

NELINEÁRNÍ MATEMATICKÉ MODELY PROUDĚNÍ PODZEMNÍ VODY

JIŘÍ BENEDIKT, PETR GIRG A LUKÁŠ KOTRLA

ABSTRAKT. Matematické modely proudění podzemní vody stojí na dvou základních vztazích, zákonu zachování a konstitutivním vztahu. Protože proudění v porézním prostředí je velmi komplexní jev, jsme ve většině případů odkázáni na získání konstitutivního vztahu z experimentálních dat. Stejná data lze však proložit různými funkcemi, a tedy nemůže existovat univerzální konstitutivní vztah.

V našem článku se zaměříme na mocninný zákon, který je dostatečně obecný, aby podchytil zákonitosti proudění v různých reálných situacích a zároveň je dostatečně jednoduchý, aby se s ním dalo snadno matematicky pracovat. Tento zákon použijeme k odvození rovnice proudění podzemní vody. Pomocí ní popíšeme vývoj hladiny podzemní vody v závislosti na čase proudící porézním prostředím mezi dvěma rovnoběžnými kanály.

1. ÚVOD

Zásobování vodou je jednou z hlavních výzev, které lidstvo v průběhu své existence opakovaně čelí. Za průkopnická inženýrská díla spojená s vodou lze považovat např. mezopotámské přehrady a zavlažovací kanály na Eufratu a Tigridu, staroegyptské zavlažovací kanály na Nilu, rozsáhlý systém studní a rozvodu vody v Mohendžodáru ve starověké Indii, vodovodní systémy starověkého Řecka od mínojské kultury až po Athény, Ezechiášův tunel v Jeruzalémě, monumentální římské akvadukty nacházející se v celém středomoří. O tom, jak dávní stavitelé navrhovali tyto úžasné stavby, mnoho nevíme. Doložitelně systematicky a na moderní vědecké bázi¹ se problematikou zásobování obyvatelstva pitnou vodou začali zabývat inženýři na přelomu 18. a 19. stol. a sice v souvislosti s rychlým růstem měst. V této době se začínají objevovat první matematické modely proudění vody v potrubí a kanálech. To bylo v dobách, kdy ještě nebyly objeveny základní rovnice proudění reálných (vazkých) tekutin dnes známé jako Navierovy-Stokesovy rovnice (NAVIER 1827 a nezávisle STOKES 1845) a rovněž nebyly k dispozici počítače pro jejich numerické řešení.² Proto se v případech proudění vody inženýři zaměřili na

2010 MSC. Primární 35K59, 35K92, 76S05.

Klíčová slova. Proudění vody, podzemní voda, porézní prostředí, Reynoldsovo číslo, nelineární Darcyho zákon, p-laplacián, dvojité nelineární rovnice, princip maximum, srovnávací princip.

¹Pro podrobný historický přehled viz např. Rouse [30].

²V té době již byla známa rovnice kontinuity, kterou pro nestlačitelnou tekutinu odvodil LEONARDO DA VINCI (1452–1519), Bernoulliho rovnice, k jejímuž objevení přispěl DANIEL BERNOULLI

tzv. fenomenologický přístup k řešení problému založený na empiricky nalezených zákonitostech. V roce 1732 vynalezl francouzský inženýr HENRI DE PITOT (1695–1771) měřicí trubici (dnes známou jako Pitotova trubice) umožňující měřit rychlost proudění tekutiny v daném místě, což umožnilo provádět různá pozorování a experimenty s reálnými tekutinami. V souvislosti s přípravou stavby kanálu, který měl přivádět vodu do Paříže z řeky Yvette, francouzský inženýr ANTOINE DE CHÉZY (1718–1798) studoval empirické vztahy mezi spádem kanálů a rychlostí proudění. Na základě pozorování a měření prováděných mezi lety 1769 až 1775 na již vybudovaném kanálu Courpalet stanovil tento vztah:

$$v = C \sqrt{R \frac{\Delta h}{\Delta L}},$$

kde v je střední průtoková rychlost v kanále, R je hydraulický poloměr kanálu, Δh je výškový rozdíl hladiny ve dvou bodech kanálu jejichž spojnice je rovnoběžná s proudem v kanále, ΔL je jejich vzdálenost a $C > 0$ je rychlostní součinitel zjištěný z naměřených dat. V souvislosti s distribucí vody ve městech byly studovány též empirické vztahy mezi sklonem potrubí a rychlostí proudění v něm. Touto problematikou se zabýval francouzský inženýr GASPARD DE PRONY (1755–1839), který ve své práci [11] publikované v roce 1804 odvodil semiempirický vztah³

$$\frac{\Delta h}{\Delta L} = \frac{1}{D} (av + bv^2),$$

kde v je střední průtoková rychlost v potrubí, D je vnitřní průměr potrubí, Δh je výškový rozdíl hladiny mezi dvěma body na ose potrubí, ΔL je vzdálenost těchto bodů a $a, b > 0$ jsou konstanty, které je třeba zjistit z naměřených dat pro potrubí vyrobené z daného materiálu s danou drsností povrchu apod.

