

Milé čtenárky a čtenáři,

máte v rukou nové číslo časopisu Kvaternion, jehož vydávání bylo po tříleté pauze obnovenno loňským dvojčíslem.

Pokoušíme se zachovat nastolenou cestu. Totiž sestavit obsah časopisu z odborných (resp. přehledových) článků, příspěvků založených na vybraných závěrečných pracích studentů oboru Matematické inženýrství na FSI VUT v Brně a konečně textu diskutujícího zajímavé úlohy související s Internetovou matematickou olympiadou organizovanou naším ústavem.

Prvním příspěvkem tohoto čísla je článek bývalého dlouholetého ředitele Ústavu matematiky a emeritního profesora VUT, Alexandra Ženíška, o počátcích metod konečných prvků. Z něj se mj. dozvídáme, že k základům této teorie podstatnou měrou přispěli brněňští odborníci. V textu Ivana Chajdy je prezentován elementární důkaz Tverbergovy věty z teorie konvexních množin. Článek Jiřího Jánského se zabývá lokalizací kořenů polynomů ve vymezených částech komplexní roviny; tento problém úzce souvisí s otázkou stability diferenciálních a diferenčních rovnic. Studentské příspěvky jsou reprezentovány články Davida Lovase a Jiřího Nováka, v nichž jsou představena téma jejich bakalářských prací. Obsahem článku Viery Štoudkové Růžičkové je rozbor tří úloh matematické olympiády a jejich modifikací.

Přejeme Vám inspirativní čtení.

Pavel Řehák a Jiří Šremr

BYL JSEM U TOHO!
aneb
50 let matematické teorie metody konečných prvků

ALEXANDER ŽENÍŠEK

ABSTRAKT. Rozvoj a užití metody konečných prvků (MKP, the finite element method) byl spjat v inženýrských kruzích (hlavně v USA) s rozvojem a užitím výkonných samočinných počítačů. Proto začala být MKP rozvíjena až v polovině padesátých let, a to zejména ve stavebním a leteckém inženýrství.

V tomto článku jsou popsány hlavně začátky matematické teorie MKP v letech 1967–1973, které díky jednomu bystrému brněnskému inženýrovi byly v sedesátých letech pouze v rukou matematiků z provinciálního Brna, jak si to pamatuje autor článku. Ostatní pamětníci popsaných událostí jsou již po smrti. Zbytek matematického světa se s matematikou MKP seznamoval z článků brněnských autorů.

Dne 17. dubna 1969 odstoupil z funkce prvního tajemníka KSČ Alexander Dubček a tím i formálně skončil poslední záchrně pražského jara 1968. Většina Čechů a Slováků asi toto datum zapomněla; já si je pamatuji jenom proto, že matematická teorie metody konečných prvků měla v ten den právě jeden rok.

Je ovšem nutné definovat, čím rozumíme první den matematické teorie. Ztotožňuji se s názorem, že je to datum zaslání článku, který vyšel první v rámci této teorie v matematickém časopise. První matematický článek o metodě konečných prvků vyšel v roce 1968 v *Numerische Mathematik*, měl název *On the finite element method*, autorem byl Miloš Zlámal a pod jeho jménem stálo: Received April 17, 1968 – viz [15]. (Můj článek [20] sice došel do *Aplikací matematiky* 28. 3. 1968, ale vyšel až v roce 1969. Oba články [15, 20] by nespříštily světlo světa, kdyby se jejich autoři neseznámili v roce 1967 s Ing. Jiřím Kratochvílem, CSc., odborným asistentem na stavební fakultě Vysokého učení technického (FAST VUT) v Brně, iniciátorem dvojice článků [11, 12].)

Pojem „metoda konečných prvků“ potřebuje alespoň minimální výklad. Je to metoda pro nalezení přibližných řešení variačních problémů. Variačním problémem přitom rozumíme problém, ve kterém se minimalizuje (resp. maximalizuje) nějaký kvadratický funkcionál na třídě přípustných funkcí, které se často nazývají stav. Nejjednoduším a nejpřístupnějším příkladem je princip *minima potenciální energie*, podle kterého se ze všech přípustných stavů realizuje ten, ve kterém je potenciální energie dané soustavy minimální. (Ještě konkrétněji: představte si kuličku, kterou vložíme do misky kulovitého tvaru, a to nikoliv na dno. Kulička v misce

2010 MSC. Primární 65N30.

Klíčová slova. Metoda konečných prvků.

chvíli kmitá, až se ustálí na dně misky. Každá z poloh kuličky v misce je přípustná, na dně má však kulička potenciální energii minimální.)

Formulovat nějaký variační problém matematicky vyžaduje jisté úsilí. Proto je velké štěstí, že existují třídy variačních problémů; v každé třídě se problémy liší pouze geometrickým tvarem oblasti, na které jsou definovány, a dodatečnými podmínkami (většinou okrajovými a počátečními) a materiálovými konstantami. Máme-li dva variační problémy téže třídy dané na různých oblastech a s různými vedlejšími podmínkami, jde o dva matematicky různé problémy, z nichž každý se musí řešit samostatně. Jsou to však velmi podobné matematické problémy. Do nedávna (t.j. do konce sedesátých let dvacátého století) jediný způsob, jak tyto problémy řešit, bylo sestavit tzv. Eulerovu rovnici příslušného problému. Dostali jsme tak počáteční (či počáteční-okrajový) problém pro parciální diferenciální rovnici. Z matematického hlediska sestavení takového počátečního-okrajového problému znamená vyřešení původního variačního problému, protože byl formulován snazší matematický problém. Z praktického hlediska ovšem bylo nutné pokusit se o řešení tohoto snazšího problému. Drtivou většinu těchto problémů nelze řešit analyticky a z přibližných metod byla k dispozici pouze tzv. *metoda sítí*. Ta se však neumí dobře vypořádat s nepravidelným tvarem oblastí a s Neumannovou okrajovou podmínkou (či jinou *nestabilní* okrajovou podmínkou). Situace byla pro matematiky v polovině sedesátých let dosti tristní: o metodě sítí mohli pilně teoretizovat, dobré výsledky však nedávala. Nedobrě na tom byla také Ritzova variační metoda vzhledem ke své nestabilitě. A tu přišel Zlámal se svým článkem a téměř přes noc (přesněji během necelého roku) se stal světovou jedničkou v numerické analýze. Vysvětlím proč.

Vítězslav Nezval napsal ve čtvrtém zpěvu Edisona:

Je to úmysl a trochu náhoda
stát se presidentem svého národa.

Stejně je to úmysl (pokud tím nazýváme ctižádostivou plí) a trochu náhoda stát se světovou jedničkou ve svém oboru. Miloš Zlámal díky jednomu svému kladnému povahovému rysu této náhodě dosti pomohl. Tím jeho pozitivem byla ochota naslouchat každému inženýrovi a snažit se mu pomoci, pokud žádal o pomoc. A protože jako ředitel výpočetního centra VUT v Brně se často setkával s inženýry, kteří tam počítali na tehdy moderním počítači DATASAAB D21, zajímal se také o jejich práci. V roce 1967 tam často počítali ve dvojici inženýři Kratochvíl a Leitner. Protože Zlámal skoro o ně zakopával, jednoho dne mu to nedalo a zeptal se, co pořád pilně počítají. A k svému velkému překvapení se dozvěděl jemu neznámý výraz: *metoda konečných prvků*. Počítali touto metodou statický výpočet jedné přehrady. Ing. Jiří Kratochvíl, potom dlouhá léta profesor a DrSc., byl totiž duše zvídavá a vypěstoval si už před mnoha lety zvyk sledovat všechnu dostupnou časopiseckou inženýrskou literaturu, která jen trochu souvisela s jeho oborem. A tak, ačkoliv byl vodař, alespoň okrajově, ale pravidelně sledoval americké letecké žurnály (ve vědecké knihovně Vojenské akademie Antonína Zápotockého (VAAZ) byly v Brně k dispozici), a tak jednou na počátku roku 1965 ho v časopisu AIAA zaujaly konstrukce trupů letadel sestavené z trojúhelníčků

a malůvky různých trojúhelníkových prvků. Dočetl se tam o *finite element method*, což si pro sebe přeložil jako *metoda konečných prvků*. (Přirozenější překlad metoda konečného prvku, který byl později propagován, se neujal.) Začal studovat články podrobně.¹ Po důkladnějším zvážení se rozhodl pokusit se o samostatnou praktickou aplikaci: dal si za úkol vytvořit v praxi aplikovatelný program pro statické výpočty zemních hrází a přehrad. Úkol nelehký: nejenže se musel doučit mnohé z programování, ale musel také rozřešit to nejtěžší, totiž sestavit algoritmus vytvoření celkové matice tuhosti a vektoru pravé strany výsledné soustavy lineárních algebraických rovnic z elementárních matic a vektorů. To v článcích totiž nebylo. Jak řešit velkou soustavu lineárních algebraických rovnic co nejrychleji, dal za úkol svému spolupracovníku Ing. Františku Leitnerovi z Hydroprojektu Brno, který byl mým bridžovým partnerem. Ten mě také seznámil v březnu 1967 s Ing. Kratochvílem, protože podle Ing. Kratochvíla už potřebují matematika, a František kromě mne jiného matematika osobně neznal (ačkoliv já měl k matematikovi ještě dost daleko). Hned při našem prvním setkání mi Ing. Kratochvíl půjčil Syngewou knihu [5], kde jsem našel interpolaciální teorém pro hladké funkce, které jsou na trojúhelníčích approximovány lineárními polynomy. Zajímavé je, že tento teorém respektuje *podmínku maximálního úhlu*, která se začala systematicky studovat až v devadesátých letech. Jedním z prvních takových článků byl článek [41].

V říjnu 1967 mi dal Ing. Kratochvíl fotografickou kopii článku inženýrů Pin Tonga a T. H. H. Piana [10] z časopisu Solids and Structures o konvergenci metody konečných prvků. (Tím, že jsem ten článek „přeložil“ do matematiky, něco zobecnil a přidal, přizpůsobil pasáže ze slavné Michlinovy knihy [2], užil též [4], a něco navíc vymyslel, jsem napsal obhajovatelnou kandidátskou práci, kterou jsem v hrubém rukopise dokončil 5. března 1968.)

Takový byl stav, když v listopadu 1967 dal Ing. Kratochvíl svou první informaci o MKP prof. Zlámalovi (jako řediteli výpočetního centra VUT v Brně), když se Kratochvíla zeptal, co s Leitnerem u nich v Laboratoři počítacích strojů (LPS) pořád počítají. Popsal mu v ní princip metody a na co ji konkrétně aplikují. Zlámalova první reakce byla: „No, myslím, že metoda sítí je lepší“.

Zlámal však rozpoznal v inženýrském přístupu polozapomenutou Courantovu myšlenku z roku 1943 publikovanou v [1], která zapadla proto, že tehdy nebyly počítače, na kterých by se dala realizovat. Proto mu to nedalo, vyhledal Kratochvíla a nechal si od něj podrobněji o MKP poreferovat. Dozvěděl se tak mimo jiné o do té doby známých interpolaciálních polynomech 2. a 3. stupně na trojúhelníku, které dodnes inženýři nazývají Veubekův prvek [7] a Hollandův prvek [13] podle jejich prvních uživatelů. Navíc ukázal Kratochvíl Zlámalovi Zienkiewiczovu knihu [9], kterou mu zrovna poslali z Londýna.

Protože Zlámal zrovna neměl na čem pracovat, dal si za cíl dokázat konvergenci metody konečných prvků při použití Veubekova prvku. Práce se mu tak dařila, že

¹Jedním z nejznámějších článků byl článek [3], kde místo *finite element method* se užíval ještě pojem *stress and displacement analysis*.

dokázal konvergenci i pro Holandův prvek a navíc zkonstruoval trojúhelníkový C^1 -prvek, tj. polynom jednoznačně určený takovými parametry, že globální funkce, která je pomocí něj na triangulaci zkonstruovaná, je spojitá i s oběma svými prvními parciálními derivacemi v celé ztriangulované oblasti s polygonální hranicí. To už byl velký výsledek, a když po vtipném triku dokázal také příslušný interpolační teorém, byl článek hotov.

V květnu 1968 sice v Numer. Math. vyšel článek amerických autorů Birkhoffa, Schultze a Vargy [14] na podobné téma – pojednával o konvergenci Galerkinovy–Ritzovy metody při použití Ahlinových polynomů z roku 1964 (viz [6]), což jsou vlastně obdélníkové C^m -prvky. Vzhledem k malé použitelnosti obdélníkových prvků byl Zlámalův výsledek obecnější, navíc originálnější, měl ve svém názvu MKP a poukazoval na současné inženýrské trendy. (Byl jsem zrovna u Zlámala, když poprvé článek [14] otevřel. Zarazil se, zbledl, ale po chvíli řekl: „To jsou jen obdélníkové prvky a o MKP zde nepíšou nic!“) Zlámal je tedy první matematik, který ve své práci užil výraz metoda konečných prvků. Svým článkem Zlámal poukázal na jednu oblast matematiky velmi málo zmapovanou – její mapa měla velký nápis HIC SUNT LEONES. Zajímavé je, že v roce 1968 publikovali čtyři různí inženýři stejný trojúhelníkový C^1 -prvek – ovšem bez příslušného interpolačního teoremu, pouze s poukazem na možnosti při řešení tenkých desek (viz [16, 17, 18, 19]). Tento C^1 -prvek je zadán 21 parametry: v každém vrcholu trojúhelníkového prvku funkční hodnota, obě první parciální derivace a všechny tři druhé parciální derivace. (Zatím jsme předepsali 18 hodnot.) Poslední tři hodnoty jsou tyto: v půlícím bodě strany $P_i P_j$ ($i = 1, 2$, $j = 2, 3$, $i < j$) je předepsána derivace podle normály. Tato normála je orientována tak, že při pohledu v jejím směru je vrchol P_i po naší levé ruce.

I když byl ve své podstatě Zlámal vždy vlk – samotář, v té době jsme si to ani neuvědomovali. Ing. Kratochvíl se u něj pravidelně při svých návštěvách v LPS stavoval, Zlámal se neměl kromě mne s nikým o MKP možnost bavit a tak jsme dosti často spolu všichni tři družně sedávali v Zlámalově pracovně. Tento kolektiv se na jaře 1968 rozrostl o dalšího člena: programátora Ing. Holušu – budoucí programátorskou jedničku přes MKP v Československu. Zlámal totiž chtěl svoje výsledky ověřit v početní praxi a pověřil proto Holušu, aby mu jeho algoritmus pro výpočet tenké desky při použití jeho trojúhelníkového C^1 -prvku naprogramoval.

Kratochvílový programy obsahovaly jako konečněprvkovou násadu funkce, které byly po trojúhelníčích polynomy prvního stupně, takže Holušova úloha nebyla lehká: musel Kratochvílový programátorské postupy zobecnit pro polynom pátého stupně, kde kromě derivací prvního a druhého řádu vystupovaly také derivace podle normály. Holuša vždy říkal, že programovat konečné prvky je snadná věc (ale v závorce dodával, že hledat chyby při ladění je velmi obtížné). A ladění při tak komplikovaném programu bylo k zoufání, protože výsledky testovacích příkladů byly takové neslané nemastné – zkrátka nepřesvědčivé vzhledem k teoreticky předpovězené přesnosti. Zlámal se ptal Kratochvíla: „A počítal tou metodou vůbec někdo něco.“ Kratochvíl se jen smál a říkal Zlámalovi, aby byl trpělivý. V polovině července 1968 našel Holuša po několikanásobné kontrole chybu v jednom indexu a testovací příklady najednou vyšly s přesností na osm platných číslic

– cili naprosto přesvědčivě potvrzená teorie. Zlámal týden na to odjel na konferenci do Edinburgu a tam požádal předsedajícího, aby směl hovořit o něčem naprosto jiném než na začátku roku oznámil. To byl první mezinárodní referát o metodě konečných prvků.

Když se metoda konečných prvků osvědčila i v tak komplikovaném případě jako průhyb tenkých desek, projevil se Kratochvílův cit pro situaci a jeho organizační talent. Navrhl Zlámalovi, aby v první polovině roku 1970 proběhl v LPS kurs z metody konečných prvků pro inženýry z různých podniků a vysokých škol. Aby měl kurs důstojnou úroveň, musela se k němu připravit dobrá skripta [26]. Také sestavit osnovu kurzu dalo jistou práci. Proto Kratochvíl navrhl až rok 1970. V kursu měli přednášet Zlámal (jako ředitel LPS) s Kratochvílem a Holušou; já jsem se podílel na skriptech. Kurs měl velký ohlas a úspěch a několikrát se opakoval.

Kratochvíl koncem roku 1967 seznámil s MKP také své dva přátele z FAST: prof. Ing. Vladimíra Koláře, DrSc., a prof. Ing. Ladislava Mejzlíka, DrSc. Čilý Kolář začal v roce 1969 organizovat napsání knihy [30], která vyšla v polovině roku 1972. Byla to první česká učebnice o MKP.

Po vstupu vojsk jsme se ještě více zakousli do práce. Zlámal psal současně dva články; jeden o algoritmizaci MKP [21], druhý o redukci parametrů [22] – oba vyšly krátce po sobě v Numer. Math. a spolu s prvním článkem z roku 1968 mu vynesly pozvání do USA a Francie celkem na tři měsíce za velmi výhodných finančních podmínek. Odjel koncem roku 1969.

Já (kromě práce na článku [23], který byl napsán na základě věty o hustotě $C^\infty(\overline{\Omega})$ v libovolném Sobolevově prostoru na oblasti Ω) jsem začal v říjnu 1968 budovat hierarchii interpolačních polynomů na trojúhelníku – byla to cesta dlouhým tmavým tunelem a směšné na celé věci je, že z matematiky jsem na to nepotřeboval nic, nepočítám-li vědomost, že součet přirozených čísel od jedné do n je roven $\frac{1}{2}n(n+1)$. V hlavě se mi rozsvítilo někdy na začátku roku 1969 při večerních zprávách tu sobotu, kdy dávali druhé pokračování Randalla a Hopkirka. Článek [24], který mi udělal jméno, jsem pak sepsal během měsíce. Stačilo dokázat ještě jedno duchaplnější lemma a zobecnit trochu Zlámalovo důkazové schéma z jeho prvního článku o MKP. Zlámal tento můj výsledek odvezl na podzim 1969 do USA a spolu s prof. J. H. Bramblem jej oděli do lepšího hávu, tj. příslušné interpolační teorémy dokázali v sobolevovských normách [25].

V druhé polovině roku 1970 začal Zlámal pracovat na své koncepci zakřivených trojúhelníkových C^0 -prvků. První část [32] tohoto díla vyšla v roce 1973 v SIAM J. Numer. Anal. a pojednávala o ideálních zakřivených trojúhelníkových prvcích, jejichž křivá strana je totožná s částí hranice dané oblasti Ω . Druhá část [35] pojednávala o reálných křivých trojúhelnících a numerické integraci na nich. Při psaní této práce udělal Zlámal jen jednu chybu: referoval o dosažených výsledcích v průběhu práce při jedné ze svých zahraničních cest. Prof. Raviart z Paříže mi v roce 1975 řekl: „Věděli jsme, že ještě nějakou dobu potrvá než Zlámal článek pošeď do tisku. Museli jsme jej předechnat. Dělali jsme na tom s Ciarletem téměř dnem i nocí a práci [29] o křivých izoparametrických prvcích a numerické integraci na

nich jsme uveřejnili v Azizově knize o matematických základech metody konečných prvků, která vyšla v roce konání konference (tj. 1972).“

Během roku 1969 jsem se pokusil zkonztruovat trojrozměrný C^1 -prvek na čtyřstěnu. Byl to polynom 9. stupně, takže k jeho jednoznačnému určení bylo zapotřebí

$$N = \frac{1}{6} (n+1)(n+2)(n+3) = \frac{1}{6} \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 = 220$$

parametrů. Jak jsem dospěl k číslu $n = 9$? V jedné dimensi je nejjednodušším C^1 -prvkem Hermiteův polynom 3. stupně na úsečce, ve dvou dimenzích je to polynom 5. stupně na trojúhelníku. Zdálo by se, že ve třech dimenzích to bude polynom 7. stupně na čtyřstěnu. Je však třeba podívat se na vztah mezi polynomy v jedné a dvou dimenzích. Uvažujme proto již známý polynom 5. stupně $p(x, y)$, který je C^1 -prvkem na trojúhelníku. Na každé straně trojúhelníka máme po parametrisaci polynom 5. stupně, který je jednorozměrným C^2 -prvkem. Ověřme to: Nechť $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ jsou dva vrcholy trojúhelníka. Parametrická vyjádření strany P_1P_2 lze napsat ve tvaru

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)s, y = y_1 + (y_2 - y_1)s, s \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Hodnoty polynomu $p(x, y)$ na straně P_1P_2 vyjadřuje funkce

$$g(s) = p(x_1 + (x_2 - x_1)s, y_1 + (y_2 - y_1)s),$$

takže $g(0) = p(P_1)$, $g(1) = p(P_2)$. Pomocí věty o derivaci složené funkce zjistíme, že

$$\begin{aligned} g'(0) &= (x_2 - x_1) \frac{\partial p}{\partial x}(P_1) + (y_2 - y_1) \frac{\partial p}{\partial y}(P_1), \\ g'(1) &= (x_2 - x_1) \frac{\partial p}{\partial x}(P_2) + (y_2 - y_1) \frac{\partial p}{\partial y}(P_2). \end{aligned}$$

Podobně (jenom složitěji) lze zjistit hodnoty $g''(0)$ a $g''(1)$. Tedy polynom 5. stupně $g(s)$ je jednorozměrným C^2 -prvkem.

Extrapolujeme-li tuto skutečnost na vztah mezi polynomy dvou a tří dimenzí, usuzujeme, že na trojúhelníkové stěně čtyřstěnu musíme dostat dvojrozměrný C^2 -prvek. Tím je ve dvou dimenzích polynom 9. stupně. Odtud dostáváme $n = 9$. Čísla 3, 5 a 9 jsou speciálními případy obecného vztahu

$$n(d) = 2^d + 1 \quad (d = 1, 2, 3, \dots).$$

O C^m -prvcích na čtyřstěnu mi vyšly články [28, 33, 36].

V roce 1972 začalo Brno ztrácat svou výjimečnost, protože v matematických časopisech a sbornících konferencí se začaly objevovat MKP články mimobrněnských matematiků (jako již zmíněný článek [29]). V tomto období vyšly dva články dalších dvou Brňáků: Melkese [27] a Koukala [31]. První má tu prioritu, že se v jeho názvu objevuje nelineární problém, druhý článek vtipně navazuje na konstrukce trojúhelníkových C^m -prvků uvedených v [24].

Moje „aritmetické“ období v MKP uzavřela tato trojice článků: [33] (rukopis jsem zaslal v prosinci 1970 ze Swansea), [36] (zde jsem popsal konstrukci čtyřstěnných C^m -prvků pro obecné m ; musel jsem užít triky, které jsem v 2D

nepotřeboval) a [37] (který jsem napsal na žádost Raviarta pro nové RAIRO², které začali řídit Ciarlet s Raviartem).

S napsáním článku [37] je spojena jedna zajímavá historka: O prázdninách v roce 1973 koupil Zlámal do knihovny LPS knihu *An analysis of the finite element method* od amerických matematiků Stranga a Fixe [34]. Byla to první matematická kniha o MKP. Našel jsem v ní tento výrok: „Ženíšek proved the following result: *To achieve piecewise polynomials of class C^m on an arbitrary triangulation of a polygonal domain, the nodal parameters must include all derivatives of order less or equal to $2m$ at the vertices of the triangle.*“ Žádnou takovou větu jsem nedokázal. Když to však Strang s Fixem považují za zajímavý výsledek, dokážu to a napišu o tom článek. U Balatonu jsem tak byl připraven, co Raviartovi odpovím na jeho výzvu: dokážu větu o nutné podmínce existence trojúhelníkového C^m -prvku a článek bude mít název *A general theorem on triangular finite C^m -elements*. To zatím nedokázané moje tvrzení od Stranga a Fixe jsem potom uvedl jako *summary* svého článku. (Článek [37] byl zase jenom „aritmeticky“.)

Ke konci roku 1984 oslavoval Zlámal svou šedesátku v Mariánských Lázních. Byl jsem také pozván, ale těsně před odjezdem jsem si ošklivě poranil koleno. Tak jsem ležel doma a koukal do stropu. Najednou jsem si uvědomil toto: ještě nikdo neinterpoloval **jednoduché složitější**. Tato neobvyklá interpolace je založena na několika Zlámalových výsledcích a jednom neobvyklém obratu, který je popsán v Lemmatu 31.19 (viz Dodatek 3). S mnohaletým odstupem vidím, jaký to byl hvězdný okamžik. Tenkrát (v roce 1984) jsem byl jenom rozčilen. Ta cesta od setkání s Ciarletem v roce 1978 (kdy jsem dostal zelenou pro řešení svých problémů) byla téměř na den šest let dlouhá a konečně skončila. Stal jsem se matematikem. Ted' už stačí tento skvělý trik aplikovat. Dá to sice práci, ale bude to práce radostná. Svým způsobem to velká matematika nebyla; byl to pouze neobvyklý nápad. To Zlámal pro svou konstrukci *ideálních zakřivených trojúhelníkových prvků* potřeboval hodně matematiky.

Rozhodl jsem se získaný trik aplikovat nejprve na lineární problémy, ve kterých jsem byl doma. Řekl jsem si, že nevhodnější název článku bude *How to avoid the use of Green's theorem in the Ciarlet-Raviart theory of variational crimes* a že manuscript pošlu Ciarletem, který s tím nenadělá žádné cavyky. Protože jsem však svůj trik interpolovat **jednoduché složitější** chtěl zobecnit na libovolný trojúhelníkový C^0 -prvek, práce na článku mi trvala dost dlouho a byl jsem s ní hotov až v roce 1986. Zatím jsem se na Equadiffu 1985 v Brně spojil se Slávou Feistauerem, abychom můj velký trik aplikovali na nelineární eliptické problémy [40]. Ciarlet i Zlámal nám záviděli. No jo, ale oni ve svých modelových úvahách předepisovali na celé hranici uvažované oblasti pouze homogenní Dirichletovu okrajovou podmínu.

Vratme se ale k prof. Zlámalovi. Články [32] a [35] zakončily Zlámalovo stationární (či eliptické) období. Od roku 1973 začal pracovat na evolučních problémech, které řešil kombinací metody konečných prvků a diferenční metody. Zprvu

²Rev. Française Automat. Informat. Recherche Opérationnelle.

to byla lineární rovnice pro vedení tepla, kde se věnoval zejména vícekrokovým metodám; od roku 1975 začal analyzovat různé nelineární typy. V období 1975–1978 navíc zásadním způsobem přispěl k teoretickým otázkám superkonvergence MKP. V období 1981–1988 se věnoval jednak řešení kvazistacionárního magnetického pole v nestejnorodém prostředí a dále metodě konečných prvků aplikované na rovnice polovodičů. Pozoruhodné je, že kromě zásadních matematických výsledků publikovaných v renomovaných amerických časopisech se vždy zúčastnil na přípravě algoritmu a podstatně tak přispěl k praktické realizaci řešení problému pomocí průmyslového programu.

Prof. Zlámal nenapsal žádnou knihu – byl příliš soustředěn na hledání řešení praktických problémů. Nevydržel u žádné problematiky přitom tak dlouho, aby ji zcela vyčerpal. Obrazně řečeno: jeho brázda byla široká, ale ne tak hluboká, aby tam žádné Brambory nezůstaly. A při pečlivém zkoumání člověk zjistil, že jich tam zůstalo požehnaně. Je to moje dobrá zkušenost.

Z formálních uznání stojí za zmínsku dvě: řadu let byl předsedou matematického kolegia ČSAV a obdržel čestný doktorát Technische Universität Dresden.

Prof. Zlámal zemřel náhle ve věku 73 let dne 22. června 1997. Seznam jeho článků má 70 položek, z toho je 47 věnováno metodě konečných prvků. Od roku 1968 pracoval jenom na této metodě. Z těch 47 je 18 článků zcela zásadních.

Zlámalovo velké štěstí bylo, že první inženýr na evropském kontinentě, který začal pracovat v metodě konečných prvků, působil v Brně. Další vývoj událostí už však náhoda nebyla.

Když vědecká rada strojní fakulty VUT v Brně přála prof. Zlámalovi k jeho sedmdesátinám, prozradil na sebe: „Když jsem v roce 1961 přešel z přírodovědecké fakulty brněnské univerzity na strojní fakultu, uvědomil jsem si, že musím dělat matematiku jinak než jak se dělá na univerzitě.“ A to se mu podařilo dokonale.

