BYL JSEM U TOHO!
aneb
50 let matematické teorie metody konečných prvků

ALEXANDER ŽENÍŠEK

Abstrakt. Rozvoj a užití metody konečných prvků (MKP, the finite element method) byl spjat v inženýrských kruzích (hlavně v USA) s rozvojem a užitím výkonných samočinných počítačů. Proto začala být MKP rozvíjena až v polovině padesátých let, a to zejména ve stavebním a leteckém inženýrství.

V tomto článku jsou popsány hlavně začátky matematické teorie MKP v letech 1967–1973, které díky jednomu bystrému brněnskému inženýrovi byly v šedesátých letech pouze v rukou matematiků z provinciálního Brna, jak si to pamatuje autor článku. Ostatní pamětníci popsaných událostí jsou již po smrti. Zbytek matematického světa se s matematikou MKP seznamoval z článků brněnských autorů.

Dne 17. dubna 1969 odstoupil z funkce prvního tajemníka KSČ Alexander Dubček a tím i formálně skončil poslední záchvěv pražského jara 1968. Většina Čechů a Slováků asi toto datum zapomněla; já si je pamatuji jenom proto, že matematická teorie metody konečných prvků měla v ten den právě jeden rok.

Je ovšem nutné definovat, čím rozumíme první den matematické teorie. Ztotožňuji se s názorem, že je to datum zaslání článku, který vyšel první v rámci této teorie v matematickém časopise. První matematický článek o metodě konečných prvků vyšel v roce 1968 v Numerische Mathematik, měl název *On the finite element method*, autorem byl Miloš Zlámal a pod jeho jménem stálo: Received April 17, 1968 – viz [15]. (Můj článek [20] sice došel do Aplikací matematiky 28. 3. 1968, ale vyšel až v roce 1969. Oba články [15, 20] by nespatřily světlo světa, kdyby se jejich autoři neseznámili v roce 1967 s Ing. Jiřím Kratochvílem, CSc., odborným asistentem na stavební fakultě Vysokého učení technického (FAST VUT) v Brně, iniciátorem dvojice článků [11, 12].)

Pojem „metoda konečných prvků“ potřebuje alespoň minimální výklad. Je to metoda pro nalezení přibližných řešení variačních problémů. Variačním problémem přitom rozumíme problém, ve kterém se minimalizuje (resp. maximalizuje) nějaký kvadratický funkcionál na třídě přípustných funkcí, které se často nazývají stavy. Nejjednodušším a nejpřístupnějším příkladem je princip *minima potenciální energie*, podle kterého se ze všech přípustných stavů realizuje ten, ve kterém je potenciální energie dané soustavy minimální. (Ještě konkrétněji: představte si kuličku, kterou vložíme do misky kulovitého tvaru, a to nikoliv na dno. Kulička v misce

2010 *MSC.* Primární 65N30.
Klíčová slova. Metoda konečných prvků.

chvíli kmitá, až se ustálí na dně misky. Každá z poloh kuličky v misce je přípustná, na dně má však kulička potenciální energii minimální.)

Formulovat nějaký variační problém matematicky vyžaduje jisté úsilí. Proto je velké štěstí, že existují třídy variačních problémů; v každé třídě se problémy liší pouze geometrickým tvarem oblasti, na které jsou definovány, a dodatečnými podmínkami (většinou okrajovými a počátečními) a materiálovými konstantami. Máme-li dva variační problémy téže třídy dané na různých oblastech a s různými vedlejšími podmínkami, jde o dva matematicky různé problémy, z nichž každý se musí řešit samostatně. Jsou to však velmi podobné matematické problémy. Donedávna (tj. do konce šedesátých let dvacátého století) jediný způsob, jak tyto problémy řešit, bylo sestavit tzv. Eulerovu rovnici příslušného problému. Dostali jsme tak počáteční (či počáteční-okrajový) problém pro parciální diferenciální rovnici. Z matematického hlediska sestavení takového počátečního-okrajového problému znamená vyřešení původního variačního problému, protože byl formulován snazší matematický problém. Z praktického hlediska ovšem bylo nutné pokusit se o řešení tohoto snazšího problému. Drtivou většinu těchto problémů nelze řešit analyticky a z přibližných metod byla k dispozici pouze tzv. *metoda sítí*. Ta se však neumí dobře vypořádat s nepravidelným tvarem oblastí a s Neumannovou okrajovou podmínkou (či jinou *nestabilní* okrajovou podmínkou). Situace byla pro matematiky v polovině šedesátých let dosti tristní: o metodě sítí mohli pilně teoretizovat, dobré výsledky však nedávala. Nedobře na tom byla také Ritzova variační metoda vzhledem ke své nestabilitě. A tu přišel Zlámal se svým článkem a téměř přes noc (přesněji během necelého roku) se stal světovou jedničkou v numerické analýze. Vysvětlím proč.

Vítězslav Nezval napsal ve čtvrtém zpěvu Edisona:

> Je to úmysl a trochu náhoda
> stát se presidentem svého národa.

Stejně je to úmysl (pokud tím nazýváme ctižádostivou píli) a trochu náhoda stát se světovou jedničkou ve svém oboru. Miloš Zlámal díky jednomu svému kladnému povahovému rysu této náhodě dosti pomohl. Tím jeho pozitivem byla ochota naslouchat každému inženýrovi a snažit se mu pomoci, pokud žádal o pomoc. A protože jako ředitel výpočetního centra VUT v Brně se často setkával s inženýry, kteří tam počítali na tehdy moderním počítači DATASAAB D21, zajímal se také o jejich práci. V roce 1967 tam často počítali ve dvojici inženýři Kratochvíl a Leitner. Protože Zlámal skoro o ně zakopával, jednoho dne mu to nedalo a zeptal se, co pořád pilně počítají. A k svému velkému překvapení se dozvěděl jemu neznámý výraz: *metoda konečných prvků*. Počítali touto metodou statický výpočet jedné přehrady. Ing. Jiří Kratochvíl, potom dlouhá léta profesor a DrSc., byl totiž duše zvídavá a vypěstoval si už před mnoha lety zvyk sledovat všechnu dostupnou časopiseckou inženýrskou literaturu, která jen trochu souvisela s jeho oborem. A tak, ačkoliv byl vodař, alespoň okrajově, ale pravidelně sledoval americké letecké žurnály (ve vědecké knihovně Vojenské akademie Antonína Zápotockého (VAAZ) byly v Brně k dispozici), a tak jednou na počátku roku 1965 ho v časopisu AIAA zaujaly konstrukce trupů letadel sestavené z trojúhelníčků a malůvky různých trojúhelníkových prvků. Dočetl se tam o *finite element method*, což si pro sebe přeložil jako *metoda konečných prvků*. (Přirozenější překlad metoda konečného prvku, který byl později propagován, se neujal.) Začal studovat články podrobně.[1] Po důkladnějším zvážení se rozhodl pokusit se o samostatnou praktickou aplikaci: dal si za úkol vytvořit v praxi aplikovatelný program pro statické výpočty zemních hrází a přehrad. Úkol nelehký: nejenže se musel doučit mnohé z programování, ale musel také rozřešit to nejtěžší, totiž sestavit algoritmus vytvoření celkové matice tuhosti a vektoru pravé strany výsledné soustavy lineárních algebraických rovnic z elementárních matic a vektorů. To v článcích totiž nebylo. Jak řešit velkou soustavu lineárních algebraických rovnic co nejrychleji, dal za úkol svému spolupracovníku Ing. Františku Leitnerovi z Hydroprojektu Brno, který byl mým bridžovým partnerem. Ten mě také seznámil v březnu 1967 s Ing. Kratochvílem, protože podle Ing. Kratochvíla už potřebují matematika, a František kromě mne jiného matematika osobně neznal (ačkoliv já měl k matematikovi ještě dost daleko). Hned při našem prvním setkání mi Ing. Kratochvíl půjčil Syngeovu knihu [5], kde jsem nalezl interpolační teorém pro hladké funkce, které jsou na trojúhelnících aproximovány lineárními polynomy. Zajímavé je, že tento teorém respektuje *podmínku maximálního úhlu*, která se začala systematicky studovat až v devadesátých letech. Jedním z prvních takových článků byl článek [41].

V říjnu 1967 mi dal Ing. Kratochvíl fotografickou kopii článku inženýrů Pin Tonga a T. H. H. Piana [10] z časopisu Solids and Structures o konvergenci metody konečných prvků. (Tím, že jsem ten článek „přeložil“ do matematiky, něco zobecnil a přidal, přizpůsobil pasáže ze slavné Michlinovy knihy [2], užil též [4], a něco navíc vymyslel, jsem napsal obhajovatelnou kandidátskou práci, kterou jsem v hrubém rukopise dokončil 5. března 1968.)

