VYBRANÉ PRÍKLADY Z INTERNETOVEJ MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

VIERA ŠTOUDKOVÁ RŮŽIČKOVÁ

ABSTRAKT. V článku sú riešené tri vybrané príklady súvisiace s Internetovou matematickou olympiádou pre študentov stredných škôl. V prvej časti je rozobratý geometrický príklad o tetivových štvoruholníkoch. Druhá časť sa zaoberá dvoma verziami príkladu na výpočet pravdepodobnosti a v postupe ich riešenia sa počítajú limity. V tretej časti sú uvedené rôzne verzie geometrického príkladu na výpočet dĺžok, je rozobratá verzia s nepresnými vstupnými údajmi.

Ústav matematiky na FSI VUT v Brne každoročne organizuje Internetovú matematickú olympiádu pre študentov stredných škôl ČR a SR. V roku 2018 prebehol už jej jedenásty ročník. Na príprave príkladov a ich vyhodnotení sa nemalou mierou podieľajú študenti oboru Matematické inženýrství a oboru Aplikovaná matematika. Na stránkach `http://matholymp.fme.vutbr.cz` je možné nájsť zadania aj riešenia príkladov zo všetkých ročníkov.

Tento príspevok je druhý v poradí na túto tému. V minulom roku som sa mala možnosť podieľať na organizácii tejto súťaže a videla som, ako postupne vznikajú niektoré príklady od prvého nápadu až po finálnu verziu. Často je nutné pôvodné verzie zadania zjednodušiť, prispôsobiť úrovni stredoškolákov a tiež zohľadniť časový priestor, ktoré majú riešitelia na vypracovanie riešení, aj čas, ktorý zaberie opravovanie týchto riešení.

V tomto príspevku som sa rozhodla ukázať niektoré z tých príkladov, ktoré neboli na olympiáde použité, alebo boli použité v inej verzii. Rovnako ako v predchádzajúcom príspevku, aj teraz budem riešenia príkladov popisovať z môjho pohľadu, občas aj s odbočkami, ktoré súvisia s tým, ako som na riešenie postupne prichádzala a aj s rôznymi úvahami, čo ma k tomu ešte napadli.

1. PRÍKLAD S DÚHOU

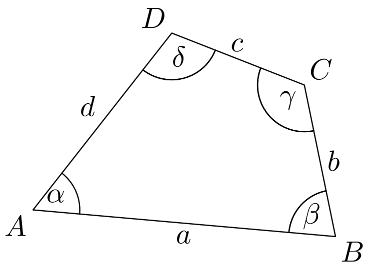
Príklad s dúhou, ktorý bol nachystaný na použitie minulý rok, zatiaľ nebudem zverejňovať. Je pekný a môže sa ešte v nejakej forme objaviť v niektorom z ďalších ročníkov. Zatiaľ k tomu nedošlo, lebo sa ukázalo, že v zadaní je navyše schovaná ešte jedna dôkazová úloha, ktorej riešenie už by vydalo na samostatný príklad. A práve týmto príkladom sa teraz budeme zaoberať. Zadanie by mohlo vyzerať napríklad nasledovne.

2010 *MSC.* Primární 00A09; Sekundární 00A35.
Klíčová slova. Matematická olympiáda.

Príklad 1. *Dokážte, že pokiaľ existuje štvoruholník s dĺžkami strán a, b, c, d, tak je možné zostrojiť aj tetivový štvoruholník s dĺžkami strán a, b, c, d.*

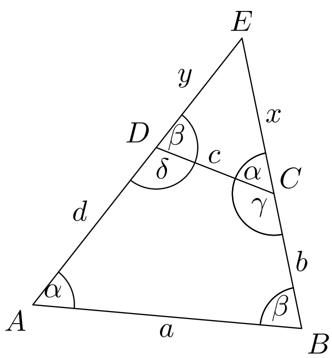
Začnem tým, že zhrniem, čo viem o tetivových štvoruholníkov: podľa definície ich vrcholy ležia na kružnici. Ďalej sa vie, že štvruholník je tetivový práve vtedy, keď súčet jeho protiľahlých uhlov je rovný 180°.

Ukázať, že štvoruholník s danými vlastnosťami existuje, je možné tak, že ho nejako zostrojím - teda vymyslím nejaký postup a ukážem, že bude fungovať. To ale len tak nevymyslím. Pôjdem na to odzadu. Nakreslím si nejaký, pokiaľ možno čo najobyčajnejší tetivový štvoruholník (to znamená nie obdĺžnik, kosoštvorec, lichobežník, ...) a označím dĺžky jeho strán a uhly. Napríklad ako na obrázku 1. Potom skúšam prikresľovať do obrázku rôzne pomocné čiary, tým vznikajú nové



Obrázok 1

úsečky a uhly. Zisťujem, či sa dajú odvodiť vzťahy pre ich dĺžky a veľkosti uhlov, ktoré zvierajú so štvoruholníkom a či by to mohlo nejako pomôcť. Ako najužitočnejšie mi pripadá predĺženie dvoch strán až do spoločného bodu, čím vzniknú dva podobné trojuholníky, ako na obrázku 2. Podobnosť trojuholníkov ABE a CDE



Obrázok 2

vyplýva z tetivovosti štvoruholníka $ABCD$, lebo pre jeho uhly platí $\alpha+\gamma = \beta+\delta = 180°$. Uhly teda poznám, a nie je problém dopočítať neznáme dĺžky úsečiek CE

a DE, ktoré som na obrázku označila x a y. Z podobnosti trojuholníkov ABE a CDE dostávam

$$\frac{d+y}{x} = \frac{a}{c} = \frac{b+x}{y}. \tag{1}$$

Z toho vyjadrím x a y ako

$$x = c \cdot \frac{bc+ad}{a^2-c^2}, \quad y = c \cdot \frac{ab+cd}{a^2-c^2}. \tag{2}$$