Prof. Jiří Kratochvíl zemřel ve čtvrtek 11. 10. 2018. Dozvěděl jsem se to v neděli 14. 10. v 15:30, kdy jsem dokončil korekturu textu „Byl jsem u toho!“ a zavolal na mobil prof. Kratochvíla, kdy jsem ho chtěl potěšit hotovým článkem. Bohužel jsem již mluvil pouze s jeho ženou, paní Alicí Kratochvílovou, která mi sdělila velmi smutnou zprávu, že Jiří zemřel. Řekla mi také, že rozloučení s profesorem Kratochvílem se bude konat 19. října 2018 ve 12 hodin v obřadní síni Krematoria na Jihlavské. Z aktivních pamětníků brněnské školy MKP jsem tak zůstal jenom já, protože Ing. Libor Holuša zemřel o 4 týdny později, ve čtvrtek 8. 11. 2018.

REFERENCE³

- [1] R. Courant: *Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations*, Bull. Amer. Math. Soc. **49** (1943), 1–23.
- [2] S. G. Michlin: *Problema minimuma kvadratičnogo funkcionala*, Moskva, 1952.
- [3] M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, L. J. Topp: *Stiffness and deflection analysis of complex structures*, J. Aero. Sci. **23** (1956), 805–823.

³Články, resp. knihy jsou uvedeny chronologicky od nejstaršího k nejmladšímu. Tituly, které vyšly v témže roce jsou uspořádány takto: matematický titul má přednost; jinak podle abecedy. Náskok brněnských matematiků před zbývajícím matematickým světem končí okolo roku 1973. To lze ověřit v podrobné bibliografii Ciarletovy knihy [39]. Informace o Sobolevových prostorech

- [4] S. G. Michlin: *Variacionnye metody v matematicheskoy fizike*, Moskva, 1957.
- [5] J. L. Synge: *The Hypocircle in Mathematical Physics*, Cambridge University Press, 1957.
- [6] A. C. Ahlin: *A Bivariate Generalization of Hermite's Interpolation Formula*, Math. Comp. **18** (1964), 264–273.
- [7] B. Fraeijs de Veubeke: *Displacement and equilibrium models in the finite element method*, in Stress Analysis (O. C. Zienkiewicz & G. S. Holister, Editors), 145–197, London: Wiley, 1965.
- [8] J. Nečas: *Les Méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques*, Academia, Prague; Masson, Paris, 1967.
- [9] O. C. Zienkiewicz, Y. K. Cheung: *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*, London, McGraw Hill, 1967.
- [10] T. H. H. Pian, P. Tong: *The convergence of a finite element method in solving linear elastic problems*. International J. Solids and Structures **3** (1967), No. 5, 865–879.
- [11] J. Kratochvíl, F. Leitner: *Metoda konečných prvků a její aplikace v rovinných úlohách pružnosti. I.*, Stavebnícký časopis **16** (1968), 65–82.
- [12] J. Kratochvíl, F. Leitner: *Metoda konečných prvků a její aplikace v rovinných úlohách pružnosti. II.*, Stavebnícký časopis **16** (1968), 201–218.
- [13] I. Holand, P. G. Bergan: *Higher-order finite element for plane stress*, Proceedings ASCF, EM 2, 1968, 698–702.
- [14] G. Birkhoff, M. H. Schultz, R. S. Varga: *Piecewise Hermite interpolation in one and two variables with applications to partial differential equations*, Numer. Math. **11** (1968), 232–256.
- [15] M. Zlámal: *On the finite element method*, Numer. Math. **12** (1968), 394–409.
- [16] J. H. Argyris, I. Fried, D. S. Scharpf: *The TUBA family of plate elements for the matrix displacement method*, The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society **72** (1968), 701–709.
- [17] W. Bosshard: *Ein neues vollverträgliches endliches Element für Plattenbiegung*, Abhandlungen der Internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochbau, Zürich, 1968.
- [18] M. Visser: *The finite element method in deformation and heat conduction problems*, Delft, 1968.
- [19] K. Bell: *A refined triangular plate bending element*, Internat. J. Numer. Methods Engrg. **1** (1969), 101–122.
- [20] A. Ženíšek: *Konvergence metody konečných prvků pro okrajové problémy systému elliptických rovnic*, Apl. mat. **14** (1969), 355–377 .
- [21] M. Zlámal: *On some finite element procedures for solving second order boundary value problems*, Numer. Math. **14** (1969), 42–48.
- [22] M. Zlámal: *A finite element procedure of the second order of accuracy*. Numer. Math. **14** (1970), 394–402.
- [23] A. Ženíšek, M. Zlámal: *Convergence of a finite element procedure for solving boundary value problems of the fourth order*. Internat. J. Numer. Methods Engrg., **2** (1970), 307–310.
- [24] A. Ženíšek: *Interpolation polynomials on the triangle*. Numer. Math. **15** (1970), 283–296.
- [25] J. H. Bramble, M. Zlámal: *Triangular elements in the finite element method*. Math. Comp. **24** (1970), 809–820.
- [26] L. Holuša, J. Kratochvíl, A. Ženíšek, M. Zlámal: *Metoda konečných prvků*, Ediční středisko VUT, Brno, 1970.
- [27] F. Melkes: *The finite element method for non-linear problems*, Apl. mat. **15** (1970), 177–189.
- [28] A. Ženíšek: *Hermite interpolation on simplexes in the finite element method*, Proceedings of Equadiff 3, J. E. Purkyně Univ., Brno, 1972, 271–277.
- [29] P. G. Ciarlet, P. A. Raviart: *The combined effect of curved boundaries and numerical integration in isoparametric finite element methods*, in *The Mathematical Foundations of the*

jsem čerpal hlavně z knih [2, 8, 38]. Protože jsem svůj výklad omezil na fakta témař bez matematických vztahů, čtenář, který dychtí po matematickém výkladu, nalezne jej v [42] a [43]. O knihy [42, 43] si může každý napsat na mou mailovou adresu. Zašlu pdf soubory zdarma.

- Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations (A. K. Aziz, Editor), Academic Press, New York, 1972, 409–474.
- [30] V. Kolář, J. Kratochvíl, F. Leitner, A. Ženíšek: *Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků*, SNTL, Praha, 1972.
 - [31] S. Koukal: *Piecewise polynomial interpolations in the finite element method*. *Apl. mat.* **18** (1973), 146–160.
 - [32] M. Zlámal: *Curved elements in the finite element method. I.*, *SIAM J. Numer. Anal.* **10** (1973), 229–240.
 - [33] A. Ženíšek: *Polynomial approximation on tetrahedrons in the finite element method*, *J. Approx. Theory* **7** (1973), 334–351.
 - [34] G. Strang, G. J. Fix: *An analysis of the finite element method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1973.
 - [35] M. Zlámal: *Curved elements in the finite element method. II.*, *SIAM J. Numer. Anal.* **11** (1974), 347–362.
 - [36] A. Ženíšek: *Tetrahedral finite C^m -elements*, *Acta Univ. Carolin. Math. Phys.* **15** (1974), 189–193.
 - [37] A. Ženíšek: *A general theorem on triangular finite C^m -elements*, *RAIRO Anal. Numer.* **8** (1974), 119–127.
 - [38] A. Kufner, O. John, S. Fučík: *Function spaces*, Academia, Praha, 1977.
 - [39] P. G. Ciarlet: *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam-New York-Oxford, 1978.
 - [40] M. Feistauer, A. Ženíšek: *Finite element solution of nonlinear elliptic problems*, *Numer. Math.* **50** (1987), 147–163.
 - [41] M. Křížek: *On semiregular families of triangulations and linear interpolation*. *Appl. Math.* **36** (1991), 223–232. (Preprint s tímto názvem vyšel v roce 1990 a byl citován v [42].)
 - [42] A. Ženíšek: *Nonlinear elliptic and evolution problems and their finite element approximations*, Academic Press, London, 1990.
 - [43] A. Ženíšek: *Sobolev spaces and the finite element method in boundary value problems*. Institute of Chemical Technology, Prague, 2012.

DODATEK 1

V roce 1992 vyšla v SIAM Review tato skvělá recenze na mou londýnskou knihu [42]⁴ od prof. Larse B. Wahlbina (Cornell University). Byla jako by ji psal básník. (Však on také verše psal.) Protože uvádí český překlad kvůli většímu pohodlí čtenáře, ochuzuji tak zbehlejší čtenáře o poetičnost originálu, která je pro mne nepřeložitelná:

Všechny frustrující zkušenosti shrnuje První Zákon aplikované matematiky do dvou slov: „Nic nepasuje!“ (Nothing fits!) Chcete-li např. citovat výsledek o konvergenci konečněprvkových aproximací, pravděpodobně jej naleznete pro oblast s polygonální hranicí, zatímco vaše oblast má po částech zakřivenou hranici, nebo když naleznete článek, který se zabývá vaším typem nelinearity, tak funkce $u_0(x, y)$ vystupující v počáteční podmínce $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$ je v něm hladší než potřebujete ve své aplikaci, a tak dále a podobně.

Ve snaze vypořádat se s Prvním Zákonem, pojednání profesora Ženíška je syntézou mnoha vyšetřování, které byly provedeny, aby různé obtíže byly izolovány a v této isolaci analyzovány a vyřešeny.

⁴Kniha [42] je první matematickou knihou o MKP, která byla napsána v provinciálním Brně.

Dovolím si stručně popsat výsledný Super teorém knihy v časově závislých případech. (Podobný teorém existuje ve stacionárních případech.) Uvažujeme tedy parabolický problém v prostorových proměnných x, y a časové proměnné t s (1) nelineárními (monotonními) operátory, (2) počáteční podmínkou $u(x, y) = u_0(x, y)$, kde $u_0(x, y) \in L_2(\Omega)$, (3) nejobecnějšími smíšenými nehomogenními Dirichlet-Neumannovými okrajovými podmínkami. Proto užijeme koncepci slabého řešení. Přibližné řešení je počítáno v oblasti Ω metodou konečných prvků spolu se zpětnou Eulerovou časovou diskretizací. Takže uvažujeme (4) aproximaci zakřivené hranice a (5) numerickou integraci.

Super teorém pak zaručuje konvergenci numerických aproximací a v případě hladšího řešení uvádí rychlosť konvergence v mocninách h a Δt , kde h je největší strana trojúhelníkových prvků, které tvoří triangulaci oblasti Ω , a Δt je délka časového kroku.

Při cestě k takovým Super teorémům je každá obtíž v knize studována odděleně. Úvodní kapitola (mající 44 stran) je věnována funkčnímu prostorem, Bochnerovým integrálům a ostatním nutným prostředkům, např. co je méněno pojmem „slabé řešení“. Potom je kniha zorganizována do pěti kapitol takto: 1. Lineární eliptické problémy v oblastech s polygonální hranicí (96 stran), 2. Trojúhelníkové konečné prvky (74 stran), 3. Konečněprvková technika v oblastech s křivou hranicí (20 stran) (třetí kapitola obsahuje základy aproximace křivé hranice), 4. Nelineární eliptické problémy (52 stran), 5. Nelineární evoluční problémy (96 stran). Osm kratších dodatků, seznam užité literatury a abecední rejstřík uzavírají knihu.

Je to jasně psaný a podrobný přehled práce autora a jiných. Velmi pečlivý výklad různých „variačních zložin“ v případě užití konečných prvků tvoří z knihy cennou referenci pro výzkumné pracovníky, která komplementuje obě Ciarletova pojednání [C1, C2].

REFERENCE

- [C1] P. G. Ciarlet, *Basic error estimates for elliptic problems*, Handbook of Numerical Analysis, Vol. II (P. G. Ciarlet and J. L. Lions, eds.), North-Holland, Amsterdam, 1991, 19–351.
- [C2] P. G. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland, Amsterdam, 1978.

Prof. Wahlbin byl matematik světového významu: např. v Handbook of Numerical Analysis, Vol. II má na str. 353–522 kapitolu s názvem Local Behavior in Finite Element Methods.

Je nutné zdůraznit, že moje londýnská kniha vyšla v roce 1990, kdežto Ciarletova práce [C1] až v roce 1991. Dále: (1) V mé londýnské knize není na žádném místě použit výraz „Super teorém“. (2) S prof. Wahlbinem jsem se nikdy nesetkal, ani si s ním nevyměnil jakýkoliv dopis či e-mail.

DODATEK 2 (O SLABÝCH ŘEŠENÍCH A KVADRATICKÝCH FUNKCIONÁLECH)

Nechť Ω je ohraničená oblast v rovině (x_1, x_2) s po částech hladkou hranicí $\partial\Omega$. Uvažujme tento lineární okrajový problém:

$$-\sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = f \quad \text{v } \Omega, \quad (1)$$

$$u = u_D \quad \text{na } \Gamma_1, \quad (2)$$

$$\sum_{i,j=1}^2 k_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} n_j = q \quad \text{na } \Gamma_2, \quad (3)$$

kde Γ_1, Γ_2 jsou takové relativně otevřené podmnožiny hranice $\partial\Omega$, že

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset, \quad \text{meas}_1 \Gamma_1 + \text{meas}_1 \Gamma_2 = \text{meas}_1 \partial\Omega, \quad \text{meas}_1 \Gamma_1 > 0.$$

Symboly k_{ij} , f , u_D a q označují dané dostatečně hladké funkce bodu $x \equiv (x_1, x_2)$ (jejich hladkost je specifikována na příslušném místě, zejména v Předpokladech 31.1 uvedených v Dodatku 3) a $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ je jednotková vnější normála k hranici $\partial\Omega$, $n_i = n_i(x)$. Konečně, symbol $\text{meas}_1 \Gamma$ značí jednorozměrnou míru oblouku Γ .

Poznámka 1. a) V případě jednoduše souvislé oblasti Ω nejjednodušší případ oblouků Γ_1, Γ_2 , kde $\Gamma_2 \neq \emptyset$, lze popsat takto: Existují dva různé body $A \in \partial\Omega$, $B \in \partial\Omega$, že $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{A, B\}$, $\bar{\Gamma}_1 = \Gamma_1 \cup \{A, B\}$, kde $\bar{\Gamma}_1$ označuje relativní uzávěr Γ_1 .

b) Ve speciálním případě $k_{ij} = \delta_{ij}$, kde $\delta_{ij} = 1$ pro $i = j$ a $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$, se rovnice (1) redukuje na Poissonovu rovnici $-\Delta u \equiv -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = f$ v Ω a okrajová podmínka (3) na tvar: $\frac{\partial u}{\partial n} = q$ na Γ_2 .

Definice 2 (klasického řešení okrajového problému (1)–(3)). Nechť funkce k_{ij} jsou spojité i se svými oběma prvními parciálními derivacemi na množině $\Omega \cup \Gamma_2$, tj. stručně $k_{ij} \in C^1(\Omega \cup \Gamma_2)$. Nechť dále $u_D \in C^0(\Gamma_1)$ a $q \in C^0(\Gamma_2)$. Potom funkce $u \in C^2(\bar{\Omega})$, která splňuje rovnici (1) a podmínky (2), (3), se nazývá klasickým řešením okrajového problému (1)–(3).

Abychom získali slabou (resp. variační) formulaci problému (1)–(3), předpokládejme, že jeho klasické řešení existuje, a násobme (1) libovolnou funkcí $v \in V$, kde

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ na } \Gamma_1\}. \quad (4)$$

Symbol $H^1(\Omega)$ přitom značí množinu funkcí, které jsou na Ω kvadraticky integrovatelné (tj. $v \in L_2(\Omega)$) a které mají na Ω kvadraticky integrovatelné první zobecněné derivace (viz Definici C v Dodatku 3). Prozatím pojmenováváme, že např. funkce, která je spojitá na Ω a má v Ω po částech spojité klasické první derivace, náleží do $H^1(\Omega)$. Po integraci přes Ω dostaneme

$$-\sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} v \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) dx = \int_{\Omega} vf dx. \quad (5)$$

Levou stranu (5) upravme pomocí Greenovy formule $\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} (uv) dx = \int_{\Gamma} uv n_i ds$:

$$\begin{aligned} & - \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} v \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) dx \\ &= - \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \right) dx + \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} k_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx \\ &= - \sum_{i,j=1}^2 \int_{\partial\Omega} v k_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} n_j ds + \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} k_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx. \end{aligned}$$

Podle (3) a (4) platí

$$- \sum_{i,j=1}^2 \int_{\partial\Omega} v k_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} n_j ds = - \int_{\Gamma_2} v q ds,$$

takže vztah (5) může být psán ve tvaru

$$\sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} k_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} v f dx + \int_{\Gamma_2} v q ds. \quad (6)$$

Položme kvůli stručnosti

$$a(v, w) = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} k_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} dx, \quad (7)$$

$$L(v) = \int_{\Omega} v f dx + \int_{\Gamma_2} v q ds. \quad (8)$$

Potom (6) má tvar

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V.$$

Protože tento vztah může být splněn funkci u , která je méně hladká než klasické řešení problému (1)–(3), jsme motivováni formulovat následující variační problém.

Problém 3. Nechť ohraničená oblast Ω má po částech hladkou hranici $\partial\Omega$ bez bodů vratu. Nechť $k_{ij} \in C^0(\overline{\Omega})$. Nechť dále $u^* \in H^2(\Omega)$ je funkce taková, že $u_D = u^*$ na Γ_1 . Nechť $f \in L_2(\Omega)$ a $q \in L_2(\Gamma_2)$. Problém zní: nalezněte takovou funkci $u \in H^1(\Omega)$, že

$$u - u^* \in V, \quad (9)$$

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V, \quad (10)$$

kde prostor V je definován vztahem (4) a forma $a(u, v)$, resp. $L(v)$ vztahem (7), resp. (8).

Poznámka 4. a) Předpoklady problému 3 o funkciích k_{ij} , f , q zaručují, že integrály definující formy $a(v, w)$ a $L(v)$ jsou konečné pro všechna $v, w \in H^1(\Omega)$.

b) Vztah (9) implikuje $u = u_D$ s.v. na Γ_1 , což je okrajová podmínka (2) napsaná pro funkci $u \in H^1(\Omega)$.

Lemma 5. a) Nechť problém (1)–(3) má klasické řešení u . Potom u je řešením problému 3.

b) Nechť problém 3 má řešení u . Když toto řešení i funkce k_{ij}, f, q jsou do-statečně hladké, potom u je klasickým řešením problému (1)–(3).

Tvrzení a) plyne ze vztahů (1)–(10). Tvrzení b) je dokázáno v [42, Lemma 1.5]. Lemma 5 zdůvodňuje, proč řešení problému 3 se též nazývá slabým řešením okrajového problému (1)–(3).

Věta 6 (o minimu kvadratického funkcionálu). Nechť bilineární forma $a(v, w)$, která vystupuje ve formulaci problému 3 je symetrická, tj.

$$a(v, w) = a(w, v) \quad \forall v, w \in H^1(\Omega). \quad (11)$$

Je-li také V -eliptická, tj. když platí

$$a(v, v) \geq \beta \|v\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall v \in V \quad (\beta = \text{konst} > 0), \quad (12)$$

kde $V = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ na } \Gamma_1\}$ (viz (4)), potom funkce $u \in H^1(\Omega)$ je jediným řešením variačního problému 3, když a jen když ostře minimalizuje kvadratický funkcionál

$$\Pi(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L(v) \quad (13)$$

na množině $u^* + V$, tj.

$$\Pi(u) \leq \Pi(v) \quad \forall v \in u^* + V, \quad (14)$$

kde znamení rovnosti platí pouze pro $v = u$ a kde

$$u^* + V = \{w \in H^1(\Omega) : w = u^* + v \ \forall v \in V\}.$$

Důkaz. Množina $u^* + V$ může být psána také ve tvaru

$$u^* + V = \{v \in H^1(\Omega) : v = u + \lambda w \ \forall \lambda \in \mathbb{R}^1 \ \forall w \in V\}, \quad (15)$$

protože $u = u^*$ na Γ_1 . Nechť $v \in u^* + V$. Potom podle (13) a (11) platí

$$\begin{aligned} \Pi(u + \lambda w) - \Pi(u) &= \frac{1}{2} a(u + \lambda w, u + \lambda w) - L(u + \lambda w) - \frac{1}{2} a(u, u) + L(u) \\ &= \frac{\lambda}{2} a(u, w) + \frac{\lambda}{2} a(w, u) + \frac{\lambda^2}{2} a(w, w) - \lambda L(w) \\ &= \lambda[a(u, w) - L(w)] + \frac{\lambda^2}{2} a(w, w). \end{aligned} \quad (16)$$

a) Nechť u je jediné řešení variačního problému 3. Potom podle (10) a (16)

$$\Pi(u + \lambda w) - \Pi(u) = \frac{\lambda^2}{2} a(w, w).$$

Tento výsledek a V -elipticitu formy $a(v, v)$ implikují, že funkce u ostře minimalizuje kvadratický funkcionál $\Pi(v)$ na množině $u^* + V$.

b) Nyní dokážeme opačnou implikaci. Nechť nějaká funkce u ostře minimalizuje kvadratický funkcionál $\Pi(v)$ na množině $u^* + V$. Existuje-li taková funkce $w_0 \in V$, že

$$a(u, w_0) \neq L(w_0), \quad (17)$$

potom, zvolíme-li $\lambda = -[a(u, w_0) - L(w_0)]/a(w_0, w_0)$, dostaneme ze (16)

$$\Pi(u + \lambda w_0) - \Pi(u) = -\frac{[a(u, w_0) - L(w_0)]^2}{2a(w_0, w_0)} < 0,$$

protože podle (12) je $a(w_0, w_0) > 0$ (funkce w_0 nemůže být ekvivalentní nule – viz (17)). Dostali jsme $\Pi(u + \lambda w_0) < \Pi(u)$, což je ve sporu s předpokladem, že platí (14). Tedy (17) neplatí, takže funkce u splňuje (10), tj. funkce u je jediné řešení variačního problému 3. \square

Poznámka 7. Nechť $k_{ij} \in C^0(\bar{\Omega})$.

- a) Vztah (11) platí právě tehdy, když $k_{ij}(x) = k_{ji}(x) \forall x \in \Omega$.
- b) Když $\exists \beta > 0$ takové, že $\sum k_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \beta(\xi_1^2 + \xi_2^2) \forall x \in \Omega, \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$, potom platí (12).

DODATEK 3 (INTERPOLACE JEDNODUCHÉHO SLOŽITĚJŠÍM)

(Zde použité číslování je převzato z knihy [43].)

28.12. Definice. Nechť ohraničená oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ má polygonální hranici. Množinu

$$\mathcal{T} = \{\bar{T}_1, \bar{T}_2, \dots, \bar{T}_p\}$$

sestávající z konečného počtu uzavřených trojúhelníků \bar{T}_j nazýváme *triangulaci* oblasti $\bar{\Omega}$, jsou-li splněny tyto dvě podmínky:

- a) $\bar{\Omega} = \bigcup_{j=1}^p \bar{T}_j$,
- b) libovolné dva trojúhelníky $\bar{T}_i, \bar{T}_j \in \mathcal{T}$ jsou buď disjunktní, nebo mají společný vrchol, nebo společnou stranu.

Symbol \mathcal{T}_h značí triangulaci sestávající z trojúhelníků majících všechny strany kratší než h . V dalším předpokládáme, že $h \in (0, 1)$ a že každá triangulace \mathcal{T}_h oblasti $\bar{\Omega}$ s polygonální hranicí je konzistentní s hranicí $\partial\Omega$.

29.1. Definice. Řekneme, že triangulace \mathcal{T}_h je *konzistentní* s polygonální hranicí $\partial\Omega$, jestliže žádný trojúhelník $\bar{T} \in \mathcal{T}_h$ s vlastností $\text{meas}_1(\partial T \cap \Gamma_1) > 0$ nemá společný bod s $\Gamma_2 = \partial\Omega \setminus \bar{\Gamma}_1$.

Definice A (Triangulace \mathcal{T}_h a ideální triangulace \mathcal{T}^{id} ohraničené oblasti Ω , která obecně nemá polygonální hranici).

a) Aproximujme uzavřenou oblast $\bar{\Omega}$ uzavřenou oblastí $\bar{\Omega}_h$ s polygonální hranicí $\partial\Omega_h$ tak, že vrcholy polygonální čáry $\partial\Omega_h$ leží na $\partial\Omega$. Triangulaci oblasti Ω_h podle Definice 28.12 nazveme *triangulací oblasti* Ω a budeme ji opět značit \mathcal{T}_h , když $h \in (0, 1)$.

b) Trojúhelník $T \in \mathcal{T}_h$ s právě dvěma vrcholy na $\partial\Omega$ se nazývá *hraniční trojúhelník*.

c) Nechť $T \in \mathcal{T}_h$ je hraniční trojúhelník a P_1^T, P_2^T, P_3^T jsou jeho vrcholy (v lokálním značení), přičemž $P_2^T, P_3^T \in \partial\Omega$. Nechť Σ_T^h je část $\partial\Omega$, která je approximována úsečkou $P_2^T P_3^T$. Uzavřený trojúhelník T^{id} s dvěma přímými stranami $P_1^T P_2^T, P_1^T P_3^T$ a křivou stranou Σ_T^h nazýváme *ideální trojúhelník*. (Troyúhelník \bar{T}

aproximuje ideální trojúhelník T^{id} , který je sdružen (asociován) s \bar{T} .) Nahradíme-li všechny hraniční trojúhelníky v triangulaci \mathcal{T}_h jejich asociovanými ideálními trojúhelníky T^{id} , dostaneme *ideální triangulaci* \mathcal{T}^{id} oblasti $\bar{\Omega}$ asociovanou s triangulací \mathcal{T}_h .

Definice B (Multiindexy, derivace). Nechť $N = \dim \Omega$. Vektor

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$$

se složkami $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ ($i = 1, \dots, N$), kde $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, se nazývá *multiindexem dimense N*. Číslo $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$ se nazývá *délka multiindexu* α . Symbol D^α definovaný vztahem

$$D^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$$

se pak nazývá derivace v multiindexovém značení.

Definice C (Zobecněné derivace a Sobolevovy prostory $H^k(\Omega)$). Funkce $u^{(\alpha)} \in L_2(\Omega)$ ($|\alpha| \leq k$), které vystupují na levé straně definičního vztahu

$$\int_{\Omega} u^{(\alpha)} \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^\alpha \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), |\alpha| \leq k, \quad (*)$$

se nazývají *zobecněnými derivacemi* funkce $u \in L_2(\Omega)$, která vystupuje v integrandu na pravé straně (*). Zobecněné derivace jsou častěji označovány symboly $D^\alpha u$.

Nečť Ω je ohraničená dvojrozměrná oblast, jejíž hranice sestává z konečného počtu hladkých částí⁵. Symbol $H^k(\Omega)$ značí lineární normovaný prostor funkcí $u \in L_2(\Omega)$, které mají zobecněné derivace $u^{(\alpha)} = D^\alpha u \in L_2(\Omega)$ splňující definiční vztah (*) pro všechny $|\alpha| \leq k$; norma $\|\cdot\|_{k,\Omega}$ je v $H^k(\Omega)$ dána vztahem $\|u\|_{k,\Omega}^2 = (u, u)_{k,\Omega}$, kde

$$(u, v)_{k,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) \, dx.$$

Definice D (různá označení).

- a) $\mathcal{P}_2(n)$ je množina všech polynomů dvou proměnných nanejvýš stupně n .
- b) $V = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_1} = 0\}$.
- c) $X_h = \{v \in C^0(\bar{\Omega}_h) : v|_T$ je lineární $\forall T \in \mathcal{T}_h\}$; X_h je konečněprvková approximace prostoru $H^1(\Omega)$.
- d) $V_h = \{v \in X_h : v|_{\Gamma_{h_1}} = 0\}$; V_h je konečněprvková approximace prostoru V .

31.1. Předpoklady. Nechť $\{\Omega_h\}$ ($h \in (0, h_0)$) je množina polygonálních approximací množiny Ω . Nechť $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ je ohraničená oblast taková, že $\tilde{\Omega} \supset \bar{\Omega} \cup \bar{\Omega}_h \quad \forall h \in (0, h_0)$. Nechť funkce $f : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^1$, $u_D : \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $q : \Gamma_2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ a $k_{ij} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^1$ ($i = 1, 2$) mají následující vlastnosti:

- a) f je spojitá a ohraničená na $\tilde{\Omega}$ spolu se svými prvními derivacemi.
- b) Existuje $u^* \in H^2(\Omega)$ tak, že $u_D = u^*|_{\Gamma_1}$.

⁵Tj. připouštíme existenci řezů do Ω .

- c) Funkce q a hranice $\partial\Omega$ jsou po částech třídy C^3 .
- d) Funkce k_{ij} jsou spojité a ohraničené na $\partial\Omega$.
- e) Existuje $\beta > 0$ tak, že

$$\sum_{i,j=1}^2 k_{ij} \xi_i \xi_j \geq \beta(\xi_1^2 + \xi_2^2) \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^1;$$

je tedy splněna podmínka V -ellipticity pro formu $a(v, w)$ definovanou v (7).