Takový byl stav, když v listopadu 1967 dal Ing. Kratochvíl svou první informaci o MKP prof. Zlámalovi (jako řediteli výpočetního centra VUT v Brně), když se Kratochvíla zeptal, co s Leitnerem u nich v Laboratoři počítacích strojů (LPS) pořád počítají. Popsal mu v ní princip metody a na co ji konkrétně aplikují. Zlámalova první reakce byla: „No, myslím, že metoda sítí je lepší“.

Zlámal však rozpoznal v inženýrském přístupu polozapomenutou Courantovu myšlenku z roku 1943 publikovanou v [1], která zapadla proto, že tehdy nebyly počítače, na kterých by se dala realizovat. Proto mu to nedalo, vyhledal Kratochvíla a nechal si od něj podrobněji o MKP poreferovat. Dozvěděl se tak mimo jiné o do té doby známých interpolačních polynomech 2. a 3. stupně na trojúhelníku, které dodnes inženýři nazývají Veubekův prvek [7] a Holandův prvek [13] podle jejich prvních uživatelů. Navíc ukázal Kratochvíl Zlámalovi Zienkiewiczovu knihu [9], kterou mu zrovna poslali z Londýna.

Protože Zlámal zrovna neměl na čem pracovat, dal si za cíl dokázat konvergenci metody konečných prvků při použití Veubekova prvku. Práce se mu tak dařila, že

[1] Jedním z nejznámějších článků byl článek [3], kde místo *finite element method* se užíval ještě pojem *stress and displacement analysis*.

dokázal konvergenci i pro Holandův prvek a navíc zkonstruoval trojúhelníkový C^1-prvek, tj. polynom jednoznačně určený takovými parametry, že globální funkce, která je pomocí něj na triangulaci zkonstruovaná, je spojitá i s oběma svými prvními parciálními derivacemi v celé ztriangulované oblasti s polygonální hranicí. To už byl velký výsledek, a když po vtipném triku dokázal také příslušný interpolační teorém, byl článek hotov.

V květnu 1968 sice v Numer. Math. vyšel článek amerických autorů Birkhoffa, Schultze a Vargy [14] na podobné téma – pojednával o konvergenci Galerkinovy–Ritzovy metody při použití Ahlinových polynomů z roku 1964 (viz [6]), což jsou vlastně obdélníkové C^m-prvky. Vzhledem k malé použitelnosti obdélníkových prvků byl Zlámalův výsledek obecnější, navíc originálnější, měl ve svém názvu MKP a poukazoval na současné inženýrské trendy. (Byl jsem zrovna u Zlámala, když poprvé článek [14] otevřel. Zarazil se, zbledl, ale po chvíli řekl: „To jsou jen obdélníkové prvky a o MKP zde nepíšou nic!“) Zlámal je tedy první matematik, který ve své práci užil výraz metoda konečných prvků. Svým článkem Zlámal poukázal na jednu oblast matematiky velmi málo zmapovanou – její mapa měla velký nápis HIC SUNT LEONES. Zajímavé je, že v roce 1968 publikovali čtyři různí inženýři stejný trojúhelníkový C^1-prvek – ovšem bez příslušného interpolačního teorému, pouze s poukazem na možnosti při řešení tenkých desek (viz [16, 17, 18, 19]). Tento C^1-prvek je zadán 21 parametry: v každém vrcholu trojúhelníkového prvku funkční hodnota, obě první parciální derivace a všechny tři druhé parciální derivace. (Zatím jsme předepsali 18 hodnot.) Poslední tři hodnoty jsou tyto: v půlícím bodě strany P_iP_j $(i = 1, 2,\ j = 2, 3,\ i < j)$ je předepsána derivace podle normály. Tato normála je orientována tak, že při pohledu v jejím směru je vrchol P_i po naší levé ruce.

I když byl ve své podstatě Zlámal vždy vlk – samotář, v té době jsme si to ani neuvědomovali. Ing. Kratochvíl se u něj pravidelně při svých návštěvách v LPS stavoval, Zlámal se neměl kromě mne s nikým o MKP možnost bavit a tak jsme dosti často spolu všichni tři družně sedávali v Zlámalově pracovně. Tento kolektiv se na jaře 1968 rozrostl o dalšího člena: programátora Ing. Holušu – budoucí programátorskou jedničku přes MKP v Československu. Zlámal totiž chtěl svoje výsledky ověřit v početní praxi a pověřil proto Holušu, aby mu jeho algoritmus pro výpočet tenké desky při použití jeho trojúhelníkového C^1-prvku naprogramoval.

Kratochvílovy programy obsahovaly jako konečněprvkovou násadu funkce, které byly po trojúhelnících polynomy prvního stupně, takže Holušova úloha nebyla lehká: musel Kratochvílovy programátorské postupy zobecnit pro polynom pátého stupně, kde kromě derivací prvního a druhého řádu vystupovaly také derivace podle normály. Holuša vždy říkal, že programovat konečné prvky je snadná věc (ale v závorce dodával, že hledat chyby při ladění je velmi obtížné). A ladění při tak komplikovaném programu bylo k zoufání, protože výsledky testovacích příkladů byly takové neslané nemastné – zkrátka nepřesvědčivé vzhledem k teoreticky předpovězené přesnosti. Zlámal se ptal Kratochvíla: „A počítal tou metodou vůbec někdo něco.“ Kratochvíl se jen smál a říkal Zlámalovi, aby byl trpělivý. V polovině července 1968 našel Holuša po několikanásobné kontrole chybu v jednom indexu a testovací příklady najednou vyšly s přesností na osm platných číslic

– čili naprosto přesvědčivě potvrzená teorie. Zlámal týden na to odjel na konferenci do Edinburgu a tam požádal předsedajícího, aby směl hovořit o něčem naprosto jiném než na začátku roku oznámil. To byl první mezinárodní referát o metodě konečných prvků.

Když se metoda konečných prvků osvědčila i v tak komplikovaném případě jako průhyb tenkých desek, projevil se Kratochvílův cit pro situaci a jeho organizační talent. Navrhl Zlámalovi, aby v první polovině roku 1970 proběhl v LPS kurs z metody konečných prvků pro inženýry z různých podniků a vysokých škol. Aby měl kurs důstojnou úroveň, musela se k němu připravit dobrá skripta [26]. Také sestavit osnovu kursu dalo jistou práci. Proto Kratochvíl navrhl až rok 1970. V kursu měli přednášet Zlámal (jako ředitel LPS) s Kratochvílem a Holušou; já jsem se podílel na skriptech. Kurs měl velký ohlas a úspěch a několikrát se opakoval.

Kratochvíl koncem roku 1967 seznámil s MKP také své dva přátele z FAST: prof. Ing. Vladimíra Koláře, DrSc., a prof. Ing. Ladislava Mejzlíka, DrSc. Čilý Kolář začal v roce 1969 organizovat napsání knihy [30], která vyšla v polovině roku 1972. Byla to první česká učebnice o MKP.

Po vstupu vojsk jsme se ještě více zakousli do práce. Zlámal psal současně dva články; jeden o algoritmizaci MKP [21], druhý o redukci parametrů [22] – oba vyšly krátce po sobě v Numer. Math. a spolu s prvním článkem z roku 1968 mu vynesly pozvání do USA a Francie celkem na tři měsíce za velmi výhodných finančních podmínek. Odjel koncem roku 1969.

Já (kromě práce na článku [23], který byl napsán na základě věty o hustotě $C^\infty(\overline{\Omega})$ v libovolném Sobolevově prostoru na oblasti Ω) jsem začal v říjnu 1968 budovat hierarchii interpolačních polynomů na trojúhelníku – byla to cesta dlouhým tmavým tunelem a směšné na celé věci je, že z matematiky jsem na to nepotřeboval nic, nepočítám-li vědomost, že součet přirozených čísel od jedné do n je roven $\frac{1}{2}\,n(n+1)$. V hlavě se mi rozsvítilo někdy na začátku roku 1969 při večerních zprávách tu sobotu, kdy dávali druhé pokračování Randalla a Hopkirka. Článek [24], který mi udělal jméno, jsem pak sepsal během měsíce. Stačilo dokázat ještě jedno duchaplnější lemma a zobecnit trochu Zlámalovo důkazové schéma z jeho prvního článku o MKP. Zlámal tento můj výsledek odvezl na podzim 1969 do USA a spolu s prof. J. H. Bramblem jej oděli do lepšího hávu, tj. příslušné interpolační teorémy dokázali v sobolevovských normách [25].