Teraz už mi je jasný postup konštrukcie: Máme dané a, b, c, d, kde $a > c$. (Táto podmienka nie je problém, stačí zvoliť značenie a, b, c, d tak, že $a > c$ a v prípade, že to nejde, znamená to, že $a = b = c = d$, ide teda o štvorec, ktorý je tetivový vždy.) Najskôr zostrojíme trojuholník DCE so stranami dĺžky $|DC| = c$, $|CE| = x$, $|ED| = y$, kde x, y spočítame zo vzťahov (2), a potom predĺžením jeho strany EC o dĺžku b do bodu B a predĺžením strany ED o dĺžku d do bodu A dostaneme pod ním štvoruholník $ABCD$. Ešte treba overiť, že tento štvoruholník bude mať dĺžku strany $|AB| = a$ a bude tetivový. To je jednoduché, stačí si uvedomiť, že vzťahy (1) a (2) sú za podmienky $a > c$ ekvivalentné, teda nielen, že z rovností (1) vyplývajú rovnosti (2), ale aj naopak. Potom z (1) už vyplýva, že trojuholníky ABE a CDE sú podobné a teda súčet protiľahlých uhlov štvoruholníka $ABCD$ je rovný $180°$ a je tetivový. A ďalej z podobnosti trojuholníkov ABE a CDE a z (1) vyplýva, že $|AB| = a$.

Tým je zdanlivo úloha vyriešená. V skutočnosti ešte zostáva urobiť kus práce. Musím ukázať, že trojuholník s dĺžkami strán c, x, y existuje pre každú zadanú štvoricu čísel a, b, c, d takú, že existuje štvoruholník s dĺžkami strán a, b, c, d. To v prvom rade znamená, že hodnoty x a y musia byť kladné, teda

$$c \cdot \frac{bc+ad}{a^2-c^2} > 0, \quad c \cdot \frac{ab+cd}{a^2-c^2} > 0.$$

Tieto nerovnosti splnené sú, lebo sme predpokladali, že $a > c$. Ďalej musia platiť trojuholníkové nerovnosti

$$x + y > c, \quad c + x > y, \quad c + y > x,$$

teda

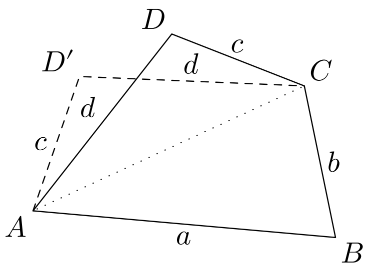
$$\frac{bc+ad}{a^2-c^2} + \frac{ab+cd}{a^2-c^2} > 1, \qquad 1 + \frac{bc+ad}{a^2-c^2} > \frac{ab+cd}{a^2-c^2}, \qquad 1 + \frac{ab+cd}{a^2-c^2} > \frac{bc+ad}{a^2-c^2}.$$

Tieto nerovnosti môžeme upraviť ako

$$\begin{array}{lll} \dfrac{bc+ad+ab+cd}{a^2-c^2} > 1, & 1 > \dfrac{ab+cd-bc-ad}{a^2-c^2}, & 1 > \dfrac{bc+ad-ab-cd}{a^2-c^2}, \\ \dfrac{b+d}{a-c} > 1, & 1 > \dfrac{b-d}{a+c}, & 1 > \dfrac{d-b}{a+c}, \\ b+d+c > a, & a+c+d > b, & a+b+c > d, \end{array}$$

čo nie je nič iné ako štvoruholníkové nerovnosti – pokiaľ by niektorá z nich neplatila, žiaden štvoruholník s dĺžkami strán a, b, c, d by sa nedal zostrojiť. Všetky tri teda sú splnené.

Tým je už úloha konečne vyriešená. Ešte sa vrátim pre poriadok k tomu preznačovaniu strán. V zadaní nebolo jednoznačne napísané, že výsledný štvoruholník má mať dĺžky strán a, b, c, d v tomto poradí. Môžeme ale prehlásiť, že pokiaľ vieme zostrojiť tetivový štvoruholník so stranami s dĺžkami zaradom a, b, c, d, vieme zostrojiť aj tetivové štvoruholníky so stranami s týmito dĺžkami v ľubovoľnom poradí. Dá sa ukázať, že prehodením dvoch susedných strán a ponechaním zvyšných dvoch na mieste, ako je to ukázané na obrázku 3, dostávame vždy znova tetivový



Obrázok 3

štvoruholník a postupným prehadzovaním dvoch susedných strán tak vieme dostať ľubovoľnú kombináciu ich poradia.

2. Príklad s kovbojmi

Tento príklad je podarený, má napínavý dej, ale medzi súťažnými príkladmi sa neobjavil a už ani neobjaví. Bol vyhodnotený ako nie celkom vhodný pre stredoškolákov. O to vhodnejší je pre vysokoškolákov, ktorí už vedia dobre pracovať s limitami. Preto som ho vybrala do tohto článku.

Príklad 2 (autor Zdeněk Hrazdíra)**.** *Uvažujme, že jsme jeden z nekonečně (ale spočetně) mnoha kovbojů v přestřelce. Tato přestřelka probíhá tak, že si na začátku každý kovboj náhodně vybere jednoho z ostatních kovbojů jako cíl a poté všichni kovbojové vystřelí ve stejný okamžik. Každý z kovbojů vystřelí a každý se vždy trefí. Jaká je šance pro nás, jako jednoho z těchto kovbojů, že přežijeme?*

Ako prvé uvediem autorské riešenie: Nejprve si spočteme pravděpodobnost, s jakou nás netrefí jeden z ostatních kovbojů. Pokud je v přestřelce N kovbojů, může si jeden kovboj obecně vybrat $N-1$ možných cílů (nestřelí sám sebe). Pokud však chceme přežít, nesmí si vybrat ani nás. Pravděpodobnost (označíme ji P_1), že si nás jeden z kovbojů nevybere jako cíl je tedy

$$P_1 = \frac{N-2}{N-1}.$$

Abychom přežili, nesmí nás trefit ani jeden ze všech $N-1$ ostatních kovbojů. Jev s pravděpodobností P_1 tedy musí nastat pro všech $N-1$ kovbojů. Tento jev označíme jako P_{N-1} a spočítáme jeho pravděpodobnost

$$P_{N-1} = \left(\frac{N-2}{N-1}\right)^{N-1}. \tag{3}$$

Pokud tedy uvažujeme hypotetickou přestřelku mezi nekonečným počtem kovbojů, označíme naši pravděpodobnost na přežití P_∞ a spočteme ji jako limitu výrazu (3), kde $N \to \infty$, tedy

$$P_\infty = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{N-2}{N-1}\right)^{N-1}.$$