Další rychlý nárůst počtu obyvatel v evropských městech v průběhu devatenáctého století a s ním spojená ještě vyšší potřeba pitné vody podnítily zájem soudobých inženýrů mimo jiné o proudění vody v porézním prostředí. Jednou z možností, jak získat pitnou vodu je filtrace vody říční užitím pískových filtrů. Tímto postupem se zabýval francouzský inženýr H. DARCY (1803–1858), který v roce 1856 v knize [10] zveřejnil vztah, dnes známý jako *Darcyho zákon*, pro proudění (filtraci) vody jemným pískem vyplňujícím válec o konstantním průřezu A , délce ΔL a s osou rovnoběžnou se směrem proudění,

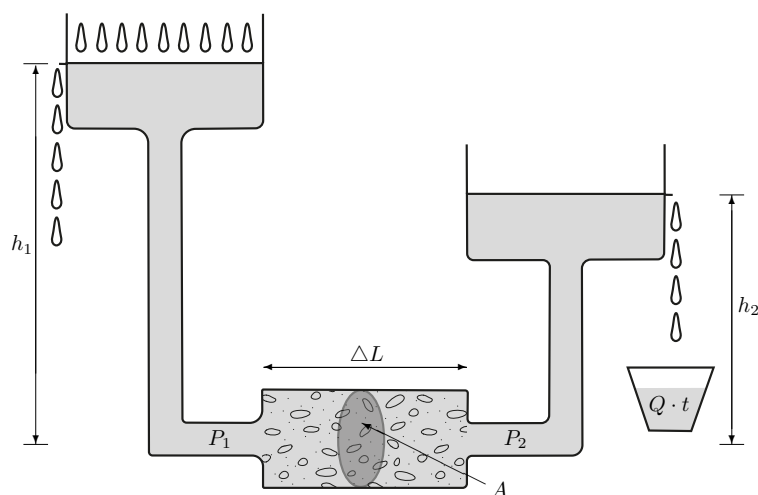
$$Q = c \frac{\Delta P}{\Delta L} = c \rho g \frac{\Delta h}{\Delta L}. \quad (1)$$

Průtok Q udává objem vody proteklé řezem kolmým na osu válce za jednotku času a $\Delta P \stackrel{\text{def}}{=} P_1 - P_2 = \rho g (h_1 - h_2) = \rho g \Delta h$ značí rozdíl tlaků na vstupu do a výstupu z válce, ρ je hustota vody a g je tíhové zrychlení. Konstanta $c > 0$ je zjištěná z

(1700–1782) a v její dnes používané podobě odvodil LEONHARD EULER (1707–1783) pomocí Eulerovy rovnice proudění ideální tekutiny, viz [30].

³Semiempirický vztah je takový vztah, jehož tvar je odvozený ze základních fyzikálních zákonů, ale některé konstanty je třeba zjistit z experimentálních dat.

naměřených dat pro daný typ jemného písku. Schématické znázornění zařízení⁴, na kterém lze zákonitosti filtrace vody studovat, je na obrázku 1. Podstatnou



Obrázek 1. Ilustrace zařízení pro empirické studium filtrace. Do horní nádrčky přitéká voda. Konstantní výšky hladin v nádržkách (a tím i hodnoty hydrostatických tlaků P_1 a P_2) jsou udržovány přepady nádrček.

vlastností tohoto vztahu je přímá úměrnost mezi objemovým průtokem a rozdílem tlaků. Jedná se tedy o zákon lineární.

Další možností, jak zásobit obyvatelstvo pitnou vodou, je odběrem vody ze studní. K maximálnímu využití tohoto zdroje je třeba pochopit zákonitosti proudění vody v horninách v podzemí. Touto problematikou se experimentálně zabýval německý inženýr A. THIEM [35], který ve městě Strassburg nechal v okolí pokusných studní vybudovat systém pozorovacích studní⁵, v nichž sledoval pokles hladin v souvislosti s odběrem vody z pokusných studní. Tímto způsobem získal cenná data o závislosti poklesu hladiny podzemní vody na vzdálenosti od pokusné studny. Podobně postupoval i další německý inženýr D. ENDRES ve městě Augsburg. Experimentálně naměřené výsledky A. Thiema a D. Endrese matematicky zpracoval rakouský inženýr O. SMREKER ve své průkopnické práci [33] a došel z naměřených dat k několika empirickým vztahům mezi poklesem hladiny a průtokem daným úsekem horniny (porézního prostředí). Nejznámější je pro svoji snadnou aplikovatelnost jeho mocninový zákon

$$Q = C \left(\frac{\Delta h}{\Delta L} \right)^{2/3},$$

⁴Původní Darcyho zařízení mělo trochu jinou konfiguraci, viz [10]. Dnes se pro studium filtrace používají zařízení s konfigurací jako na obr. 1.