V druhé polovině roku 1970 začal Zlámal pracovat na své koncepci zakřivených trojúhelníkových C^0-prvků. První část [32] tohoto díla vyšla v roce 1973 v SIAM J. Numer. Anal. a pojednávala o ideálních zakřivených trojúhelníkových prvcích, jejichž křivá strana je totožná s částí hranice dané oblasti Ω. Druhá část [35] pojednávala o reálných křivých trojúhelnících a numerické integraci na nich. Při psaní této práce udělal Zlámal jen jednu chybu: referoval o dosažených výsledcích v průběhu práce při jedné ze svých zahraničních cest. Prof. Raviart z Paříže mi v roce 1975 řekl: „Věděli jsme, že ještě nějakou dobu potrvá než Zlámal článek pošle do tisku. Museli jsme jej předehnat. Dělali jsme na tom s Ciarletem téměř dnem i nocí a práci [29] o křivých izoparametrických prvcích a numerické integraci na nich jsme uveřejnili v Azizově knize o matematických základech metody konečných prvků, která vyšla v roce konání konference (tj. 1972).“

Během roku 1969 jsem se pokusil zkonstruovat trojrozměrný C^1-prvek na čtyřstěnu. Byl to polynom 9. stupně, takže k jeho jednoznačnému určení bylo zapotřebí

$$N = \frac{1}{6}\,(n+1)(n+2)(n+3) = \frac{1}{6}\cdot 10\cdot 11\cdot 12 = 220$$

parametrů. Jak jsem dospěl k číslu $n = 9$? V jedné dimensi je nejjednodušším C^1-prvkem Hermiteův polynom 3. stupně na úsečce, ve dvou dimenzích je to polynom 5. stupně na trojúhelníku. Zdálo by se, že ve třech dimenzích to bude polynom 7. stupně na čtyřstěnu. Je však třeba podívat se na vztah mezi polynomy v jedné a dvou dimenzích. Uvažujme proto již známý polynom 5. stupně $p(x,y)$, který je C^1-prvkem na trojúhelníku. Na každé straně trojúhelníka máme po parametrizaci polynom 5. stupně, který je jednorozměrným C^2-prvkem. Ověřme to: Nechť $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2)$ jsou dva vrcholy trojúhelníka. Parametrická vyjádření strany P_1P_2 lze napsat ve tvaru

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)s,\ y = y_1 + (y_2 - y_1)s,\ s \in \langle 0,1\rangle.$$

Hodnoty polynomu $p(x,y)$ na straně P_1P_2 vyjadřuje funkce

$$g(s) = p(x_1 + (x_2 - x_1)s, y_1 + (y_2 - y_1)s),$$

takže $g(0) = p(P_1)$, $g(1) = p(P_2)$. Pomocí věty o derivaci složené funkce zjistíme, že

$$g'(0) = (x_2 - x_1)\frac{\partial p}{\partial x}(P_1) + (y_2 - y_1)\frac{\partial p}{\partial y}(P_1),$$
$$g'(1) = (x_2 - x_1)\frac{\partial p}{\partial x}(P_2) + (y_2 - y_1)\frac{\partial p}{\partial y}(P_2).$$

Podobně (jenom složitěji) lze zjistit hodnoty $g''(0)$ a $g''(1)$. Tedy polynom 5. stupně $g(s)$ je jednorozměrným C^2-prvkem.

Extrapolujeme-li tuto skutečnost na vztah mezi polynomy dvou a tří dimenzí, usuzujeme, že na trojúhelníkové stěně čtyřstěnu musíme dostat dvojrozměrný C^2-prvek. Tím je ve dvou dimenzích polynom 9. stupně. Odtud dostáváme $n = 9$. Čísla 3, 5 a 9 jsou speciálními případy obecného vztahu

$$n(d) = 2^d + 1 \quad (d = 1, 2, 3, \dots).$$

O C^m-prvcích na čtyřstěnu mi vyšly články [28, 33, 36].

V roce 1972 začalo Brno ztrácet svou výjimečnost, protože v matematických časopisech a sbornících konferencí se začaly objevovat MKP články mimobrněnských matematiků (jako již zmíněný článek [29]). V tomto období vyšly dva články dalších dvou Brňáků: Melkese [27] a Koukala [31]. První má tu prioritu, že se v jeho názvu objevuje nelineární problém, druhý článek vtipně navazuje na konstrukce trojúhelníkových C^m-prvků uvedených v [24].

Moje „aritmetické“ období v MKP uzavřela tato trojice článků: [33] (rukopis jsem zaslal v prosinci 1970 ze Swansea), [36] (zde jsem popsal konstrukci čtyřstěnných C^m-prvků pro obecné m; musel jsem užít triky, které jsem v 2D nepotřeboval) a [37] (který jsem napsal na žádost Raviarta pro nové RAIRO[2], které začali řídit Ciarlet s Raviartem).

S napsáním článku [37] je spojena jedna zajímavá historka: O prázdninách v roce 1973 koupil Zlámal do knihovny LPS knihu *An analysis of the finite element method* od amerických matematiků Stranga a Fixe [34]. Byla to první matematická kniha o MKP. Našel jsem v ní tento výrok: „Ženíšek proved the following result: *To achieve piecewise polynomials of class C^m on an arbitrary triangulation of a polygonal domain, the nodal parameters must include all derivatives of order less or equal to $2m$ at the vertices of the triangle.*“ Žádnou takovou větu jsem nedokázal. Když to však Strang s Fixem považují za zajímavý výsledek, dokážu to a napíšu o tom článek. U Balatonu jsem tak byl připraven, co Raviartovi odpovím na jeho výzvu: dokážu větu o nutné podmínce existence trojúhelníkového C^m-prvku a článek bude mít název *A general theorem on triangular finite C^m-elements.* To zatím nedokázané moje tvrzení od Stranga a Fixe jsem potom uvedl jako *summary* svého článku. (Článek [37] byl zase jenom „aritmetický“.)

Ke konci roku 1984 oslavoval Zlámal svou šedesátku v Mariánských Lázních. Byl jsem také pozván, ale těsně před odjezdem jsem si ošklivě poranil koleno. Tak jsem ležel doma a koukal do stropu. Najednou jsem si uvědomil toto: ještě nikdo neinterpoloval **jednoduché složitějším**. Tato neobvyklá interpolace je založena na několika Zlámalových výsledcích a jednom neobvyklém obratu, který je popsán v Lemmatu 31.19 (viz Dodatek 3). S mnohaletým odstupem vidím, jaký to byl hvězdný okamžik. Tenkrát (v roce 1984) jsem byl jenom rozčilen. Ta cesta od setkání s Ciarletem v roce 1978 (kdy jsem dostal zelenou pro řešení svých problémů) byla téměř na den šest let dlouhá a konečně skončila. Stal jsem se matematikem. Teď už stačí tento skvělý trik aplikovat. Dá to sice práci, ale bude to práce radostná. Svým způsobem to velká matematika nebyla; byl to pouze neobvyklý nápad. To Zlámal pro svou konstrukci *ideálních zakřivených trojúhelníkových prvků* potřeboval hodně matematiky.

Rozhodl jsem se získaný trik aplikovat nejprve na lineární problémy, ve kterých jsem byl doma. Řekl jsem si, že nejvhodnější název článku bude *How to avoid the use of Green's theorem in the Ciarlet-Raviart theory of variational crimes* a že manuscript pošlu Ciarletovi, který s tím nenadělá žádné cavyky. Protože jsem však svůj trik interpolovat **jednoduché složitějším** chtěl zobecnit na libovolný trojúhelníkový C^0-prvek, práce na článku mi trvala dost dlouho a byl jsem s ní hotov až v roce 1986. Zatím jsem se na Equadiffu 1985 v Brně spojil se Slávou Feistauerem, abychom můj velký trik aplikovali na nelineární eliptické problémy [40]. Ciarlet i Zlámal nám záviděli. No jo, ale oni ve svých modelových úvahách předepisovali na celé hranici uvažované oblasti pouze homogenní Dirichletovu okrajovou podmínku.

Vraťme se ale k prof. Zlámalovi. Články [32] a [35] zakončily Zlámalovo stacionární (či eliptické) období. Od roku 1973 začal pracovat na evolučních problémech, které řešil kombinací metody konečných prvků a diferenční metody. Zprvu

[2]Rev. Française Automat. Informat. Recherche Opérationnelle.

to byla lineární rovnice pro vedení tepla, kde se věnoval zejména vícekrokovým metodám; od roku 1975 začal analyzovat různé nelineární typy. V období 1975–1978 navíc zásadním způsobem přispěl k teoretickým otázkám superkonvergence MKP. V období 1981–1988 se věnoval jednak řešení kvazistacionárního magnetického pole v nestejnorodém prostředí a dále metodě konečných prvků aplikované na rovnice polovodičů. Pozoruhodné je, že kromě zásadních matematických výsledků publikovaných v renomovaných amerických časopisech se vždy zúčastnil na přípravě algoritmu a podstatně tak přispěl k praktické realizaci řešení problému pomocí průmyslového programu.