Pro vypočítání této limity si nejprve zavedeme substituci $n = N - 2$, která limitu v ∞ nijak nezmění. Výraz tedy přejde na tvar

$$P_\infty = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Můžeme si všimnout, že naše limita je velmi podobná známému limitnímu vyjádření čísla e. Za předpokladu $P_\infty \neq 0$ převrátíme tedy obě strany

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_\infty} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Vzhledem k tomu, že

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} \qquad \text{a} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1,$$

existuje také limita součinu odpovídajících posloupností a platí

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right) = \mathrm{e}\,. \tag{5}$$

Spojením (4) a (5) dostáváme výsledek

$$P_\infty = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)\right)} = \frac{1}{\mathrm{e}},$$

což odpovídá pravděpodobnosti na přežití přibližně 0,36788.

Teraz pripojím môj komentár. Postup riešenia je nasledovný – v prvej časti je odvodený vzťah pre pravdepodobnosť prežitia v prípade konečného počtu N kovbojov, v druhej časti je za N „dosadené“ nekonečno, t.j. vypočítaná limita výrazu pre túto pravdepodobnosť v nekonečne. Pričom výpočet tejto limity tvorí dosť veľkú časť riešenia. Nešiel by nejako skrátiť, zjednodušiť? Keby sme hneď na začiatku zvolili substitúciu $n = 1 - N$ namiesto $n = N + 2$, dostali by sme hneď

$$P_\infty = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{N-2}{N-1}\right)^{N-1} = \lim_{n\to-\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(\lim_{n\to-\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{-1} = \mathrm{e}^{-1},$$

kde sme využili vetu o limite zloženej funkcie a to, že

$$\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}\,. \tag{6}$$

Tak čo, zdá sa vám to jednoduchšie? Nie je. Len tá zložitosť je schovaná inde. A to v tvrdení (6), ktoré sme nedokazovali, len použili. Jeho dôkaz totiž vyzerá nejak takto:

Po substitúcii $m = -n$ z výrazu $\lim\limits_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ďalej úpravami dostávame

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m} &= \lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{m}}\right)^m = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^m\\ &= \lim_{m\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}\cdot\left(1+\frac{1}{m-1}\right)\right)\\ &= \lim_{(m-1)\to\infty}\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1} = \mathrm{e},\end{aligned}$$

v poslednom kroku sme tiež využili vetu o limite súčinu.

Navyše si môžete všimnúť, že ak by sme všetky substitúcie urobili naraz, dostaneme $n = 1 - N$, $m = -n$ a $k = m - 1$, z toho $k = N - 2$, čo je presne tá substitúcia, ktorá bola zvolená v predchádzajúcom postupe riešenia.

A teraz sa pozrime na pôvodnú verziu tohto príkladu. Táto verzia bola zavrhnutá hneď na začiatku ako príliš zložitá.

Príklad 3 (autor Zdeněk Hrazdíra)**.** *Uvažujme, že jsme jeden z nekonečně (ale spočetně) mnoha kovbojů v přestřelce. Tato přestřelka probíhá tak, že si na začátku každý kovboj náhodně vybere jednoho z ostatních kovbojů jako cíl, poté se náhodně vybere pořadí a kovbojové začnou střílet popořadě. Každý z kovbojů, pokud už není mrtvý, vystřelí a každý se vždy trefí. Jaká je šance pro nás, jako jednoho z těchto kovbojů, že přežijeme?*

Znova najskôr uvažujme, že kovbojov je spolu N. Počet všetkých možností, ktoré mohli nastať, je v tomto prípade rovnaký ako v predchádzajúcom prípade. Každý kovboj si náhodne vyberá jedného zo zvyšných $N-1$, t.j. spolu je to $(N-1)^N$ možností, všetky môžu nastať s rovnakou pravdepodobnosťou.

Avšak vyjadrenie vzťahu pre hodnotu pravdepodobnosti prežitia i-teho kovboja v poradí pri celkovom počte N kovbojov je v tomto prípade veľmi náročné. Označím ju ako $P_N(i)$. Skúšala som tento vzťah odvodiť a veľmi sa mi nedarilo – vychádzalo to tak zložito, že som zvažovala, či to vôbec má zmysel dokončiť. Pretože by som aj tak nedokázala potom vypočítať limitu toho vzťahu pre N idúce do nekonečna.

Potom ma napadlo, že keď sa to nedarí všeobecne, skúsim trochu ubrať, a vypočítať aspoň pravdepodobnosť prežitia jednotlivých kovbojov pre konkrétne počty. Pre malé N sa dajú vypísať a postupne vyhodnotiť všetky možnosti, pre trochu väčšie N pomôže počítač. Počet možností ale so zväčšujúcim sa počtom kovbojov rýchle narastá, pre $N = 11$ už ich máme 10^{11}, a to už aj počítač má čo robiť.

Skúsila som to postupne pre $N = 3, 4, 5, 6$ a zistila som zaujímavú vec – pre každé z týchto N tvoria hodnoty pravdepodobnosti prežitia jednotlivých kovbojov lineárnu postupnosť, ich priemer vychádza vždy presne 0,5 a rozdiel prvej a poslednej hodnoty sa pre $N > 3$ s narastajúcim N zmenšuje. Konkrétne hodnoty pravdepodobnosti pre prvého a posledného, $P_N(1)$ a $P_N(N)$, mi pre $N = 3, 4, 5, 6$ vyšli nasledovne

$$\begin{aligned}
N = 3: &\quad P_3(1) = \frac{1}{2}, \quad P_3(3) = \frac{1}{2},\\
N = 4: &\quad P_4(1) = \frac{15}{27}, \quad P_4(4) = \frac{12}{27},\\
N = 5: &\quad P_5(1) = \frac{34}{64}, \quad P_5(5) = \frac{30}{64},\\
N = 6: &\quad P_6(1) = \frac{329}{625}, \quad P_6(6) = \frac{296}{625}.
\end{aligned}$$

Môžem z toho teda odhadnúť, že to takto bude pokračovať aj pre ďalšie N a že pravdepodobnosť prežitia ľubovoľného kovboja pri nekonečnom počte je jedna polovica. Taký pekný odhad výsledku ma povzbudil, povedala som si, že keď tá limita vyjde takto jednoducho, musí existovať aj dostatočne jednoduchý postup na jej vypočítanie, publikovateľný v tomto článku. A tak som sa rozhodla to skúsiť. Ako som si vypisovala všetky možnosti pre malé N, našla som pri tom jednoduchý postup, ako to vyhodnotiť, o ktorom sa ukázalo, že je prepísateľný aj pre všeobecné $N > 2$. Vedie to na rekurentný vzťah.