⁵Z pozorovacích studní se voda nečerpá, jen se měří výška hladiny.

kde Q je průtok vody, Δh si můžeme zatím představit jako pokles hladiny podzemní vody mezi dvěma pozorovacími studnami a ΔL jako jejich vzdálenost ve vodorovném směru (veličiny vystupující v tomto zákonu budou rigorózně definovány v druhé části článku). Konstanta $C > 0$ je určena z experimentálních dat pro dané horniny v podzemí. Tento zákon je na rozdíl od Darcyho zákona nelineární. Protože voda proudí porézním prostředím systémem kanálků, lze očekávat jistou analogii s prouděním v potrubí. Tato úvaha vedla rakouského inženýra PH. FORCHHEIMERA [16] k polynomiálnímu vztahu

$$\frac{\Delta h}{\Delta L} = (aQ + bQ^2), \quad (2)$$

kde opět Δh vyjadřuje pokles hladiny mezi dvěma místy se spojnicí rovnoběžnou se směrem proudění, ΔL jejich vzdálenost, Q je průtok vody a $a, b > 0$ jsou konstanty, které je třeba zjistit z experimentů s daným prostředím. Stejně tak jako Smreker i Forchheimer používal převzatá naměřená data. V jeho případě se jednalo o data od celé řady experimentátorů, kde se každý zaměřil na jiný typ materiálu (různé druhy písků a štěrkopísků lišících se zrnitostí, tvarem zrn a chemickým složením). Forchheimerův polynomiální vztah se ukázal jako velice obecný a schopný zachytit zákonitosti proudění pomocí dvou parametrů a a b . Navíc úvaha o analogii mezi prouděním vody v porézním prostředí a potrubí napovídá, že je přirozené očekávat spíše nelineární vztahy než vztahy lineární. Přestože Forchheimerův zákon při vhodných konstantách a a b velmi dobře aproximuje reálná data, má jednu velkou nevýhodu: v matematických modelech potřebujeme často pracovat se vztahem, který vyjadřuje funkční závislost Q na $\Delta h/\Delta L$. Tento vztah bychom dostali z Forchheimerova zákona jako kladné řešení kvadratické rovnice pro Q . Tento vztah je však pro praktické využití komplikovaný. Jako vhodná alternativa k Forchheimerovu zákonu se pak jeví obecnější mocninné zákony tvaru

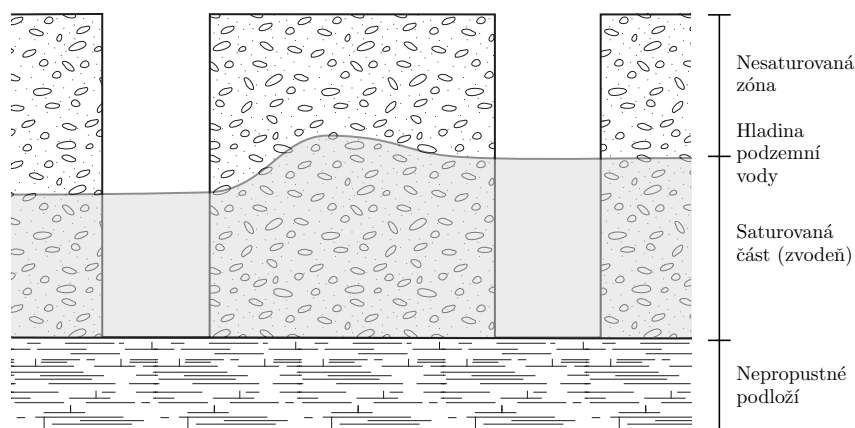
$$Q = c \left(\frac{\Delta h}{\Delta L} \right)^r, \quad (3)$$

s koeficientem $c > 0$ a exponentem $r > 0$, které je třeba určit z experimentálních dat. Díky dvěma parametrům lze těmito zákony popsat proudění vody v různých typech porézních prostředí. Nutno podotknout, že v této obecné variantě navrhl mocninný zákon již O. SMREKER [33] a zabýval se jím ve svém článku i FORCHHEIMER [16]. Velkou popularitu získaly mocninné zákony od třicátých let dvacátého století, kdy bylo intenzivně laboratorně studováno proudění porézním prostředím na experimentálních zařízeních jako na obrázcích 1 a 4, viz např. IZBAŠ [20] a MISSBACH [24, 25, 26, 27]. Na jejich počest se mocninnému zákonu někdy též říká Smrekerův-Izbašův-Missbachův zákon. Podrobněji se lze s historickým vývojem zkoumání mocninného zákona seznámit v BENEDIKT, GIRG, KOTRLA a TAKÁČ [7].

Povšimněme si, že ve vzorci (2) lze pro malé hodnoty Q kvadratický člen Q^2 zanedbat, a tudíž můžeme pro malé hodnoty Q Forchheimerův zákon velmi dobře aproximovat lineárním Darcyho zákonem. Tedy Forchheimerův zákon není v rozporu s Darcyho zákonem. Pro mocninný zákon (3) s $r \neq 1$ toto však neplatí. Pro malé hodnoty Q Darcyho zákon (1) není dobrou aproximací mocninného

zákona (3). Ukazuje se na základě analogie proudění v porézním prostředí a v trubici, že rozhodujícím faktorem pro platnost mocinného nebo Darcyho zákona pro dané Q je poměr setrvačných a třecích sil v kapalině nebo přesněji zanedbatelnost setrvačných sil vzhledem k silám třecím. Tento poměr je charakterizovaný tzv. *Reynoldsovým číslem* (viz např. ARAVIN a NUMEROV [1, § 11, str 30–36]), jehož variantami pro proudění v porézním prostředí se budeme zabývat níže. Pro malé hodnoty Reynoldsova čísla je platný Darcyho zákon a pro velké hodnoty Reynoldsova čísla je nutné uvažovat zákon nelineární, např. mocinný. Podrobněji se tím budeme zabývat v oddíle 2.5.