Prof. Zlámal nenapsal žádnou knihu – byl příliš soustředěn na hledání řešení praktických problémů. Nevydržel u žádné problematiky přitom tak dlouho, aby ji zcela vyčerpal. Obrazně řečeno: jeho brázda byla široká, ale ne tak hluboká, aby tam žádné brambory nezůstaly. A při pečlivém zkoumání člověk zjistil, že jich tam zůstalo požehnaně. Je to moje dobrá zkušenost.

Z formálních uznání stojí za zmínku dvě: řadu let byl předsedou matematického kolegia ČSAV a obdržel čestný doktorát Technische Universität Dresden.

Prof. Zlámal zemřel náhle ve věku 73 let dne 22. června 1997. Seznam jeho článků má 70 položek, z toho je 47 věnováno metodě konečných prvků. Od roku 1968 pracoval jenom na této metodě. Z těch 47 je 18 článků zcela zásadních.

Zlámalovo velké štěstí bylo, že první inženýr na evropském kontinentě, který začal pracovat v metodě konečných prvků, působil v Brně. Další vývoj událostí už však náhoda nebyla.

Když vědecká rada strojní fakulty VUT v Brně přála prof. Zlámalovi k jeho sedmdesátinám, prozradil na sebe: „Když jsem v roce 1961 přešel z přírodovědecké fakulty brněnské univerzity na strojní fakultu, uvědomil jsem si, že musím dělat matematiku jinak než jak se dělá na univerzitě.“ A to se mu podařilo dokonale.

Prof. Jiří Kratochvíl zemřel ve čtvrtek 11. 10. 2018. Dozvěděl jsem se to v neděli 14. 10. v 15:30, kdy jsem dokončil korekturu textu „Byl jsem u toho!“ a zavolal na mobil prof. Kratochvíla, kdy jsem ho chtěl potěšit hotovým článkem. Bohužel jsem již mluvil pouze s jeho ženou, paní Alicí Kratochvílovou, která mi sdělila velmi smutnou zprávu, že Jiří zemřel. Řekla mi také, že rozloučení s profesorem Kratochvílem se bude konat 19. října 2018 ve 12 hodin v obřadní síni Krematoria na Jihlavské. Z aktivních pamětníků brněnské školy MKP jsem tak zůstal jenom já, protože Ing. Libor Holuša zemřel o 4 týdny později, ve čtvrtek 8. 11. 2018.

Reference[3]

[1] R. Courant: *Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations*, Bull. Amer. Math. Soc. **49** (1943), 1–23.

[2] S. G. Michlin: *Problema minimuma kvadratičnogo funkcionala*, Moskva, 1952.

[3] M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, L. J. Topp: *Stiffness and deflection analysis of complex structures*, J. Aero. Sci. **23** (1956), 805–823.

[3] Články, resp. knihy jsou uvedeny chronologicky od nejstaršího k nejmladšímu. Tituly, které vyšly v témže roce jsou uspořádány takto: matematický titul má přednost; jinak podle abecedy. Náskok brněnských matematiků před zbývajícím matematickým světem končí okolo roku 1973. To lze ověřit v podrobné bibliografii Ciarletovy knihy [39]. Informace o Sobolevových prostorech

[4] S. G. Michlin: *Variacionnyje metody v matematičeskoj fizike*, Moskva, 1957.
[5] J. L. Synge: *The Hypercircle in Mathematical Physics*, Cambridge University Press, 1957.
[6] A. C. Ahlin: *A Bivariate Generalization of Hermite's Interpolation Formula*, Math. Comp. **18** (1964), 264–273.
[7] B. Fraeijs de Veubeke: *Displacement and equilibrium models in the finite element method*, in Stress Analysis (O. C. Zienkiewicz & G. S. Holister, Editors), 145–197, London: Wiley, 1965.
[8] J. Nečas: *Les Méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques*, Academia, Prague; Masson, Paris, 1967.
[9] O. C. Zienkiewicz, Y. K. Cheung: *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*, London, McGraw Hill, 1967.
[10] T. H. H. Pian, P. Tong: *The convergence of a finite element method in solving linear elastic problems.* International J. Solids and Structures **3** (1967), No. 5, 865–879.
[11] J. Kratochvíl, F. Leitner: *Metoda konečných prvků a její aplikace v rovinných úlohách pružnosti. I.*, Stavebnícky časopis **16** (1968), 65–82.
[12] J. Kratochvíl, F. Leitner: *Metoda konečných prvků a její aplikace v rovinných úlohách pružnosti. II.*, Stavebnícky časopis **16** (1968), 201–218.
[13] I. Holand, P. G. Bergan: *Higher-order finite element for plane stress*, Proceedings ASCF, EM 2, 1968, 698–702.
[14] G. Birkhoff, M. H. Schultz, R. S. Varga: *Piecewise Hermite interpolation in one and two variables with applications to partial differential equations*, Numer. Math. **11** (1968), 232–256.
[15] M. Zlámal: *On the finite element method*, Numer. Math. **12** (1968), 394–409.
[16] J. H. Argyris, I. Fried, D. S. Scharpf: *The TUBA family of plate elements for the matrix displacement method*, The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society **72** (1968), 701–709.
[17] W. Bosshard: *Ein neuses vollverträgliches endliches Element für Plattenbiegung*, Abhandlungen der Internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochbau, Zürich, 1968.
[18] M. Visser: *The finite element method in deformation and heat conduction problems*, Delft, 1968.
[19] K. Bell: *A refined triangular plate bending element*, Internat. J. Numer. Methods Engrg. **1** (1969), 101–122.
[20] A. Ženíšek: *Konvergence metody konečných prvků pro okrajové problémy systému eliptických rovnic*, Apl. mat. **14** (1969), 355–377 .
[21] M. Zlámal: *On some finite element procedures for solving second order boundary value problems*, Numer. Math. **14** (1969), 42–48.
[22] M. Zlámal: *A finite element procedure of the second order of accuracy.* Numer. Math. **14** (1970), 394–402.
[23] A. Ženíšek, M. Zlámal: *Convergence of a finite element procedure for solving boundary value problems of the fourth order.* Internat. J. Numer. Methods Engrg, **2** (1970), 307–310.
[24] A. Ženíšek: *Interpolation polynomials on the triangle.* Numer. Math. **15** (1970), 283–296.
[25] J. H. Bramble, M. Zlámal: *Triangular elements in the finite element method.* Math. Comp. **24** (1970), 809–820.
[26] L. Holuša, J. Kratochvíl, A. Ženíšek, M. Zlámal: *Metoda konečných prvků*, Ediční středisko VUT, Brno, 1970.
[27] F. Melkes: *The finite element method for non-linear problems*, Apl. mat. **15** (1970), 177–189.
[28] A. Ženíšek: *Hermite interpolation on simplexes in the finite element method*, Proceedings of Equadiff 3, J. E. Purkyně Univ., Brno, 1972, 271–277.
[29] P. G. Ciarlet, P. A. Raviart: *The combined effect of curved boundaries and numerical integration in isoparametric finite element methods*, in The Mathematical Foundations of the

jsem čerpal hlavně z knih [2, 8, 38]. Protože jsem svůj výklad omezil na fakta téměř bez matematických vztahů, čtenář, který dychtí po matematickém výkladu, nalezne jej v [42] a [43]. O knihy [42, 43] si může každý napsat na mou mailovou adresu. Zašlu pdf soubory zdarma.

Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations (A. K. Aziz, Editor), Academic Press, New York, 1972, 409–474.
[30] V. Kolář, J. Kratochvíl, F. Leitner, A. Ženíšek: *Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků*, SNTL, Praha, 1972.
[31] S. Koukal: *Piecewise polynomial interpolations in the finite element method.* Apl. mat. **18** (1973), 146–160.
[32] M. Zlámal: *Curved elements in the finite element method. I.*, SIAM J. Numer. Anal. **10** (1973), 229–240.
[33] A. Ženíšek: *Polynomial approximation on tetrahedrons in the finite element method*, J. Approx. Theory **7** (1973), 334–351.
[34] G. Strang, G. J. Fix: *An analysis of the finite element method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1973.
[35] M. Zlámal: *Curved elements in the finite element method. II.,* SIAM J. Numer. Anal. **11** (1974), 347–362.
[36] A. Ženíšek: *Tetrahedral finite C^m-elements*, Acta Univ. Carolin. Math. Phys. **15** (1974), 189–193.
[37] A. Ženíšek: *A general theorem on triangular finite C^m-elements*, RAIRO Anal. Numer. **8** (1974), 119–127.
[38] A. Kufner, O. John, S. Fučík: *Function spaces*, Academia, Praha, 1977.
[39] P. G. Ciarlet: *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam-New York-Oxford, 1978.
[40] M. Feistauer, A. Ženíšek: *Finite element solution of nonlinear elliptic problems*, Numer. Math. **50** (1987), 147–163.
[41] M. Křížek: *On semiregular families of triangulations and linear interpolation.* Appl. Math. **36** (1991), 223–232. (Preprint s tímtéž názvem vyšel v roce 1990 a byl citován v [42].)
[42] A. Ženíšek: *Nonlinear elliptic and evolution problems and their finite element approximations*, Academic Press, London, 1990.
[43] A. Ženíšek: *Sobolev spaces and the finite element method in boundary value problems.* Institute of Chemical Technology, Prague, 2012.