Teraz už nasleduje postup riešenia. Vopred upozorňujem, že úroveň jeho zložitosti je o niečo vyššia, než u ostatných príkladov.

Najskôr ukážem, ako odvodiť vzťah pre pravdepodobnosť prežitia prvého kovboja, $P_N(1)$. Začnem s tým, že rozoberiem situáciu, keď už je naživе len k kovbojov z pôvodných N, ktorí ešte môžu vystreliť a prvý kovboj ešte žije a už strieľal. Ten z kovbojov, ktorý je práve na rade, má tri možnosti – buď si vybral prvého, táto možnosť nastane s pravdepodobnosťou $\frac{1}{N-1}$, alebo si vybral jedného z tých, ktorí už buď strieľali (okrem prvého) alebo už nie sú naživе, tých je $N - k - 1$, takže s pravdepodobnosťou $\frac{N-k-1}{N-1}$ po jeho výstrele zostane $k - 1$ kovbojov, ktorí ešte môžu vystreliť, a posledná možnosť je, že si vybral jedného z týchto $k-1$ kovbojov, a teda s pravdepodobnosťou $\frac{k-1}{N-1}$ po jeho výstrele zostane už len $k - 2$ kovbojov, ktorí ešte môžu vystreliť.

Teraz označím pravdepodobnosť toho, že situácia rozobratá vyššie, t.j. už je naživе len k kovbojov, ktorí ešte môžu vystreliť a prvý kovboj ešte žije, dopadne nakoniec zastrelením prvého kovboja, ako $V_N(k)$. Pravdepodobnosť, že prvý prežije, je potom $P_N(1) = 1 - V_N(N - 2)$. Pre $V_N(k)$ dostávam na základe predchádzajúcich úvah rekurentný vzťah

$$V_N(k) = \frac{1}{N-1} + \frac{N-k-1}{N-1} \cdot V_N(k-1) + \frac{k-1}{N-1} \cdot V_N(k-2), \tag{7}$$

kde $k = 2, 3, \dots, N-2$. Pre $k = 0$ a $k = 1$ je to jednoduché,

$$V_N(0) = 0, \quad V_N(1) = \frac{1}{N-1}\,.$$

Vzťah (7) sa mi ešte zdá zložitý, a tak skúšam ho upravovať. Zisťujem, že sa to dá poskladať tak, že člen $V_N(k-2)$ vypadne. Je to ale trochu zdĺhavé a nebudem to sem celé písať. Môžete si to skúsiť sami. Tu ukážem iný, kratší postup (ktorý funguje dobre vtedy, keď dopredu viem, čo má vyjsť). Označím

$$A_N(k) := (N-1) \cdot V_N(k) + k \cdot V_N(k-1) - k.$$

Zo vzťahu (7) postupne dostávam

$$\begin{aligned}
(N-1) \cdot V_N(k) &= 1 + (N-k-1) \cdot V_N(k-1) \\
&\quad + (k-1) \cdot V_N(k-2), \\
(N-1) \cdot V_N(k) + k \cdot V_N(k-1) &= 1 + (N-1) \cdot V_N(k-1) + (k-1) \cdot V_N(k-2), \\
A_N(k) &= A_N(k-1)
\end{aligned}$$

pre $k = 3, \dots, N-2$. Keďže $A_N(2) = (N-1) \cdot V_N(1) + 1 \cdot V_N(0) - 1 = 0$, potom $A_N(k) = 0$ pre všetky $k > 2$, a z toho dostávam nový rekurentný vzťah

$$V_N(k) = \frac{k}{N-1} \cdot (1 - V_N(k-1)), \quad k = 1, 2, 3, \dots, N-2,$$

ktorý už vyzerá pomerne jednoducho. Teraz z neho vyjadrím $(N-2)$. člen, ktorý vyjadruje pravdepodobnosť, že prvý kovboj neprežije prestrelku, pokiaľ kovbojov je N. Rozpíšem si to postupne a dostávam

$$\begin{aligned}
1 - P_N(1) = V_N(N-2) &= \frac{N-2}{N-1} \cdot (1 - V_N(N-3)) \\
&= \frac{N-2}{N-1} \cdot \left(1 - \left(\frac{N-3}{N-1} \cdot (1 - V_N(N-4))\right)\right) = \cdots
\end{aligned}$$

Keď to roznásobím, dostanem súčet

$$\begin{aligned}
1 - P_N(1) &= \frac{N-2}{N-1} - \frac{N-2}{N-1} \cdot \frac{N-3}{N-1} + \frac{N-2}{N-1} \cdot \frac{N-3}{N-1} \cdot \frac{N-4}{N-1} - \cdots \\
&\quad + (-1)^{N-1} \frac{(N-2)!}{(N-1)^{N-2}} = \sum_{i=1}^{N-2} (-1)^{i+1} \frac{(N-2)\cdots(N-i-1)}{(N-1)^i}\,.
\end{aligned}$$

Tým je prvá časť hotová. Nás ale zaujíma, ako to je pre nekonečne veľa kovbojov, a teda hodnota

$$\lim_{N\to\infty} (1 - P_N(1)) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N-2} (-1)^{i+1} \frac{(N-2)\cdots(N-i-1)}{(N-1)^i}.$$