Cílem tohoto příspěvku je seznámit čtenáře s mocinným zákonem a jeho možným použitím v modelování proudění podzemní vody. Pro jednoduchost se zaměříme na model popisující vývoj hladiny podzemní vody mezi dvěma rovnoběžnými kanály, ve kterých teče voda v pevně dané výšce (viz obrázek 2). Mezi kanály dojde ke zvýšení hladiny podzemní vody (např. vlivem deště nebo zavlažování) a naším úkolem je popsat vývoj hladiny podzemní vody v čase. Naší snahou je text přizpůsobit studentům nižších ročníků vysoké školy. Jedním z příkladů je nestandardní odvození modelu v části 3, které je podle našeho názoru vhodnější pro studenty, kteří neabsolvovali základní kurz parciálních diferenciálních rovnic. Klasické odvození za slabších předpokladů na hledané řešení lze nalézt v [5].



Obrázek 2. Proudění podzemní vody mezi rovnoběžnými kanály.

V druhé části se budeme zabývat základními pojmy z hydrologie, které v další části využijeme při odvození matematického popisu problému. Čtvrtá část obsahuje krátké seznámení s důležitými pojmy z oblasti parciálních diferenciálních rovnic, principem maxima a srovnávacím principem. Poslední část je věnovaná vlastnostem řešení modelu představeného ve třetí části. Podrobněji jsme použítí mocinného zákona v hydrologii studovali v [5] a [7].

2. ZÁKLADNÍ POJMY V HYDROLOGII

V této části uvedeme krátký souhrn termínů a veličin používaných v hydrologii. Tyto informace lze nalézt ve většině knih zabývajících se tímto tématem. Pro další studium odkazujeme čtenáře například do skript JANDORA, STARA a STARÝ [21] nebo VALENTOVÁ [36]. Ještě podrobněji se lze s danou problematikou seznámit v monografiích ARAVIN a NUMEROV [1], BEAR [4] a HARR [18].

2.1. Porézní prostředí

Precizní definice porézního prostředí je komplikovaná a přesahuje rámec tohoto textu. My si vystačíme s intuitivní definicí. Pro přesnější definici odkazujeme čtenáře na skripta [36, §1.4, str. 8–9].

Začneme definicí pojmu *pór*, kterým rozumíme volný prostor v hornině obvykle (ale ne nutně) velmi malého objemu. V našich modelech uvažujeme jen takové póry, které jsou navzájem spojené úzkými kanály umožňujícími proudění tekutiny (např. vody, zemního plynu, nafty). Tento volný prostor v hornině nazveme *pórový prostor*. Síť kanálů je velmi hustá, a proto mají stěny pórů a kanálů (kde se tekutina dotýká horniny) velký souhrnný povrch. Horninu obsahující takovouto síť pórů a kanálů nazveme *porézním prostředím* (nebo porézním médiem). Pro jednoduchost předpokládáme, že porézní prostředí je homogenní a izotropní vzhledem ke koeficientu propustnosti (viz níže).

Struktura porézního prostředí je velmi komplikovaná a je prakticky nemožné v něm přesně popsat rozložení pevné fáze a pórového prostoru. Proto se proudění v porézním prostředí nepopisuje na mikroskopické úrovni (jako proudění vody v jednotlivých kanálech). Místo toho se uvažuje makroskopický popis, kdy se struktura porézního média odráží v obvykle experimentálně zjišťovaných fyzikálních charakteristikách.

Poměr pórového prostoru v porézním médiu popisuje (efektivní) *pórovitost* porézního prostředí n . Pro homogenní porézní médium platí

$$n = \frac{V_p}{V},$$

kde V_p je objem pórového prostoru a V je celkový objem porézního média.

Další charakteristikou je *koeficient propustnosti* k , který udává propustnost porézního prostředí v závislosti na jeho geometrických vlastnostech. Je definován pomocí Darcyho zákona (1) vztahem

$$k = \frac{c\mu}{A}.$$

s tím, že přijímáme hypotézu, že průtok Q je přímo úměrný ploše A (viz obr. 1) a nepřímo úměrný *dynamické viskozitě* μ , která vyjadřuje vnitřní třecí síly v tekutině. Pro konkrétní porézní prostředí tato hodnota odpovídá objemovému průtoku za 1 s tekutiny o dynamické viskozitě 1 Pa · s válcem s výškou 1 m a plochou podstavy 1 m², který je vyvolaný poklesem tlaku o 1 Pa. V literatuře lze nalézt

množství vztahů pro jeho výpočet z velikosti zrn⁶ (viz např. ŘÍHA a kol. [29]). Uveďme například empiricky získaný vztah

$$k = Cd^2,$$

kde konstanta $C > 0$ závisí na tvaru zrn a pórovitosti n , a kde d je *reprezentativní velikost zrna*. Lze například zvolit $d = d_{10}$, což je takový průměr zrn, kterého nedosáhne 10 % všech zrn (podle váhy) v materiálu (viz [4, §5.5, str. 132–134]). Všimněme si, že koeficient propustnosti je nezávislý na proudící tekutině. Později v oddílu 2.4 zavedeme koeficient filtrace K , který bere v úvahu i vlastnosti tekutiny.