Dodatek 1

V roce 1992 vyšla v SIAM Review tato skvělá recenze na mou londýnskou knihu [42][4] od prof. Larse B. Wahlbina (Cornell University). Byla jako by ji psal básník. (Však on také verše psal.) Protože uvádím český překlad kvůli většímu pohodlí čtenáře, ochuzuji tak zběhlejší čtenáře o poetičnost originálu, která je pro mne nepřeložitelná:

Všechny frustrující zkušenosti shrnuje První Zákon aplikované matematiky do dvou slov: „Nic nepasuje!“ (Nothing fits!) Chcete-li např. citovat výsledek o konvergenci konečněprvkových aproximací, pravděpodobně jej naleznete pro oblast s polygonální hranicí, zatímco vaše oblast má po částech zakřivenou hranici, nebo když naleznete článek, který se zabývá vaším typem nelinearity, tak funkce $u_0(x, y)$ vystupující v počáteční podmínce $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$ je v něm hladší než potřebujete ve své aplikaci, a tak dále a podobně.

Ve snaze vypořádat se s Prvním Zákonem, pojednání profesora Ženíška je syntézou mnoha vyšetřování, které byly provedeny, aby různé obtíže byly izolovány a v této izolaci analyzovány a vyřešeny.

[4] Kniha [42] je první matematickou knihou o MKP, která byla napsána v provinciálním Brně.

Dovolím si stručně popsat výsledný Super teorém knihy v časově závislých případech. (Podobný teorém existuje ve stacionárních případech.) Uvažujme tedy parabolický problém v prostorových proměnných x, y a časové proměnné t s (1) nelineárními (monotónními) operátory, (2) počáteční podmínkou $u(x, y) = u_0(x, y)$, kde $u_0(x, y) \in L_2(\Omega)$, (3) nejobecnějšími smíšenými nehomogenními Dirichlet-Neumannovými okrajovými podmínkami. Proto užijeme koncepci slabého řešení. Přibližné řešení je počítáno v oblasti Ω metodou konečných prvků spolu se zpětnou Eulerovou časovou diskretizací. Takže uvažujeme (4) aproximaci zakřivené hranice a (5) numerickou integraci.

Super teorém pak zaručuje konvergenci numerických aproximací a v případě hladšího řešení uvádí rychlost konvergence v mocninách h a Δt, kde h je největší strana trojúhelníkových prvků, které tvoří triangulaci oblasti Ω, a Δt je délka časového kroku.

Při cestě k takovým Super teorémům je každá obtíž v knize studována odděleně. Úvodní kapitola (mající 44 stran) je věnována funkčním prostorům, Bochnerovým integrálům a ostatním nutným prostředkům, např. co je míněno pojmem „slabé řešení". Potom je kniha zorganizována do pěti kapitol takto: 1. Lineární eliptické problémy v oblastech s polygonální hranicí (96 stran), 2. Trojúhelníkové konečné prvky (74 stran), 3. Konečněprvková technika v oblastech s křivou hranicí (20 stran) (třetí kapitola obsahuje základy aproximace křivé hranice), 4. Nelineární eliptické problémy (52 stran), 5. Nelineární evoluční problémy (96 stran). Osm kratších dodatků, seznam užité literatury a abecední rejstřík uzavírají knihu.

Je to jasně psaný a podrobný přehled práce autora a jiných. Velmi pečlivý výklad různých „variačních zločinů" v případě užití konečných prvků tvoří z knihy cennou referenci pro výzkumné pracovníky, která komplementuje obě Ciarletova pojednání [C1, C2].

Reference

[C1] P. G. Ciarlet, *Basic error estimates for elliptic problems*, Handbook of Numerical Analysis, Vol. II (P. G. Ciarlet and J. L. Lions, eds.), North-Holland, Amsterdam, 1991,19–351.

[C2] P. G. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland, Amsterdam, 1978.

Prof. Wahlbin byl matematik světového významu: např. v Handbook of Numerical Analysis, Vol. II má na str. 353–522 kapitolu s názvem Local Behavior in Finite Element Methods.

Je nutné zdůraznit, že moje londýnská kniha vyšla v roce 1990, kdežto Ciarletova práce [C1] až v roce 1991. Dále: (1) V mé londýnské knize není na žádném místě použit výraz „Super teorém". (2) S prof. Wahlbinem jsem se nikdy nesetkal, ani si s ním nevyměnil jakýkoliv dopis či e-mail.

Dodatek 2 (o slabých řešeních a kvadratických funkcionálech)

Nechť Ω je ohraničená oblast v rovině (x_1, x_2) s po částech hladkou hranicí $\partial\Omega$. Uvažujme tento lineární okrajový problém:

$$-\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f \quad \text{v } \Omega, \tag{1}$$

$$u = u_D \quad \text{na } \Gamma_1, \tag{2}$$

$$\sum_{i,j=1}^{2} k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i} n_j = q \quad \text{na } \Gamma_2, \tag{3}$$

kde Γ_1, Γ_2 jsou takové relativně otevřené podmnožiny hranice $\partial\Omega$, že

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset, \quad \operatorname{meas}_1 \Gamma_1 + \operatorname{meas}_1 \Gamma_2 = \operatorname{meas}_1 \partial\Omega, \quad \operatorname{meas}_1 \Gamma_1 > 0.$$

Symboly k_{ij}, f, u_D a q označují dané dostatečně hladké funkce bodu $x \equiv (x_1, x_2)$ (jejich hladkost je specifikována na příslušném místě, zejména v Předpokladech 31.1 uvedených v Dodatku 3) a $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ je jednotková vnější normála k hranici $\partial\Omega$, $n_i = n_i(x)$. Konečně, symbol $\operatorname{meas}_1 \Gamma$ značí jednorozměrnou míru oblouku Γ.

Poznámka 1. a) V případě jednoduše souvislé oblasti Ω nejjednodušší případ oblouků Γ_1, Γ_2, kde $\Gamma_2 \neq \emptyset$, lze popsat takto: Existují dva různé body $A \in \partial\Omega$, $B \in \partial\Omega$, že $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{A, B\}$, $\bar{\Gamma}_1 = \Gamma_1 \cup \{A, B\}$, kde $\bar{\Gamma}_1$ označuje relativní uzávěr Γ_1.

b) Ve speciálním případě $k_{ij} = \delta_{ij}$, kde $\delta_{ij} = 1$ pro $i = j$ a $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$, se rovnice (1) redukuje na Poissonovu rovnici $-\Delta u \equiv -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = f \quad \text{v } \Omega$ a okrajová podmínka (3) na tvar: $\frac{\partial u}{\partial n} = q$ na Γ_2.

Definice 2 (klasického řešení okrajového problému (1)–(3))**.** Nechť funkce k_{ij} jsou spojité i se svými oběma prvními parciálními derivacemi na množině $\Omega \cup \Gamma_2$, tj. stručně $k_{ij} \in C^1(\Omega \cup \Gamma_2)$. Nechť dále $u_D \in C^0(\Gamma_1)$ a $q \in C^0(\Gamma_2)$. Potom funkce $u \in C^2(\overline{\Omega})$, která splňuje rovnici (1) a podmínky (2), (3), se nazývá klasickým řešením okrajového problému (1)–(3).

Abychom získali slabou (resp. variační) formulaci problému (1)–(3), předpokládejme, že jeho klasické řešení existuje, a násobme (1) libovolnou funkcí $v \in V$, kde

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ na } \Gamma_1\}. \tag{4}$$

Symbol $H^1(\Omega)$ přitom značí množinu funkcí, které jsou na Ω kvadraticky integrovatelné (tj. $v \in L_2(\Omega)$) a které mají na Ω kvadraticky integrovatelné první *zobecněné derivace* (viz Definici C v Dodatku 3). Prozatím poznamenáváme, že např. funkce, která je spojitá na Ω a má v Ω po částech spojité klasické první derivace, náleží do $H^1(\Omega)$. Po integraci přes Ω dostaneme

$$-\sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega v \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \mathrm{d}x = \int_\Omega v f \,\mathrm{d}x. \tag{5}$$

Levou stranu (5) upravme pomocí Greenovy formule $\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(uv)\mathrm{d}x = \int_\Gamma uvn_i\,\mathrm{d}s$:

$$
\begin{aligned}
-\sum_{i,j=1}^{2}\int_\Omega v\frac{\partial}{\partial x_j}&\left(k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}x\\
&= -\sum_{i,j=1}^{2}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}v\right)\mathrm{d}x + \sum_{i,j=1}^{2}\int_\Omega k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x\\
&= -\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\partial\Omega} vk_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}n_j\,\mathrm{d}s + \sum_{i,j=1}^{2}\int_\Omega k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Podle (3) a (4) platí

$$
-\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\partial\Omega} vk_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}n_j\,\mathrm{d}s = -\int_{\Gamma_2} vq\,\mathrm{d}s,
$$

takže vztah (5) může být psán ve tvaru

$$
\sum_{i,j=1}^{2}\int_\Omega k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega vf\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2} vq\,\mathrm{d}s. \tag{6}
$$

Položme kvůli stručnosti

$$
a(v,w) = \sum_{i,j=1}^{2}\int_\Omega k_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x, \tag{7}
$$

$$
L(v) = \int_\Omega vf\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2} vq\,\mathrm{d}s. \tag{8}
$$

Potom (6) má tvar

$$
a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in V.
$$

Protože tento vztah může být splněn funkcí u, která je méně hladká než klasické řešení problému (1)–(3), jsme motivováni formulovat následující variační problém.