Vyzerá to zložito, ale môžem použiť nápovedu. Viem, že výsledok by mal vyjsť $\frac{1}{2}$. Mohlo by pomôcť rozdeliť tento súčet na súčet výrazu, ktorého limita je $\frac{1}{2}$ a výrazu, ktorého limita je nula. Také limity sa počítajú obvykle jednoduchšie. Napadá ma jeden možný postup, ako to urobiť. Taký, že výraz $1 - P_N(1)$ rozpíšem ako

$$\begin{aligned}1 - P_N(1) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{N-2}{N-1} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{N-2}{N-1} - \frac{N-2}{N-1} \cdot \frac{N-3}{N-1}\right)\\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{N-2}{N-1} \cdot \frac{N-3}{N-1} - \frac{N-2}{N-1} \cdot \frac{N-3}{N-1} \cdot \frac{N-4}{N-1}\right) + \cdots\\ &\quad + \frac{(-1)^{N-2}}{2} \cdot \left(\frac{(N-2)!}{(N-1)^{N-3}} - \frac{(N-2)!}{(N-1)^{N-2}}\right)\\ &\quad + \frac{(-1)^{N-1}}{2} \cdot \frac{(N-2)!}{(N-1)^{N-2}},\end{aligned}$$

čo môžem po odčítaní zlomkov v zátvorkách úpravou na spoločného menovateľa zapísať aj ako

$$\begin{aligned}1 - P_N(1) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{N-2}{N-1} + \frac{(-1)^{N-1}}{2} \cdot \frac{(N-2)!}{(N-1)^{N-2}}\\ &\quad + \sum_{i=1}^{N-3} \frac{(-1)^{i+1}}{2} \cdot \frac{(N-2)\cdots(N-i-1)\cdot(i+1)}{(N-1)^{i+1}}.\end{aligned}$$

Tak, tieto úpravy by už mali stačiť a môžem počítať limitu tohto súčtu. Spočítam si limity jednotlivých výrazov, ktoré označím

$$\begin{aligned}A(N) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{N-2}{N-1},\\ B(N) &= \frac{(-1)^{N-1}}{2} \cdot \frac{(N-2)!}{(N-1)^{N-2}},\\ C(N) &= \sum_{i=1}^{N-3} \frac{(-1)^{i+1}}{2} \cdot \frac{(N-2)\cdots(N-i-1)\cdot(i+1)}{(N-1)^{i+1}}.\end{aligned}$$

Prvá limita je ľahká, hneď vidím, že $\lim_{N\to\infty} A(N) = \frac{1}{2}$. V druhej limite urobím kvôli prehľadnosti substitúciu $N - 1 = M$ a dostávam

$$\lim_{N\to\infty} B(N) = \lim_{M\to\infty} \frac{(-1)^M}{2} \cdot \frac{(M-1)!}{M^{M-1}} = \lim_{M\to\infty} \frac{(-1)^M}{2} \cdot \frac{M!}{M^M} = 0.$$

Tretia limita je najťažšia. Viem, že by to mala vyjsť nula, takže by sa mohol dať ten súčet odhadnúť zhora výrazom, ktorého limita je nula. Rozpíšem si súčet $C(N)$ po členoch, nech do toho lepšie vidím a za N dosadím napríklad 11. Dostávam

$$\begin{aligned}C(N) &= \frac{(N-2)\cdot 2}{2(N-1)^2} - \frac{(N-2)(N-3)\cdot 3}{2(N-1)^3} + \frac{(N-2)(N-3)(N-4)\cdot 4}{2(N-1)^4} - \cdots,\\ C(11) &= \frac{18}{200} - \frac{216}{2000} + \frac{2016}{2\cdot 10^4} - \frac{15120}{2\cdot 10^5} + \frac{90720}{2\cdot 10^6} - \frac{423360}{2\cdot 10^7}\\ &\quad + \frac{1451520}{2\cdot 10^8} - \frac{3265920}{2\cdot 10^9}\\ &= 0{,}09 - 0{,}108 + 0{,}1008 - 0,0756 + 0{,}04536 - 0{,}0211168\end{aligned}$$

$$+ 0{,}0072576 - 0{,}00163296,$$

z čoho vidím, že zo začiatku sa absolútne hodnoty členov zväčšujú a potom zmenšujú až na veľmi malé hodnoty. Odhadujem, že to bude platiť aj všeobecne. Overím to výpočtom. Určím hodnotu rozdielu

$$\begin{aligned}\frac{(N-2)\cdots(N-i-1)\cdot(i+1)}{(N-1)^{i+1}} &- \frac{(N-2)\cdots(N-i)\cdot i}{(N-1)^{i}}\\ &= \frac{(N-2)\cdots(N-i)}{(N-1)^{i+1}}\cdot((N-i-1)\cdot(i+1)-(N-1)\cdot i)\\ &= \frac{(N-2)\cdots(N-i)}{(N-1)^{i+1}}\cdot(N-i^2-i-1).\end{aligned}$$

Takže pokiaľ $i^2+i+1<N$, i-ty člen je v absolútnej hodnote väčší ako ten predchádzajúci, potom už sa zmenšujú. A najväčšiu absolútnu hodnotu má ten člen súčtu, ktorý je v poradí m-tý, kde m je dolná celá časť z $\frac{\sqrt{4N-3}-1}{2}$. Súčasne viem, že členy súčtu striedajú znamienka. Z týchto dvoch poznatkov spolu dostávam, že absolútnu hodnotu súčtu všetkých členov môžem zhora odhadnúť absolútnou hodnotou najväčšieho, m-tého člena. (Nie je to hneď zrejmé, odporúčam si to rozpísať.) Mám teda nerovnosť

$$\begin{aligned}|C(N)| &= \left|\sum_{i=1}^{N-3}\frac{(-1)^{i+1}}{2}\cdot\frac{(N-2)\cdots(N-i-1)\cdot(i+1)}{(N-1)^{i+1}}\right|\\ &\le \frac{1}{2}\cdot\frac{(N-2)\cdots(N-m-1)\cdot(m+1)}{(N-1)^{m+1}} \le \frac{1}{2}\cdot\frac{m+1}{N-1}\\ &\le \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{4N-3}+1}{N-1}\,.\end{aligned}$$

A limita tohto posledného výrazu je už jednoducho spočítateľná. Dostávam teda, že

$$\lim_{N\to\infty}|C(N)| \le \lim_{N\to\infty}\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{4N-3}+1}{N-1} = 0,$$

a teda

$$\lim_{N\to\infty}(1-P_N(1)) = \lim_{N\to\infty}A(N) + \lim_{N\to\infty}B(N) + \lim_{N\to\infty}C(N) = \frac{1}{2}+0+0 = \frac{1}{2}\,.$$

Tým sa mi podarilo ukázať, že pravdepodobnosť (ne)prežitia prvého kovboja je jedna polovica v prípade, že kovbojov je nekonečne veľa.