2.2. Podzemní voda a zvodeň

Podpovrchovou vodu lze rozdělit do několika kategorií podle způsobu, jakým je v půdě vázána. V tomto článku se budeme zabývat tzv. podzemní vodou, které k proudění v porézním prostředí stačí působení tíhových sil. Přesněji se souvislá část porézního prostředí (horniny), která umožňuje pohyb a akumulaci podzemní vody, nazývá *hydrogeologický kolektor* (více viz [36, §1.3, str. 5–7]). Navíc se omezíme na podzemní vodu, která se vyskytuje v tzv. *saturované zóně*, kde je pórový prostor zcela vyplněn vodou. Pro úplnost jen dodejme, že pokud sledovaná část porézního prostředí není vodou zcela vyplněná, nalezneme nad saturovanou zónou zónu *nesaturovanou*, kde jsou póry vyplněny zčásti vodou a zčásti plynem (převážně vodními parami a vzduchem).

Vodní těleso v kolektoru nazveme *zvodeň*. Rozlišujeme *zvodeň s napjatou hladinou*, kde voda vyplňuje kolektor uzavřený mezi dvěma nepropustnými vrstvami (hydrogeologickými *izolátory*) a *zvodeň s volnou hladinou*, jejíž dolní hranici tvoří izolátor a horní hranici volná hladina podzemní vody (např. zvodeň na obrázku 2). *Volnou hladinu* definujeme jako množinu bodů, kde se absolutní tlak vody rovná atmosférickému tlaku (relativní tlak vody je nulový). Poznamenejme, že pro účely tohoto textu volná hladina podzemní vody odděluje saturovanou a nesaturovanou zónu, přestože, zcela přesně řečeno, saturovaná zóna obsahuje i tenkou vrstvu nad touto hladinou, kde jsou póry vyplněny vodou vlivem kapilárních jevů.

2.3. Střední rychlost proudění, hustota toku a průtok

Jelikož se při popisu proudění v porézním médiu uplatňuje makroskopický přístup, není rychlost proudění vody v konkrétním bodě pórového prostoru relevantní informace. Místo ní se používá střední rychlost proudění (průměrná pórová rychlost).

V úvodu jsme předpokládali, že směr proudění je rovnoběžný se směrem osy x . Zaměříme se nyní na obecné trojrozměrné proudění v kartézském souřadnicovém systému xyz s osou z směřující vzhůru. Označme A_x (A_y , A_z) plochu průřezu kolmé na osu x (y , z) a Q_x (Q_y , Q_z) průtok touto plochou za jednotku času. V případě, že směr toku souhlasí se směrem souřadnicové osy, je průtok kladný. V

⁶Pro zrnitá prostředí (speciální typ porézního prostředí) jako jsou např. písky, štěrkopísky nebo umělá zrnitá prostředí používaná ve stavebnictví a různých technologických procesech.

opačném případě považujeme průtok za záporný. Potom

$$q_x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Q_x}{A_x}, \quad q_y \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Q_y}{A_y} \quad \text{a} \quad q_z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Q_z}{A_z}$$

značí *hustotu toku* (*filtrační rychlost*, *Darcyho rychlost*) ve směru osy x (y , z). Hustotu toku tedy definujeme jako vektor $\vec{q} \stackrel{\text{def}}{=} (q_x, q_y, q_z)$, jehož velikost je $q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}$. Jelikož voda neprotéká celými průřezy, ale jen pórovým prostorem v daném řezu, raději pro \vec{q} používáme pojem tok než pojem rychlost. Rychlost proudění v kanálech, respektive její průměrnou hodnotu, popisuje *střední rychlost proudění*

$$\vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{q}}{n}.$$

Dále označíme $v \stackrel{\text{def}}{=} |\vec{v}| = q/n$.

2.4. Piezometrická výška

Ideální kapalina při ustáleném proudění v trubici splňuje zákon zachování energie, který je vyjádřený Bernoulliho rovnicí

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + P + \rho g z = \text{konst.} \quad (4)$$

Zde ρ je hustota proudící kapaliny, v je velikost střední rychlosti proudění, P je relativní tlak v kapalině ($P = 0$ odpovídá atmosférickému tlaku) a z je výška hladiny od předem určené referenční výšky. Vydělením rovnice (4) konstantou ρg dostaneme

$$\frac{1}{2} \frac{v^2}{g} + \frac{P}{\rho g} + z = E,$$

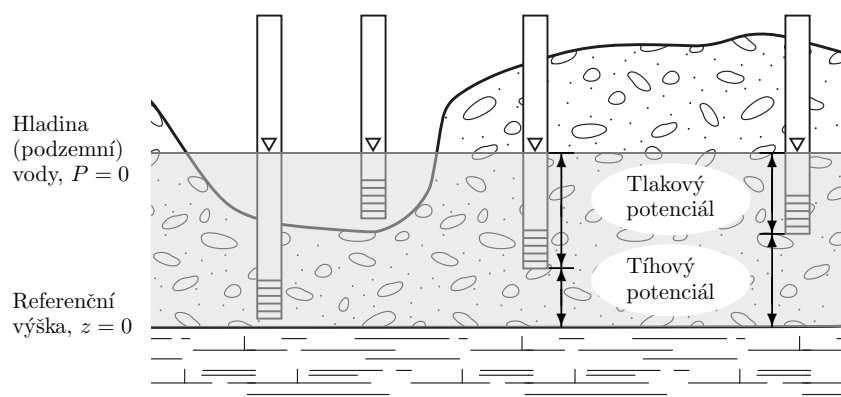
kde E se nazývá energetická výška. Nyní se zaměříme na proudění vody porézním prostředím. To lze považovat za síť *úzkých* kanálů, a proto je ztráta energie vlivem tření kapaliny se stěnami kanálů významná. Energetická výška E tedy není konstantní, jako tomu je v případě proudění ideální tekutiny v trubici.