Problém 3. Nechť ohraničená oblast Ω má po částech hladkou hranici $\partial\Omega$ bez bodů vratu. Nechť $k_{ij} \in C^0(\overline{\Omega})$. Nechť dále $u^* \in H^2(\Omega)$ je funkce taková, že $u_D = u^*$ na Γ_1. Nechť $f \in L_2(\Omega)$ a $q \in L_2(\Gamma_2)$. Problém zní: nalezněte takovou funkci $u \in H^1(\Omega)$, že

$$
u - u^* \in V, \tag{9}
$$

$$
a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in V, \tag{10}
$$

kde prostor V je definován vztahem (4) a forma $a(u,v)$, resp. $L(v)$ vztahem (7), resp. (8).

Poznámka 4. a) Předpoklady problému 3 o funkcích k_{ij}, f, q zaručují, že integrály definující formy $a(v,w)$ a $L(v)$ jsou konečné pro všechna $v, w \in H^1(\Omega)$.

b) Vztah (9) implikuje $u = u_D$ s.v. na Γ_1, což je okrajová podmínka (2) napsaná pro funkci $u \in H^1(\Omega)$.

Lemma 5. *a) Nechť problém* (1)–(3) *má klasické řešení u. Potom u je řešením problému 3.*

b) Nechť problém 3 má řešení u. Když toto řešení i funkce k_{ij}, f, q jsou dostatečně hladké, potom u je klasickým řešením problému (1)–(3).

Tvrzení a) plyne ze vztahů (1)-(10). Tvrzení b) je dokázáno v [42, Lemma 1.5]. Lemma 5 zdůvodňuje, proč řešení problému 3 se též nazývá *slabým řešením okrajového problému* (1)–(3).

Věta 6 (o minimu kvadratického funkcionálu)**.** *Nechť bilineární forma $a(v, w)$, která vystupuje ve formulaci problému 3 je symetrická, tj.*

$$a(v, w) = a(w, v) \quad \forall v, w \in H^1(\Omega). \tag{11}$$

Je-li také V-eliptická, tj. když platí

$$a(v, v) \geq \beta \|v\|^2_{1,\Omega} \quad \forall v \in V \qquad (\beta = konst > 0), \tag{12}$$

kde $V = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ na } \Gamma_1\}$ (viz (4)*), potom funkce $u \in H^1(\Omega)$ je jediným řešením variačního problému 3, když a jen když ostře minimalizuje kvadratický funkcionál*

$$\Pi(v) = \frac{1}{2}\, a(v, v) - L(v) \tag{13}$$

na množině $u^* + V$, tj.

$$\Pi(u) \leq \Pi(v) \quad \forall v \in u^* + V, \tag{14}$$

kde znamení rovnosti platí pouze pro $v = u$ a kde

$$u^* + V = \{w \in H^1(\Omega) : w = u^* + v \ \forall v \in V\}.$$

Důkaz. Množina $u^* + V$ může být psána také ve tvaru

$$u^* + V = \{v \in H^1(\Omega) : v = u + \lambda w \ \forall \lambda \in \mathbb{R}^1 \ \forall w \in V\}, \tag{15}$$

protože $u = u^*$ na Γ_1. Nechť $v \in u^* + V$. Potom podle (13) a (11) platí

$$\begin{aligned} \Pi(u + \lambda w) - \Pi(u) &= \frac{1}{2}\, a(u + \lambda w, u + \lambda w) - L(u + \lambda w) - \frac{1}{2}\, a(u, u) + L(u) \\ &= \frac{\lambda}{2}\, a(u, w) + \frac{\lambda}{2}\, a(w, u) + \frac{\lambda^2}{2}\, a(w, w) - \lambda L(w) \\ &= \lambda[a(u, w) - L(w)] + \frac{\lambda^2}{2}\, a(w, w). \end{aligned} \tag{16}$$

a) Nechť u je jediné řešení variačního problému 3. Potom podle (10) a (16)

$$\Pi(u + \lambda w) - \Pi(u) = \frac{\lambda^2}{2}\, a(w, w).$$

Tento výsledek a V-elipticita formy $a(v, v)$ implikují, že funkce u ostře minimalizuje kvadratický funkcionál $\Pi(v)$ na množině $u^* + V$.

b) Nyní dokážeme opačnou implikaci. Nechť nějaká funkce u ostře minimalizuje kvadratický funkcionál $\Pi(v)$ na množině $u^* + V$. Existuje-li taková funkce $w_0 \in V$, že

$$a(u, w_0) \neq L(w_0), \tag{17}$$

potom, zvolíme-li $\lambda = -[a(u, w_0) - L(w_0)]/a(w_0, w_0)$, dostaneme ze (16)

$$\Pi(u + \lambda w_0) - \Pi(u) = -\frac{[a(u, w_0) - L(w_0)]^2}{2a(w_0, w_0)} < 0,$$

protože podle (12) je $a(w_0, w_0) > 0$ (funkce w_0 nemůže být ekvivalentní nule – viz (17)). Dostali jsme $\Pi(u + \lambda w_0) < \Pi(u)$, což je ve sporu s předpokladem, že platí (14). Tedy (17) neplatí, takže funkce u splňuje (10), tj. funkce u je jediné řešení variačního problému 3. □

Poznámka 7. Nechť $k_{ij} \in C^0(\overline{\Omega})$.

a) Vztah (11) platí právě tehdy, když $k_{ij}(x) = k_{ji}(x)\ \forall x \in \Omega$.
b) Když $\exists \beta > 0$ takové, že $\sum k_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \beta(\xi_1^2 + \xi_2^2)\ \forall x \in \Omega, \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$, potom platí (12).

Dodatek 3 (Interpolace jednoduchého složitějším)

(Zde použité číslování je převzato z knihy [43].)

28.12. **Definice.** Nechť ohraničená oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ má polygonální hranici. Množinu

$$\mathcal{T} = \{\overline{T}_1, \overline{T}_2, \ldots, \overline{T}_p\}$$

sestávající z konečného počtu uzavřených trojúhelníků $\overline{T}_j$ nazýváme *triangulací* oblasti $\overline{\Omega}$, jsou-li splněny tyto dvě podmínky:

a) $\overline{\Omega} = \bigcup_{j=1}^{p} \overline{T}_j$,
b) libovolné dva trojúhelníky $\overline{T}_i, \overline{T}_j \in \mathcal{T}$ jsou buď disjunktní, nebo mají společný vrchol, nebo společnou stranu.

Symbol $\mathcal{T}_h$ značí triangulaci sestávající z trojúhelníků majících všechny strany kratší než h. V dalším předpokládáme, že $h \in (0, 1)$ a že každá triangulace $\mathcal{T}_h$ oblasti $\overline{\Omega}$ s polygonální hranicí je konzistentní s hranicí $\partial\Omega$.

29.1. **Definice.** Řekneme, že triangulace $\mathcal{T}_h$ je *konzistentní* s polygonální hranicí $\partial\Omega$, jestliže žádný trojúhelník $\overline{T} \in \mathcal{T}_h$ s vlastností $\mathrm{meas}_1(\partial T \cap \Gamma_1) > 0$ nemá společný bod s $\Gamma_2 = \partial\Omega \setminus \overline{\Gamma}_1$.