Teraz sa pozriem, ako je to u N-tého kovboja pri celkovom počte N kovbojov. Podobnou úvahou, ako u prvého, môžem rozlíšiť tri možnosti v situácii, keď je N-tý kovboj nažive a ešte môže vystreliť k kovbojov (vrátane neho). Podrobnosti už vynechám. Dostanem, že pre pravdepodobnosť $W_N(k)$, že táto situácia dopadne zastrelením N-tého kovboja, platí

$$W_N(k) = \frac{1}{N-1} + \frac{N-k}{N-1}\cdot W_N(k-1) + \frac{k-2}{N-1}\cdot W_N(k-2),$$

kde $k = 2, 3, \ldots, N$ a $W_N(1) = 0$, $W_N(2) = \frac{1}{N-1}$. Podobne ako v predchádzajúcom prípade môžem tento rekurentný vzťah zjednodušiť na

$$W_N(k) = \frac{k-1}{N-1} \cdot (1 - W_N(k-1)), \quad k = 2, 3, \ldots, N.$$

Rozpísaním tohto vzťahu pre $k = N$ dostanem, že pravdepodobnosť neprežitia N-tého kovboja je

$$\begin{aligned} 1 - P_N(N) = W_N(N) &= \frac{N-1}{N-1} - \frac{N-1}{N-1} \cdot \frac{N-2}{N-1} + \frac{N-1}{N-1} \cdot \frac{N-2}{N-1} \cdot \frac{N-3}{N-1} - \cdots \\ &= 1 - V_N(N-2) = P_N(1). \end{aligned}$$

Keď teraz spočítam limitu

$$\lim_{N\to\infty} P_N(N) = 1 - \lim_{N\to\infty} P_N(1) = \frac{1}{2},$$

dostanem, že v prípade nekonečne veľa kovbojov by mala byť pravdepodobnosť (ne)prežitia posledného v poradí jedna polovica, ale v prípade nekonečne veľa kovbojov nemá zmysel hovoriť o poslednom v poradí - teda „nekonečnetom“. Tento výpočet je však možné využiť na zistenie, ako je to u tých zvyšných. Stačí ukázať, že pravdepodobnosť prežitia i-teho kovboja pri celkovom počte N kovbojov, $P_N(i)$, leží pre každé $N > 3$ v intervale $[P_N(N), P_N(1)]$ a na výpočet limity $\lim_{N\to\infty} P_N(i)$ použiť takzvanú vetu o dvoch policajtoch. Tento posledný dôkaz som sa už rozhodla sem nedávať, už som toho k tomuto príkladu napísala veľmi veľa, môžete sa nad tým skúsiť zamyslieť sami.

3. Príklad so slonom

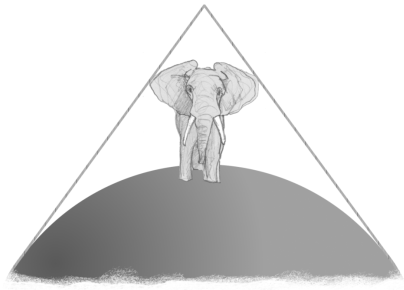
Tento príklad sa objavil na minulom ročníku v nasledovnom znení.

Príklad 4 (autori Tereza Kroulíková a Ondřej Resl). *Uvažujme Zemi jako kouli s průměrem* 12 756 km *a budovu A1 Fakulty strojního inženýrství Vysokého učení technického v Brně (dále jen FSI) jako úsečku délky* 74 m*, stojící kolmo k povrchu Země. Spočtěte o kolik centimetrů více by bylo potřeba lana, kdybychom jím obtočili právě jednou Zemi v rovině obsahující její střed oproti případu, kdy obtočíme lanem Zemi „přes budovu“ v rovině obsahující střed i úsečku reprezentující budovu, viz schématický obrázek. Fyzikální vlastnosti lana neuvažujeme. Výsledek zaokrouhlete na jedno desetinné místo.*

Obrázok k zadaniu a postup riešenia tohto príkladu je možné nájsť na stránkach olympiády, preto ho tu nebudem uvádzať. Výsledná dĺžka vyšla po zaokrúhlení 47,5 cm.

Aj tento príklad má niekoľko verzií, ktoré sa nepoužili, namiesto budovy A1 FSI v nich vystupuje slon. Pôvodné zadanie bolo celkom vtipne formulované približne takto.

Príklad 5. *Když kolem koule o velikosti Země obtočíme provázek v rovině obsahující její střed, přidáme jeden metr navíc a zvedneme provázek v jednom místě, projde touto „bránou“ slon? Viz obrázek 4.*



Obrázok 4

Na základe výsledku predchádzajúceho príkladu môžeme hneď odpovedať, že slon by s obrovskou rezervou prešiel. (Ale pokiaľ nič dopredu nevieme, výsledok môže byť dosť prekvapivý.)

Z tohto pôvodného zadania bola vytvorená druhá verzia, kde máme znova slona a hľadáme minimálnu možnú dĺžku, o ktorú musíme povraz predĺžiť. Znenie tejto pracovnej verzie je nasledovné.