Při proudění podzemní vody je navíc střední rychlost proudění velmi malá (viz např. HARR [18, §1–4, str. 5]). Člen $\frac{1}{2} \frac{v^2}{g}$ lze tedy zanedbat a definujeme tzv. *piezometrickou (hydraulickou) výšku*

$$h \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P}{\rho g} + z.$$

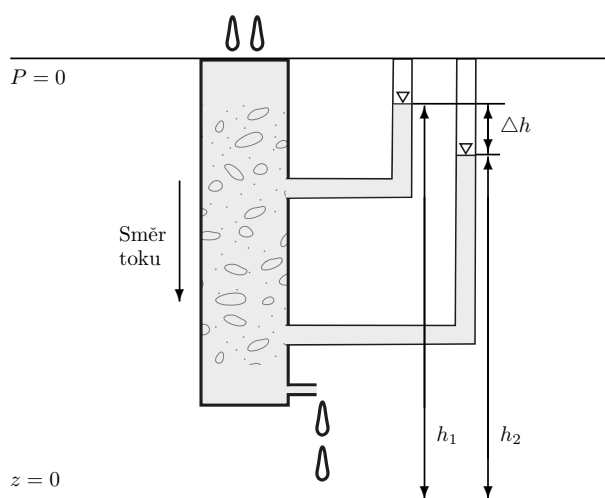
Pro lepší ilustraci pojmu piezometrická výška uveďme dva příklady. Prvně se zaměříme na případ bez proudění ať v nádrži nebo ve zvodni s volnou hladinou. Protože je voda v klidu, nedochází ke ztrátě energie vlivem tření a piezometrická výška zůstává konstantní (viz obrázek 3). Tlak v kapalině je hydrostatický tlak závislý na výšce vodního sloupce nad sledovaným místem, a tedy opravdu platí

$$\frac{P}{\rho g} + z = \text{konst.}$$



Obrázek 3. Piezometrická výška při absenci proudění.

Proudění vody je vyvoláno rozdílnými hodnotami v piezometrické výšce (viz obrázek 4). Dochází k němu ve směru jejího poklesu neboli ve směru poklesu energie,



Obrázek 4. Piezometrická výška při pohybu tekutiny.

který je způsoben právě třecími silami (přeměnou mechanické energie na tepelnou).

Všimněme si, že za předpokladu vodorovného proudění popsaného v úvodu, kdy je výška z konstantní, platí

$$\Delta h = \frac{\Delta P}{\rho g}.$$

Darcyho zákon lze tedy přeformulovat do tvaru

$$Q = \frac{k \rho g A}{\mu} \frac{\Delta h}{\Delta L} = K \frac{A}{\Delta L} \Delta h,$$

kde $K = k \rho g / \mu$ nazýváme *koeficient filtrace*.

2.5. Reynoldsovo číslo

V úvodu jsme zmínili, že lineární Darcyho zákon je platný pouze při určitých hodnotách *Reynoldsova čísla*, které vyjadřuje poměr setrvačných a třecích sil. Pro proudění v trubici je toto číslo definované jako

$$\text{Re} = \frac{\rho D v}{\mu},$$

kde ρ je hustota kapaliny, v je rychlost proudění, μ je dynamická viskozita kapaliny a D je vnitřní průměr trubice. Pro proudění v trubici nastává turbulence pro hodnoty Reynoldsova čísla vyšší než cca 2100. Při přechodu k turbulenci dochází k výraznému navýšení třecích sil mezi kapalinou a trubicí. V analogii s tímto případem navrhl PAVLOVSKIJ [28] v případě proudění porézním prostředím použití Reynoldsova čísla v lehce pozměněné podobě pro posouzení platnosti Darcyho zákona. Při pokusech s prouděním tekutiny zrnitým porézním prostředím se zrní podobné velikosti navrhl následující definici

$$\text{Re} = \frac{6,5}{0,75n + 0,23} \frac{\rho d q}{\mu},$$

kde n je pórovitost, q je hustota toku a d je reprezentativní velikost zrna. Pro takto definované Reynoldsovo číslo je mezní hodnota platnosti Darcyho zákona 50–60. Pro různé velikosti zrn se v literatuře častěji objevuje definice

$$\text{Re} = \frac{\rho d q}{\mu}$$

s různě definovanou reprezentativní velikostí zrna d (viz [4, §5.3.1, str. 125–127]) a v závislosti na její volbě je mezní hodnota pro platnost Darcyho zákona mezi 1 a 10. I v tomto případě je častou volbou $d = d_{10}$.