Definice A (Triangulace $\mathcal{T}_h$ a ideální triangulace $\mathcal{T}^{\mathrm{id}}$ ohraničené oblasti Ω, která obecně nemá polygonální hranici)**.**

a) Aproximujme uzavřenou oblast $\overline{\Omega}$ uzavřenou oblastí $\overline{\Omega}_h$ s polygonální hranicí $\partial\Omega_h$ tak, že vrcholy polygonální čáry $\partial\Omega_h$ leží na $\partial\Omega$. Triangulaci oblasti Ω_h podle Definice 28.12 nazveme *triangulací oblasti* Ω a budeme ji opět značit $\mathcal{T}_h$, když $h \in (0, 1)$.

b) Trojúhelník $T \in \mathcal{T}_h$ s právě dvěma vrcholy na $\partial\Omega$ se nazývá *hraniční trojúhelník.*

c) Nechť $T \in \mathcal{T}_h$ je hraniční trojúhelník a P_1^T, P_2^T, P_3^T jsou jeho vrcholy (v lokálním značení), přičemž $P_2^T, P_3^T \in \partial\Omega$. Nechť Σ_T^h je část $\partial\Omega$, která je aproximována úsečkou $P_2^T P_3^T$. Uzavřený trojúhelník T^{id} s dvěma přímými stranami $P_1^T P_2^T$, $P_1^T P_3^T$ a křivou stranou Σ_T^h nazýváme *ideální trojúhelník.* (Trojúhelník $\overline{T}$

aproximuje ideální trojúhelník T^{id}, který je sdružen (asociován) s $\overline{T}$.) Nahradíme-li všechny hraniční trojúhelníky v triangulaci $\mathcal{T}_h$ jejich asociovanými ideálními trojúhelníky T^{id}, dostaneme *ideální triangulaci* $\mathcal{T}^{\mathrm{id}}$ oblasti $\overline{\Omega}$ *asociovanou* s triangulací $\mathcal{T}_h$.

Definice B (Multiindexy, derivace)**.** Nechť $N = \dim \Omega$. Vektor

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$$

se složkami $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ $(i = 1, \ldots, N)$, kde $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, se nazývá *multiindexem dimense* N. Číslo $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$ se nazývá *délka multiindexu* α. Symbol D^α definovaný vztahem

$$D^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}}$$

se pak nazývá derivace v multiindexovém značení.

Definice C (Zobecněné derivace a Sobolevovy prostory $H^k(\Omega)$)**.** Funkce $u^{(\alpha)} \in L_2(\Omega)$ $(|\alpha| \le k)$, které vystupují na levé straně definičního vztahu

$$\int_\Omega u^{(\alpha)} \varphi \,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi \,\mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ |\alpha| \le k, \tag{$*$}$$

se nazývají *zobecněnými derivacemi* funkce $u \in L_2(\Omega)$, která vystupuje v integrandu na pravé straně ($*$). Zobecněné derivace jsou častěji označovány symboly $D^\alpha u$.

Nechť Ω je ohraničená dvojrozměrná oblast, jejíž hranice sestává z konečného počtu hladkých částí[5]. Symbol $H^k(\Omega)$ značí lineární normovaný prostor funkcí $u \in L_2(\Omega)$, které mají zobecněné derivace $u^{(\alpha)} = D^\alpha u \in L_2(\Omega)$ splňující definiční vztah ($*$) pro všechny $|\alpha| \le k$; norma $\| \cdot \|_{k,\Omega}$ je v $H^k(\Omega)$ dána vztahem $\|u\|_{k,\Omega}^2 = (u, u)_{k,\Omega}$, kde

$$(u, v)_{k,\Omega} = \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) \,\mathrm{d}x.$$

Definice D (různá označení)**.**

a) $\mathcal{P}_2(n)$ je množina všech polynomů dvou proměnných nanejvýš stupně n.
b) $V = \{v \in H^1(\Omega) : v\big|_{\Gamma_1} = 0\}$.
c) $X_h = \{v \in C^0(\overline{\Omega}_h) : v\big|_T$ je lineární $\forall T \in \mathcal{T}_h\}$; X_h je konečněprvková aproximace prostoru $H^1(\Omega)$.
d) $V_h = \{v \in X_h : v\big|_{\Gamma_{h1}} = 0\}$; V_h je konečněprvková aproximace prostoru V.

31.1. **Předpoklady.** Nechť $\{\Omega_h\}$ $(h \in (0, h_0))$ je množina polygonálních aproximací množiny Ω. Nechť $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ je ohraničená oblast taková, že $\widetilde{\Omega} \supset \overline{\Omega} \cup \overline{\Omega}_h$ $\forall h \in (0, h_0)$. Nechť funkce $f : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}^1$, $u_D : \Gamma_1 \to \mathbb{R}^1$, $q : \Gamma_2 \to \mathbb{R}^1$ a $k_{ij} : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}^1$ $(i = 1, 2)$ mají následující vlastnosti:

a) f je spojitá a ohraničená na $\widetilde{\Omega}$ spolu se svými prvními derivacemi.
b) Existuje $u^* \in H^2(\Omega)$ tak, že $u_D = u^*|_{\Gamma_1}$.

[5] Tj. připouštíme existenci řezů do Ω.

c) Funkce q a hranice $\partial\Omega$ jsou po částech třídy C^3.
d) Funkce k_{ij} jsou spojité a ohraničené na $\partial\Omega$.
e) Existuje $\beta > 0$ tak, že

$$\sum_{i,j=1}^{2} k_{ij}\xi_i\xi_j \geq \beta(\xi_1^2 + \xi_2^2) \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^1;$$

je tedy splněna podmínka V-elipticity pro formu $a(v, w)$ definovanou v (7).

31.2. **Slabá formulace spojitého problému.** Nalezněte funkci $u : \Omega \to \mathbb{R}^1$ takovou, že

$$u \in H^1(\Omega), \; u - u^* \in V,$$
$$a(u, v) = L(v) \;\; \forall v \in V,$$

kde forma a je definována v (7) a forma L v (8).

Slabou formulaci diskrétního problému získáme ve dvou krocích: Napřed vytvoříme slabou formulaci přechodového problému a potom všechny formy vyskytující se v této formulaci aproximujeme numerickou integrací.

31.3. **Slabá formulace přechodového problému.** Nechť

$$W_h = \{v \in X_h : v(P_i) = u^*(P_i) \; \forall P_i \in \sigma_h \cap \overline{\Gamma}_1\},$$

kde σ_h je množina uzlových bodů v triangulaci $\mathcal{T}_h$. Nalezněte funkci $\widetilde{u}_h \in W_h$ takovou, že

$$\widetilde{a}_h(\widetilde{u}_h, v) = \widetilde{L}_h(v) \;\; \forall v \in V_h,$$

kde

$$\widetilde{a}_h(v, w) = \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Omega_h} k_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} \, \mathrm{d}x \;\;\text{a}\;\; \widetilde{L}_h(v) = \int_{\Omega_h} vf \, \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_{h2}} vq_h \, \mathrm{d}s,$$

přičemž q_h je funkce definovaná na $\overline{\Gamma}_{h2}$, která vznikne přenosem funkce q z Γ_2 na Γ_{h2} (podrobně viz [43, 31B.4]).

31.4. **Slabá formulace diskrétního problému.** Nechť formy $a_h(v, w)$ a $L_h(v)$ jsou získány z forem $\widetilde{a}_h(v, w)$ a $\widetilde{L}_h(v)$ pomocí numerické integrace. Nalezněte funkci $u_h \in W_h$ takovou, že

$$a_h(u_h, v) = L_h(v) \quad \forall v \in V_h. \tag{31.41}$$

31.10**. Věta** (Abstraktní odhad chyby)**.** *Jsou-li daná data dostatečně hladká, pak platí pro všechna* $h \in (0, h_0)$

$$\begin{aligned} \|u_C - u_h\|_{1,\Omega_h} \leq C\Big\{ &\inf_{v \in W_h} \|u_C - v\|_{1,\Omega_h} + \sup_{\substack{w \in V_h \\ w \neq 0}} \frac{|\widetilde{a}_h(u_C, w) - L_h(w)|}{\|w\|_{1,\Omega_h}} \\ &+ \inf_{v \in W_h} \sup_{\substack{w \in V_h \\ w \neq 0}} \frac{|\widetilde{a}_h(v, w) - a_h(v, w)|}{\|w\|_{1,\Omega_h}} \Big\}, \end{aligned} \tag{31.47}$$

kde u_C je Calderonovo prodloužení řešení $u \in H^k(\Omega)$ $(k \geq 1)$ slabé formulace spojitého problému 31.2*, $u_h \in W_h$ je řešení slabé formulace diskrétního problému*

31.4 *a kde konstanta* C *nezávisí na řešení* $u \in H^k(\Omega)$ *a prostorech* $X_h = \{v \in C^0(\overline{\Omega}_h) : v|_T$ *je lineární* $\forall T \in \mathcal{T}_h\}$. *Forma* $\widetilde{a}_h$ *je definována v* 31.3 *a formy* a_h *a* L_h *v* 31.4.

První výraz na pravé straně (31.47) vyjadřuje interpolační chybu metody konečných prvků. Třetí výraz vyjadřuje chybu numerické integrace. Oba tyto výrazy lze odhadnout zobecněním standardních obratů. Konečně, druhý výraz vyjadřuje chybu, která závisí na aproximaci zakřivené hranice. Při jejím odhadu se doposud užívala Greenova věta; pro její aplikaci je zapotřebí, aby přesné řešení variačního problému náleželo alespoň do $H^2(\Omega)$.