31.2. Slabá formulace spojitého problému. Nalezněte funkci $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$ takovou, že

$$\begin{aligned} u &\in H^1(\Omega), \quad u - u^* \in V, \\ a(u, v) &= L(v) \quad \forall v \in V, \end{aligned}$$

kde forma a je definována v (7) a forma L v (8).

Slabou formulaci diskrétního problému získáme ve dvou krocích: Napřed vytvoříme slabou formulaci přechodového problému a potom všechny formy vyskytující se v této formulaci approximujeme numerickou integrací.

31.3. Slabá formulace přechodového problému. Nechť

$$W_h = \{v \in X_h : v(P_i) = u^*(P_i) \quad \forall P_i \in \sigma_h \cap \bar{\Gamma}_1\},$$

kde σ_h je množina uzlových bodů v triangulaci \mathcal{T}_h . Nalezněte funkci $\tilde{u}_h \in W_h$ takovou, že

$$\tilde{a}_h(\tilde{u}_h, v) = \tilde{L}_h(v) \quad \forall v \in V_h,$$

kde

$$\tilde{a}_h(v, w) = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_h} k_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} dx \quad \text{a} \quad \tilde{L}_h(v) = \int_{\Omega_h} vf dx + \int_{\Gamma_{h2}} v q_h ds,$$

přičemž q_h je funkce definovaná na $\bar{\Gamma}_{h2}$, která vznikne přenosem funkce q z Γ_2 na Γ_{h2} (podrobně viz [43, 31B.4]).

31.4. Slabá formulace diskrétního problému. Nechť formy $a_h(v, w)$ a $L_h(v)$ jsou získány z forem $\tilde{a}_h(v, w)$ a $\tilde{L}_h(v)$ pomocí numerické integrace. Nalezněte funkci $u_h \in W_h$ takovou, že

$$a_h(u_h, v) = L_h(v) \quad \forall v \in V_h. \tag{31.41}$$

31.10. Věta (Abstraktní odhad chyby). *Jsou-li daná data dostatečně hladká, pak platí pro všechna $h \in (0, h_0)$*

$$\begin{aligned} \|u_C - u_h\|_{1,\Omega_h} &\leq C \left\{ \inf_{v \in W_h} \|u_C - v\|_{1,\Omega_h} + \sup_{\substack{w \in V_h \\ w \neq 0}} \frac{|\tilde{a}_h(u_C, w) - L_h(w)|}{\|w\|_{1,\Omega_h}} \right. \\ &\quad \left. + \inf_{v \in W_h} \sup_{\substack{w \in V_h \\ w \neq 0}} \frac{|\tilde{a}_h(v, w) - a_h(v, w)|}{\|w\|_{1,\Omega_h}} \right\}, \end{aligned} \tag{31.47}$$

kde u_C je Calderonovo prodloužení řešení $u \in H^k(\Omega)$ ($k \geq 1$) slabé formulace spojitého problému 31.2, $u_h \in W_h$ je řešení slabé formulace diskrétního problému

31.4 a kde konstanta C nezávisí na řešení $u \in H^k(\Omega)$ a prostorech $X_h = \{v \in C^0(\bar{\Omega}_h) : v|_T \text{ je lineární } \forall T \in \mathcal{T}_h\}$. Forma \tilde{a}_h je definována v 31.3 a formy a_h a L_h v 31.4.

První výraz na pravé straně (31.47) vyjadřuje interpolační chybu metody konečných prvků. Třetí výraz vyjadřuje chybu numerické integrace. Oba tyto výrazy lze odhadnout zobecněním standardních obratů. Konečně, druhý výraz vyjadřuje chybu, která závisí na approximaci zakřivené hranice. Při jejím odhadu se doposud užívala Greenova věta; pro její aplikaci je zapotřebí, aby přesné řešení variačního problému náleželo alespoň do $H^2(\Omega)$.

Abychom odhadli druhý výraz na pravé straně (31.47) pomocí interpolace jednoduchého složitějšího (tj. bez použití Greenovy věty), uvedeme jisté pomocné věty a pojmy. Jako obvykle, symbol T_0 značí uzavřený trojúhelník, který leží v rovině ξ_1, ξ_2 a má vrcholy $P_1^* = [0, 0]$, $P_2^* = [1, 0]$, $P_3^* = [0, 1]$.

31.15. Lemma (Zlámalův ideální konečný prvek). a) *Nechť T^{id} je ideální trojúhelník s vrcholy P_i^T ($i = 1, 2, 3$), přičemž $P_2^T, P_3^T \in \partial\Omega$. Existuje transformace*

$$x_1 = x_1^{\text{id}}(\xi_1, \xi_2), \quad x_2 = x_2^{\text{id}}(\xi_1, \xi_2) \quad (31.69)$$

která zobrazuje \bar{T}_0 jednojednoznačně na T^{id} , přičemž vrchol P_i^* je zobrazen na vrchol P_i^T ($i = 1, 2, 3$). Jestliže $\xi_1 \in \langle 0, 1 \rangle$, $\xi_2 = 0$, potom (31.69) je parametrickým vyjádřením úsečky $P_1^T P_2^T$; jestliže $\xi_1 = 0$, $\xi_2 \in \langle 0, 1 \rangle$, potom (31.69) je parametrickým vyjádřením úsečky $P_1^T P_3^T$; jestliže $\xi_1 \in \langle 0, 1 \rangle$, $\xi_2 = 1 - \xi_1$ potom (31.69) je parametrickým vyjádřením zakřivené strany $\bar{\Sigma}_T^h$ prvku T^{id} .

b) *Nechť $p(\xi_1, \xi_2) \in \mathcal{P}_{T_0}(1) = \{p|_{T_0} : p \in \mathcal{P}_2(1)\}$ a nechť*

$$\xi_1 = \xi_1^{\text{id}}(x_1, x_2), \quad \xi_2 = \xi_2^{\text{id}}(x_1, x_2) \quad (31.70)$$

je inverzní transformace k (31.69). Potom funkce (ideální konečný prvek)

$$\tilde{w}(x_1, x_2) = p(\xi_1^{\text{id}}(x_1, x_2), \xi_2^{\text{id}}(x_1, x_2)) \quad (31.71)$$

má tyto vlastnosti:

- α) $\tilde{w}(x_1, x_2)$ je lineární podél úseček $P_1^T P_2^T$, $P_1^T P_3^T$.
- β) $\tilde{w}(P_i^T) = p(P_i^*) \equiv w(P_i^T)$ ($i = 1, 2, 3$), kde $w(P_i^T)$ jsou dané hodnoty.
- γ) *Když $\tilde{w}(P_2^T) = \tilde{w}(P_3^T) = 0$, potom $\tilde{w}(P) = 0$ pro všechny body $P \in \bar{\Sigma}_T^h$.*

Důkaz je v [32], resp. [42, kap. 22], přičemž odvození a explicitní vyjádření transformace (31.69) je uvedeno v [42, kap. 22, vztah (22.17)].

Interpolaci vlastnosti funkce $\tilde{w}(x_1, x_2)$ jsou popsány v následujícím lemmatu, které je speciálním případem [32, Theorem 2]; viz také [42, kap. 25].

31.16. Lemma (Zlámalův interpolační teorém). *Nechť $w \in H^2(T^{\text{id}})$ a nechť*

$$\tilde{w}(P_i^T) = w(P_i^T) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (31.72)$$

kde \tilde{w} je ideální konečný prvek z Lemmatu 31.15. Potom

$$\|\tilde{w} - w\|_{s, T^{\text{id}}} \leq Ch^{2-s} \|w\|_{2, T^{\text{id}}} \quad (s = 0, 1). \quad (31.73)$$

31.17. Definice (přirozeného prodloužení). Nechť $w \in X_h$. Funkci $\bar{w} : \bar{\Omega}_h \cup \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^1$ nazýváme *přirozeným prodloužením* w z $\bar{\Omega}_h$ na $\bar{\Omega}_h \cup \bar{\Omega}$, když $\bar{w} = w$ na $\bar{\Omega}_h$ a $\bar{w}|_{T^{\text{id}}} = p|_{T^{\text{id}}}$ na $T^{\text{id}} \supset T$, kde $p \in \mathcal{P}_2(1)$ je polynom splňující $p|_T = w|_T$.

31.18. Definice (funkce $\hat{w} \in V$, která je asociovaná s $w \in V_h$). Nechť $w \in V_h$. Funkci $\hat{w} \in V$ nazýváme *asociovanou* s w , když

- a) $\hat{w} \in C^0(\bar{\Omega})$;
- b) $\hat{w}(P_i) = w(P_i) \forall P_i \in \sigma_h$, kde σ_h je množina všech uzlových bodů (tj. vrcholů trojúhelníků) v \mathcal{T}_h ;
- c) \hat{w} je lineární na každém trojúhelníku $T \in \{\mathcal{T}_h \cap \mathcal{T}^{\text{id}}\}$ a na každém ideálním trojúhelníku $T^{\text{id}} \in \mathcal{T}^{\text{id}}$, který leží podél Γ_2 (tj. $\hat{w} = \bar{w}$ na $T^{\text{id}} \supset T$ a $\hat{w}|_{T^{\text{id}}}$ je restrikcí funkce $w|_T$ na $T^{\text{id}} \subset T$);
- d) když $T^{\text{id}} \in \mathcal{T}^{\text{id}}$ leží podél Γ_1 a $T \in \mathcal{T}_h$ je jeho approximace, potom
 - α) v případě $T \subset T^{\text{id}}$ platí $\hat{w} = 0$ na $T^{\text{id}} \setminus T$ a $\hat{w} = w$ na T ,
 - β) v případě $T^{\text{id}} \subset T$ platí $\hat{w} = \tilde{w}$ na T^{id} , kde \tilde{w} je ideální konečný prvek definovaný v (31.71).

31.19. Lemma. Nechť funkce $\hat{w} \in V$ je asociovaná s $w \in V_h$, kde $V_h = \{v \in X_h : v|_{\Gamma_{h1}} = 0\}$ a $X_h = \{v \in C^0(\bar{\Omega}_h) : v|_T \text{ je lineární } \forall T \in \mathcal{T}_h\}$. Nechť ideální trojúhelník T^{id} leží podél Γ_1 a nechť $T \in \mathcal{T}_h$ je jeho approximace. Když $\bar{T}^{\text{id}} \subset \bar{T}$, potom

$$\|w - \hat{w}\|_{1,T^{\text{id}}} \leq Ch \|w\|_{2,T^{\text{id}}} \leq Ch \|w\|_{1,T}, \quad (31.74)$$

kde C je konstanta nezávislá na h a w .

Důkaz. Lemma 31.19 je bezprostředním důsledkem Lemmatu 31.16 a Definice 31.18, protože $\|w\|_{2,T^{\text{id}}} = \|w\|_{1,T^{\text{id}}} \leq C\|w\|_{1,T}$ pro $w \in \mathcal{P}_2(1)$. \square

31.19a. Poznámka. V Lemmatu 31.19 approximujeme lineární polynom omezený na T^{id} komplikovanějším Zlámalovým ideálním konečným prvkem, který je zadán stejnými třemi hodnotami, abychom dostali na pravé straně (31.74) pouze normu $\|w\|_{1,T}$. Tento relativně jednoduchý trik, který byl nepovšimnut 15 let, hraje významnou roli v [40] v analýze nelineárních elliptických problémů. Pomocí interpolace jednoduchého složitějšího lze totiž odvodit

$$|L_h(w) - \tilde{a}_h(\tilde{u}, w)| \leq Ch^{s/2} \|w\|_{1,\Omega_h} \quad \forall w \in V_h, \quad (**)$$

když $u \in H^s(\Omega)$, $s = 1, 2$. Vztah (**) je podrobně dokázán v [43] v závěru kapitoly 31.

Alexander Ženíšek, Zedníkova 180/6, 603 00 Brno,

e-mail: zenisek@fme.vutbr.cz

TVERBERGOVA VĚTA

IVAN CHAJDA

ABSTRAKT. Před 50-ti lety dokázal H. Tverberg svou proslulou větu, která tvrdí, že pro danou množinu M bodů v eukleidovském prostoru E s jistou restrikcí na počet těchto bodů a na dimenzi E existuje rozklad množiny M takový, že konvexní obaly tříd tohoto rozkladu mají neprázdný průnik. Prezentujeme elementární důkaz této věty, ilustrativní příklad a hypotézu pro eventuální další výzkum.

Před 50-ti lety dokázal Helge Tverberg větu, která znamenala pozoruhodný výsledek v teorii konvexních množin. Abychom čtenáře s tímto výsledkem seznámili, musíme nejprve připomenout několik pojmu z euklidovské geometrie.

Nechť \mathbb{R}^d je d -rozměrný euklidovský prostor. Na něm uvažujeme skalární součin, pomocí něhož zavádíme pojem vzdálenosti dvou bodů tohoto prostoru; pro prvky x, y budeme tuto vzdálenost označovat symbolem $\|x - y\|$. Jsou-li x, y body prostoru \mathbb{R}^d , jejich *konvexním obalem* rozumíme úsečku s krajními body x a y . Jsou-li x, y, z tři body z \mathbb{R}^d , pak jejich *konvexním obalem* je trojúhelník, jehož vrcholy jsou x, y a z . Obecně, nechť je dáno n bodů $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$, pak lze tyto body uvažovat jako vektory v \mathbb{R}^d a *konvexním obalem* bodů x_1, \dots, x_n je množina

$$M = \{a_1 \underline{x}_1 + a_2 \underline{x}_2 + \cdots + a_n \underline{x}_n \mid a_i \geq 0 \text{ pro } i = 1, \dots, n \text{ a } \sum_{i=1}^n a_i = 1\}.$$

Další pojem, který budeme potřebovat, je tzv. *rozklad*. Nechť opět x_1, \dots, x_n jsou body prostoru \mathbb{R}^d . Nechť X_1, \dots, X_r jsou takové podmnožiny v \mathbb{R}^d , že každý bod x_i leží v jediné X_j , a pro každé $k \neq j$ je $X_k \cap X_j = \emptyset$. Množinám X_j říkáme *části rozkladu*.

Je-li X_j množina obsahující právě body x_1, \dots, x_s , tj. $X_j = \{x_1, \dots, x_s\}$, pak konvexním obalem množiny X_j rozumíme konvexní obal bodů x_1, \dots, x_s . Tento konvexní obal budeme označovat symbolem $\text{conv } X_j$.

Tverbergově větě předcházela tzv. Hellyho věta. Ta tvrdí, že každou množinu $d+2$ bodů v prostoru \mathbb{R}^d lze rozdělit na dvě části X_1, X_2 tak, že konvexní obaly X_1 a X_2 nejsou disjunktní, tj.

$$\text{conv } X_1 \cap \text{conv } X_2 \neq \emptyset.$$

Tato věta motivovala Tverberga k následujícímu zobecnění.

2010 MSC. Primární 52A35; Sekundární 52A05, 52A20, 52A22.

Klíčová slova. Konvexní množina, n -rozměrný eukleidovský prostor, skalární součin, konvexní obal, rozklad.

Věta (Tvergbergova). *Nechť je dáno $(r - 1)(d + 1) + 1$ bodů v d -rozměrném euklidově prostoru \mathbb{R}^d . Pak existuje rozklad na r částí X_1, \dots, X_r tak, že jejich konvexní obaly $\text{conv } X_1, \dots, \text{conv } X_r$ mají neprázdný průnik.*

Tverberg podal dva důkazy této věty, ale řada jiných autorů (Roudneff, Sarkaria, Zvagelskii) našli důkazy jednodušší (viz [1, 2, 3]). V tomto článku ukážeme důkaz J. P. Roudneffa.

Důkaz Tvergbergovy věty. Nechť je dáno $(r - 1)(d + 1) + 1$ v prostoru \mathbb{R}^d v obecných pozicích. Nechť $\mathcal{P} = \{X_1, \dots, X_r\}$ je některý rozklad, přičemž $1 \leq |X_j| \leq d + 1$, definujeme funkci

$$f(x, \mathcal{P}) = \sum_{j=1}^r \text{dist}^2(x, \text{conv } X_j),$$

kde $\text{dist}(x, \text{conv } X_j)$ je euklidovská vzdálenost bodu x od množiny $\text{conv } X_j$, zde se uvažuje její druhá mocnina.

Pro daný rozklad \mathcal{P} je funkce $f(x, \mathcal{P})$ konvexní v \mathbb{R}^d , přičemž pro $\|x\| \rightarrow \infty$ roste nadef všechny meze. Tedy má lokální minimum. To znamená, že existuje rozklad \mathcal{P} , pro který je toto minimum nejmenší a nabývá hodnoty μ . Ukážeme, že $\mu = 0$, což pro nás důkaz postačuje. Důkaz vedeme sporem.

Nechť $\mu > 0$ pro některé $z \in \mathbb{R}^d$. Označme y_j bod (jediný!) z $\text{conv } X_j$ pro nějž $\text{dist}(z, \text{conv } X_j) = \|z - y_j\|$. Pak funkce

$$x \mapsto \sum_{j=1}^r \|x - y_j\|^2$$

dosahuje minima také pro $x = z$, a tedy

$$\sum_{j=1}^r (z - y_j) = 0. \tag{1}$$

Poznamenejme, že $z = y_j$ je možné, ale neplatí pro všechna j , neboť předpokládáme $\mu > 0$.

Definujme $Y_j \subset X_j$ pro $j = 1, \dots, n$ tak, aby $y_j \in \text{conv } Y_j$. Tvrdíme, že $\bigcap_{j=1}^r \text{aff } Y_j = \emptyset$, kde $\text{aff } Y_j$ značí affiní podprostor \mathbb{R}^d generovaný množinou Y_j . Totiž v opačném případě existuje bod $v \in \bigcap_{j=1}^r \text{aff } Y_j$, a pak skalární součin $\langle z - v, z - y_j \rangle > 0$ pro $y_j \neq z$ (neboť y_j je bod nejbližší z množiny $\text{conv } Y_j$ bodu z). Dohromady platí $\langle z - v, \sum_{j=1}^r (z - y_j) \rangle > 0$, což je spor s (1).

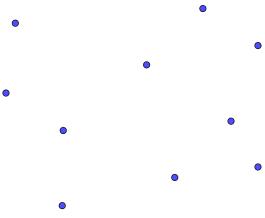
Tedy dle argumentace ze začátku důkazu pro dimenzi plyne, že $\sum_{j=1}^r |Y_j| \leq (n - 1)(d + 1)$, a tedy aspoň jeden ze zadaných bodů, např. x , neleží v žádné z

množin Y_j . Pak $\langle x - y_j, z - y_j \rangle \leq 0$ musí platit pro každé j , a tedy

$$\begin{aligned} 0 &\geq \sum_{j=1}^r \langle x - y_j, z - y_j \rangle = \sum_{j=1}^r \langle (x - z) + (z - y_j), z - y_j \rangle \\ &= \left\langle x - z, \sum_{j=1}^r (z - y_j) \right\rangle + \sum_{j=1}^r \langle z - y_j, z - y_j \rangle = 0 + \mu > 0, \end{aligned}$$

což je spor. \square

Tverbergovu větu můžeme názorně ilustrovat v euklidovské rovině, tedy zvolme $d = 2$ a např. $r = 4$. Pak $(r-1)(d+1)+1 = 10$, tedy uvažujeme 10 bodů v \mathbb{R}^2 např. jako v na obrázku 1.



Obrázek 1. Dané body v rovině.

Podle Tverbergovy věty bude existovat rozklad na konvexní podmnožiny těchto bodů tak, že průnik těchto množin bude neprázdný. Takový rozklad je např. na obrázku 2.

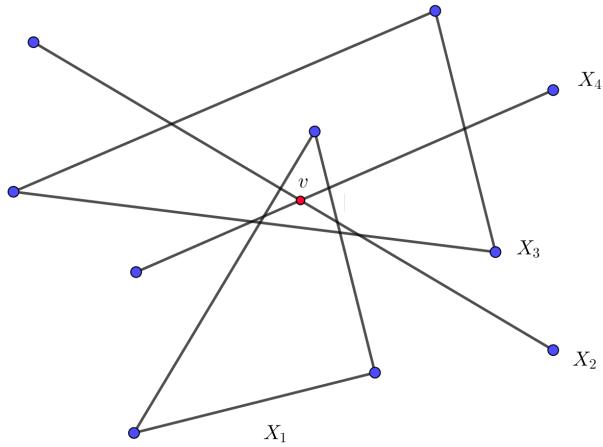
Rozklad se skládá ze 4 konvexních množin, z nichž X_1 a X_3 jsou trojúhelníky, X_2 a X_4 jsou úsečky. Jejich průnik je zřejmě neprázdný, obsahuje bod v .

Čtenáře může samozřejmě zajímat případ, zda tento rozklad je jediný možný. Otázka počtu možných rozkladů dosud vyřešena nebyla, tedy případný zájemce má volné pole působnosti. Byla pouze formulována následující hypotéza, autorem je G. Siersma.

Hypotéza. Pro daných $(r-1)(d+1)+1$ bodů v prostoru \mathbb{R}^d existuje alespoň $(r-1)!^d$ různých Tverbergových rozkladů.

REFERENCE

- [1] J. Bárány, P. Soberón: *Tverberg theorem is 50 years old: a survey*, Notices Amer. Math. Soc. (N. S.) **55** (2018), No. 4, 459–492.
- [2] J. P. Roudneff: *Partitions of points into simplices with k-dimensional intersection. II. Proof of Reay's conjecture in dimensions 4 and 5*, European J. Combin. **22** (2001), No. 5, 745–765.
- [3] H. Tverberg: *A generalization of Radon's theorem*, J. London Math. Soc. **41** (1966), 123–128.



Obrázek 2. Rozklad na konvexní podmnožiny.

Ivan Chajda, Katedra algebry a geometrie, Přírodovědecká fakulta, Univerzita Palackého
v Olomouci, 17. listopadu, 771 46, Olomouc,
e-mail: ivan.chajda@upol.cz

SCHUROVO-COHOVO KRITÉRIUM A JEHO ALTERNATIVNÍ VYJÁDŘENÍ

JIŘÍ JÁNSKÝ

ABSTRAKT. V článku jsou popsána kritéria popisující lokalizaci kořenů polynomu (obecného stupně s obecnými koeficienty) ve vymezených částech komplexní roviny se speciálním zaměřením na jednotkový kruh. Dále jsou zde rozebrány případy, kdy je polynom ve speciálním tříčlenném tvaru. V těchto případech je možné obecná tvrzení zjednodušit a formulovat nové systémy podmínek, které jsou snáze aplikovatelné a rovněž názornější. Jsou zde popsány výhody a nevýhody jednotlivých formulací, které jsou rovněž ilustrovány na několika příkladech.

1. ÚVOD

Uvažujme polynom

$$P_k(\lambda) \equiv \lambda^k + p_{k-1}\lambda^{k-1} + p_{k-2}\lambda^{k-2} + \cdots + p_1\lambda + p_0, \quad (1.1)$$

jehož koeficienty p_0, p_1, \dots, p_{k-1} jsou reálná, nebo komplexní čísla. Problematika explicitního vyjádření kořenů polynomu (1.1) pomocí jeho koeficientů je dobře známa. Ačkoliv jsou odpovídající vyjádření kořenů pro polynomy nižších stupňů (menších, nebo rovno čtyřem) dobře popsány, často nelze pro jejich komplikovanost jednoduše posoudit některé jejich potřebné vlastnosti, například lokalizaci ve vymezené části komplexní roviny.

Jednou ze základních otázek, která se v souvislosti s lokalizací kořenů polynomu (1.1) diskutuje, je formulace podmínek zaručujících, že všechny kořeny daného polynomu mají zápornou reálnou část. Tento známý problém souvisí s otázkou stability diferenciálních dynamických systémů a je běžně diskutován v rámci základních kurzů teorie obyčejných diferenciálních rovnic. Odpověď na tento problém dává známé Routhovo-Hurwitzovo kritérium, jehož znění připomeneme.

Věta 1.1 (Routhova-Hurwitzova). *Nechť p_0, \dots, p_{k-1} jsou reálná čísla. Nutná a postačující podmínka pro to, aby kořeny polynomu (1.1) měly záporné reálné*

2010 MSC. Primární 11C08, 30C15; Sekundární 12D10.

Klíčová slova. Polynom, kořeny polynomu.

části, je, aby determinanty D_n , $n = 1, 2, \dots, k$ byly kladné. Přitom je

$$D_n = \begin{vmatrix} p_{k-1} & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p_{k-3} & p_{k-2} & p_{k-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ p_{k-5} & p_{k-4} & p_{k-3} & p_{k-2} & p_{k-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{k-2n+1} & p_{k-2n+2} & p_{k-2n+3} & p_{k-2n+4} & \cdots & \cdots & p_{k-n} \end{vmatrix}$$

a pokud se vyskytne v D_n prvek p_m s indexem $m > k - 1$, nahradí se nulou.

V diskrétním případě, kdy je daný diferenciální systém nahrazen systémem differenčním, vede otázka stability na formulaci podmínek zaručujících, že všechny kořeny daného polynomu mají velikost menší než jedna, tj. leží v komplexní rovině uvnitř jednotkového kruhu. Tuto otázkou řeší Schurovo¹-Cohnovo² kritérium.

Předtím, než toto kritérium uvedeme, musíme pomocí (obecně komplexních) koeficientů polynomu (1.1) sestrojít pro $n = 1, 2, \dots, k$ čtvercové matice A_n , B_n rádu n , následovně: $A_1 = p_0$, $B_1 = 1$ a

$$A_n = \begin{pmatrix} p_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ p_1 & p_0 & \ddots & & \vdots \\ p_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & p_0 & 0 \\ p_{n-1} & \cdots & p_2 & p_1 & p_0 \end{pmatrix}, \quad B_n = \begin{pmatrix} 1 & p_{k-1} & p_{k-2} & \cdots & p_{k-n+1} \\ 0 & 1 & p_{k-1} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & p_{k-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & p_{k-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pro $n = 2, \dots, k$. Odtud sestrojíme čtvercové matice rádu $2n$

$$C_{2n} = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ \bar{B}_n^T & \bar{A}_n^T \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots, k, \quad (1.2)$$

kde \bar{A}_n , \bar{B}_n získáme z A_n , B_n nahrazením koeficientů p_0, p_1, \dots, p_{k-1} komplexně sdruženými $\bar{p}_0, \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_{k-1}$. Konečně označíme

$$d(n) = (-1)^n \det(C_{2n}), \quad n = 1, 2, \dots, k.$$

Věta 1.2 (Schurova-Cohnova; redukovaná verze). *Nechť jsou všechny determinnty v posloupnosti*

$$1, d(1), d(2), \dots, d(k) \quad (1.3)$$

různé od nuly. Potom má polynom (1.1) všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu právě tehdy, když jsou všechny prvky posloupnosti (1.3) kladné.

¹Issai Schur (1875–1941) byl ruský matematik židovského původu, který většinu života strávil v Německu. Za druhé světové války byl nucen emigrovat a zemřel v Izraeli (tehdejší Palestině). Byl žákem Frobenia, v jehož práci pokračoval. Přispěl fundamentálními výsledky zejména v algebře a teorii grup. Jeho záběr byl však obrovský a je autorem mnoha významných tvrzení. Například je po něm pojmenován Schurova vlastnost normovaných vektorových prostorů, Schurova dekompozice matic, Schurův komplement, Schurova algebra, a mnoho dalších. Celkem je jeho jméno spojováno s více než 25 důležitými matematickými pojmy a oblastmi matematiky.

²Arthur Cohn (1894–1940) byl Schurův doktorský student. Kromě spoluautorství výsledku zmíněného v tomto textu je rovněž také autorem formulace jednoduchých postačujících podmínek, aby daný polynom byl irreducibilní v $\mathbb{Z}[x]$.

Tato věta se v literatuře vyskytuje v mnoha variantách. Kromě právě uvedené zde ještě zmíníme dvě další. První je formulace pro případ, kdy má polynom (1.1) reálné koeficienty. Potom lze větu 1.2 formulovat v jednodušším tvaru, a to zejména bez omezujících předpokladů. Toto vynechání podmínek kladených na (1.3) je podstatné, protože i tyto speciální případy jsou zpravidla početně velmi obtížně řešitelné (viz [9, str. 247]).

Před formulací následující věty musíme opět sestrojit jisté speciální čtvercové matice \hat{C}_n rádu n , $n = 1, 2, \dots, k - 1$ následujícím způsobem: $\hat{C}_1^\pm = 1 \pm p_0$ a

$$\hat{C}_n^\pm = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ p_{k-1} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ p_{k-n+1} & \cdots & p_{k-1} & 1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & p_0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & p_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ p_0 & p_1 & \cdots & p_{n-1} \end{pmatrix}$$

pro $n = 2, \dots, k - 1$. Dále označíme

$$\hat{d}^\pm(n) = \det(\hat{C}_n^\pm), \quad n = 1, 2, \dots, k - 1.$$

Početně však bude stačit vyčíslit $\hat{d}^\pm(n)$ jen pro n sudé, nebo jen pro n liché, a to v závislosti na lichosti/sudosti rádu k polynomu, jak ukazuje následující věta (viz [7]).