2.6. Dupuitovy-Forchheimerovy předpoklady

Řešení úlohy proudění podzemní vody s volnou hranicí je matematicky komplikovaný problém, protože hranice sledované oblasti není předem známá a je součástí hledaného řešení. DUPUIT [15] pozoroval, že maximální sklon hladiny podzemní vody je velmi malý, $0,001 < \Delta h / \Delta L < 0,01$. Na základě tohoto pozorování formuloval v roce 1863 následující zjednodušující předpoklady:

(DF1) podzemní voda proudí horizontálně (piezometrická výška je ve svislém směru konstantní),

(DF2) tok podzemní vody je přímo úměrný gradientu piezometrické výšky.

Pro úlohu s volnou hranicí platí, že hladina podzemní vody je charakterizována tlakem $P = 0$, a proto pro hladinu podzemní vody dostaneme vztah $h(x, y, z, t) = z$.

Z předpokladu (DF1) potom plyne, že k nalezení obou neznámých hodnot (piezometrické výšky a výšky hladiny podzemní vody) stačí řešit úlohu pouze pro piezometrickou výšku v kolmém průmětu sledované oblasti do roviny xy . Tím se problém značně zjednodušil, protože průmět sledované oblasti je předem známý. Neřešíme tak již úlohu s volnou hranicí. Podrobnější přechod od úlohy s volnou hranicí ve třech prostorových proměnných k úloze ve dvou prostorových proměnných bez volné hranice lze nalézt v [5, §2.6].

Předpoklad (DF2) odpovídá použití Darcyho zákona při modelování proudění podzemní vody. Jak jsme již zmínili výše, tento zákon nelze použít, pokud je Reynoldsovo číslo příliš vysoké. Znovu uveďme práci FORCHHEIMER [16, str. 1782 a „Anhang“, str. 1787–1788] z roku 1901, kde autor na základě experimentů a terénního pozorování ukázal, že například pro písčité porézní prostředí není Darcyho zákon dostatečně přesný již pro hodnoty $\Delta h/\Delta L > 0,0005$, kdy lze stále použít předpoklad (DF1). Předpoklad (DF2) je ale nutné nahradit nelineárním zákonem.

2.7. Konstitutivní vztahy

Konstitutivní vztahy jsou často experimentálně nalezené vztahy mezi stavovou a tokovou veličinou (viz např. [14, §1.2, str. 7]). V našem případě je tokovou veličinou hustota toku \vec{q} a stavovou veličinou piezometrická výška h . V případě homogenního a izotropního prostředí můžeme konstitutivní vztah zapsat pomocí velikosti toku q a neklesající spojité funkce φ splňující $\varphi(0) = 0$ jako rovnost

$$q = \varphi\left(\frac{\Delta h}{\Delta L}\right).$$

Různou volbou funkce φ poté dostaneme různé konstitutivní vztahy. Pokud zvolíme lineární funkci, tj. $\varphi(r) = cr$, dostaneme již výše zmíněný Darcyho zákon.

Z možných nelineárních zobecnění uvedeme dva základní příklady studované již na přelomu 19. a 20. století. Smrekerův-Izbašův-Missbachův (mocninový) zákon⁷

$$\varphi(r) = c|r|^{p-2}r, \quad p \in \left(\frac{3}{2}, 2\right) \quad (5)$$

je hlavním objektem zájmu v tomto článku, a to hlavně pro značnou probádanost vlastností parciální diferenciální rovnice založené na tomto konstitutivním vztahu. Forchheimerův zákon

$$\varphi(r) = \frac{2r}{\sqrt{a^2 + 4br} + a}, \quad a > 0 \quad \text{a} \quad b > 0,$$

je základem pro další zákony uvažující například i tvar zrn v porézním médiu. Velmi obsáhlý výčet nelineárních zákonů lze nalézt např. v BEAR [4, §5.11.3, str. 182–184]. V praxi se ukazuje, že tok v závislosti na poklesu piezometrické výšky roste pro velké hodnoty pomaleji než lineární funkce, například jako mocninová funkce s exponentem mezi 0 a 1. Tento růst nelze zachytit polynomiální

⁷Pokud bychom v rovnici (5) uvažovali $p = 2$, dostali bychom Darcyho zákon. Pro $2,1 < p < 4,8$ bychom dostali zákon pro velmi pomalé proudění v jemnozrnných materiálech, viz [22, 34].

funkcí, která je výhodná pro interpolaci dat. Proto se konstitutivní vztahy často získávají z experimentálních dat ve tvaru