Príklad 6 (autori Tereza Kroulíková a Ondřej Resl). *Když obtočíme provázek kolem koule o velikosti Země v rovině obsahující její střed, o kolik ho musíme minimálně prodloužit, aby pod ním prošel slon?*

V tomto tvare je príklad ešte neúplný, je treba najskôr matematicky zadefinovať slona, a to vôbec nie je jednoduché. (Autori v tretej, finálnej verzii zmenili slona na budovu v tvare úsečky.) Rozhodla som sa, že sa o to pokúsim. Zlákala ma predstava, že budem môcť do tohto článku okrem pomerne nezáživných úsečiek a kružníc kresliť aj oveľa zaujímavejšie krivky.

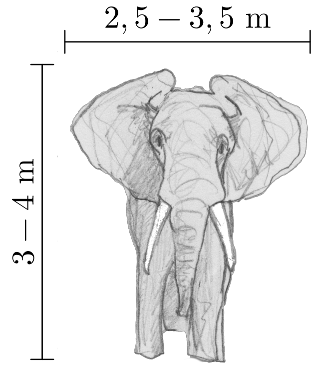
Budem predpokladať, že slon pôjde popod povraz hlavou napred, podobne, ako na obrázku 4. Je teda dôležitá jeho výška a rozpätie uší, ale nie je podstatná jeho dĺžka. Výška dospelého slona afrického sa uvádza 3–4 metre, indický je o trochu menší. Rozhodla som sa vychádzať z predpokladu, že slon meria na výšku 3,5 metra a že jeho rozpätie uší môže byť až 3 metre, a že tieto hodnoty viem len s presnosťou 0,5 metra. Je to znázornené na obrázku 5. Ďalšie parametre, ako je tvar uší a hlavy, doplním podľa potreby neskôr.

Ďalšia nejasne zadaná vec je veľkosť Zeme. Priemer Zeme s presnosťou na kilometre je na rovníku 12 756 km, cez póly je to 12 714 km. Budem predpokladať, že polomer danej gule o veľkosti Zeme v kilometroch je číslo z intervalu $[6\,357; 6\,378]$.

Ešte je vhodné si určiť, s akou presnosťou budem potrebovať výsledok. Rozumné mi príde určovať dĺžku povrazu s milimetrovou presnosťou, väčšiu presnosť už ťažko dosiahnem, pokiaľ predpokladám, že ide o reálny povraz, súčasne vzhľadom na výsledok príkladu s budovou očakávam, že výsledok vyjde rádovo v jednotkách alebo desiatkach milimetrov.

Po doplnení dostávam takéto zadanie.

Príklad 7. *Když obtočíme provázek kolem koule s poloměrem* $6\,367{,}5 \pm 10{,}5$ km *(tj. o velikosti Země), v rovině obsahující její střed, o kolik ho musíme minimálně*

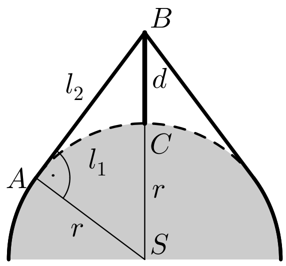


Obrázok 5

prodloužit, aby pod ním prošel slon vysoký 3,5 ± 0,5 m *s rozpětím uší* 3 ± 0,5 m*, pokud slon má tvar jako na obrázku 5? Výsledek zaokrouhlete na celé milimetry.*

Výsledkom príkladu s takto doplneným zadaním teda môže byť aj interval. Závisí to od toho, či nepresnosť pri meraní slona a polomeru gule sa prejaví aj po zaokrúhlení výsledku na celé milimetre. Uvidíme ...

Začnem jednoduchým modelom, keď namiesto slona budem tiež uvažovať úsečku o dĺžke $d = 3\ 500 \pm 500$ mm (podobne ako v zadaní použitom na olympiáde), značenie viď obrázok 6. Všetky hodnoty budem písať od začiatku v milimetroch.



Obrázok 6

Veľkosť polomeru gule v milimetroch označím r, kde r je číslo z intervalu $[6{,}357 \cdot 10^9; 6{,}378 \cdot 10^9]$. Dĺžka povrazu, ktorý leží na povrchu gule medzi bodom A, kde sa po predĺžení prestne dotýkať povrchu gule, po bod C, kde je dolný koniec úsečky, je rovná veľkosti uhla ASC v radiánoch, násobenej polomerom r. Označím ju ako l_1. Dĺžku kusu predĺženého povrazu natiahnutého od bodu A po bod B, kde je horný koniec úsečky, označím l_2. Vzdialenosť od stredu gule S po bod B je $d + r$. Z pravouhlého trojuholníka ASB dostávam, že

$$l_2 = \sqrt{(d+r)^2 - r^2} = \sqrt{d^2 + 2 \cdot d \cdot r}\,,$$

$$l_1 = r \cdot \operatorname{arctg} \frac{l_2}{r} = r \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\left(\frac{d}{r}\right)^2 + 2 \cdot \frac{d}{r}}\,.$$

Rozdiel $l_2 - l_1$ násobený dvoma je hľadaná hodnota, o koľko treba lano predĺžiť. Dostávam, že je to

$$2 \cdot (l_2 - l_1) = 2 \cdot \sqrt{d^2 + 2 \cdot d \cdot r} - 2 \cdot r \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\left(\frac{d}{r}\right)^2 + 2 \cdot \frac{d}{r}}\,.$$

Mohla by som dosadiť za d a r konkrétne hodnoty a vyčísliť tento výraz, ale mám práve po ruke len starú kalkulačku a zadávanie tak zložitých výrazov je na nej náročné. Preto rozmýšľam, ako si prácu zjednodušiť. Hneď si všimnem, že po úprave

$$\begin{aligned} 2 \cdot (l_2 - l_1) &= 2 \cdot r \cdot \left(\sqrt{\left(\frac{d}{r}\right)^2 + 2 \cdot \frac{d}{r}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\left(\frac{d}{r}\right)^2 + 2 \cdot \frac{d}{r}} \right) \\ &= 2 \cdot r \cdot f\left(\sqrt{\left(\frac{d}{r}\right)^2 + 2 \cdot \frac{d}{r}} \right) = 2 \cdot r \cdot f(x_0), \end{aligned}$$

kde $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$ a $x_0 = \sqrt{\left(\frac{d}{r}\right)^2 + 2 \cdot \frac{d}{r}}$ je veľmi malé číslo. Predpokladala som, že $3 \cdot 10^3 \leq d \leq 4 \cdot 10^3$ a $6{,}357 \cdot 10^9 \leq r \leq 6{,}378 \cdot 10^9$, z toho dostávam, že $9{,}699 \cdot 10^{-4} < x_0 < 1{,}122 \cdot 10^{-3}$.