Věta 1.3 (Schurova-Cohnova; případ reálných koeficientů). *Předpokládejme, že p_0, \dots, p_{k-1} jsou reálná čísla. Potom má polynom (1.1) všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu právě tehdy, když jsou splněny všechny tři následující podmínky:*

1. $P_k(1) > 0$,
2. $(-1)^k P_k(-1) > 0$,
3. platí jedna z následujících podmínek:
 (a) k je sudé a všechny prvky obou posloupností

$$\hat{d}^+(1), \hat{d}^+(3), \hat{d}^+(5), \hat{d}^+(7), \dots, \hat{d}^+(k-1)$$

a

$$\hat{d}^-(1), \hat{d}^-(3), \hat{d}^+(5), \hat{d}^+(7), \dots, \hat{d}^-(k-1)$$

jsou kladné,

- (b) k je liché a všechny prvky obou posloupností

$$\hat{d}^+(2), \hat{d}^+(4), \hat{d}^+(6), \hat{d}^+(8), \dots, \hat{d}^+(k-1)$$

a

$$\hat{d}^-(2), \hat{d}^-(4), \hat{d}^+(6), \hat{d}^+(8), \dots, \hat{d}^-(k-1)$$

jsou kladné.

Srovnáme-li věty 1.2 a 1.3, pak pro polynom stupně k s reálnými koeficienty stačí určit jen determinanty matic do rádu $k - 1$. Požadavek na výpočet dvojice posledních determinantů $\hat{d}^+(k)$, $\hat{d}^-(k)$ je „nahrazen“ podmínkami 1 a 2.

Další varianta věty 1.2, která představuje naopak její rozšíření, popisuje počet kořenů daného polynomu uvnitř jednotkového kruhu (viz [12, str. 198]). Pro její formulaci nejprve označíme

$$\Delta(n) = \det(C_{2n}), \quad n = 1, 2, \dots, k,$$

kde C_{2n} je dáno vztahem (1.2). Potom platí

Věta 1.4 (Schurova-Cohnova; obecná verze). *Nechť jsou všechny determinnty v posloupnosti*

$$1, \Delta(1), \Delta(2), \dots, \Delta(k) \tag{1.4}$$

různé od nuly a nechť p je počet znaménkových změn v posloupnosti (1.4). Potom má polynom (1.1) celkem p kořenů uvnitř jednotkového kruhu a žádný kořen na jeho hranici.

Pro polynom s pevně daným stupněm k a pevně danými koeficienty p_i je tedy problém v zásadě vyřešen. Ukažme si použití Schurova-Cohnova kritéria na dvou příkladech.

Příklad 1.5. Uvažujme kvadratický polynom s reálnými, nebo komplexními koeficienty ve tvaru

$$P_2(\lambda) \equiv \lambda^2 + p_1\lambda + p_0 \tag{1.5}$$

a aplikujeme větu 1.2 s cílem získat efektivní podmínky zaručující lokalizaci obou kořenů polynomu P_2 uvnitř jednotkového kruhu. Nejprve si spočteme determinanty

$$d_1 = (-1)^1 \begin{vmatrix} p_0 & 1 \\ 1 & \bar{p}_0 \end{vmatrix} = 1 - |p_0|^2,$$

$$d_2 = (-1)^2 \begin{vmatrix} p_0 & 0 & 1 & p_1 \\ p_1 & p_0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \bar{p}_0 & \bar{p}_1 \\ \bar{p}_1 & 1 & 0 & \bar{p}_0 \end{vmatrix} = (1 - |p_0|^2)^2 - |p_1 - p_0\bar{p}_1|^2.$$

Nyní za podmínky $d_1 d_2 \neq 0$ Věta 1.2 říká, že oba kořeny polynomu $P_2(\lambda)$ mají velikost menší než jedna právě tehdy, když $d_1 > 0$ a $d_2 > 0$. Obě tyto podmínky se dají zapsat jednotně ve tvaru

$$|p_1 - p_0\bar{p}_1| < 1 - |p_0|^2. \tag{1.6}$$

Podmínky na nenulovost determinantů d_1, d_2 nejsou v tomto případě omezující. Pomocí Viétových vzorců pro polynom (1.1) dostáváme, že $(-1)^k a_0 = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_k$, kde $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou kořeny polynomu (1.1). To v případě polynomu (1.5) znamená, že pro jeho kořeny λ_1, λ_2 platí $|\lambda_1 \lambda_2| = |p_0|$. A proto pokud $d_1 = 0$, potom dostáváme $1 = |p_0| = |\lambda_1||\lambda_2|$, a tedy oba kořeny uvnitř jednotkového kruhu ležet nemohou. Případ $d_2 = 0, |p_0| < 1$ vede po složitéjších úpravách na situaci, kdy má polynom (1.5) kořen o velikosti jedna.

Dostáváme tedy závěr, že oba kořeny kvadratického polynomu $P_2(\lambda)$ mají velikost menší než jedna právě tehdy, když platí (1.6).

Dále uvažujeme kvadratický polynom (1.5) jen s reálnými koeficienty. V tomto případě se podmínka (1.6) redukuje na tvar

$$|p_1| - 1 < p_0 < 1. \quad (1.7)$$

Poznamenejme, že tento tvar lze získat také z věty 1.3. Tvar oblasti vymezené těmito podmínkami je znázorněn na obrázku 1a) v němž $k = 2$, $\alpha = p_1$ a $\beta = p_0$.

Pokusme se, pro srovnání, podmínce (1.7) získat pomocí kořenů polynomu (1.5) vyjádřených explicitně v závislosti na jeho koeficientech. Oba kořeny mají velikost menší než jedna právě tehdy, když

$$|\lambda_{1,2}| = \frac{1}{2} \left| -p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - 4p_0} \right| < 1.$$

Nejprve předpokládejme $p_1^2 - 4p_0 \geq 0$. Potom pro $p_1 \leq 0$ dostáváme

$$-p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_0} < 2, \quad \text{tj.} \quad -p_1 - 1 < p_0,$$

a pro $p_1 > 0$ dostáváme

$$p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_0} < 2, \quad \text{tj.} \quad p_1 - 1 < p_0.$$

Tedy pro oba předchozí případy dostáváme

$$|p_1| - 1 < p_0 \leq \frac{p_1^2}{4}. \quad (1.8)$$

V případě $p_1^2 - 4p_0 < 0$ dostáváme

$$\left| -p_1 \pm i\sqrt{4p_0 - p_1^2} \right| < 2, \quad \text{tj.} \quad \frac{p_1^2}{4} < p_0 < 1. \quad (1.9)$$

Tedy celkem z (1.8) a druhé podmínky v (1.9) dostáváme (1.7). Je vidět že i v tomto jednoduchém případě bylo odvození potřebné podmínky z explicitně spočtených kořenů polynomu (1.5) početně náročnější, než přímé použití věty 1.2 nebo 1.3.

Pro polynomy vyšších stupňů není ověřování znamének determinantů v posloupnosti (1.3) jednoduchá záležitost. V případě reálných koeficientů lze s výhodou použít větu 1.3, která tento požadavek neuplatňuje. To ilustruje následující příklad.

Příklad 1.6. Uvažujme kubický polynom s reálnými koeficienty ve tvaru

$$P_3(\lambda) \equiv \lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_1\lambda + p_0. \quad (1.10)$$

Analýzou podmínek z věty 1.3 dostáváme:

i.

$$P_3(1) = 1 + p_2 + p_1 + p_0 > 0,$$

ii.

$$(-1)^3 P_3(-1) = (-1)^3 (-1 + p_2 - p_1 + p_0) > 0,$$

iii. oba determinanty

$$\begin{aligned}\hat{d}^+(2) &= \det \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & p_0 \\ p_0 & p_1 \end{pmatrix} \right) = 1 + p_1 - p_0 p_2 - p_0^2 > 0, \\ \hat{d}^-(2) &= \det \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & p_0 \\ p_0 & p_1 \end{pmatrix} \right) = 1 - p_1 + p_0 p_2 - p_0^2 > 0\end{aligned}$$

jsou kladné.

Jednoduchou početní analýzou případů i–iii zjistíme, že kubický polynom $P_3(\lambda)$ má všechny tři kořeny s velikostí menší než jedna právě tehdy, když

$$|p_2 + p_0| < 1 + p_1, \quad |p_1 - p_0 p_2| < 1 - p_0^2. \quad (1.11)$$

Poznamenejme, že odvození podmínek (1.11) přímo z Cardanových vzorců pro polynom (1.10) by bylo velmi obtížné.

Předchozí dva příklady ilustrovaly jednak efektivitu Schurovy-Cohnovy věty, ale také naznačily určité problémy, se kterými se při její aplikaci můžeme setkat. Využití Schurovy-Cohnovy věty je jednoduché zejména v případě, kdy máme zadáný polynom s pevně zvoleným stupněm k a s konkrétně zvolenými reálnými koeficienty p_i . Potom při použití věty 1.3 dostáváme $k+1$ nerovností pro k liché (respektive $k+2$ pro k sudé), které snadno vyhodnotíme. Navíc zásadním, dosud nezmíněným přínosem předchozích vět je, že mohou být použity i u polynomů obecných (vyšších stupňů), kde nejsme schopni nalézt kořeny analyticky.

Všechny tři uvedené varianty Schurova-Cohnova kritéria v sobě skrývají také nedostatky. Tím prvním je nutnost počítat minimálně $k-1$ determinantů matic, jejichž řád se zvětšuje s rostoucím se stupněm polynomu. Navíc, v případě kdy některý z koeficientů není číselně specifikován, se podmínky s rostoucím stupněm daného polynomu začínají značně komplikovat. Dalším nedostatkem je také obtížně řešitelný případ, kdy má polynom komplexní koeficienty a posloupnost (1.3), uvedená ve větě 1.2 obsahuje jeden, nebo více nulových členů. (Připomeňme, že věta 1.2 platí za předpokladu jejich nenulovosti.)

Tyto nedostatky byly motivací pro hledání jiných systémů podmínek popisujících rozmístění kořenů (alespoň speciálních) polynomů vůči jednotkovému kruhu. První výsledek tohoto druhu se objevil v článku [11] zabývajícím se stabilitou některých diskrétních populačních modelů. V této souvislosti se objevila potřeba posoudit, zda charakteristický polynom

$$Q_k(\lambda) \equiv \lambda^k - \lambda^{k-1} + \beta, \quad \beta \text{ je reálné číslo,}$$

má všechny kořeny v jednotkovém kruhu. Vidíme, že věta 1.2 ani věta 1.3 přitom podmínky podobné těm v příkladu 1.5, nebo 1.6 nedá. Pro tento polynom byla ve zmíněném článku zformulována velmi jednoduchá nutná a postačující podmínka pro to, aby všech k kořenů tohoto polynomu mělo velikost menší než jedna (viz [11]).

Věta 1.7 (Levinova-Mayova). *Všechny kořeny polynomu $Q_k(\lambda)$ jsou v absolutní hodnotě menší než jedna právě tehdy, když platí*

$$0 < \beta < 2 \cos \frac{(k-1)\pi}{2k-1}.$$

Přínosem tohoto článku nebylo jen odvození předchozích podmínek, ale také představení důkazové techniky, zvané „boundary locus technique“, která je využitelná i pro analýzu polohy kořenů vůči jednotkovému kruhu pro další typy polynomů. Následovaly další výsledky tohoto typu (viz [6, 10, 13, 14]). Jednotícím prvkem těchto článků bylo, že se jednalo o tříčlenné polynomy, avšak podmínky pro polohu jejich kořenů, odvozené v těchto článcích, nebyly tak efektivní, jako podmínka věty 1.7. K těmto otázkám se vyjádříme v následující kapitole.

2. PŘÍPAD OBECNÉHO TRÍČLENNÉHO POLYNOMU S REÁLNÝMI KOEFICIENTY

Budeme se zabývat tříčlenným polynomem (1.1), tedy polynomem ve speciálním tvaru

$$R_{k,m}(\lambda) \equiv \lambda^k + \alpha\lambda^m + \beta, \quad (2.1)$$

kde $\alpha, \beta, \alpha\beta \neq 0$ jsou reálné koeficienty a mocniny $k > m > 0$ jsou celočíselné a nesoudělné.

V případě $\alpha\beta = 0$ lze kořeny polynomu (2.1) spočítat triviálně a není potřeba se jím dále zabývat. Požadavek k, m nesoudělné rovněž není omezující, protože pokud by polynom (2.1) byl tvaru

$$R_{\tilde{k},\tilde{m}}(\tilde{\lambda}) \equiv \tilde{\lambda}^{\tilde{k}} + \alpha\tilde{\lambda}^{\tilde{m}} + \beta, \quad (2.2)$$

kde $\tilde{k} = ak, \tilde{m} = am$, pro nějaké $a > 1$, potom substitucí $\tilde{\lambda} = \lambda^a$ dostáváme, že $\tilde{\lambda}$ je kořen polynomu $R_{\tilde{k},\tilde{m}}(\tilde{\lambda})$ právě tehdy když λ je kořen polynomu $R_{k,m}(\lambda)$. Proto polynom $R_{\tilde{k},\tilde{m}}(\tilde{\lambda})$ má všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu právě tehdy, když polynom $R_{k,m}(\lambda)$ má tutéž vlastnost. Budeme se tedy dále zabývat jen polynomem (2.1) s nesoudělnými mocninami k, m .

Pro tento polynom bylo formulováno několik různých variant podmínek popisujících nutné a postačující podmínky pro polohu všech kořenů uvnitř jednotkové kružnice. My zde představíme tři z nich. Nejprve uvedeme podmínky popsané v [6]. Autor zde formuloval tvrzení pro případy: k liché, m sudé; k liché, m liché; k sudé, m liché. Pro ilustraci zde uvedeme jen větu popisující podmínky pro k liché, m sudé.

Věta 2.1. *Nechť α, β jsou nenulová reálná čísla a nechť $k, m \in \mathbb{Z}^+, k > m$, jsou nesoudělná, lichá. Potom polynom (2.1) má všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu právě tehdy, když bud'*

$$-1 < \alpha < 0, \quad |\beta| < 1 + \alpha,$$

nebo

$$0 < \alpha < 1, \quad |\beta| < \min_{\phi \in S} \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha \cos((k-m)\phi) + 1}, \quad (2.3)$$

kde S je množina řešení rovnice

$$\frac{\sin(mx)}{\sin(kx)} = \frac{1}{-\alpha} \quad (2.4)$$

na intervalu $(0, \pi)$.

Podmínky popisující zbylé dva případy (k liché, m liché a k sudé, m liché) zde uvádět nebudeme a pojmenováme jen, že jsou „analogického“ tvaru, tedy podobné jako ve větě 2.1. Podmínka omezující parametr β vyžaduje nejprve nalézt numericky všechna řešení nelineární rovnice (2.4) na intervalu $(0, \pi)$, a poté ještě určit minimum z příslušného nelineárního výrazu. Nejsnazší použití této věty je v případě, kdy má polynom (2.1) pevně zadáné mocniny k, m a koeficient α . Potom, s podporou numerických metod, není problém nalézt všechna řešení rovnice (2.4) a stanovit z rovnice (2.3) podmínu na parametr β explicitně. V ostatních případech (například pevně zvolené α, β ; hledáme k, m) je užití této věty závislé na dalších dodatečných výpočtech.

Odlišný typ podmínek popisující lokalizaci kořenů polynomu (2.1) byl publikován v [10]. Před jeho formulací však musíme uvést následující pomocné tvrzení.

Lemma 2.2. *Nechť $k, m \in \mathbb{Z}^+, k > m$, jsou nesoudělná. Potom existují celá čísla $j, s > 0$ taková, že*

$$|(k-m)j - ks| = 1, \quad j < k, \quad s \text{ liché}. \quad (2.5)$$

Pokud je $k - m$ liché, potom existuje tato dvojice (j, s) jediná. Pokud je $k - m$ sudé, potom existují právě dvě takové dvojice (v jedné je j liché a ve druhé sudé).

Potom můžeme formulovat následující větu:

Věta 2.3. *Nechť α, β jsou nenulová reálná čísla a nechť $k, m \in \mathbb{Z}^+, k > m$, jsou nesoudělné. Potom polynom (2.1) má všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu právě tehdy, když bod (α, β) leží uvnitř oblasti ohrazené dvěmi přímkami*

$$\alpha + \beta = -1, \quad (-1)^{k-m}\alpha + (-1)^k\beta = -1 \quad (2.6)$$

a dvěma křivkami

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{\sin(k\theta)}{\sin(m\theta)}, & \beta &= \frac{\sin((k-m)\theta)}{\sin(m\theta)}, \\ \alpha &= -(-1)^{k-m}\frac{\sin(k\theta)}{\sin(m\theta)}, & \beta &= (-1)^k\frac{\sin((k-m)\theta)}{\sin(m\theta)}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

kde parametr θ leží v intervalu s krajními body $\frac{j\pi}{k}$ a $\frac{s\pi}{k-m}$. Zde $j, s > 0$ jsou celá čísla splňující (2.5) (pokud je $k - m$ sudé, potom může být volena libovolná dvojice (j, s) splňující (2.5)).

Poznámka 2.4. Předcházející tvrzení, mimo jiné, specifikuje krajní body $\frac{j\pi}{k}$ a $\frac{s\pi}{k-m}$ intervalu, ve kterém se nalézá jediné řešení ϕ_{opt} rovnice (2.4) (v tomto obecném zápisu neznáme jejich pořadí). Pro toto ϕ_{opt} se realizuje minimum výrazu na pravé straně vztahu (2.3) ve větě 2.1.

Hlavním přínosem věty 2.3 je parametrický popis (2.7) hraničních křivek uvažovaných v (α, β) -rovině. Pokud koeficienty α, β v dané oblasti leží, pak má polynom (2.1) všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu. Získání tohoto popisu z věty 2.1 je velmi náročné. S tímto popisem je však navíc spojena jedna nevýhoda spočívající v tom, že zde není popsán analytický způsob, jak o poloze bodu (α, β) vůči hranicím (2.6), (2.7) rozhodnout.

Obě předchozí formulace uvedené ve větách 2.1 a 2.3 lze snadno použít jen v těch případech, kdy jsou mocniny k, m zadané pevně. Pro případy kdy tomu tak není, byla nedávno odvozena v [2] následující věta.

Věta 2.5. *Nechť α, β jsou reálná čísla, $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ a nechť $k, m \in \mathbb{Z}^+$, $k > m$, jsou nesoudělná. Potom polynom (2.1) má všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu právě tehdy, když nastane jedna z následujících podmínek:*

1.

$$|\alpha| + |\beta| < 1, \quad (2.8)$$

2.

$$|\alpha| + |\beta| \geq 1, \quad |\alpha| - 1 < |\beta| < 1, \quad (-\alpha)^k(-\beta)^{k-m} < 0, \quad (2.9)$$

$$k \arccos \frac{1 - \alpha^2 - \beta^2}{2|\alpha\beta|} - m \arccos \frac{1 - \alpha^2 + \beta^2}{2|\beta|} < \pi. \quad (2.10)$$

Poznámka 2.6. a) Všimněme si, že podmínka 1 předchozí věty je nezávislá na mocninách polynomu (2.1).

b) Upozorněme dále na speciální případ podmínek 2, kdy se pro $|\alpha| + |\beta| = 1$ podmínky (2.9), (2.10) redukují na tvar $(-\alpha)^k(-\beta)^{k-m} < 0$.

c) Uvažujeme-li vztah (2.10) jako rovnost, pak tento vztah představuje implicitní vyjádření křivek (2.7) daných parametricky. Ekvivalence obou vyjádření lze prokázat analyticky (početně jde o poměrně komplikovanou záležitost). Zdůrazněme však, že podmínky věty 2.5 byly odvozeny nezávisle na podmínkách věty 2.3. Konstruktivní odvození podmínek věty 2.5 pomocí věty 2.3 (tedy aniž bychom podmínky věty 2.5 dopředu znali) by bylo obtížně proveditelné.

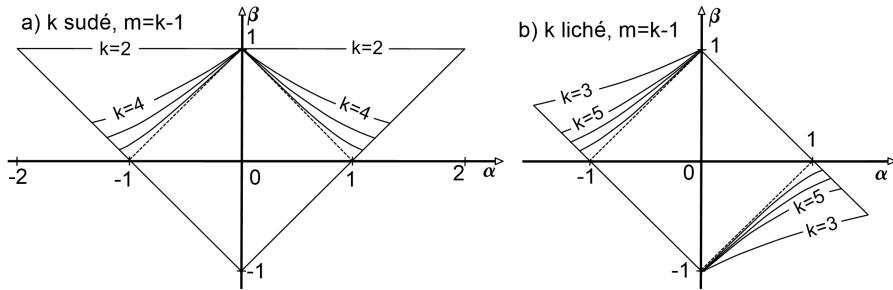
2.1. Ilustrační příklady

Při grafickém znázornění oblasti koeficientů v (α, β) -rovině, pro které má polynom (2.1) všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu zjistíme, že je tvar příslušných hraničních křivek typově různý podle mocnin k, m . Navíc odlišné chování vykazuje i případ $m = k - 1$, kterým se budeme zabývat nejprve.

Uvažujeme polynom (2.1) s reálnými koeficienty, kde $m = k - 1$, tedy ve tvaru

$$R_k(\lambda) \equiv \lambda^k + \alpha\lambda^{k-1} + \beta.$$

Pro vykreslení křivek popsaných ve větě 2.3 musíme rozlišit případ k sudé a k liché. Na obrázku 1a) jsou vykresleny křivky pro $k = 2, 4, 6, 12$ a na obrázku 1b) jsou vykresleny křivky pro $k = 3, 5, 7, 13$.

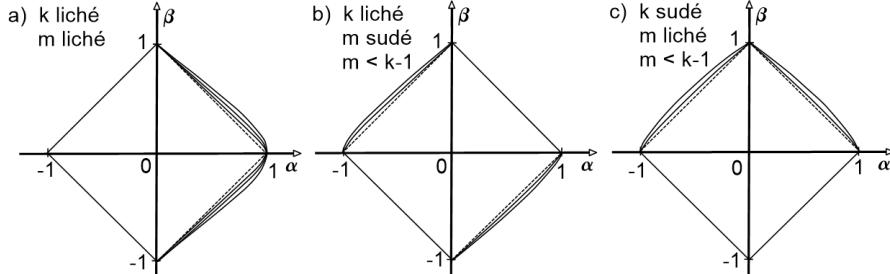


Obrázek 1. Hranice oblasti v (α, β) -rovině, ve které má polynom (2.11) všechny kořenu uvnitř jednotkového kruhu.

Uvažujme nyní polynom (2.1) opět s reálnými koeficienty, kde tentokrát $m < k - 1$, tedy ve tvaru

$$R_{k,m}(\lambda) \equiv \lambda^k + \alpha\lambda^m + \beta. \quad (2.11)$$

Na obrázku 2 jsou vykresleny křivky popsané ve větě 2.3 v závislosti na sudosti/lichosti mocnin k, m . Případ k sudé a m sudé zde popsán není, protože v tomto případě jsou k, m soudělné a je nutné postupovat podle popisu pod rovnicí (2.2).



Obrázek 2. Hranice oblasti v (α, β) -rovině, ve které má polynom (2.11) všechny kořenu uvnitř jednotkového kruhu. V obrázku a) jsou vykresleny křivky pro dvojice $(k, m) \in \{(5, 3), (7, 5), (13, 11)\}$. V obrázku b) jsou vykresleny křivky pro dvojice $(k, m) \in \{(5, 2), (13, 10)\}$ a v obrázku c) jsou vykresleny křivky pro dvojice $(k, m) \in \{(4, 1), (8, 5)\}$. S rostoucí mocninou k se plocha oblasti vymezená křivkami zmenšuje.

Poznámka 2.7. Podívejme se nyní na podmínky věty 2.5 geometricky.

- Všimněme si nejprve, že podmínka $|\alpha| + |\beta| < 1$ této věty vymezuje oblast tvaru čtverce (viz obrázky 1 a 2).
- Nyní si všimněme hraničních úseček této oblasti daných rovnicí $|\alpha| + |\beta| = 1$. Pokud koeficienty polynomu (2.11) leží na těchto úsečkách a v kvadrantech určených podmínkou $(-\alpha)^k(-\beta)^{k-m} > 0$, potom nemá všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu. Tyto úsečky jsou na předchozích obrázcích vyznačeny plnou čarou.

Naopak, jestliže koeficienty polynomu (2.11) leží na těchto úsečkách a v kvadrantech určených podmínkou $(-\alpha)^k(-\beta)^{k-m} < 0$, potom polynom (2.11) má všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu. Navíc není kladenou žádné omezení na maximální velikost mocnin k, m . Tyto úsečky jsou na předchozích obrázcích vyznačeny (ne příliš zřetelnou) tečkovanou čarou.

Jinými slovy, na úsečkách $|\alpha| + |\beta| = 1$ závisí počet kořenů polynomu (2.11) uvnitř jednotkového kruhu jen na sudosti/lichosti mocnin k, m . Jedná se o jakousi přechodovou oblast mezi tou popsanou v bodu a) a tou, kterou popíšeme v následujícím bodu c).

- c) Na závěr se budeme věnovat oblastem vymezeným nerovností $|\alpha| + |\beta| > 1$ a v kvadrantech daných nerovností $(-\alpha)^k(-\beta)^{k-m} < 0$. Potom vztah (2.10) (společně s nerovnostmi $|\alpha| - 1 < |\beta| < 1$) představují omezení na hodnoty koeficientů α, β a mocnin k, m . (Přesněji, veškeré podmínky kladené na α, β, k, m jsou dány vztahem (2.10). Nerovnosti $|\alpha| - 1 < |\beta| < 1$ „pouze“ zajišťují, aby cyklometrické funkce v (2.10) byly dobře definované.)

Obecně platí, že oblast na koeficienty α, β , pro které má polynom (2.11) všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu, se s rostoucím stupněm k polynomu (2.11) zmenšuje.

Nyní uvedeme pět ilustračních příkladů, které lze také nalézt v [3, 4, 8].

Příklad 2.8. Uvažujme polynom (2.1) s reálnými koeficienty ve tvaru

$$R_{k,m}(\lambda) \equiv \lambda^k + 0,55\lambda^m + 0,5. \quad (2.12)$$

Cílem je nalézt množinu k, m takových, aby měl polynom (2.12) všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu. Stanovení této množiny pomocí věty 2.1 nebo 2.3 by bylo hodně složité. Oproti tomu věta 2.5 nám dává přehledné podmínky po jejichž vyhodnocení dostáváme

$$(k, m) \in \bigcup_{\ell \in \mathbb{Z}^+} \left\{ (2\ell, \ell), (4\ell, 3\ell), (6\ell, 5\ell), (8\ell, 7\ell), (3\ell, \ell), (5\ell, 3\ell), (7\ell, 5\ell), (4\ell, \ell), (5\ell, \ell) \right\}.$$

Na závěr této kapitoly uvedeme užití předchozích vět v případě, kdy koeficient α a mocniny k, m jsou dány, přičemž hledáme podmínky na druhý (volný) koeficient β zaručující, že polynom (2.1) má všechny kořeny v absolutní hodnotě menší než jedna.

Příklad 2.9. Nechť $k = 5, m = 3$ a $\alpha = 0,8$. Budeme se tedy zabývat polynomem

$$R_{5,3}(\lambda) = \lambda^5 + 0,8\lambda^3 + \beta, \quad (2.13)$$

kde β je reálné číslo. Věta 2.1 vyžaduje řešit nelineární rovnici

$$\frac{\sin(3x)}{\sin(5x)} = \frac{1}{-0,8}, \quad x \in (0, \pi). \quad (2.14)$$

Jejím řešením získáme množinu

$$S = \{0,7591; 1,4161; 1,7255; 2,3824\}. \quad (2.15)$$

Potom dostáváme podmínu ve tvaru

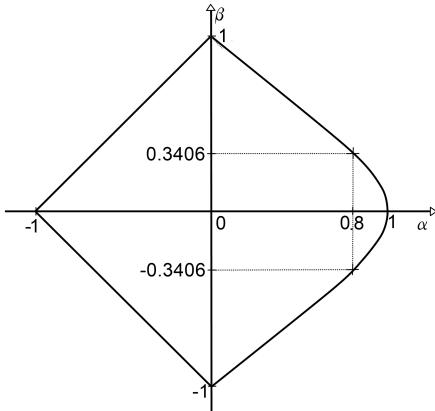
$$|\beta| < \min\{1,3130; 0,3406; 0,3406; 1,3130\}, \quad (2.16)$$

tj. polynom (2.13) má všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu právě tehdy, když $\beta \in (-0,3406; 0,3406)$. Tento interval je zobrazen na obrázku 3.

