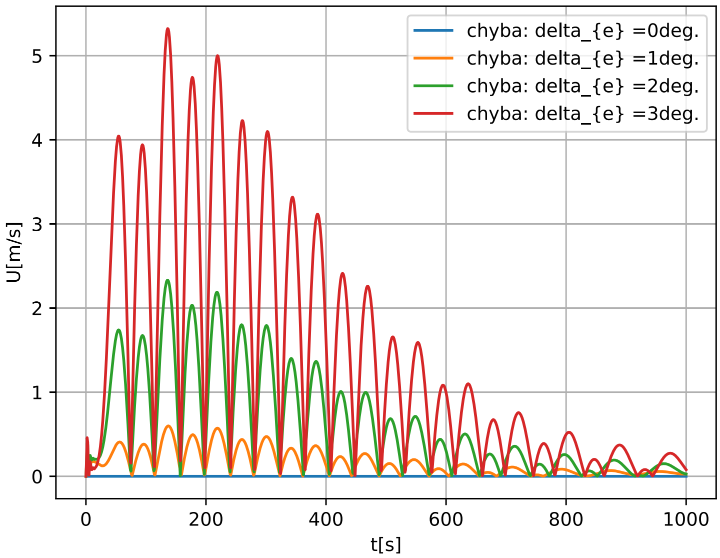
4. Stabilita a řízení

Při řešení pohybových rovnic pro malé odchylky získáme pohybové odezvy letadla na vstup, při simulaci nejčastěji výchylkou výškovky nebo jiných řídicích členů. Tyto odezvy mají obvykle kmitavý charakter podobný modelu tlumeného oscilátoru. Pro lepší letové vlastnosti je třeba navrhnout tlumič, který zmenší maximální amplitudu překmitu nebo zkrátí dobu ustálení. Výchozím bodem pro návrh tlumiče a posouzení stability bude matice přenosových funkcí systému ve formě

$$\boldsymbol{G}(s) = \frac{1}{\Delta(s)} \boldsymbol{N}(s),$$

kde $\Delta(s) = \det(\mathbf{A} - s\mathbf{I})$ je charakteristický polynom[1] společný všem přenosovým funkcím a $\boldsymbol{N}(s)$ je matice typu $n \times m$. Pojem stabilita si můžeme představit jako schopnost letadla se po vychýlení z ustáleného stavu po konečném čase opět vrátit

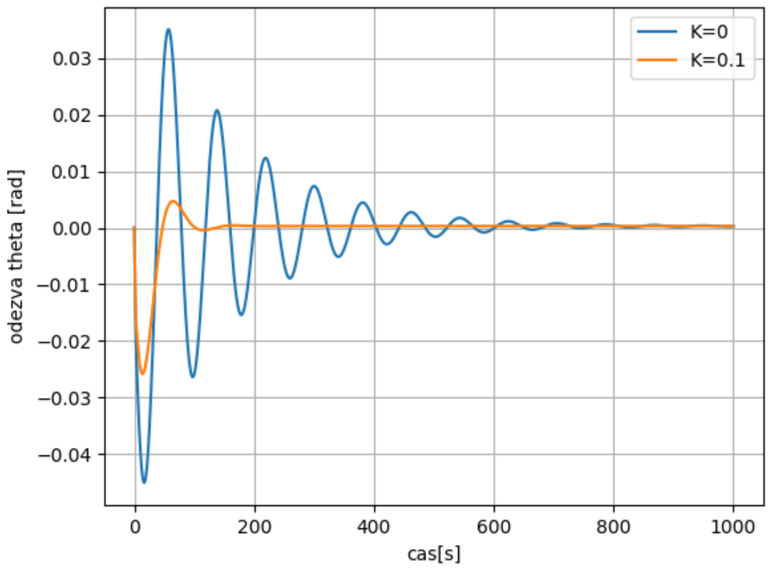
[1] $\mathbf{I}$ je jednotková matice řádu n



Obrázek 5. Srovnání lineárního a nelineárního modelu.

do ustáleného stavu. Při řešení stability řízené soustavy (v případě pohybových rovnic mluvíme o řídících členech) se můžeme omezit na stanovení stability nulového řešení pouze neřízené soustavy (3). K tomu lze využít znalost znamének reálných částí vlastních čísel matice $\mathbf{A}$ lineární soustavy $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Není třeba vlastní čísla počítat přímo, stačí ověřit, že jsou všechny reálné části kořenů charakteristického polynomu matice $\mathbf{A}$ záporné. To lze ověřit například Routhovým-Hurwitzovým kritériem. Při vychýlení se letoun vrací do ustáleného stavu jistým způsobem, často kmitavým. Charakteristický polynom je čtvrtého řádu a obvykle má dva komplexně sdružené kořeny, které odpovídají dvojici kmitavých pohybů. Rychlé kmity označované jako „short period" jsou velmi dobře tlumeny s periodou jen několik vteřin. Letadla jsou již navrhována tak, aby tato složka neměla zásadní vliv na stabilitu letadla. Druhou složkou jsou tzv. fygoidální kmity (anglicky phugoid). Je to obvykle málo tlumená složka s menší frekvencí, ale s vyšší amplitudou, což má za následek změny v rychlosti a výšce.

Sestavme nyní jednoduchou řídicí smyčku, ve které budeme sledovat úhel θ a pomocí proporcionálního tlumícího koeficientu K_θ jej vracet na vstup. Cílem bude rychleji tlumit „phugoid" a zmenšit amplitudu. Vstup ve formě pohybu výškovky v čase bude tedy vyjádřen jako $\delta_e(t) = \xi_{\delta_e}(t) - K_\theta\theta(t)$, kde ξ_{δ_e} značí požadovanou výchylku výškovky a δ_e skutečnou výchylku výškovky. Při volbě tlumícího koeficientu je dobré vědět, že má za následek změnu charakteristického polynomu a tedy i změnu polohy kořenů v komplexní rovině. Aby bylo jednodušší určit vhodný tlumící koeficient, vykreslíme změny kořenů postupně do komplexní roviny pro různé koeficienty. Rychlejší tlumení bude způsobeno posunem kořenů více doleva (větší záporná složka) a menší kmity budou způsobeny přiblížením komplexně sdružených kořenů k reálné ose. Po zvolení vhodného koeficientu tlumení můžeme soustavu opět řešit a zjistit, jestli se dynamické vlastnosti letadla zlepšily. Na obrázku 6 můžeme pozorovat, jak výrazně se podařilo „phugoid“ utlumit.



Obrázek 6. Tlumení oscilací.

5. Závěr

V článku byly popsány základy problematiky dynamiky letu a řízení. Přestože nebylo možné zajít příliš do hloubky, čtenář by mohl ocenit zejména popis a postup, jak se k problematice přistupuje a jakého aparátu se užívá. Můžeme si povšimnout přesnosti řešení lineárního modelu pro malé odchylky od rovnovážného stavu. Nabízí se otázka, jakým způsobem takový stav nalezneme. V bakalářské práci [2] je pro zájemce vysvětlený i tento problém spolu s popisem letových režimů ustáleného letu.

Reference

[1] M. V. Cook: *Flight Dynamics Principles*, Arnold, London, 1997.
[2] J. Novák: *Stabilita a řízení dynamických systémů použitých při modelování pohybu letadla*, Bakalářská práce, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Brno, 2018.

Jiří Novák, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: 182740@vutbr.cz