Abychom odhadli druhý výraz na pravé straně (31.47) pomocí interpolace jednoduchého složitějším (tj. bez použití Greenovy věty), uvedeme jisté pomocné věty a pojmy. Jako obvykle, symbol T_0 značí uzavřený trojúhelník, který leží v rovině ξ_1, ξ_2 a má vrcholy $P_1^* = [0,0]$, $P_2^* = [1,0]$, $P_3^* = [0,1]$.

31.15. **Lemma** (Zlámalův ideální konečný prvek). a) *Nechť* T^{id} *je ideální trojúhelník s vrcholy* P_i^T $(i = 1,2,3)$, *přičemž* $P_2^T, P_3^T \in \partial\Omega$. *Existuje transformace*

$$x_1 = x_1^{\mathrm{id}}(\xi_1, \xi_2), \quad x_2 = x_2^{\mathrm{id}}(\xi_1, \xi_2) \tag{31.69}$$

která zobrazuje $\overline{T}_0$ *jednojednoznačně na* T^{id}, *přičemž vrchol* P_i^* *je zobrazen na vrchol* P_i^T $(i = 1,2,3)$. *Jestliže* $\xi_1 \in \langle 0,1\rangle$, $\xi_2 = 0$, *potom* (31.69) *je parametrickým vyjádřením úsečky* $P_1^T P_2^T$; *jestliže* $\xi_1 = 0$, $\xi_2 \in \langle 0,1\rangle$, *potom* (31.69) *je parametrickým vyjádřením úsečky* $P_1^T P_3^T$; *jestliže* $\xi_1 \in \langle 0,1\rangle$, $\xi_2 = 1 - \xi_1$ *potom* (31.69) *je parametrickým vyjádřením zakřivené strany* $\overline{\Sigma}_T^h$ *prvku* T^{id}.

b) *Nechť* $p(\xi_1, \xi_2) \in \mathcal{P}_{T_0}(1) = \{p|_{T_0} : p \in \mathcal{P}_2(1)\}$ *a nechť*

$$\xi_1 = \xi_1^{\mathrm{id}}(x_1, x_2), \quad \xi_2 = \xi_2^{\mathrm{id}}(x_1, x_2) \tag{31.70}$$

je inverzní transformace k (31.69). *Potom funkce (ideální konečný prvek)*

$$\widetilde{w}(x_1, x_2) = p(\xi_1^{\mathrm{id}}(x_1, x_2), \xi_2^{\mathrm{id}}(x_1, x_2)) \tag{31.71}$$

má tyto vlastnosti:

α) $\widetilde{w}(x_1, x_2)$ *je lineární podél úseček* $P_1^T P_2^T$, $P_1^T P_3^T$.
β) $\widetilde{w}(P_i^T) = p(P_i^*) \equiv w(P_i^T)$ $(i = 1,2,3)$, *kde* $w(P_i^T)$ *jsou dané hodnoty.*
γ) *Když* $\widetilde{w}(P_2^T) = \widetilde{w}(P_3^T) = 0$, *potom* $\widetilde{w}(P) = 0$ *pro všechny body* $P \in \overline{\Sigma}_T^h$.

Důkaz je v [32], resp. [42, kap. 22], přičemž odvození a explicitní vyjádření transformace (31.69) je uvedeno v [42, kap. 22, vztah (22.17)].

Interpolační vlastnosti funkce $\widetilde{w}(x_1, x_2)$ jsou popsány v následujícím lemmatu, které je speciálním případem [32, Theorem 2]; viz také [42, kap. 25] .

31.16. **Lemma** (Zlámalův interpolační teorém). *Nechť* $w \in H^2(T^{\mathrm{id}})$ *a nechť*

$$\widetilde{w}(P_i^T) = w(P_i^T) \quad (i = 1,2,3), \tag{31.72}$$

kde $\widetilde{w}$ *je ideální konečný prvek z Lemmatu* 31.15. *Potom*

$$\|\widetilde{w} - w\|_{s,T^{\mathrm{id}}} \leq Ch^{2-s}\|w\|_{2,T^{\mathrm{id}}} \quad (s = 0,1). \tag{31.73}$$

31.17. **Definice** (přirozeného prodloužení)**.** Nechť $w \in X_h$. Funkci $\overline{w} : \overline{\Omega}_h \cup \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^1$ nazýváme *přirozeným prodloužením* w z $\overline{\Omega}_h$ na $\overline{\Omega}_h \cup \overline{\Omega}$, když $\overline{w} = w$ na $\overline{\Omega}_h$ a $\overline{w}\big|_{T^{\mathrm{id}}} = p\big|_{T^{\mathrm{id}}}$ na $T^{\mathrm{id}} \supset T$, kde $p \in \mathcal{P}_2(1)$ je polynom splňující $p\big|_T = w\big|_T$.

31.18. **Definice** (funkce $\widehat{w} \in V$, která je asociovaná s $w \in V_h$)**.** Nechť $w \in V_h$. Funkci $\widehat{w} \in V$ nazýváme *asociovanou* s w, když

a) $\widehat{w} \in C^0(\overline{\Omega})$;
b) $\widehat{w}(P_i) = w(P_i)$ $\forall P_i \in \sigma_h$, kde σ_h je množina všech uzlových bodů (tj. vrcholů trojúhelníků) v $\mathcal{T}_h$;
c) $\widehat{w}$ je lineární na každém trojúhelníku $T \in \{\mathcal{T}_h \cap \mathcal{T}^{\mathrm{id}}\}$ a na každém ideálním trojúhelníku $T^{\mathrm{id}} \in \mathcal{T}^{\mathrm{id}}$, který leží podél Γ_2 (tj. $\widehat{w} = \overline{w}$ na $T^{\mathrm{id}} \supset T$ a $\widehat{w}|_{T^{\mathrm{id}}}$ je restrikcí funkce $w|_T$ na $T^{\mathrm{id}} \subset T$);
d) když $T^{\mathrm{id}} \in \mathcal{T}^{\mathrm{id}}$ leží podél Γ_1 a $T \in \mathcal{T}_h$ je jeho aproximace, potom
   α) v případě $T \subset T^{\mathrm{id}}$ platí $\widehat{w} = 0$ na $T^{\mathrm{id}} \setminus T$ a $\widehat{w} = w$ na T,
   β) v případě $T^{\mathrm{id}} \subset T$ platí $\widehat{w} = \widetilde{w}$ na T^{id}, kde $\widetilde{w}$ je ideální konečný prvek definovaný v (31.71).

31.19. **Lemma.** *Nechť funkce $\widehat{w} \in V$ je asociovaná s $w \in V_h$, kde $V_h = \{v \in X_h : v|_{\Gamma_{h1}} = 0\}$ a $X_h = \{v \in C^0(\overline{\Omega}_h) : v|_T$ je lineární $\forall T \in \mathcal{T}_h\}$. Nechť ideální trojúhelník T^{id} leží podél Γ_1 a nechť $T \in \mathcal{T}_h$ je jeho aproximace. Když $\overline{T}^{\mathrm{id}} \subset \overline{T}$, potom*

$$\|w - \widehat{w}\|_{1,T^{\mathrm{id}}} \le Ch\|w\|_{2,T^{\mathrm{id}}} \le Ch\|w\|_{1,T}\,, \tag{31.74}$$

kde C je konstanta nezávislá na h a w.

Důkaz. Lemma 31.19 je bezprostředním důsledkem Lemmatu 31.16 a Definice 31.18, protože $\|w\|_{2,T^{\mathrm{id}}} = \|w\|_{1,T^{\mathrm{id}}} \le C\|w\|_{1,T}$ pro $w \in \mathcal{P}_2(1)$. □

31.19a. **Poznámka.** V Lemmatu 31.19 aproximujeme lineární polynom omezený na T^{id} komplikovanějším Zlámalovým ideálním konečným prvkem, který je zadán stejnými třemi hodnotami, abychom dostali na pravé straně (31.74) pouze normu $\|w\|_{1,T}$. Tento relativně jednoduchý trik, který byl nepovšimnut 15 let, hraje významnou roli v [40] v analýze nelineárních eliptických problémů. Pomocí interpolace jednoduchého složitějším lze totiž odvodit

$$|L_h(w) - \widetilde{a}_h(\widetilde{u}, w)| \le Ch^{s/2}\|w\|_{1,\Omega_h} \quad \forall w \in V_h, \tag{$**$}$$

když $u \in H^s(\Omega)$, $s = 1, 2$. Vztah ($**$) je podrobně dokázán v [43] v závěru kapitoly 31.

Alexander Ženíšek, Zedníkova 180/6, 603 00 Brno,
e-mail: zenisek@fme.vutbr.cz