Dodejme ještě, že podle poznámky 2.4 je možno specifikovat interval na kořen x v (2.14) tak, aby množina řešení S byla jednoprvková. Řešením rovnice (2.5), která je nyní ve tvaru

$$|2j - 5s| = 1, \quad j < 5, \quad s \text{ liché}$$

dostáváme $j = 3$ a $s = 1$. Potom $S = \{\phi_{\text{opt}}\}$, kde ϕ_{opt} je řešení rovnice (2.14) v intervalu s krajními body $\frac{s\pi}{k-m} = \frac{1}{2}\pi \approx 1,57$ a $\frac{j\pi}{k} = \frac{3}{5}\pi \approx 1,88$. Nyní podle (2.15) je $\phi_{\text{opt}} = 1,7255$ a tady dostáváme podmínu $\beta \in (-0,3406; 0,3406)$ bez nutnosti hledání minima ve výrazu (2.16).



Obrázek 3. Grafické znázornění oblasti v (α, β) -rovině, ve které má polynom (2.13) všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu. Hranice oblasti byla vykreslena pomocí věty 2.3.

Nyní na zadaný problém aplikujeme podmínky věty 2.3. Z geometrického hlediska jde o nalezení průsečíků přímky $\alpha = 0,8$ s křivkami (2.7), kde $m = 3$, $k = 5$ a parametr θ leží v intervalu s krajními body $1,57$ a $1,88$ po zaokrouhlení. Nalezením těchto průsečíků v (α, β) -rovině dospějeme k hodnotám $-0,3406$ a $0,3406$, které tvoří krajní body příslušného intervalu na parametr β .

Na závěr aplikujeme větu 2.5. Podmínka (2.8) dává $|\beta| < 0,2$. Podmínky (2.9) a (2.10) dávají $0,2 \leq |\beta| < 1$ a

$$5 \arccos \frac{1 - 0,64 - \beta^2}{1,6|\beta|} - 3 \arccos \frac{1 - 0,64 + \beta^2}{2|\beta|} < \pi.$$

Odtud opět dospějeme k výsledku $\beta \in (-0,3406; 0,3406)$.

3. PŘÍPAD OBECNÉHO TRÍČLENNÉHO POLYNOMU S KOMPLEXNÍMI KOEFICIENTY

V této kapitole se budeme zabývat polynomem (2.1) s komplexními koeficienty. Uvažujme tedy polynom

$$S_{k,m}(\lambda) \equiv \lambda^k + \alpha\lambda^m + \beta, \quad (3.1)$$

kde $\alpha = |\alpha|e^{\theta_\alpha i}$, $\beta = |\beta|e^{\theta_\beta i}$ jsou komplexní čísla a mocniny $k > m > 0$ jsou celočíselné a nesoudělné. O argumentech θ_α , θ_β komplexních koeficientů budeme předpokládat, že náleží do intervalu $(-\pi, \pi]$. Dále budeme také nadále předpokládat, že $\alpha\beta \neq 0$. Pro tento polynom byla věta 2.5 v článku [5] zobecněna následovně.

Věta 3.1. *Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ je takové, že $\alpha\beta \neq 0$. Potom má polynom (2.1) všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu právě tehdy když platí jedna z následujících možností:*

- i. $|\alpha| + |\beta| < 1$,
- ii. $|\alpha| + |\beta| = 1$ a zároveň $k(\theta_\alpha - \theta_\beta) + m(\theta_\beta + \pi) \neq 2\ell\pi$ pro $\ell \in \mathbb{Z}$,
- iii. $|\alpha| + |\beta| > 1$, $|\alpha| - 1 < |\beta| < 1$ a zároveň

$$\begin{aligned} k \arccos \frac{1 - |\alpha|^2 - |\beta|^2}{2|\alpha\beta|} - m \arccos \frac{1 - |\alpha|^2 + |\beta|^2}{2|\beta|} \\ < \arccos(\cos(k(\theta_\alpha - \theta_\beta) + m(\theta_\beta + \pi))). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Poznámka 3.2. Případy ii a iii v předchozí větě je možno zapsat jednotně ve tvaru

$$|\alpha| + |\beta| \geq 1, \quad |\alpha| - 1 < |\beta| < 1 \quad \text{a zároveň} \quad (3.2).$$

Poznámka 3.3. Důkazy vět 3.1 a 2.5 není možné v rámci tohoto příspěvku uvést. Omezme se tedy jen na konstatování, že zde bylo využito přeformulování Schurovo-Cohnova kritéria do „explicitního“ tvaru (základní myšlenka je také popsána v [1]), a dále některých výsledků teorie polynomů.

Použití věty 3.1 si ilustrujeme na následujících příkladech.

Příklad 3.4. Uvažujme polynom (3.1) ve tvaru

$$S_k(\lambda) \equiv \lambda^k + e^{(0,6-\pi)i}\lambda^{k-1} + 0,05e^{(6-\pi)i}. \quad (3.4)$$

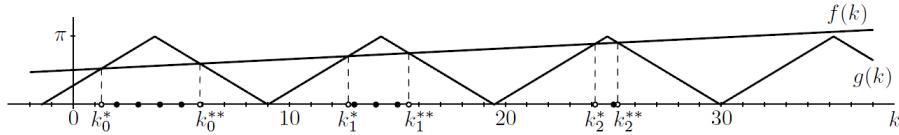
Dosazením do předchozí věty za $|\alpha| = 1$, $|\beta| = 0,05$ zjišťujeme že nastane případ iii. Potom nerovnost (3.2) je tvaru

$$k \arccos \frac{-1}{40} - (k-1) \arccos \frac{1}{40} < \arccos(\cos(-5,4k + (k-1)6)),$$

t.j.

$$k \arccos \frac{799}{800} + \arccos \frac{1}{40} < \arccos(\cos(0,6k - 6)). \quad (3.5)$$

Pro účely grafické interpretace nerovnosti (3.5) budeme považovat obě strany této nerovnosti jako funkce spojité proměnné k . Potom levá strana této nerovnosti je lineární funkce $f(k)$ ve tvaru $f(k) \approx 0,05k + 1,5458$. Pravá strana nerovnosti (3.5) je po částech lineární funkce a označíme ji $g(k)$. Obě tyto funkce jsou vykresleny na obrázku 4.



Obrázek 4. Nerovnost $f(k) < g(k)$ dává podmíinku na řad polynomu k , při kterém má polynom (3.4) všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu.

Podle podmínky (3.5) má polynom (3.4) všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu právě tehdy, když $f(k) < g(k)$. Z obrázku 4 je patrno, že to nastává pro $k \in \{2, 3, 4, 5\} \cup \{13, 14, 15\} \cup \{25\}$.

K tomuto závěru poznamenejme, že je kvalitativně odlišný od výsledků získaných v případě reálných koeficientů. Požadovaná kořenová vlastnost je splněna pro izolované „ostrovy“ hodnot k , které se postupně zmenšují až nakonec vymizí. Dodejme, že tento efekt se v teorii diferenčních rovnic popisuje jako existence „přepínačů stability“.

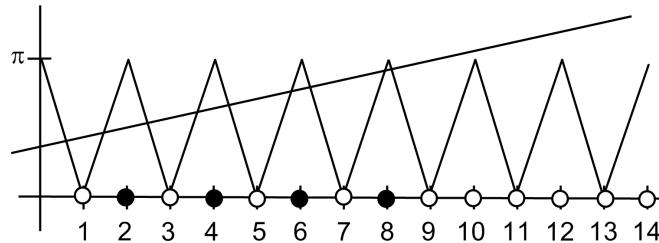
Věta 3.1 lze samozřejmě také použít na případ, kdy má polynom (3.1) reálné koeficienty, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 3.5. Mějme polynom (3.1) ve tvaru

$$S_k(\lambda) \equiv \lambda^k + 0,8\lambda^{k-1} + 0,3. \quad (3.6)$$

Nejprve použijme větu 2.5. Potom z podmínky (2.10) a $(-0,8)^k(-0,3) < 0$ plyne, že polynom (3.6) má všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu právě tehdy, když $k < 9,65$ a k je sudé.

Nyní dojdeme k témuž závěru aplikací věty 3.1. Opět nastane případ iii, kde levá strana nerovnosti (3.2) reprezentuje lineární funkci proměnné k a pravá strana nerovnosti (3.2) reprezentuje po částech lineární funkci proměnné k . Zatímco levá strana nerovnosti (3.2) je rostoucí lineární funkce, pravá strana je rovna π (pro k sudé), nebo nule (pro k liché), jak je znázorněno na obrázku 5.



Obrázek 5. Grafické znázornění nerovnosti (3.2), kde proměnná je řad k polynomu (3.6). Polynom (3.6) má všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu právě tehdy, když $k \in \{2, 4, 6, 8\}$.

Hraniční situaci, kdy nastane ve větě 3.1 případ ii ilustrujeme na následujícím příkladu.

Příklad 3.6. Uvažujme polynom

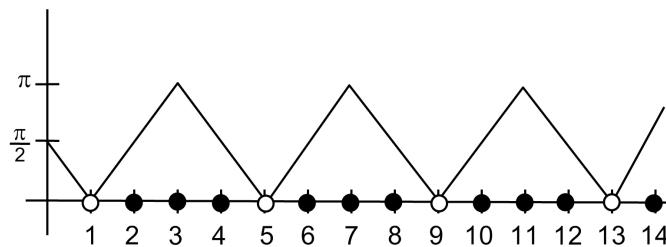
$$S_k(\lambda) \equiv \lambda^k - 0,7i\lambda^{k-1} - 0,3i. \quad (3.7)$$

Abychom mohli aplikovat větu 3.1, musíme jej nejprve přepsat do tvaru

$$S_k(\lambda) \equiv \lambda^k + 0,7e^{-(\pi/2)i}\lambda^{k-1} + 0,3e^{-(\pi/2)i}.$$

Protože je $|\alpha| + |\beta| = 1$, nastane ve větě 3.1 případ ii. Potom dostáváme, že polynom (3.7) má všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu právě tehdy, když $k \geq 2$ a $k \neq 4\ell + 1, \ell \in \mathbb{Z}^+$.

Ke stejnemu závěru se dostaneme použitím vztahů (3.3). Zatímco levá strana nerovnosti (3.2) je rovna nule, pravá strana je rovna nule nebo π v závislosti na k . Tato situace je znázorněna na obrázku 6.



Obrázek 6. Grafické znázornění nerovnosti (3.2).

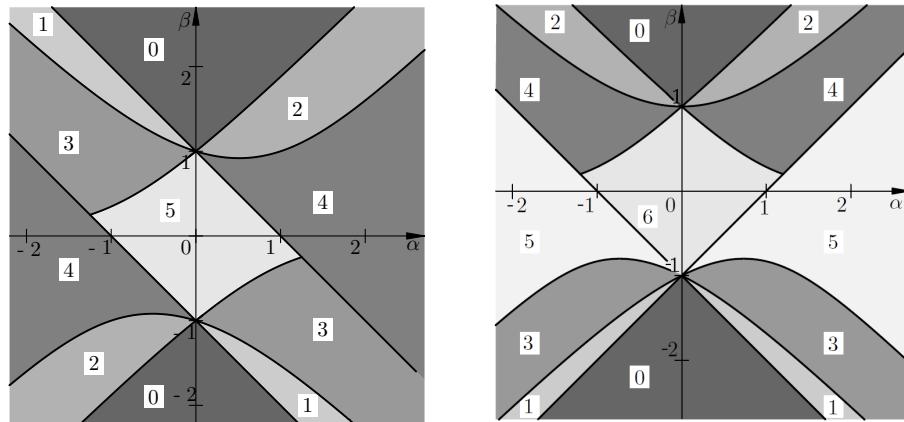
Na závěr ještě uvedeme, že předchozí výsledky lze rozšířit ve smyslu stanovení oblastí s počtem kořenů daného polynomu ležících uvnitř jednotkového kruhu. (Předchozí výsledky byly speciální v tom, že jsme požadovali, aby všechny kořeny ležely uvnitř jednotkového kruhu.)

Pro ilustraci, jakých výsledků lze v tomto směru dosáhnout uvedeme následující příklad (bez teoretického zázemí, které lze nalézt například v [3]).

Příklad 3.7. Uvažujme polynom (2.11) s reálnými koeficienty. Naším cílem je rozdělit (α, β) -rovinu na jednotlivé oblasti tak, aby pro koeficienty z dané oblasti měl polynom (2.11) vždy konstantní počet kořenů uvnitř jednotkového kruhu. Tento problém byl částečně rozebrán v předchozím textu, kde jsme na obrázku 1 znázornili oblast v (α, β) -rovině, ve které má polynom (2.11) stupně k právě k kořenů uvnitř jednotkového kruhu. Tehdy bylo nutné typově rozlišit dva případy podle sudosti/lichosti jeho stupně k . Proto není velkým překvapením, že pro rozdělení (α, β) -roviny na jednotlivé oblasti s požadovanou vlastností, je opět nutno rozlišovat zvlášť případ, kdy je stupeň polynomu (2.11) sudý a kdy je lichý. Pro účely grafické interpretace zde budeme uvažovat dva polynomy (2.11) s pevně zvolenými stupni ve tvarech

$$R_5(\lambda) \equiv \lambda^5 + \alpha\lambda^4 + \beta, \quad R_6(\lambda) \equiv \lambda^6 + \alpha\lambda^5 + \beta, \quad (3.8)$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Závislost počtu kořenů polynomů (3.8) uvnitř jednotkového kruhu na měnících se koeficientech je ilustrována na obrázku 7. Z tohoto obrázku je také



Obrázek 7. Počet kořenů polynomů (3.8) velikosti menší než jedna v závislosti na $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Vlevo pro $k = 5$ a vpravo pro $k = 6$.

patrnou, že zmíněná závislost může být dost složité povahy.

3.1. Závěr

Tento příspěvek pojednával o kritériích popisujících lokalizaci kořenů polynomu ve vymezené části komplexní roviny. Speciální důraz je zde kladen na Schurovo-Cohnovo kritérium, zaručující lokalizaci všech kořenů daného polynomu uvnitř jednotkového kruhu, které je zde uvedeno ve třech variantách. V dalších částech venujeme pozornost speciálním typům polynomů, pro které jsou odvozeny efektivnější systémy podmínek umožňující detektovat požadovanou lokalizaci kořenů.

REFERENCE

- [1] J. Čermák, J. Jánský: *Elementární důkaz Levinovy-Mayovy věty*, Kvaternion **2** (2013), 57–68.
- [2] J. Čermák, J. Jánský: *Explicit stability conditions for a linear trinomial delay difference equation*, Applied Mathematics Letters **43** (2015), 56–60.
- [3] J. Čermák, J. Jánský: *Stability and periodic investigations of linear planar difference systems*, Math. Methods Appl. Sci. **39** (2016), 5343–5354.
- [4] J. Čermák, J. Jánský: *Stability switches in linear delay difference equations*, Appl. Math. Comput. **243** (2014), 755–766.
- [5] J. Čermák, J. Jánský, H. Matsunaga: *On stability and stabilization of some discrete dynamical systems*, Math. Methods Appl. Sci. **41** (2018), 3684–3695.
- [6] F. Dannan: *The asymptotic stability of $x(n+k) + ax(n) + bx(n-\ell) = 0$* , J. Difference Equ. Appl. **10** (2004), No. 6, 589–599.
- [7] S. Elaydi: *An introduction to difference equations*, 3rd ed., Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 2005.
- [8] J. Jánský: *On a three term linear difference equation with complex coefficients*, Tatra Mt. Math. Publ. **63** (2015), 153–161.
- [9] E. I. Jury: *Theory and application of the Z-transform methods*, Wiley, New York, 1964.
- [10] M. M. Kipnis, R. M. Nigmatullin: *Stability of the trinomial linear difference equations with two delays*, Autom. Remote Control **65** (2004), No. 11, 1710–1723.

- [11] S. A. Levin, R. May: *A note on difference-delay equations*, Theor. Popul. Biol. **9** (1976), 178–187.
- [12] M. Marden: *Geometry of polynomials*, Mathematical Surveys and Monographs, No. 3, Providence, 1966.
- [13] H. Matsunaga, C. Hajiri: *Exact stability sets for a linear difference system with diagonal delay*, J. Math. Anal. App. **369** (2010) 616–622.
- [14] V. G. Papanicolaou: *On the asymptotic stability of a class of linear difference equations*, Math. Mag. **69** (1996), No. 1, 34–43.

Jiří Jánský, Katedra matematiky a fyziky, Fakulta vojenských technologií, Univerzita obrany v Brně, Kounicova 65, 662 10 Brno, Česká republika

MATEMATICKÉ MODELY LINEÁRNÍCH OSCILÁTORŮ

DAVID LOVAS

ABSTRAKT. Tento článek se zabývá modelováním lineárních mechanických oscilátorů. Důraz je kláden na sestavení pohybové rovnice a její vyřešení. K sestavení rovnice je třeba základní znalost příslušných fyzikálních zákonů. V článku jsou probrány také dvě operace s lineárními oscilátory: skládání oscilátorů a spřažení oscilátorů. V této souvislosti vznikají následující otázky. Jaké modely lineárních oscilátorů je možné obdržet přidáním patřičných sil? Co získáme složením kmitů? A jaké využití má spřažení?¹.

1. TYPY LINEÁRNÍCH OSCILÁTORŮ

Za mechanický oscilátor budeme považovat hmotný bod o hmotnosti m , který je připevněn na pružině o tuhosti k (viz obrázek 1). Vychýlením hmotného bodu z rovnovážného stavu na něj začne působit síla daná Hookovým zákonem

$$F_1 = -ky,$$

kde y je poloha hmotného bodu, která je časově proměnná. Použitím druhého Newtonova zákona dostaváme homogenní lineární obyčejnou diferenciální rovnici

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Konstantu ω_0 nazýváme úhlová frekvence. Vyřešením rovnice dostaváme řešení v kvadraturním tvaru

$$y(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t),$$

kde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ jsou konstanty dané počátečními podmínkami. Volbou konstant ve tvaru $C_1 = A \sin(\varphi)$, $C_2 = A \cos(\varphi)$ můžeme rovnici přepsat do amplitudového tvaru

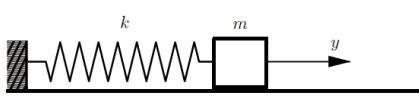
$$y(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad A \geq 0, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi.$$

Oba vztahy popisují vlastní netlumené kmitání (viz obrázek 2) a soustavu konající tento pohyb nazýváme harmonický oscilátor.

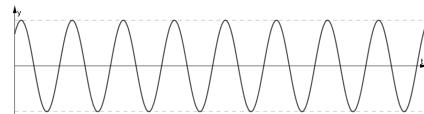
2010 MSC. Primární 70Jxx; Sekundární 34A30.

Klíčová slova. Mechanický oscilátor, lineární kmity, skládání oscilátorů, spřažení oscilátorů, synchronizace.

¹Článek vznikl na základě bakalářské práce autora v oboru Matematické inženýrství na FSI VUT v Brně. Vedoucím práce byl Jan Čermák z Ústavu matematiky FSI VUT v Brně.



Obrázek 1. Schéma netlumeného modelu.



Obrázek 2. Graf netlumených kmitů.

Dále do modelu zahrneme třetí sílu

$$F_2 = -ly,$$

která je závislá na aktuální rychlosti hmotného bodu. Kladnou konstantu $l > 0$ nazýváme součinitel tření a vyjadřuje charakter styku hmotného bodu s okolím nebo také může být dána přidáním vazby hmotného bodu s nehybnou částí soustavy. Pohybová rovnice má nyní tvar

$$\ddot{y} + 2b\dot{y} + \omega_0^2 y = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad b = \frac{l}{2m}.$$

Tvar řešení se bude lišit v závislosti na vztazích mezi konstantami ω_0 a b . Pokud $b > \omega_0$, obdržíme

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

kde λ_1, λ_2 jsou řešení rovnice $\lambda^2 + 2b\lambda + \omega_0^2 = 0$. Tento případ nazýváme nadkritické tlumení (viz obrázek 3). Dále pokud $b = \omega_0$, řešení pohybové rovnice bude mít tvar

$$y(t) = e^{-bt}(C_1 t + C_2), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Nyní se jedná o kritické tlumení. V obou případech kvůli příliš velkému tlumení v porovnání s úhlovou frekvencí nedojde ke kmitání, hmotný bod se neustále blíží rovnovážné poloze, které však dosáhne teoreticky (limitně) v nekonečnu. Poslední případ dostaneme v situaci, kdy $b < \omega_0$. Zde je řešením funkce

$$y(t) = e^{-bt}(C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t), \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

kterou můžeme vhodnou volbou konstant C_1, C_2 přepsat do tvaru

$$y(t) = C e^{-bt} \sin(\omega_1 t + \varphi), \quad C \geq 0, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi.$$

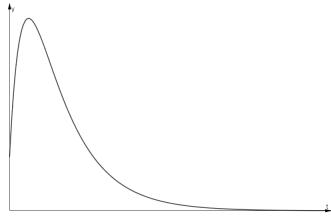
Při tomto druhu tlumení, které nazýváme podkritické tlumení, již ke kmitání dochází. Amplituda je zde však časově proměnná a s rostoucím časem klesá. Rovnovážné polohy dosáhne hmotný bod opět teoreticky v nekonečnu (viz obrázek 4).

Do modelu nyní zavedeme novou sílu, která bude časově proměnná, periodická, ale nezávislá na stavu hmotného bodu. Nazveme ji budící sílou a bude mít tvar

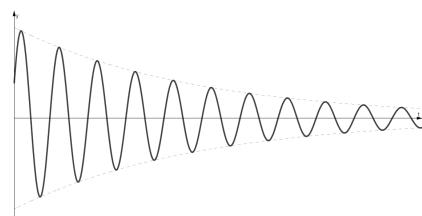
$$F_3(t) = P \sin(\omega t),$$

kde P je amplituda budící síly a ω její úhlová frekvence. Pokud budící sílu přidáme do netlumeného systému, obdržíme rovnici

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = \frac{P}{m} \sin(\omega t), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



Obrázek 3. Nadkritické tlumení.



Obrázek 4. Podkritické tlumení.

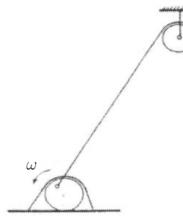
(viz obrázek 5). Řešení odpovídající homogenní rovnice bude stejné jako v modelu bez budící síly. Nově však budeme hledat i partikulární řešení nehomogenní rovnice, které bude různé pro různé hodnoty ω_0 a ω . Pokud $\omega_0 \neq \omega$, výsledné řešení pohybové rovnice má tvar

$$y(t) = C \sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{P}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin(\omega t),$$

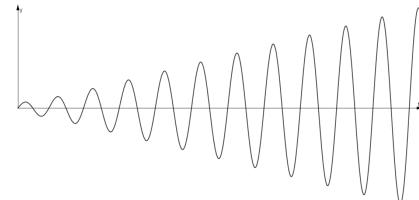
což je složení dvou kmitů o různých úhlových frekvencích. Pro případ $\omega_0 = \omega$ je však situace daleko zajímavější. Řešení pohybové rovnice má totiž tvar

$$y(t) = C \sin(\omega t + \varphi) - \frac{P}{2m\omega} t \cos(\omega t)$$

a vyplývá z něho, že výsledná amplituda s časem roste (viz obrázek 6). Tomuto chování říkáme rezonance. Ta je často studována při modelování reálných procesů pro své pozitivní využití i negativní následky.



Obrázek 5. Příklad buzeného oscilátoru.



Obrázek 6. Grafické znázornění rezonance.

Budící sílu je možné zahrnout i do tlumeného oscilátoru. Řešení je třeba opět rozdělit na varianty podle velikosti konstant ω_0 a b , partikulární část řešení bude však pro všechny případy stejná. Výsledný kmit je složením dvou rovnoběžných kmitů obecně o různých úhlových frekvencích.

2. SKLÁDÁNÍ KMITŮ

Skládání kmitů je jedna ze základních operací, kterou je možné modelovat při rozboru lineárních oscilátorů. Systém si můžeme představit jako hmotný bod o hmotnosti m připevněný na obecně n pružinách o daných tuhostech, které obecně

kmitají s jinou amplitudou, úhlovou frekvencí a počáteční výchylkou. Rovnici výsledného pohybu sestavíme použitím principu superpozice. Pro dobré znázornění a zjednodušení řešení budeme v této kapitole uvažovat, že jednotlivé kmity soustavy jsou netlumené.

Nejjednodušší model jsou rovnoběžné izochronní kmity, jednotlivé kmity se tedy pohybují ve stejné ose a mají stejné úhlové frekvence. Rovnice pro samostatné pohyby mají tvar

$$\begin{aligned} y_1(t) &= A_1 \sin(\omega t + \varphi_1), \\ y_2(t) &= A_2 \sin(\omega t + \varphi_2). \end{aligned}$$

Řešení lze nalézt analyticky nebo pomocí komplexní reprezentace. Obě metody jsou více popsány v [1]. V obou případech dostáváme

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi),$$

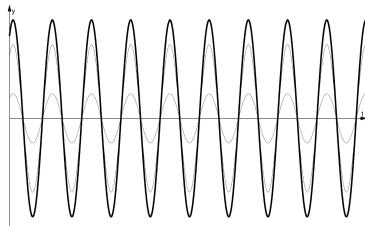
kde výsledná amplituda A má tvar

$$A = \sqrt{A_1^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + A_2^2}$$

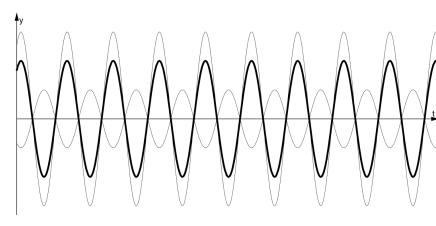
a pro fázi φ platí

$$\cos(\varphi) = \frac{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}{A}, \quad \sin(\varphi) = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A}.$$

Blíže rozebereme dva speciální případy tohoto druhu skládání kmítů. Pokud $\varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$, pak výsledná amplituda bude dána pouhým součtem jednotlivých amplitud, tedy $A = A_1 + A_2$. Tuto situaci nazýváme kmity ve fázi (viz obrázek 7). Pokud však platí, že $\varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$, je výsledná amplituda rovna absolutní hodnotě rozdílu jednotlivých amplitud, tedy $A = |A_1 - A_2|$. Zde mluvíme o kmitech v protifázi (viz obrázek 8).



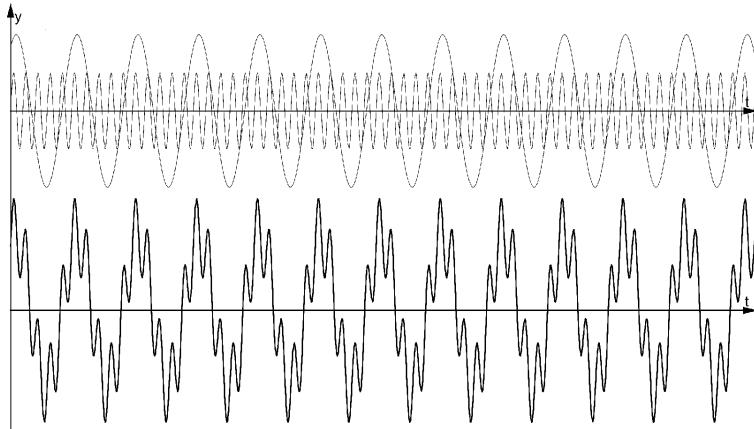
Obrázek 7. Skládání kmítů ve fázi.



Obrázek 8. Skládání kmítů v protifázi.

V situaci anizochronních kmítů, tedy když si úhlové frekvence nejsou rovny, výsledný pohyb není obecně harmonický ani periodický. I zde však mohou nastat případy, které stojí za pozornost. První takový případ nastane, když jsou úhlové frekvence skládaných kmítů soudělné, čili

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}, \quad n_1, n_2 \in \mathbb{N}.$$



Obrázek 9. Skládání anizochronních kmitů o různých soudělných frekvencích.

Jedná se o případ anizochronních kmitů, kdy je výsledný pohyb periodický, není však již harmonický. Tento fakt je zřejmý z obrázku 9.