Namiesto funkcie $f(x)$ môžem teda použiť jej rozvoj do Taylorovho radu so stredom v nule, to je

$$f(x) = x - \operatorname{arctg} x = x - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \right) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \cdots\,.$$

Ak funkciu $f(x)$ nahradím prvým členom tohto jej rozvoja, dostanem výsledok s chybou ch, kde

$$|ch| \leq 2 \cdot r \cdot \frac{x_0^5}{5} = 2 \cdot r \cdot \frac{\left(\sqrt{\left(\frac{d}{r}\right)^2 + 2 \cdot \frac{d}{r}} \right)^5}{5} < 2 \cdot 6{,}4 \cdot 10^9 \cdot \frac{1{,}122^5 \cdot 10^{-15}}{5} \ll 10^{-4}.$$

Pretože ma zaujíma výsledok zaokrúhlený na celé milimetre, takáto malá chyba ho vôbec neovplyvní. Môžem teda skutočne počítať výsledný rozdiel dĺžok ako

$$2 \cdot (l_2 - l_1) \approx 2 \cdot r \cdot \frac{x_0^3}{3} = 2 \cdot r \cdot \frac{\left(\sqrt{\left(\frac{d}{r}\right)^2 + 2 \cdot \frac{d}{r}} \right)^3}{3} = 2 \cdot \frac{\left(\sqrt{\frac{d^2}{r} + 2 \cdot d} \right)^3}{3\sqrt{r}}\,,$$

kde z posledného tvaru vidím, že najväčšiu hodnotu tento výraz nadobudne pre najväčšie možné d a najmenšie možné r a naopak. Po dosadení týchto krajných hodnôt pre d a r dostávam, že

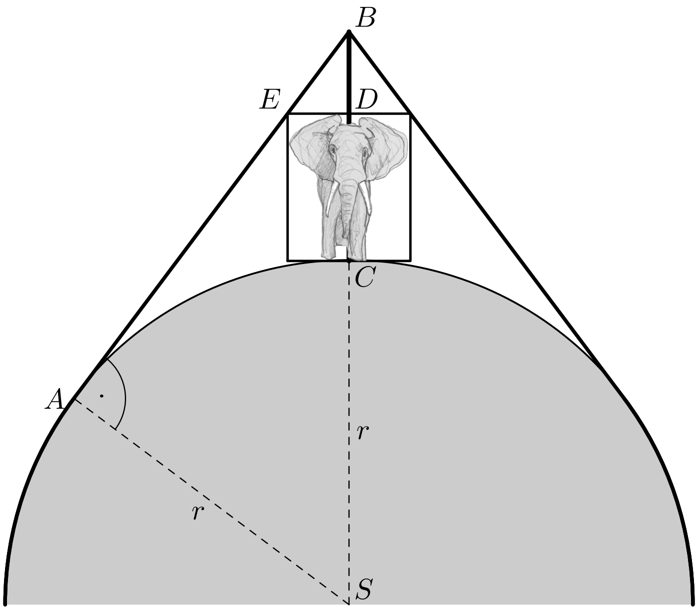
$$3{,}89 \text{ mm} \leq 2 \cdot (l_2 - l_1) \leq 5{,}98 \text{ mm},$$

tieto hodnoty zaokrúhlim na celé milimetre a dostávam, že pokiaľ ide o úsečku dlhú 3–4 metre, stačí povraz predĺžiť o 4–6 milimetrov.

Teraz sa vrátim od úsečky ku slonovi. Pokiaľ napnem povraz na úsečku BC dĺžky 3 m, aký veľký slon by pod ňou prešiel? Mám podozrenie, že skoro rovnako vysoký, lebo uhol, ktorý zviera povraz s úsečkou BC, je veľmi blízky pravému uhlu. Overím si toto podozrenie aj výpočtom. Platí

$$\sin(\sphericalangle ABS) = \frac{r}{|BC| + r} \approx \frac{6{,}4 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^2 + 6{,}4 \cdot 10^9} > 1 - \frac{3}{6{,}4} \cdot 10^{-7}.$$

Nad slonom je teda povraz skoro vodorovný. Spočítam, v akej výške sa nachádza na povraze bod E, ktorý je od úsečky BC vzdialený o 1 750 mm, čo je podľa predpokladu maximálna vzdialenosť konca ucha slona od stredu hlavy. Viď obrázok 7. Z podobnosti trojuholníkov ASB a DEB dostávam, že je to



Obrázok 7

$$|BD| = \frac{|AB| \cdot |DE|}{r} = \frac{\sqrt{|BC|^2 + 2 \cdot r \cdot |BC|} \cdot |DE|}{r} \approx |DE| \cdot 10^{-3} = 1{,}75,$$

čiže necelé dva milimetre, zanedbateľná hodnota v porovnaní s tým, ako presne určujem výšku slona. Takže malé sklamanie – nebudem teraz kresliť žiadne elipsy a ďalšie podobné krivky, ktorými by som popisovala tvar uší slona, stačí slona popísať ako kváder vysoký 3–4 metre a široký 2,5–3,5 metra, výsledok to aj tak neovplyvní.

Záver teda je, že aby pod povrazom prešiel slon vysoký 3−4 metre a široký 2,5−3,5 metra, stačí ho predĺžiť o 6 milimetrov.

Pričom, pre zaujímavosť, povraz mal pôvodne dĺžku medzi $2\pi \cdot 6{,}357 \cdot 10^9 = 3{,}994 \cdot 10^{10}$ a $2\pi \cdot 6{,}378 \cdot 10^9 = 4{,}007 \cdot 10^{10}$ milimetrami, je teda treba ho predĺžiť zhruba o jednu desať miliardtinu pôvodnej dĺžky.

Viera Štoudková Růžičková, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: `ruzickova@fme.vutbr.cz`