Další, avšak neméně zajímavý případ nastane pro soustavu s blízkými úhlovými frekvencemi. Úhlové frekvence skládaných kmitů zapíšeme ve tvaru

$$\omega_1 = \omega + \Omega, \quad \omega_2 = \omega - \Omega,$$

kde $\omega \gg \Omega$ jsou vhodné konstanty. Předpokládejme nyní, že $A = A_1 = A_2$. Výsledný pohyb lze popsat výrazem

$$y(t) = \mathcal{A}(t) \sin\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right),$$

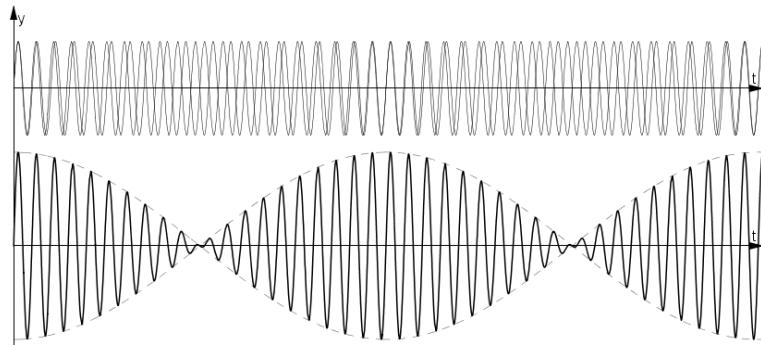
kde člen $\mathcal{A}(t)$ vyjadřuje časově proměnnou pomalu se měnící amplitudu. Pro tu lze odvodit vztah

$$\mathcal{A}(t) = 2A \cos\left(\Omega t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right).$$

Tento druh kmitu je harmonický i periodický a bývá označován jako záZNĚje. Dochází k němu například při ladění hudebních nástrojů a používá se k měření úhlových frekvencí. Grafické znázornění kmitů (viz obrázek 10) je známé díky anglické kapelě Arctic Monkeys, která tento výjev použila na obal své desky AM.

Systém je možné složit i z kmitů, které se nepohybují v jedné ose. Zde je již však pohyb daleko složitější a výslednou rovnici lze upravit do jednoduššího tvaru jen ve speciálních případech. Rozebereme zde případ, kdy jsou skládané kmity na sebe kolmé, konkrétně jeden působí ve směru osy x a druhý ve směru osy y . Obecně tedy

$$x(t) = A \sin(\omega_1 t + \varphi_1), \quad y(t) = B \sin(\omega_2 t + \varphi_2).$$

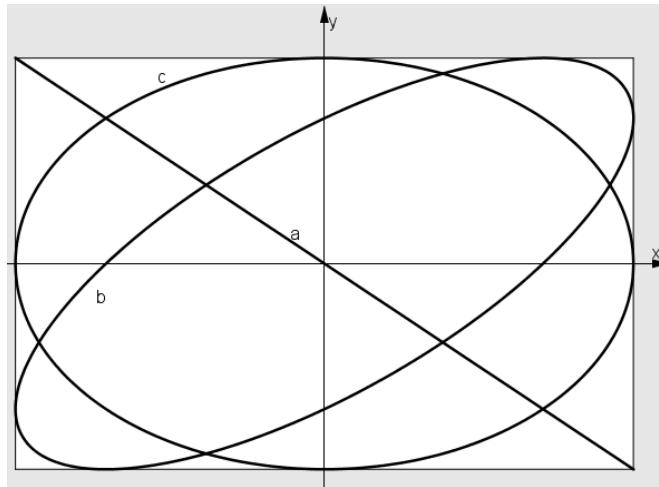


Obrázek 10. Kmity dvou synchronizovaných oscilátorů.

Uvažujme opět izochronní kmity (tj. $\omega_1 = \omega_2$). Eliminací nezávisle proměnné t a další úpravou rovnic získáme

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB} \cos(\Delta\varphi) + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2(\Delta\varphi),$$

kde $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Obdrželi jsme rovnici elipsy se středem v počátku soustavy souřadnic. Na obrázku 11 jsou vykresleny křivky pro hodnoty $\Delta\varphi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (křivka a), $\Delta\varphi = \frac{\pi}{4}$ (křivka b) a $\Delta\varphi = \frac{(k+1)\pi}{2}$ (křivka c). Při libovolné volbě $\Delta\varphi$ křivka neopustí obdélník o rozměrech $2A \times 2B$.



Obrázek 11. Příklady kolmých izochronních kmítů.

Při většině anizochronních kolmých kmítů je pohyb neperiodický. V takovém případě není křivka vykreslení pohybu uzavřená, postupem času zaplní celý obdélník o rozměrech $2A \times 2B$. Křivka je však uzavřená, pokud jsou úhlové frekvence

soudělné. V tomto případě bude i celkový pohyb periodický. Tyto křivky nazýváme Lissajousovy křivky.

3. SPŘAŽENÉ OSCILÁTORY

V této sekci budeme vycházet z pohybové rovnice tlumeného oscilátoru. V modelu však bude zařazeno více oscilátorů, které se navzájem ovlivňují. Pohybová rovnice i -tého oscilátoru má obecně tvar

$$m_i \ddot{y}_i + l_i \dot{y}_i + k_i y_i + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n (a_{ir} \ddot{y}_r + b_{ir} \dot{y}_r + c_{ir} y_r) + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n (\alpha_{ir} \ddot{y}_i + \beta_{ir} \dot{y}_i + \gamma_{ir} y_i) = 0,$$

kde koeficienty a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} značí, jak je oscilátor i ovlivněn oscilátorem j , a koeficienty α_{ij} , β_{ij} , γ_{ij} znázorňují, jak oscilátor i ovlivňuje oscilátor j . Jednotlivé koeficienty nejsou na sobě zcela nezávislé. Odvození této závislosti vyplývající z kinetické energie, potenciální energie a disipační funkce lze nalézt v [3]. Pro další odvození a úpravu rovnic budeme řešit soustavu dvou spřažených oscilátorů, kde oba budou netlumené, tedy $l_i = 0$ (viz obrázek 12).



Obrázek 12. Schéma dvou spřažených oscilátorů.

Při spřažení výchylkou dvou systémů dostáváme soustavu dvou diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + (k_1 + c_{11}) y_1 + c_{12} y_2 &= 0, \\ m_2 \ddot{y}_2 + (k_2 + c_{22}) y_2 + c_{21} y_1 &= 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Eliminací y_2 soustavu převedeme na diferenciální rovnici čtvrtého řádu proměnné y_1 . Eliminace i následné vyřešení diferenciální rovnice je poněkud zdlouhavé, celý proces však spočívá v patřičném použití vědomostí nabytých v kurzech matematické analýzy. Pro zájemce je možné si jej prostudovat v [2]. Zjistíme, že úhlové frekvence vyskytující se v obecném řešení soustavy jsou tvaru

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{m_2(k_1 + c_{11}) + m_1(k_2 + c_{22}) \pm \sqrt{D}}{2m_1m_2}},$$

kde

$$D = [m_2(k_1 + c_{11}) - m_1(k_2 + c_{22})]^2 + 4m_1m_2c_{12}^2.$$

Nyní předpokládejme, že platí

$$m_1 = m_2 = m, \quad k_1 = k_2 = k, \quad c_{11} = c_{12} = c_{22}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_s = \sqrt{\frac{c_{11}}{m}}.$$

Úhlové frekvence $\omega_{1,2}$ pak budou tvaru

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_s^2}, \quad \omega_2 = \omega_0.$$

S těmito předpoklady lze systém (3.1) přepsat do tvaru

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1 + (\omega_0^2 + \omega_s^2)y_1 + \omega_s^2 y_2 &= 0, \\ \ddot{y}_2 + (\omega_0^2 + \omega_s^2)y_2 + \omega_s^2 y_1 &= 0.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Obecné řešení této soustavy lze najít pomocí vhodně zvolené substituce a následným řešením dvou nezávislých diferenciálních rovnic (viz [2]).

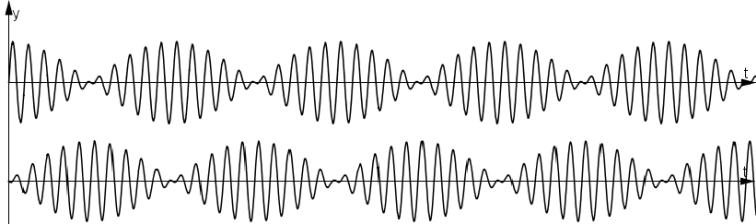
Uvažujme nyní počáteční úlohu pro soustavu (3.2) a diskutujme tři možné situace. Pokud na počátku vychýlíme jeden hmotný bod o $2Y_0$, druhý necháme s nulovou počáteční výchylkou a oba uvolníme s nulovou počáteční rychlostí, dostáváme počáteční podmínky ve tvaru

$$y_1(0) = 2Y_0, \quad \dot{y}_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad \dot{y}_2(0) = 0.\tag{3.3}$$

Řešení počáteční úlohy (3.2), (3.3) je tvaru

$$\begin{aligned}y_1(t) &= Y_0 \cos(\omega_1 t) + Y_0 \cos(\omega_2 t), \\ y_2(t) &= Y_0 \cos(\omega_1 t) - Y_0 \cos(\omega_2 t),\end{aligned}$$

což je složení dvou anizochronních kmitů. Pokud nebude docházet ke tření, bude mít soustava konstantní celkovou energii, která se bude „přelévat“ z kmitů jedné soustavy na druhou, viz obrázek 13.



Obrázek 13. Kmity spřažených soustav při vychýlení jednoho hmotného bodu na počátku.

Ve druhé situaci vychýlíme oba hmotné body na počátku o Y_0 stejným směrem a uvolníme je s nulovou rychlostí. Získáme tak počáteční podmínky

$$y_1(0) = Y_0, \quad \dot{y}_1(0) = 0, \quad y_2(0) = -Y_0, \quad \dot{y}_2(0) = 0,$$

při kterých má soustava (3.2) řešení

$$\begin{aligned}y_1(t) &= Y_0 \cos(\omega_2 t), \\ y_2(t) &= -Y_0 \cos(\omega_2 t).\end{aligned}$$

Obě soustavy kmitají stejným směrem vzhledem k souřadné soustavě celého systému, se stejnou fází i velikostí amplitudy. Kmity jsou nezávislé na pružině spojující hmotné body. Během pohybu nedojde ke stlačení nebo natažení pružiny. Tento pohyb nazýváme jako první základní kmit (viz obrázek 14).

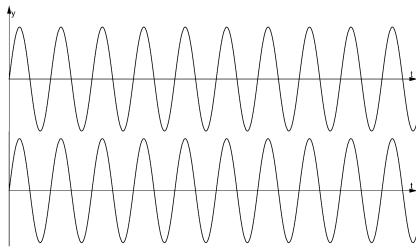
Nakonec vychylme oba hmotné body na počátku o Y_0 opačným směrem a opět je uvolníme s nulovou počáteční rychlostí. Nyní máme počáteční podmínky

$$y_1(0) = Y_0, \quad \dot{y}_1(0) = 0, \quad y_2(0) = Y_0, \quad \dot{y}_2(0) = 0$$

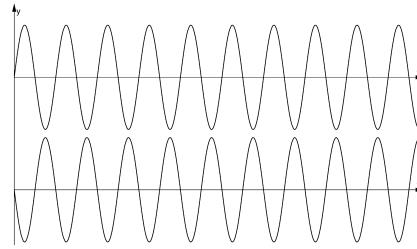
a odpovídající řešení je tvaru

$$\begin{aligned}y_1(t) &= Y_0 \cos(\omega_1 t), \\y_2(t) &= Y_0 \cos(\omega_1 t).\end{aligned}$$

Obě soustavy kmitají se stejnou fází i amplitudou, ale kmity jsou po celou dobu svého pohybu v protifázi, tedy oba hmotné body vždy míří opačným směrem vzhledem k souřadné soustavě celého systému. Tento pohyb nazýváme jako druhý základní kmit (viz obrázek 15).



Obrázek 14. První základní kmit.



Obrázek 15. Druhý základní kmit.

Poznamenejme ještě, že podobný algoritmus řešení byl použit v [2] i při spřažení druhou derivací výchylky. Soustava diferenciálních rovnic byla tvaru

$$\begin{aligned}(m_1 + a_{11})\ddot{y}_1 + k_1 y_1 + a_{12}\ddot{y}_2 &= 0, \\(m_2 + a_{22})\ddot{y}_2 + k_2 y_2 + a_{21}\ddot{y}_1 &= 0.\end{aligned}$$

Opět je možné eliminací y_2 vyjádřit úhlové frekvence objevující se v obecném řešení soustavy, dále zavést určité zjednodušení a soustavu převést na tvar, pro který je možné uvažovat stejné tři případy jako při spřažení výchylkou.

Pro spřažení dvou oscilátorů první derivací výchylky dostaneme diferenciální rovnice jednotlivých oscilátorů ve tvaru

$$\begin{aligned}m_1\ddot{y}_1 + k_1 y_1 + (d_{12} + e_{12})\dot{y}_2 &= 0, \\m_2\ddot{y}_2 + k_2 y_2 + (d_{12} - e_{12})\dot{y}_1 &= 0.\end{aligned}$$

Eliminací člena y_2 získáme opět obyčejnou diferenciální rovnici čtvrtého řádu. Nebudeme zde podrobně rozepisovat postup řešení, podíváme se raději na jednu z aplikací spřažení první derivací výchylky, kterou je synchronizace.

Pro synchronizaci zavedeme do diferenciální rovnice každého synchronizovaného kmítu kontrolní vstup u_i , který v systému n oscilátorů uvažujeme podle [4] ve tvaru

$$u_i = - \sum_{k=1}^n b_{ik} (\dot{y}_i - \dot{y}_k),$$

kde člen b_{ij} charakterizuje míru vzájemného ovlivnění systémů i a j . Soustava dvou oscilátorů, které budeme chtít synchronizovat, má tvar

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_1 + ky_1 + b(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) &= 0, \\ m\ddot{y}_2 + ky_2 + b(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) &= 0, \end{aligned}$$

odkud dostaneme

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + \omega^2 y_1 + K(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) &= 0, \\ \ddot{y}_2 + \omega^2 y_2 - K(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) &= 0, \end{aligned}$$

kde

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad K = \frac{b}{m}.$$

Cílem je nalézt konstantu K , aby byla splněna podmínka synchronizace

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_1(t) - y_2(t)| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)| = 0.$$

Řešení úlohy lze provést sečtením a odečtením rovnic, zavedením vhodné substituce a vyřešením dvou nezávislých diferenciálních rovnic. Jelikož jedna ze získaných rovnic má tvar srovnatelný s pohybovou rovnicí tlumeného oscilátoru, je třeba opět uvažovat tři možnosti řešení, které závisí na porovnání konstant K a ω . Po vyjádření homogenní i partikulární části řešení získáme

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{1}{2} \left[A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t) + e^{-Kt} \left(C_1 \cos(\sqrt{D}t) + C_2 \sin(\sqrt{D}t) \right) \right], \\ y_2(t) &= \frac{1}{2} \left[A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t) - e^{-Kt} \left(C_1 \cos(\sqrt{D}t) + C_2 \sin(\sqrt{D}t) \right) \right], \end{aligned}$$

je-li $\omega > |K|$,

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{1}{2} \left[A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t) + e^{-Kt} (C_1 t + C_2) \right], \\ y_2(t) &= \frac{1}{2} \left[A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t) - e^{-Kt} (C_1 t + C_2) \right], \end{aligned}$$

je-li $\omega = |K|$, a

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{1}{2} \left[A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t) + C_1 e^{(-K-\sqrt{D})t} + C_2 e^{(-K+\sqrt{D})t} \right], \\ y_2(t) &= \frac{1}{2} \left[A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t) - C_1 e^{(-K-\sqrt{D})t} - C_2 e^{(-K+\sqrt{D})t} \right], \end{aligned}$$

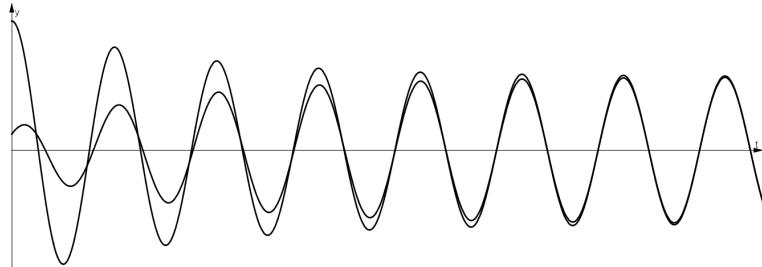
je-li $\omega < |K|$, kde

$$D = |K^2 - \omega^2|$$

a konstanty A_1, A_2, C_1, C_2 jsou dány počátečními podmínkami. Není těžké ověřit, že podmínka synchronizace bude splněna, pokud $K > 0$, a tedy $b > 0$. Za tohoto předpokladu platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(y_k(t) - \frac{1}{2} [A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t)] \right) = 0 \quad \text{pro } k = 1, 2.$$

Na obrázku 16 je znázorněna synchronizace pro případ $\omega > K > 0$.



Obrázek 16. Synchronizace dvou kmitů.

4. ZÁVĚR

Lineární oscilátory jsou jedním z mnoha systémů, v jejichž matematických modelech se objevují obyčejné diferenciální rovnice. Diskutovali jsme různé modely obsahující lineární obyčejné diferenciální rovnice 2. řádu a jejich soustavy, k jejichž řešení vždy stačily znalosti nabyté v kurzech matematické analýzy. Při skládání rovnoběžných kmitů lze výsledný pohyb lehce vyjádřit v izochronním případu. Zde jsme demonstrovali situaci kmitů ve fázi a v protifázi. Při anizochronních kmitech je model náročnější a celkový pohyb je periodický nebo harmonický jen ve speciálních případech. Podobně je tomu i při skládání kolmých kmitů. Spřažení jsme předvedli pro tři základní druhy a ukázali jejich využití nebo rozdíly řešení závislé na počátečních podmínkách.

REFERENCE

- [1] J. Bajer: *Mechanika 3*, 2., rozš. a dopl. vyd., chlup.net, Olomouc, 2012.
- [2] D. Lovas: *Matematické modely lineárních oscilátorů*, Bakalářská práce, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Brno, 2018.
- [3] R. Košťál: *Kmity spřažených soustav*, Spisy přírodovědecké fakulty, Brno, 1931.
- [4] R. Olfati-Saber, R. M. Murray: *Flocking with obstacle avoidance: Cooperation with limited communication in mobile networks*. Proc. 42nd IEEE Conf. Decision and Control **2** (2003) 2022–2028.

David Lovas, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: 182702@vutbr.cz

STABILITA A ŘÍZENÍ DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ POUŽITÝCH PŘI MODELOVÁNÍ POHYBU LETADLA

JIŘÍ NOVÁK

ABSTRAKT. Tento článek seznamuje čtenáře se základy dynamiky letu a řízení tak, jak byly popsány v bakalářské práci autora. Málokteré moderní letadlo (nebo jiný stroj pohybující se ve vzduchu) se spolehlí pouze na vlastní (konstrukční) stabilitu draku. Ve skutečnosti je pohyb „zastabilizován“ prostřednictvím zpětně vazebního řízení, kdy dynamický systém (modelující např. pozici a orientaci letadla v čase) reaguje na stavové veličiny (tím je dynamicky upravován řídící signál). Cílem článku je seznámit čtenáře se základy matematického modelování pohybu letadla, možnostech řešení získaných rovnic a prostředcích teorie řízení při posilování stability letu.

1. ÚVOD

Moderní letadla se v současné době spoléhají na mnoho systémů, které zvyšují bezpečnost a pohodlí pilotů i cestujících. Mezi tyto systémy patří i posilovače stability, které umožňují rychlejší návrat letadla do ustáleného stavu při jeho vychýlení pomocí řídících prvků. Abychom mohli problematiku hlouběji pochopit, je předně třeba odvodit matematický model pohybu letadla (letadlo zde uvažujeme jako těleso pohybující se ve vzduchu, tj. pracujeme se šesti stupni volnosti). V úvahách o řízení pohybu letadla vycházíme ze speciálních letových módů, jakým je např. ustálený přímočarář let. Protože nás obvykle zajímají pouze „malé“ odchylky od těchto letových módů (vlivem zásahu do řízení nebo turbulencí), bude kláden důraz na linearizovaný model, který je obvykle dostačující. Do jaké míry se nelineární a linearizovaný model liší, je v článku ukázáno v kapitole 3. Posílení stability je potom dosaženo zpětnovazebním řízením, aby bylo dosaženo lepších letových vlastností.

2. POHYBOVÉ A KINEMATICKÉ ROVNICE A JEJICH ODVOZENÍ

Při vytváření základního matematického modelu letadla nejprve uvažujme, že se letadlo pohybuje v inerciálním kartézském souřadném systému spojeném se Zemí.

2010 MSC. Primární 34Hxx.

Klíčová slova. Dynamika letu, pohybové rovnice, dynamické systémy, posílení stability, linearizace.

Vedoucím bakalářské práce autora byl Luděk Nechvátal z Ústavu matematiky FSI VUT v Brně.

Obecně má letadlo 6 stupňů volnosti, které popíšeme postupně silovými a momen-tovými rovnicemi. Při odvození pohybových rovnic budeme vycházet z 2. Newto-nova zákona, který říká, že síla působící na těleso je rovna časové derivaci jeho hybnosti

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}.$$

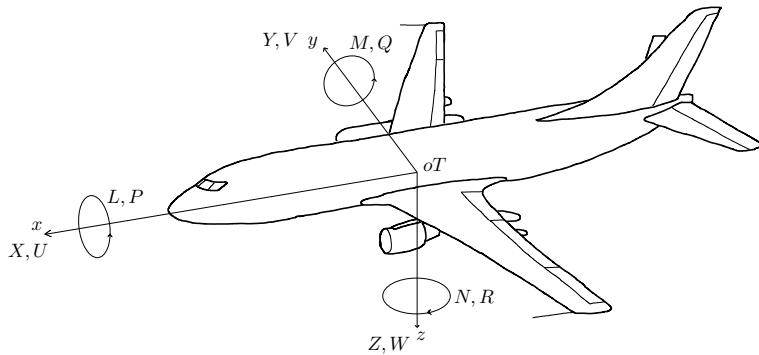
Po několika úpravách a rozepsání této vektorové rovnice do složek získáme tři silové rovnice. Druhou trojici rovnic dostaneme, rozepíšeme-li do složek momentovou rovnici

$$\mathbf{F} \times \mathbf{r} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \times \mathbf{r},$$

kde \mathbf{r} je polohový vektor elementu jdoucí z těžiště letadla. Po transformaci do souřadného systému spojeného s letadlem a několika dalších úpravách získáme soustavu šesti rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} m(\dot{U} - VR + WQ) &= X, \\ m(\dot{V} + UR - WP) &= Y, \\ m(\dot{W} - UQ + VP) &= Z, \\ I_{xx}\dot{P} - I_{xz}\dot{R} - I_{xz}PQ + (I_{zz} - I_{yy})RQ &= L, \\ I_{yy}\dot{Q} + (I_{xx} - I_{zz})PR + I_{xz}(P^2 - R^2) &= M, \\ I_{zz}\dot{R} - I_{xz}\dot{P} + (I_{yy} - I_{xx})PQ + I_{xz}QR &= N. \end{aligned} \tag{1}$$

kde U, V, W jsou rychlosti ve směrech souřadnicového systému letadla (myšleno systému s počátkem v těžišti letadla spojeného s jeho trupem), P, Q, R jsou úhlové rychlosti letadla kolem těchto os a X, Y, Z a L, M, N jsou složky výsledných sil a momentů působících na letadlo. Symbol m značí hmotnost letadla a symboly I_{xx}, I_{xz}, \dots momenty setrvačnosti. V tomto tvaru ještě nelze rovnice řešit, nemáme vyjádřeny síly a momenty na pravé straně soustavy (1). Je také třeba promítnout gravitační sílu do os spojených s letadlem. Přehledně je značení znázorněno na obrázku 1.



Obrázek 1. Přehled symboliky.

Protože nejsou souřadné osy letadla obecně rovnoběžné se souřadným systémem spojeným se Zemí, je potřeba vztah mezi souřadnými systémy matematicky popsat, abychom byli schopni určit orientaci letadla v prostoru. Postupným otáčením jednoho souřadného systému kolem jednotlivých os jsme schopni dostat jakýkoliv jiný pootočený systém. Úhlům, o které osy postupně otáčíme, se říká Eulerovy úhly a označují se v dynamice letu jako ψ – precesní úhel (heading angle), θ – nutační úhel (elevation angle) a ϕ – rotační úhel (bank angle). Při znalosti těchto úhlů budeme schopni transformovat souřadnice vektorů z jednoho systému do druhého. V dynamice letu však rychle narazíme na problém, protože letadlo svojí orientaci může v čase měnit, tedy Eulerovy úhly, které dávají systémy do vztahu se také budou v čase měnit. Proto se při modelování pohybu letadla objevují tzv. kinematické rovnice. Změna natočení letadla závisí na hodnotách úhlových rychlostí, přičemž lze odvodit, že platí

$$\mathbf{i}P + \mathbf{j}Q + \mathbf{k}R = \dot{\psi} + \dot{\theta} + \dot{\phi}$$

($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ značí vektory standardní ortonormální báze v \mathbb{R}^3). Po dalším odvození lze určit jednotlivé složky P, Q, R ve tvaru

$$\begin{aligned} P &= \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta, \\ Q &= \dot{\psi} \sin \phi \cos \theta + \dot{\theta} \cos \phi, \\ R &= \dot{\psi} \cos \phi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \phi. \end{aligned} \tag{2}$$

Dalším důležitým krokem je vyjádření sil a momentů na pravé straně soustavy (1), což je mezioborový problém, který sahá zejména do aerodynamiky. Obecně se tyto síly a momenty skládají z několika složek, např. silovou složku X lze psát ve tvaru

$$X = X_g + X_a + X_t + X_c.$$

Jednotlivé indexy naznačují, že je zde zahrnut vliv gravitace, aerodynamiky, tahu motorů a řídicích členů letadla. Silové i momentové členy závisí komplexně na mnoha mnoha faktorech, převládá však vliv jednotlivých stavových proměnných (rychlostí, úhlových rychlostí). Myšlenkou pak je vyjádřit každou silovou nebo momentovou složku přibližně pomocí Taylorova polynomu 1. stupně v nějakém ustáleném stavu (trim condition), tj. provedeme linearizaci. Konstanty vystupující polynomech závisejí na konstrukci letadla a říká se jim stabilitní derivace. V literatuře je najdeme pod označením např. $\frac{\partial X_a}{\partial u} = \ddot{X}_u$.

3. LINEARIZACE A ŘEŠENÍ SYSTÉMU (1),(2)

Pro další práci soustavu (1), (2) přepíšeme do vektorového tvaru

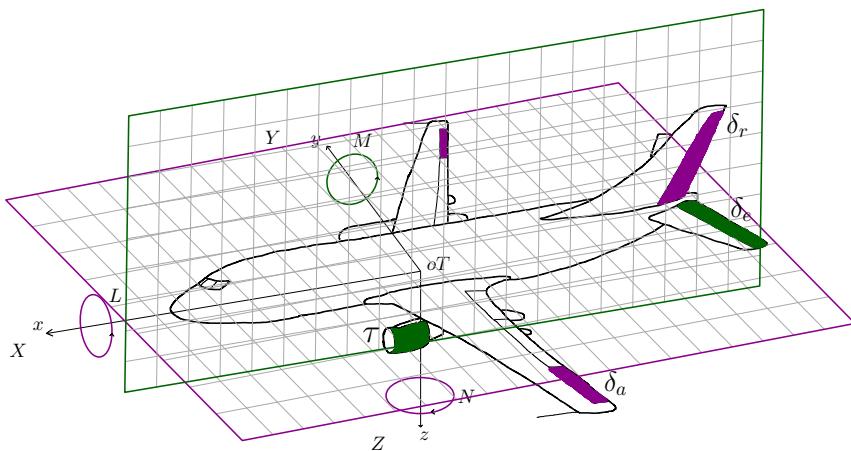
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}),$$

kde \mathbf{u} je vektor řídicích členů a $\mathbf{x} = [U, V, W, P, Q, R, \theta, \phi, \psi]$ jsou stavové proměnné. Dostáváme tedy soustavu devíti nelineárních diferenciálních rovnic, kterou je možné při daných počátečních podmínkách řešit vhodnou numerickou metodou. Mezi častá zjednodušení patří linearizace pomocí tzv. Jacobiho matice. Věta o linearizaci pak říká, že chování získaného lineárního systému v okolí počátku dobře

aproxi muje chování původního systému v okolí uvažovaného rovnovážného stavu. Uvedeme definici rovnovážného stavu.

Definice 3.1 (rovnovážný stav). Vektor $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ nazýváme rovnovážným stave m soustavy $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ při vstupu $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}$, jestliže platí $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}$.

Systém linearizovaných rovnic tvoří soustavu lineárních diferenciálních rovnic. Protože však mnoho aerodynamických stabilitních i řídících derivací je pro malé odchylky zanedbatelně malých, je možné pohyb rozložit na podélný a příčný. Na



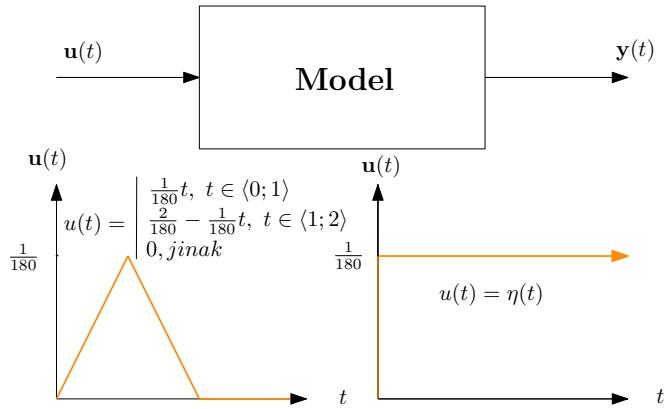
Obrázek 2. Separace na příčný a podélný pohyb.

obrázku 2 můžeme vidět podélnou i příčnou rovinu spolu s řídícími členy, které mají významný vliv na pohyb v těchto rovinách. Získáme tak soustavy tvaru

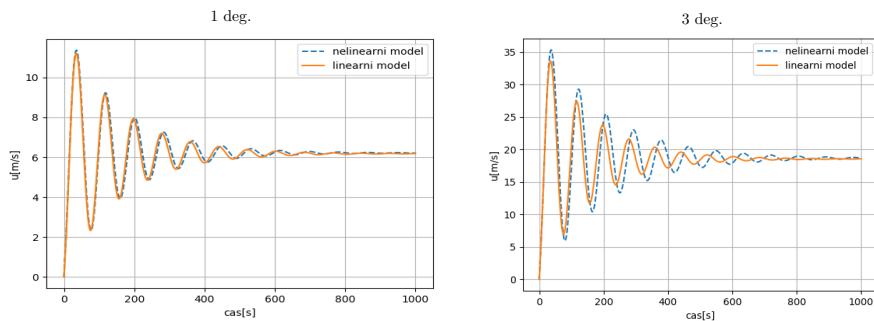
$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\end{aligned}\tag{3}$$

s počáteční podmínkou $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Počáteční úlohu pro tyto separované systémy můžeme řešit například metodou stavového prostoru, která využívá Laplaceovy transformace a je možné pak takového tvaru využít v teorii řízení.

V práci [2] byla studována odezva systému na vstup typu „náběžná hrana s návratem“ a „skok“ (viz obrázek 3). Nelineární model byl na rozdíl od linearizovaného řešen Adamsovou vícekrokovou metodou. Pro letadlo McDonnell F-4C Phantom bylo nalezeno řešení všech pohybových proměnných. Data byla převzata z knihy [1]. Ukažme srovnání odezvy pohybové proměnné u lineárního modelu s řešením nelineární soustavy při zvyšování výškovky výškovky na vstupu. Na obrázku 4 lze vidět, jak rychle se od sebe řešení vzdalují při dvou různých výšulkách výškovky. Abychom lépe viděli rozdíl v řešení, vykreslíme graf odchylek řešení linearizovaného a nelineárního modelu pro různé vstupy na výškovce (viz obrázek 5). Je zřetelné, že pro zvyšující se vstup na výškovce se řešení linearizovaného modelu vzdaluje od řešení modelu nelineárního.



Obrázek 3. Schéma modelu.



Obrázek 4. Porovnání odezvy.

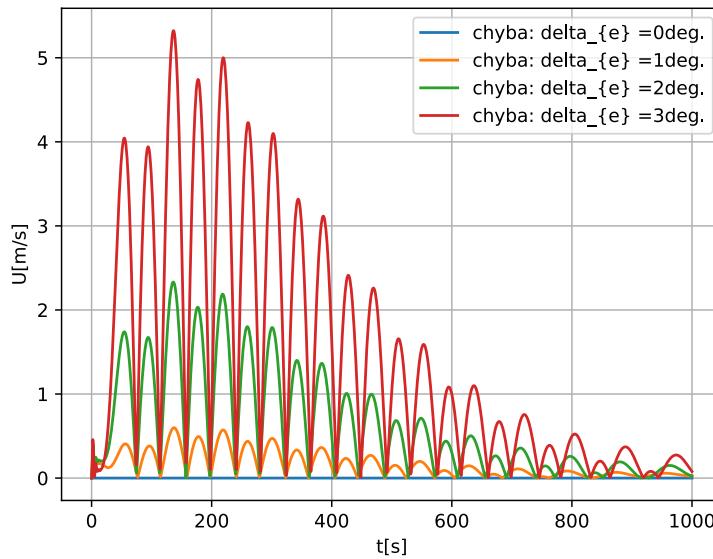
4. STABILITA A ŘÍZENÍ

Při řešení pohybových rovnic pro malé odchylky získáme pohybové odezvy letadla na vstup, při simulaci nejčastěji výchylkou výškovky nebo jiných řídicích členů. Tyto odezvy mají obvykle kmitavý charakter podobný modelu tlumeného oscilátoru. Pro lepší letové vlastnosti je třeba navrhnut tlumič, který zmenší maximální amplitudu překmitu nebo zkrátí dobu ustálení. Výchozím bodem pro návrh tlumiče a posouzení stability bude matice přenosových funkcí systému ve formě

$$\mathbf{G}(s) = \frac{1}{\Delta(s)} \mathbf{N}(s),$$

kde $\Delta(s) = \det(\mathbf{A} - s\mathbf{I})$ je charakteristický polynom¹ společný všem přenosovým funkcím a $\mathbf{N}(s)$ je matice typu $n \times m$. Pojem stabilita si můžeme představit jako schopnost letadla se po vychýlení z ustáleného stavu po konečném čase opět vrátit

¹ \mathbf{I} je jednotková matice řádu n

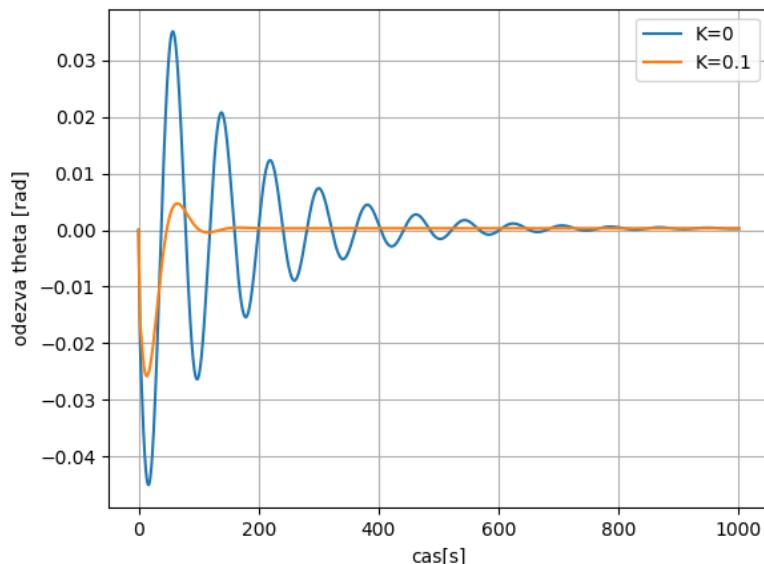


Obrázek 5. Srovnání lineárního a nelineárního modelu.

do ustáleného stavu. Při řešení stability řízené soustavy (v případě pohybových rovnic mluvíme o řídících členech) se můžeme omezit na stanovení stability nulového řešení pouze neřízené soustavy (3). K tomu lze využít znalost znamének reálných částí vlastních čísel matice \mathbf{A} lineární soustavy $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}$. Není třeba vlastní čísla počítat přímo, stačí ověřit, že jsou všechny reálné části kořenů charakteristického polynomu matice \mathbf{A} záporné. To lze ověřit například Routhovým-Hurwitzovým kritériem. Při vychýlení se letoun vrací do ustáleného stavu jistým způsobem, často kmitavým. Charakteristický polynom je čtvrtého řádu a obvykle má dva komplexně sdružené kořeny, které odpovídají dvojici kmitavých pohybů. Rychlé kmity označované jako „short period“ jsou velmi dobře tlumeny s periodou jen několik vteřin. Letadla jsou již navrhována tak, aby tato složka neměla zásadní vliv na stabilitu letadla. Druhou složkou jsou tzv. fygoidální kmity (anglicky phugoid). Je to obvykle málo tlumená složka s menší frekvencí, ale s vyšší amplitudou, což má za následek změny v rychlosti a výšce.

Sestavme nyní jednoduchou řídicí smyčku, ve které budeme sledovat úhel θ a pomocí proporcionalního tlumícího koeficientu K_θ jej vracet na vstup. Cílem bude rychleji tlumit „phugoid“ a zmenšit amplitudu. Vstup ve formě pohybu výškovky v čase bude tedy vyjádřen jako $\delta_e(t) = \xi_{\delta_e}(t) - K_\theta\theta(t)$, kde ξ_{δ_e} značí požadovanou výchylku výškovky a δ_e skutečnou výchylku výškovky. Při volbě tlumícího koeficientu je dobré vědět, že má za následek změnu charakteristického polynomu a tedy i změnu polohy kořenů v komplexní rovině. Aby bylo jednodušší určit vhodný

tlumící koeficient, vykreslíme změny kořenů postupně do komplexní roviny pro různé koeficienty. Rychlejší tlumení bude způsobeno posunem kořenů více doleva (větší záporná složka) a menší kmity budou způsobeny přiblžením komplexně sdružených kořenů k reálné ose. Po zvolení vhodného koeficientu tlumení můžeme soustavu opět řešit a zjistit, jestli se dynamické vlastnosti letadla zlepšíly. Na obrázku 6 můžeme pozorovat, jak výrazně se podařilo „phugoid“ utlumit.



Obrázek 6. Tlumení oscilací.

5. ZÁVĚR

V článku byly popsány základy problematiky dynamiky letu a řízení. Přestože nebylo možné zajít příliš do hloubky, čtenář by mohl ocenit zejména popis a postup, jak se k problematice přistupuje a jakého aparátu se užívá. Můžeme si povšimnout přesnosti řešení lineárního modelu pro malé odchylky od rovnovážného stavu. Nabízí se otázka, jakým způsobem takový stav nalezneme. V bakalářské práci [2] je pro zájemce vysvětlený i tento problém spolu s popisem letových režimů ustáleného letu.

REFERENCE

- [1] M. V. Cook: *Flight Dynamics Principles*, Arnold, London, 1997.
- [2] J. Novák: *Stabilita a řízení dynamických systémů použitých při modelování pohybu letadla*, Bakalářská práce, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Brno, 2018.

Jiří Novák, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně,
Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: 182740@vutbr.cz

VYBRANÉ PRÍKLADY Z INTERNETOVEJ MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

VIERA ŠTOUDKOVÁ RŮŽIČKOVÁ

ABSTRAKT. V článku sú riešené tri vybrané príklady súvisiace s Internetovou matematickou olympiadou pre študentov stredných škôl. V prvej časti je rozobratý geometrický príklad o tetivových štvoruholníkoch. Druhá časť sa zaobráva dvoma verziami príkladu na výpočet pravdepodobnosti a v postupe ich riešenia sa počítajú limity. V tretej časti sú uvedené rôzne verzie geometrického príkladu na výpočet dĺžok, je rozobratá verzia s nepresnými vstupnými údajmi.

Ústav matematiky na FSI VUT v Brne každoročne organizuje Internetovú matematickú olympiadu pre študentov stredných škôl ČR a SR. V roku 2018 prebehol už jej jedenásťty ročník. Na príprave príkladov a ich výhodnotení sa nemalou mierou podieľajú študenti oboru Matematické inženýrstvá a oboru Aplikovaná matematika. Na stránkach <http://matholymp.fme.vutbr.cz> je možné nájsť zadania aj riešenia príkladov zo všetkých ročníkov.

Tento príspevok je druhý v poradí na túto tému. V minulom roku som sa mala možnosť podieľať na organizácii tejto súťaže a videla som, ako postupne vznikajú niektoré príklady od prvého nápadu až po finálnu verziu. Často je nutné pôvodné verzie zadania zjednodušiť, prispôsobiť úrovni stredoškolákov a tiež zohľadniť časový priestor, ktoré majú riešitelia na vypracovanie riešení, aj čas, ktorý zaberie opravovanie týchto riešení.

V tomto príspevku som sa rozhodla ukázať niektoré z tých príkladov, ktoré neboli na olympiáde použité, alebo boli použité v inej verzii. Rovnako ako v predchádzajúcim príspevku, aj teraz budem riešenia príkladov popisovať z môjho pohľadu, občas aj s odbočkami, ktoré súvisia s tým, ako som na riešenie postupne prichádzala a aj s rôznymi úvahami, čo ma k tomu ešte napadli.

1. PRÍKLAD S DÚHOU

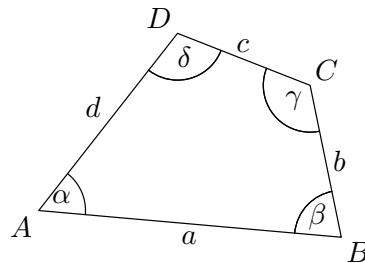
Príklad s dúhou, ktorý bol nachystaný na použitie minulý rok, zatiaľ nebudem zverejňovať. Je pekný a môže sa ešte v nejakej forme objaviť v niektorom z ďalších ročníkov. Zatiaľ k tomu nedošlo, lebo sa ukázalo, že v zadanií je navyše schovaná ešte jedna dôkazová úloha, ktorej riešenie už by vydalo na samostatný príklad. A práve týmto príkladom sa teraz budeme zaoberať. Zadanie by mohlo vyzerať napríklad nasledovne.

2010 *MSC.* Primárni 00A09; Sekundárni 00A35.
Klíčová slova. Matematická olympiáda.

Príklad 1. Dokážte, že pokiaľ existuje štvoruholník s dĺžkami strán a, b, c, d , tak je možné zstrojiť aj tetivový štvoruholník s dĺžkami strán a, b, c, d .

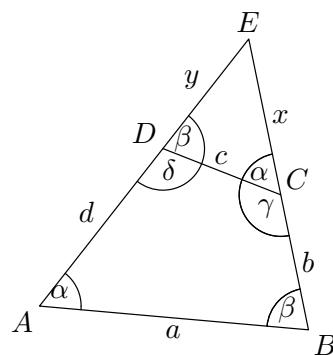
Začnem tým, že zhrniem, čo viem o tetivových štvoruholníkoch: podľa definície ich vrcholy ležia na kružnici. Ďalej sa vie, že štvoruholník je tetivový práve vtedy, keď súčet jeho protiľahlých uhlov je rovný 180° .

Ukázať, že štvoruholník s danými vlastnosťami existuje, je možné tak, že ho nejakozostrojím - teda vymyslím nejaký postup a ukážem, že bude fungovať. To ale len tak nevymyslím. Pôjdem na to odzadu. Nakreslím si nejaký, pokiaľ možno čo najobyčajnejší tetivový štvoruholník (to znamená nie obdĺžnik, kosoštvorec, lichobežník, ...) a označím dĺžky jeho strán a uhly. Napríklad ako na obrázku 1. Potom skúšam prikreslovať do obrázku rôzne pomocné čiary, tým vznikajú nové



Obrázok 1

úsečky a uhly. Zistujem, či sa dajú odvodiť vzťahy pre ich dĺžky a veľkosti uhlov, ktoré zvierajú so štvoruholníkom a či by to mohlo nejako pomôcť. Ako najužitočnejšie mi pripadá predĺženie dvoch strán až do spoločného bodu, čím vzniknú dva podobné trojuholníky, ako na obrázku 2. Podobnosť trojuholníkov ABE a CDE



Obrázok 2

vyplýva z tetivovosti štvoruholníka $ABCD$, lebo pre jeho uhly platí $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$. Uhly teda poznám, a nie je problém dopočítať neznáme dĺžky úsečiek CE

a DE , ktoré som na obrázku označila x a y . Z podobnosti trojuholníkov ABE a CDE dostávam

$$\frac{d+y}{x} = \frac{a}{c} = \frac{b+x}{y}. \quad (1)$$

Z toho vyjadríme x a y ako

$$x = c \cdot \frac{bc+ad}{a^2-c^2}, \quad y = c \cdot \frac{ab+cd}{a^2-c^2}. \quad (2)$$

Teraz už mi je jasné postup konštrukcie: Máme dané a, b, c, d , kde $a > c$. (Táto podmienka nie je problém, stačí zvoliť značenie a, b, c, d tak, že $a > c$ a v prípade, že to nejde, znamená to, že $a = b = c = d$, ide teda o štvorec, ktorý je tetivový vždy.) Najskôr zostrojíme trojuholník DCE so stranami dĺžky $|DC| = c$, $|CE| = x$, $|ED| = y$, kde x, y spočítame zo vzťahov (2), a potom predĺžením jeho strany EC o dĺžku b do bodu B a predĺžením strany ED o dĺžku d do bodu A dostaneme pod ním štvoruholník $ABCD$. Ešte treba overiť, že tento štvoruholník bude mať dĺžku strany $|AB| = a$ a bude tetivový. To je jednoduché, stačí si uvedomiť, že vzťahy (1) a (2) sú za podmienky $a > c$ ekvivalentné, teda nielen, že z rovností (1) vyplývajú rovnosti (2), ale aj naopak. Potom z (1) už vyplýva, že trojuholníky ABE a CDE sú podobné a teda súčet protiľahlých uhlov štvoruholníka $ABCD$ je rovný 180° a je tetivový. A ďalej z podobnosti trojuholníkov ABE a CDE a z (1) vyplýva, že $|AB| = a$.

Tým je zdanivo úloha vyriešená. V skutočnosti ešte zostáva urobiť kus práce. Musíme ukázať, že trojuholník s dĺžkami strán c, x, y existuje pre každú zadanú štvoricu čísel a, b, c, d takú, že existuje štvoruholník s dĺžkami strán a, b, c, d . To v prvom rade znamená, že hodnoty x a y musia byť kladné, teda

$$c \cdot \frac{bc+ad}{a^2-c^2} > 0, \quad c \cdot \frac{ab+cd}{a^2-c^2} > 0.$$

Tieto nerovnosti splnené sú, lebo sme predpokladali, že $a > c$. Ďalej musia platiť trojuholníkové nerovnosti

$$x + y > c, \quad c + x > y, \quad c + y > x,$$

teda

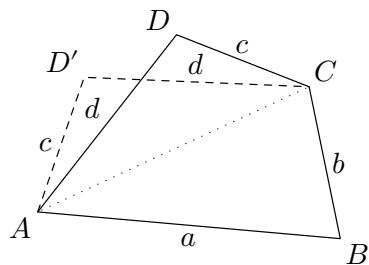
$$\frac{bc+ad}{a^2-c^2} + \frac{ab+cd}{a^2-c^2} > 1, \quad 1 + \frac{bc+ad}{a^2-c^2} > \frac{ab+cd}{a^2-c^2}, \quad 1 + \frac{ab+cd}{a^2-c^2} > \frac{bc+ad}{a^2-c^2}.$$

Tieto nerovnosti môžeme upraviť ako

$$\begin{aligned} \frac{bc+ad+ab+cd}{a^2-c^2} &> 1, & 1 &> \frac{ab+cd-bc-ad}{a^2-c^2}, & 1 &> \frac{bc+ad-ab-cd}{a^2-c^2}, \\ \frac{b+d}{a-c} &> 1, & 1 &> \frac{b-d}{a+c}, & 1 &> \frac{d-b}{a+c}, \\ b+d+c &> a, & a+c+d &> b, & a+b+c &> d, \end{aligned}$$

čo nie je nič iné ako štvoruholníkové nerovnosti – pokial' by niektorá z nich neplnila, žiadny štvoruholník s dĺžkami strán a, b, c, d by sa nedal zostrojiť. Všetky tri teda sú splnené.

Tým je už úloha konečne vyriesená. Ešte sa vrátim pre poriadok k tomu preznačovaniu strán. V zadaní nebolo jednoznačne napísané, že výsledný štvoruholník má mať dĺžky strán a, b, c, d v tomto poradí. Môžeme ale prehlásiť, že pokiaľ vieme zostrojiť tetivový štvoruholník so stranami s dĺžkami zaradom a, b, c, d , vieme zostrojiť aj tetivové štvoruholníky so stranami s týmito dĺžkami v ľubovoľnom poradí. Dá sa ukázať, že prehodením dvoch susedných strán a ponechaním zvyšných dvoch na mieste, ako je to ukázané na obrázku 3, dostávame vždy znova tetivový



Obrázok 3

štvoruholník a postupným prehadzovaním dvoch susedných strán tak vieme dosťať ľubovoľnú kombináciu ich poradia.

2. PRÍKLAD S KOVBOJMI

Tento príklad je podarený, má napínavý dej, ale medzi súťažnými príkladmi sa neobjavil a už ani neobjaví. Bol vyhodnotený ako nie celkom vhodný pre stredoškolákov. O to vhodnejší je pre vysokoškolákov, ktorí už vedia dobre pracovať s limitami. Preto som ho vybrať do tohto článku.

Príklad 2 (autor Zdeněk Hrazdíra). *Uvažujme, že jsme jeden z nekonečne (ale spočetně) mnoha kovbojů v přestrelce. Tato přestrelka probíhá tak, že si na začátku každý kovboj náhodně vybere jednoho z ostatních kovbojů jako cíl a poté všechni kovbojové vystřelí ve stejný okamžik. Každý z kovbojů vystřelí a každý se vždy trefí. Jaká je šance pro nás, jako jednoho z těchto kovbojů, že přežijeme?*

Ako prvý uvediem autorské riešenie: Nejprve si spočteme pravděpodobnost, s jakou nás netrefí jeden z ostatních kovbojů. Pokud je v přestrelce N kovbojů, může si jeden kovboj obecně vybrat $N - 1$ možných cílů (nestřelí sám sebe). Pokud však chceme přežít, nesmí si vybrat ani nás. Pravděpodobnost (označíme ji P_1), že si nás jeden z kovbojů nevybere jako cíl je tedy

$$P_1 = \frac{N - 2}{N - 1}.$$

Abychom přežili, nesmí nás trefit ani jeden ze všech $N - 1$ ostatních kovbojů. Jev s pravděpodobností P_1 tedy musí nastat pro všech $N - 1$ kovbojů. Tento jev

označíme ako P_{N-1} a spočítáme jeho pravděpodobnost

$$P_{N-1} = \left(\frac{N-2}{N-1} \right)^{N-1}. \quad (3)$$

Pokud tedy uvažujeme hypotetickou přestřelku mezi nekonečným počtem kovbojů, označíme naši pravděpodobnost na přežití P_∞ a spočteme ji jako limitu výrazu (3), kde $N \rightarrow \infty$, tedy

$$P_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{N-2}{N-1} \right)^{N-1}.$$

Pro vypočítání této limity si nejprve zavedeme substituci $n = N - 2$, která limitu v ∞ nijak nezmění. Výraz tedy přejde na tvar

$$P_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1}.$$

Můžeme si všimnout, že naše limita je velmi podobná známému limitnímu vyjádření čísla e. Za předpokladu $P_\infty \neq 0$ převrátíme tedy obě strany

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_\infty} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{-(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right) \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Vzhledem k tomu, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e \quad \text{a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1,$$

existuje také limita součinu odpovídajících posloupností a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right) = e. \quad (5)$$

Spojením (4) a (5) dostáváme výsledek

$$P_\infty = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right) \right)} = \frac{1}{e},$$

což odpovídá pravděpodobnosti na přežití přibližně 0,36788.

Teraz pripojím môj komentár. Postup riešenia je nasledovný – v prvej časti je odvodéný vzťah pre pravdepodobnosť prežitia v prípade konečného počtu N kovbojov, v druhej časti je za N „dosadené“ nekonečno, t.j. vypočítaná limita výrazu pre túto pravdepodobnosť v nekonečne. Pričom výpočet tejto limity tvorí dosť veľkú časť riešenia. Nešiel by nejako skrátiť, zjednodušiť? Keby sme hned' na začiatku zvolili substitúciu $n = 1 - N$ namiesto $n = N + 2$, dostali by sme hned'

$$P_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{N-2}{N-1} \right)^{N-1} = \lim_{n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} = \left(\lim_{n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)^{-1} = e^{-1},$$

kde sme využili vetu o limite zloženej funkcie a to, že

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \quad (6)$$

Tak čo, zdá sa vám to jednoduchšie? Nie je. Len tá zložitosť je schovaná inde. A to v tvrdení (6), ktoré sme nedokazovali, len použili. Jeho dôkaz totiž vyzerá nejak takto:

Po substitúcii $m = -n$ z výrazu $\lim_{n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ďalej úpravami dostávame

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{m}}\right)^m = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^m \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^{m-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{m-1}\right) \right) \\ &= \lim_{(m-1) \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^{m-1} = e, \end{aligned}$$

v poslednom kroku sme tiež využili vetu o limite súčinu.

Navyše si môžete všimnúť, že ak by sme všetky substitúcie urobili naraz, dostaneme $n = 1 - N$, $m = -n$ a $k = m - 1$, z toho $k = N - 2$, čo je presne tá substitúcia, ktorá bola zvolená v predchádzajúcim postupe riešenia.

A teraz sa pozrieme na pôvodnú verziu tohto príkladu. Táto verzia bola zavŕhnutá hned na začiatku ako príliš zložitá.

Príklad 3 (autor Zdeněk Hrazdíra). *Uvažujme, že jsme jeden z nekonečně (ale spočetně) mnoha kovbojů v přestřelce. Tato přestřelka probíhá tak, že si na začátku každý kovboj náhodně vybere jednoho z ostatních kovbojů jako cíl, poté se náhodně vybere pořadí a kovbojové začnou střílet popořadě. Každý z kovbojů, pokud už není mrtvý, vystřelí a každý se vždy trefí. Jaká je šance pro nás, jako jednoho z těchto kovbojů, že přežijeme?*

Znova najsíkôr uvažujme, že kovbojov je spolu N . Počet všetkých možností, ktoré mohli nastaviť, je v tomto prípade rovnaký ako v predchádzajúcim prípade. Každý kovboj si náhodne vyberá jedného zo zvyšných $N - 1$, t.j. spolu je to $(N - 1)^N$ možností, všetky môžu nastaviť s rovnakou pravdepodobnosťou.

Avšak vyjadrenie vzťahu pre hodnotu pravdepodobnosti prežitia i -teho kovboja v poradí pri celkovom počte N kovbojov je v tomto prípade veľmi náročné. Označím ju ako $P_N(i)$. Skúšala som tento vzťah odvodiť a veľmi sa mi nedarilo – vychádzalo to tak zložito, že som zvažovala, či to vôbec má zmysel dokončiť. Pretože by som aj tak nedokázala potom vypočítať limitu toho vzťahu pre N idúce do nekonečna.

Potom ma napadlo, že keď sa to nedarí všeobecne, skúsim trochu ubrať, a vypočítať aspoň pravdepodobnosť prežitia jednotlivých kovbojov pre konkrétnie počty. Pre malé N sa dajú vypísať a postupne vyhodnotiť všetky možnosti, pre trochu väčšie N pomôže počítač. Počet možností ale so zväčšujúcim sa počtom kovbojov rýchle narastá, pre $N = 11$ už ich máme 10^{11} , a to už aj počítač má čo robiť.

Skúšila som to postupne pre $N = 3, 4, 5, 6$ a zistila som zaujímavú vec – pre každé z týchto N tvoria hodnoty pravdepodobnosti prežitia jednotlivých kovbojov lineárnu postupnosť, ich priemer vychádza vždy presne 0,5 a rozdiel prvej a poslednej hodnoty sa pre $N > 3$ s narastajúcim N zmenšuje. Konkrétnie hodnoty pravdepodobnosti pre prvého a posledného, $P_N(1)$ a $P_N(N)$, mi pre $N = 3, 4, 5, 6$ vyšli nasledovne

$$\begin{aligned} N = 3 : \quad P_3(1) &= \frac{1}{2}, & P_3(3) &= \frac{1}{2}, \\ N = 4 : \quad P_4(1) &= \frac{15}{27}, & P_4(4) &= \frac{12}{27}, \\ N = 5 : \quad P_5(1) &= \frac{34}{64}, & P_5(5) &= \frac{30}{64}, \\ N = 6 : \quad P_6(1) &= \frac{329}{625}, & P_6(6) &= \frac{296}{625}. \end{aligned}$$

Môžem z toho teda odhadnúť, že to takto bude pokračovať aj pre ďalšie N a že pravdepodobnosť prežitia ľubovoľného kovboja pri nekonečnom počte je jedna polovica. Taký pekný odhad výsledku ma povzbudil, povedala som si, že keď tá limita vyjde takto jednoducho, musí existovať aj dostatočne jednoduchý postup na jej vypočítanie, publikovateľný v tomto článku. A tak som sa rozhodla to skúsiť. Ako som si vypisovala všetky možnosti pre malé N , našla som pri tom jednoduchý postup, ako to vyhodnotiť, o ktorom sa ukázalo, že je prepísateľný aj pre všeobecné $N > 2$. Viedie to na rekurentný vzťah.

Teraz už nasleduje postup riešenia. Vopred upozorňujem, že úroveň jeho zložitosti je o niečo vyššia, než u ostatných príkladov.

Najskôr ukážem, ako odvodiť vzťah pre pravdepodobnosť prežitia prvého kovboja, $P_N(1)$. Začнем s tým, že rozoberiem situáciu, keď už je nažive len k kovbojov z pôvodných N , ktorí ešte môžu vystreliť a prvý kovboj ešte žije a už strieľal. Ten z kovbojov, ktorý je práve na rade, má tri možnosti – bud' si vybral prvého, táto možnosť nastane s pravdepodobnosťou $\frac{1}{N-1}$, alebo si vybral jedného z tých, ktorí už bud' strieľali (okrem prvého) alebo už nie sú nažive, tých je $N - k - 1$, takže s pravdepodobnosťou $\frac{N-k-1}{N-1}$ po jeho výstrele zostane $k - 1$ kovbojov, ktorí ešte môžu vystreliť, a posledná možnosť je, že si vybral jedného z týchto $k - 1$ kovbojov, a teda s pravdepodobnosťou $\frac{k-1}{N-1}$ po jeho výstrele zostane už len $k - 2$ kovbojov, ktorí ešte môžu vystreliť.

Teraz označíme pravdepodobnosť toho, že situácia rozobratá vyššie, t.j. už je nažive len k kovbojov, ktorí ešte môžu vystreliť a prvý kovboj ešte žije, dopadne nakoniec zastrelením prvého kovboja, ako $V_N(k)$. Pravdepodobnosť, že prvý prežije, je potom $P_N(1) = 1 - V_N(N - 2)$. Pre $V_N(k)$ dostávame na základe predchádzajúcich úvah rekurentný vzťah

$$V_N(k) = \frac{1}{N-1} + \frac{N-k-1}{N-1} \cdot V_N(k-1) + \frac{k-1}{N-1} \cdot V_N(k-2), \quad (7)$$

kde $k = 2, 3, \dots, N - 2$. Pre $k = 0$ a $k = 1$ je to jednoduché,

$$V_N(0) = 0, \quad V_N(1) = \frac{1}{N-1}.$$

Vzťah (7) sa mi ešte zdá zložitý, a tak skúšam ho upravovať. Zistujem, že sa to dá poskladať tak, že člen $V_N(k-2)$ vypadne. Je to ale trochu zdĺhavé a nebudem to sem celé písat. Môžete si to skúsiť sami. Tu ukážem iný, kratší postup (ktorý funguje dobre vtedy, keď dopredu viem, čo má vyjsť). Označím

$$A_N(k) := (N-1) \cdot V_N(k) + k \cdot V_N(k-1) - k.$$

Zo vzťahu (7) postupne dostávam

$$\begin{aligned} (N-1) \cdot V_N(k) &= 1 + (N-k-1) \cdot V_N(k-1) \\ &\quad + (k-1) \cdot V_N(k-2), \\ (N-1) \cdot V_N(k) + k \cdot V_N(k-1) &= 1 + (N-1) \cdot V_N(k-1) + (k-1) \cdot V_N(k-2), \\ A_N(k) &= A_N(k-1) \end{aligned}$$

pre $k = 3, \dots, N-2$. Ked'že $A_N(2) = (N-1) \cdot V_N(1) + 1 \cdot V_N(0) - 1 = 0$, potom $A_N(k) = 0$ pre všetky $k > 2$, a z toho dostávam nový rekurentný vzťah

$$V_N(k) = \frac{k}{N-1} \cdot (1 - V_N(k-1)), \quad k = 1, 2, 3, \dots, N-2,$$

ktorý už vyzerá pomerne jednoducho. Teraz z neho vyjadrim $(N-2)$. člen, ktorý vyjadruje pravdepodobnosť, že prvý kovboj neprežije prestrelku, pokial kovbojov je N . Rozpišem si to postupne a dostávam

$$\begin{aligned} 1 - P_N(1) &= V_N(N-2) = \frac{N-2}{N-1} \cdot (1 - V_N(N-3)) \\ &= \frac{N-2}{N-1} \cdot \left(1 - \left(\frac{N-3}{N-1} \cdot (1 - V_N(N-4)) \right) \right) = \dots \end{aligned}$$

Ked' to roznásobím, dostanem súčet

$$\begin{aligned} 1 - P_N(1) &= \frac{N-2}{N-1} - \frac{N-2}{N-1} \cdot \frac{N-3}{N-1} + \frac{N-2}{N-1} \cdot \frac{N-3}{N-1} \cdot \frac{N-4}{N-1} - \dots \\ &\quad + (-1)^{N-1} \frac{(N-2)!}{(N-1)^{N-2}} = \sum_{i=1}^{N-2} (-1)^{i+1} \frac{(N-2) \cdots (N-i-1)}{(N-1)^i}. \end{aligned}$$

Tým je prvá časť hotová. Nás ale zaujíma, ako to je pre nekonečne veľa kovbojov, a teda hodnota

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (1 - P_N(1)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{N-2} (-1)^{i+1} \frac{(N-2) \cdots (N-i-1)}{(N-1)^i}.$$

Vyzerá to zložito, ale môžem použiť nápovedu. Viem, že výsledok by mal vyjsť $\frac{1}{2}$. Mohlo by pomôcť rozdeliť tento súčet na súčet výrazu, ktorého limita je $\frac{1}{2}$ a výrazu,

ktorého limita je nula. Také limity sa počítajú obvykle jednoduchšie. Napadá ma jeden možný postup, ako to urobiť. Taký, že výraz $1 - P_N(1)$ rozpišem ako

$$\begin{aligned} 1 - P_N(1) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{N-2}{N-1} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{N-2}{N-1} - \frac{N-2}{N-1} \cdot \frac{N-3}{N-1} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{N-2}{N-1} \cdot \frac{N-3}{N-1} - \frac{N-2}{N-1} \cdot \frac{N-3}{N-1} \cdot \frac{N-4}{N-1} \right) + \dots \\ &\quad + \frac{(-1)^{N-2}}{2} \cdot \left(\frac{(N-2)!}{(N-1)^{N-3}} - \frac{(N-2)!}{(N-1)^{N-2}} \right) \\ &\quad + \frac{(-1)^{N-1}}{2} \cdot \frac{(N-2)!}{(N-1)^{N-2}}, \end{aligned}$$

čo môžem po odčítaní zlomkov v zátvorkách úpravou na spoločného menovateľa zapísť aj ako

$$\begin{aligned} 1 - P_N(1) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{N-2}{N-1} + \frac{(-1)^{N-1}}{2} \cdot \frac{(N-2)!}{(N-1)^{N-2}} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N-3} \frac{(-1)^{i+1}}{2} \cdot \frac{(N-2) \cdots (N-i-1) \cdot (i+1)}{(N-1)^{i+1}}. \end{aligned}$$

Tak, tieto úpravy by už mali stačiť a môžem počítať limitu tohto súčtu. Spočítam si limity jednotlivých výrazov, ktoré označím

$$\begin{aligned} A(N) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{N-2}{N-1}, \\ B(N) &= \frac{(-1)^{N-1}}{2} \cdot \frac{(N-2)!}{(N-1)^{N-2}}, \\ C(N) &= \sum_{i=1}^{N-3} \frac{(-1)^{i+1}}{2} \cdot \frac{(N-2) \cdots (N-i-1) \cdot (i+1)}{(N-1)^{i+1}}. \end{aligned}$$

Prvá limita je ľahká, hned' vidím, že $\lim_{N \rightarrow \infty} A(N) = \frac{1}{2}$. V druhej limite urobím kvôli prehľadnosti substitúciu $N-1 = M$ a dostávam

$$\lim_{N \rightarrow \infty} B(N) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{(-1)^M}{2} \cdot \frac{(M-1)!}{M^{M-1}} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{(-1)^M}{2} \cdot \frac{M!}{M^M} = 0.$$

Tretia limita je najťažšia. Viem, že by to mala vyjsť nula, takže by sa mohol dať ten súčet odhadnúť zhora výrazom, ktorého limita je nula. Rozpišem si súčet $C(N)$ po členoch, nech do toho lepšie vidím a za N dosadím napríklad 11. Dostávam

$$\begin{aligned} C(N) &= \frac{(N-2) \cdot 2}{2(N-1)^2} - \frac{(N-2)(N-3) \cdot 3}{2(N-1)^3} + \frac{(N-2)(N-3)(N-4) \cdot 4}{2(N-1)^4} - \dots, \\ C(11) &= \frac{18}{200} - \frac{216}{2000} + \frac{2016}{2 \cdot 10^4} - \frac{15120}{2 \cdot 10^5} + \frac{90720}{2 \cdot 10^6} - \frac{423360}{2 \cdot 10^7} \\ &\quad + \frac{1451520}{2 \cdot 10^8} - \frac{3265920}{2 \cdot 10^9} \\ &= 0,09 - 0,108 + 0,1008 - 0,0756 + 0,04536 - 0,0211168 \end{aligned}$$

$$+ 0,0072576 - 0,00163296,$$

z čoho vidíme, že zo začiatku sa absolútne hodnoty členov zväčšujú a potom zmenšujú až na veľmi malé hodnoty. Odhadujem, že to bude platiť aj všeobecne. Overím to výpočtom. Určím hodnotu rozdielu

$$\begin{aligned} & \frac{(N-2) \cdots (N-i-1) \cdot (i+1)}{(N-1)^{i+1}} - \frac{(N-2) \cdots (N-i) \cdot i}{(N-1)^i} \\ &= \frac{(N-2) \cdots (N-i)}{(N-1)^{i+1}} \cdot ((N-i-1) \cdot (i+1) - (N-1) \cdot i) \\ &= \frac{(N-2) \cdots (N-i)}{(N-1)^{i+1}} \cdot (N - i^2 - i - 1). \end{aligned}$$

Takže pokiaľ $i^2 + i + 1 < N$, i -ty člen je v absolútnej hodnote väčší ako ten predchádzajúci, potom už sa zmenšujú. A najväčšiu absolútну hodnotu má ten člen súčtu, ktorý je v poradí m -tý, kde m je dolná celá časť z $\frac{\sqrt{4N-3}-1}{2}$. Súčasne viem, že členy súčtu striedajú znamienka. Z týchto dvoch poznatkov spolu dostávam, že absolútну hodnotu súčtu všetkých členov môžem zhora odhadnúť absolútou hodnotou najväčšieho, m -tého člena. (Nie je to hned' zrejmé, odporúčam si to rozpisť.) Mám teda nerovnosť

$$\begin{aligned} |C(N)| &= \left| \sum_{i=1}^{N-3} \frac{(-1)^{i+1}}{2} \cdot \frac{(N-2) \cdots (N-i-1) \cdot (i+1)}{(N-1)^{i+1}} \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{(N-2) \cdots (N-m-1) \cdot (m+1)}{(N-1)^{m+1}} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{m+1}{N-1} \\ &\leq \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{4N-3}+1}{N-1}. \end{aligned}$$

A limita tohto posledného výrazu je už jednoducho spočítateľná. Dostávam teda, že

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |C(N)| \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{4N-3}+1}{N-1} = 0,$$

a teda

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (1 - P_N(1)) = \lim_{N \rightarrow \infty} A(N) + \lim_{N \rightarrow \infty} B(N) + \lim_{N \rightarrow \infty} C(N) = \frac{1}{2} + 0 + 0 = \frac{1}{2}.$$

Tým sa mi podarilo ukázať, že pravdepodobnosť (ne)prežitia prvého kovboja je jedna polovica v prípade, že kovbojov je nekonečne veľa.

Teraz sa pozriem, ako je to u N -tého kovboja pri celkovom počte N kovbojov. Podobnou úvahou, ako u prvého, môžem rozlíšiť tri možnosti v situácii, keď je N -tý kovboj nažive a ešte môže vystreliť k kovbojov (vrátane neho). Podrobnosti už vynechám. Dostanem, že pre pravdepodobnosť $W_N(k)$, že táto situácia dopadne zastrenením N -tého kovboja, platí

$$W_N(k) = \frac{1}{N-1} + \frac{N-k}{N-1} \cdot W_N(k-1) + \frac{k-2}{N-1} \cdot W_N(k-2),$$

kde $k = 2, 3, \dots, N$ a $W_N(1) = 0$, $W_N(2) = \frac{1}{N-1}$. Podobne ako v predchádzajúcom prípade môžem tento rekurentný vzťah zjednodušiť na

$$W_N(k) = \frac{k-1}{N-1} \cdot (1 - W_N(k-1)), \quad k = 2, 3, \dots, N.$$

Rozpísaním tohto vzťahu pre $k = N$ dostanem, že pravdepodobnosť neprežitia N -tého kovboja je

$$\begin{aligned} 1 - P_N(N) &= W_N(N) = \frac{N-1}{N-1} - \frac{N-1}{N-1} \cdot \frac{N-2}{N-1} + \frac{N-1}{N-1} \cdot \frac{N-2}{N-1} \cdot \frac{N-3}{N-1} - \dots \\ &= 1 - V_N(N-2) = P_N(1). \end{aligned}$$

Ked' teraz spočítam limitu

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_N(N) = 1 - \lim_{N \rightarrow \infty} P_N(1) = \frac{1}{2},$$

dostanem, že v prípade nekonečne veľa kovbojov by mala byť pravdepodobnosť (ne)prežitia posledného v poradí jedna polovica, ale v prípade nekonečne veľa kovbojov nemá zmysel hovoriť o poslednom v poradí - teda „nekonečnetom“. Tento výpočet je však možné využiť na zistenie, ako je to u tých zvyšných. Stačí ukázať, že pravdepodobnosť prežitia i -teho kovboja pri celkovom počte N kovbojov, $P_N(i)$, leží pre každé $N > 3$ v intervale $[P_N(N), P_N(1)]$ a na výpočet limity $\lim_{N \rightarrow \infty} P_N(i)$ použiť takzvanú vetu o dvoch policajtoch. Tento posledný dôkaz som sa už rozhodla sem nedávať, už som toho k tomuto príkladu napísala veľmi veľa, môžete sa nad tým skúsiť zamyslieť sami.

3. PRÍKLAD SO SLONOM

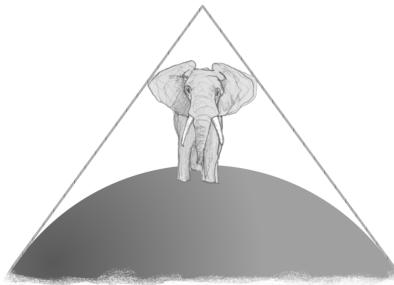
Tento príklad sa objavil na minulom ročníku v nasledovnom znení.

Príklad 4 (autori Tereza Kroulíková a Ondřej Resl). *Uvažujme Zemi ako kouli s průměrem 12 756 km a budovu A1 Fakulty strojního inženýrství Vysokého učení technického v Brně (dále jen FSI) jako úsečku délky 74 m, stojící kolmo k povrchu Země. Spočtěte o kolik centimetrů více by bylo potřeba lana, kdybychom jím obtočili právě jednou Zemi v rovině obsahující její střed oproti případu, kdy obtočíme lanem Zemi „přes budovu“ v rovině obsahující střed i úsečku reprezentující budovu, viz schématický obrázek. Fyzikální vlastnosti lana neuvažujeme. Výsledek zaokrouhlete na jedno desetinné místo.*

Obrázok k zadaniu a postup riešenia tohto príkladu je možné nájsť na stránkach olympiády, preto ho tu nebudem uvádzať. Výsledná dĺžka vyšla po zaokrúhlení 47,5 cm.

Aj tento príklad má niekoľko verzií, ktoré sa nepoužili, namiesto budovy A1 FSI v nich vystupuje slon. Pôvodné zadanie bolo celkom vtipne formulované približne takto.

Príklad 5. *Když kolem koule o velikosti Země obtočíme provázek v rovině obsahující její střed, přidáme jeden metr navíc a zvedneme provázek v jednom místě, projde touto „bránou“ slon? Viz obrázek 4.*



Obrázok 4

Na základe výsledku predchádzajúceho príkladu môžeme hned' odpovedať, že slon by s obrovskou rezervou prešiel. (Ale pokiaľ nič dopredu nevieme, výsledok môže byť dosť prekvapivý.)

Z tohto pôvodného zadania bola vytvorená druhá verzia, kde máme znova slona a hľadáme minimálnu možnú dĺžku, o ktorú musíme povraz predlžiť. Znenie tejto pracovnej verzie je nasledovné.

Príklad 6 (autori Tereza Kroulíková a Ondřej Resl). *Když obtočíme provázeckolem koule o velikosti Země v rovině obsahující její střed, o kolik ho musíme minimálne prodloužit, aby pod ním prošel slon?*

V tomto tvaru je príklad ešte neúplný, je treba najskôr matematicky zadefinovať slona, a to vôbec nie je jednoduché. (Autori v tretej, finálnej verzii zmenili slona na budovu v tvaru úsečky.) Rozhodla som sa, že sa o to pokúsim. Zlákala ma predstava, že budem môcť do tohto článku okrem pomerne nezáživných úsečiek a kružník kresliť aj oveľa zaujímavejšie krivky.

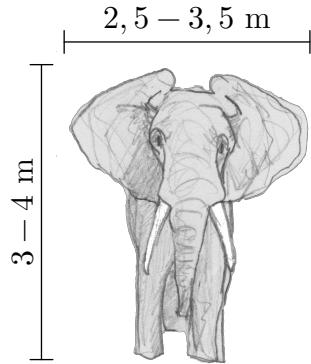
Budem predpokladať, že slon pôjde popod povraz hlavou napred, podobne, ako na obrázku 4. Je teda dôležitá jeho výška a rozpätie uší, ale nie je podstatná jeho dĺžka. Výška dospelého slona afrického sa uvádza 3–4 metre, indický je o trochu menší. Rozhodla som sa vychádzať z predpokladu, že slon meria na výšku 3,5 metra a že jeho rozpätie uší môže byť až 3 metre, a že tieto hodnoty viem len s presnosťou 0,5 metra. Je to znázornené na obrázku 5. Ďalšie parametre, ako je tvar uší a hlavy, doplním podľa potreby neskôr.

Ďalšia nejasne zadaná vec je veľkosť Zeme. Priemer Zeme s presnosťou na kilometre je na rovníku 12 756 km, cez póly je to 12 714 km. Budem predpokladať, že polomer danej gule o veľkosti Zeme v kilometroch je číslo z intervalu [6 357; 6 378].

Ešte je vhodné si určiť, s akou presnosťou budem potrebovať výsledok. Rozumné mi príde určovať dĺžku povrazu s milimetrovou presnosťou, väčšiu presnosť už ľahko dosiahnem, pokiaľ predpokladám, že ide o reálny povraz, súčasne vzhľadom na výsledok príkladu s budovou očakávam, že výsledok vyjde rádovo v jednotkách alebo desiatkach milimetrov.

Po doplnení dostávam takéto zadanie.

Príklad 7. *Když obtočíme provázeckolem koule s poloměrem $6\ 367,5 \pm 10,5$ km (tj. o velikosti Země), v rovině obsahující její střed, o kolik ho musíme minimálne*

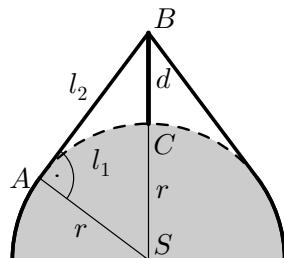


Obrázok 5

prodloužit, aby pod ním prošel slon vysoký $3,5 \pm 0,5$ m s rozpätím uší $3 \pm 0,5$ m, pokud slon má tvar ako na obrázku 5? Výsledek zaokrouhlete na celé milimetry.

Výsledkom príkladu s takto doplneným zadaním teda môže byť aj interval. Závisí to od toho, či nepresnosť pri meraní slona a polomeru gule sa prejaví aj po zaokrúhlení výsledku na celé milimetre. Uvidíme ...

Začнем jednoduchým modelom, keď namiesto slona budem tiež uvažovať úsečku o dĺžke $d = 3\ 500 \pm 500$ mm (podobne ako v zadaní použitom na olympiáde), označenie vidieť obrázok 6. Všetky hodnoty budem písat od začiatku v milimetroch.



Obrázok 6

Veľkosť polomeru gule v milimetroch označíme r , kde r je číslo z intervalu $[6,357 \cdot 10^9; 6,378 \cdot 10^9]$. Dĺžka povrazu, ktorý leží na povrchu gule medzi bodom A , kde sa po predĺžení prestne dotýkať povrchu gule, po bod C , kde je dolný koniec úsečky, je rovná veľkosti uhla ASC v radiánoch, násobenej polomerom r . Označíme ju ako l_1 . Dĺžku kusu predĺženého povrazu natiahnutého od bodu A po bod B , kde je horný koniec úsečky, označíme l_2 . Vzdialenosť od stredu gule S po bod B je $d + r$. Z pravouhlého trojuholníka ASB dostávame, že

$$l_2 = \sqrt{(d+r)^2 - r^2} = \sqrt{d^2 + 2 \cdot d \cdot r},$$

$$l_1 = r \cdot \operatorname{arctg} \frac{l_2}{r} = r \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\left(\frac{d}{r}\right)^2 + 2 \cdot \frac{d}{r}}.$$

Rozdiel $l_2 - l_1$ násobený dvoma je hľadaná hodnota, o koľko treba lano predĺžiť. Dostávam, že je to

$$2 \cdot (l_2 - l_1) = 2 \cdot \sqrt{d^2 + 2 \cdot d \cdot r} - 2 \cdot r \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\left(\frac{d}{r}\right)^2 + 2 \cdot \frac{d}{r}}.$$

Mohla by som dosadiť za d a r konkrétné hodnoty a vypočítať tento výraz, ale mám práve po ruke len starú kalkulačku a zadávanie tak zložitých výrazov je na nej náročné. Preto rozmýšľam, ako si prácu zjednodušíť. Hned si všimnem, že po úprave

$$\begin{aligned} 2 \cdot (l_2 - l_1) &= 2 \cdot r \cdot \left(\sqrt{\left(\frac{d}{r}\right)^2 + 2 \cdot \frac{d}{r}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\left(\frac{d}{r}\right)^2 + 2 \cdot \frac{d}{r}} \right) \\ &= 2 \cdot r \cdot f \left(\sqrt{\left(\frac{d}{r}\right)^2 + 2 \cdot \frac{d}{r}} \right) = 2 \cdot r \cdot f(x_0), \end{aligned}$$

kde $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$ a $x_0 = \sqrt{\left(\frac{d}{r}\right)^2 + 2 \cdot \frac{d}{r}}$ je veľmi malé číslo. Predpokladala som, že $3 \cdot 10^3 \leq d \leq 4 \cdot 10^3$ a $6,357 \cdot 10^9 \leq r \leq 6,378 \cdot 10^9$, z toho dostávam, že $9,699 \cdot 10^{-4} < x_0 < 1,122 \cdot 10^{-3}$.

Namiesto funkcie $f(x)$ môžem teda použiť jej rozvoj do Taylorovho radu so stredom v nule, to je

$$f(x) = x - \operatorname{arctg} x = x - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \right) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \dots$$

Ak funkciu $f(x)$ nahradím prvým členom tohto jej rozvoja, dostanem výsledok s chybou ch , kde

$$|ch| \leq 2 \cdot r \cdot \frac{x_0^5}{5} = 2 \cdot r \cdot \frac{\left(\sqrt{\left(\frac{d}{r}\right)^2 + 2 \cdot \frac{d}{r}}\right)^5}{5} < 2 \cdot 6,4 \cdot 10^9 \cdot \frac{1,122^5 \cdot 10^{-15}}{5} \ll 10^{-4}.$$

Pretože ma zaujíma výsledok zaokruhlený na celé milimetre, takáto malá chyba ho vôbec neovplyvní. Môžem teda skutočne počítať výsledný rozdiel dĺžok ako

$$2 \cdot (l_2 - l_1) \approx 2 \cdot r \cdot \frac{x_0^3}{3} = 2 \cdot r \cdot \frac{\left(\sqrt{\left(\frac{d}{r}\right)^2 + 2 \cdot \frac{d}{r}}\right)^3}{3} = 2 \cdot \frac{\left(\sqrt{\frac{d^2}{r} + 2 \cdot d}\right)^3}{3\sqrt{r}},$$

kde z posledného tvaru vidíme, že najväčšiu hodnotu tento výraz nadobudne pre najväčšie možné d a najmenšie možné r a naopak. Po dosadení týchto krajiných hodnôt pre d a r dostávam, že

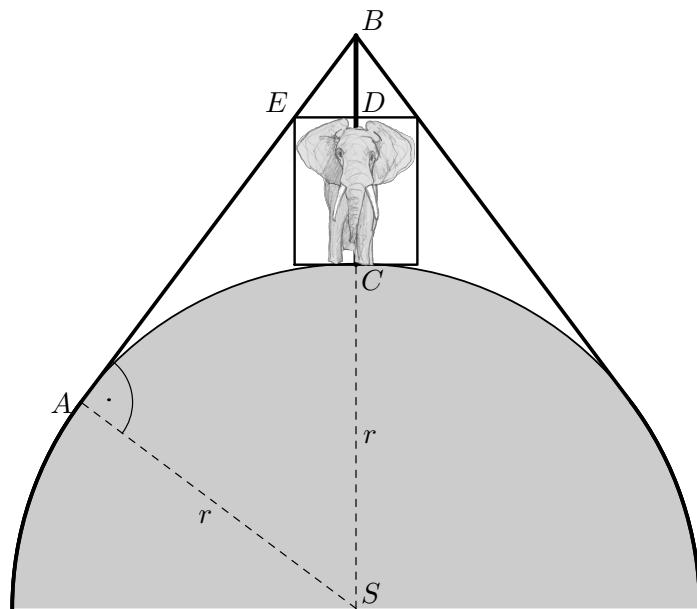
$$3,89 \text{ mm} \leq 2 \cdot (l_2 - l_1) \leq 5,98 \text{ mm},$$

tieto hodnoty zaokrúhlím na celé milimetre a dostávam, že pokial' ide o úsečku dlhú 3–4 metre, stačí povraz predížiť o 4–6 milimetrov.

Teraz sa vrátim od úsečky ku slonovi. Pokial' napnem povraz na úsečku BC dĺžky 3 m, aký veľký slon by pod ňou prešiel? Mám podozrenie, že skoro rovnako vysoký, lebo uhol, ktorý zviera povraz s úsečkou BC , je veľmi blízky pravému uhlu. Overím si toto podozrenie aj výpočtom. Platí

$$\sin(\angle ABS) = \frac{r}{|BC| + r} \approx \frac{6,4 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^2 + 6,4 \cdot 10^9} > 1 - \frac{3}{6,4} \cdot 10^{-7}.$$

Nad slonom je teda povraz skoro vodorovný. Spocítam, v akej výške sa nachádza na povraze bod E , ktorý je od úsečky BC vzdialenosť konca ucha slona od stredu hlavy. Vid' obrázok 7. Z podobnosti trojuholníkov ASB a DEB dostávam, že je to



Obrázok 7

$$|BD| = \frac{|AB| \cdot |DE|}{r} = \frac{\sqrt{|BC|^2 + 2 \cdot r \cdot |BC|} \cdot |DE|}{r} \approx |DE| \cdot 10^{-3} = 1,75,$$

čiže necelé dva milimetre, zanedbateľná hodnota v porovnaní s tým, ako presne určujem výšku slona. Takže malé sklamanie – nebudem teraz kresliť žiadne elipsy a ďalšie podobné krivky, ktorými by som popisovala tvar uší slona, stačí slona popísat' ako kváder vysoký 3–4 metre a široký 2,5–3,5 metra, výsledok to aj tak neovplyvní.

Záver teda je, že aby pod povrazom prešiel slon vysoký 3–4 metre a široký 2,5–3,5 metra, stačí ho predĺžiť o 6 milimetrov.

Pričom, pre zaujímavosť, povraz mal pôvodne dĺžku medzi $2\pi \cdot 6,357 \cdot 10^9 = 3,994 \cdot 10^{10}$ a $2\pi \cdot 6,378 \cdot 10^9 = 4,007 \cdot 10^{10}$ milimetrami, je teda treba ho predĺžiť zhruba o jednu desať miliardtinu pôvodnej dĺžky.

Viera Štoudková Růžičková, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: ruzickova@fme.vutbr.cz