$$\frac{\Delta h}{\Delta L} = \varphi^{-1}(q) ,$$

kdy např. Forchheimerův zákon hledáme ve tvaru

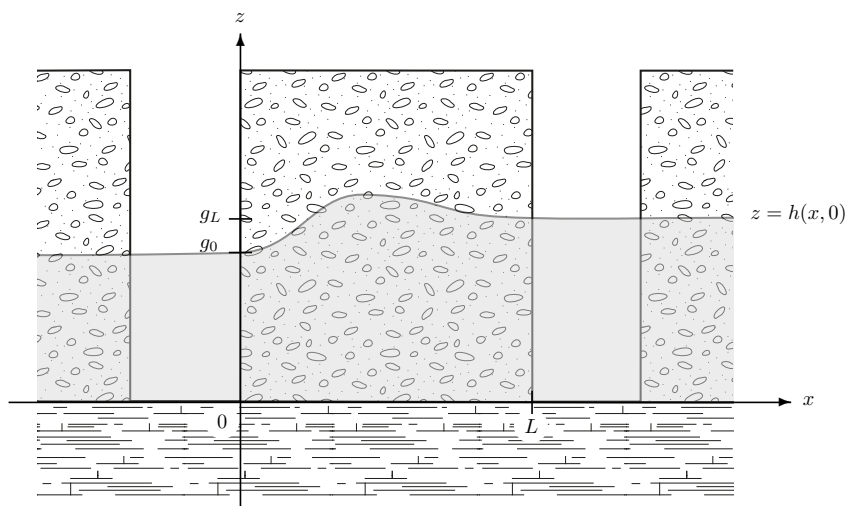
$$\frac{\Delta h}{\Delta L} = aq + bq^2 .$$

3. MODEL PROUDĚNÍ VODY MEZI ROVNOBĚŽNÝMI KANÁLY

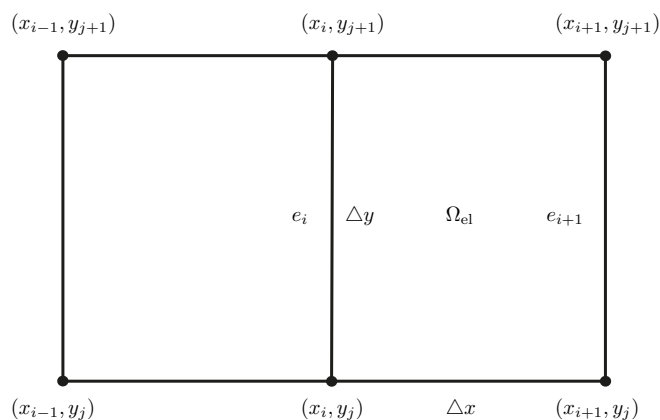
V této části odvodíme matematický model proudění vody mezi dvěma rovnoběžnými kanály. Tato konfigurace se často vyskytuje jak při zavlažování v zemědělství, tak naopak při odvodňování (např. pozemků). Vzhledem ke své zásadní důležitosti pro běžný život obyvatelstva především v semiaridních a monzunových oblastech (např. Indie) byla tato problematika často studována [3, 23, 31, 32]. Tyto průkopnické práce se však zabývají pouze případem laminárního proudění za použití lineárního Darcyho zákona, který umožňuje získat řešení v uzavřeném tvaru. Dnes po třiceti letech došlo k výraznému posunu jak v kvalitativní teorii nelineárních parciálních diferenciálních rovnic, tak v oblasti numerické matematiky a výkonosti výpočetní techniky. Díky tomu je možné studovat modely i s použitím nelineárního konstitutivního vztahu, který lépe aproximuje chování reálných tekutin v porézním prostředí (včetně turbulence). Odvození našeho modelu provedeme pomocí dvou základních vztahů, zákona zachování a konstitutivního vztahu popísaného v předchozí části.

Uvažujme úlohu proudění podzemní vody mezi dvěma rovnoběžnými odvodňovacími kanály, které mají vzdálenost přilehlých břehů L . Pro jednoduchost budeme předpokládat, že porézní prostředí mezi kanály je homogenní, izotropní a spočívá na vodorovné nepropustné vrstvě. Dna obou kanálů dosahují až k nepropustné vrstvě. V časovém intervalu $[0, T]$, $T > 0$, zkoumáme vývoj hladiny podzemní vody $h(x, y, t)$ po jejím náhlém zvýšení (v čase $t = 0$) například vlivem deště. Předpokládáme, že kanály jsou ve směru osy y nekonečně dlouhé, všechna data jsou translačně invariantní vůči ose y , a tedy můžeme předpokládat, že voda proudí pouze ve směru osy x . Proto $h(x, y, t) \equiv h(x, t)$. Hladinu levého kanálu udržujeme ve výšce g_0 , tj. $h(0, t) = g_0$ a hladinu pravého kanálu ve výšce g_L , tj. $h(L, t) = g_L$. Počáteční stav hladiny podzemní vody je $h(x, 0) = h_0(x)$. Celá situace je pro čas $t = 0$ znázorněná na obrázku 5.

Pro větší názornost provedeme odvození modelu na elementárním objemu a poté dostaneme diferenciální rovnici limitním přechodem. Označme Ω_{xy} obdélník vzniklý průmětem porézního média mezi kanály do roviny xy . V tomto průmětu vytvoříme rovnoměrnou síť bodů (x_i, y_j) , $i, j \in \mathbb{N}$. Vzdálenosti bodů x_i a y_j označíme Δx a Δy . Časovou diskretizaci označíme t_k , $k \in \mathbb{N}$, s krokem Δt . Elementární plochou Ω_{el} rozumíme čtverec $(x_i, y_j), (x_{i+1}, y_j), (x_{i+1}, y_{j+1}), (x_i, y_{j+1})$ (viz obrázek 6).



Obrázek 5. Ilustrace úlohy – řez rovinou $y = 0$ v čase $t = 0$.



Obrázek 6. Síť a elementární plocha Ω_{el} .

V případě proudění nestlačitelné kapaliny platí zákon zachování jejího objemu. V libovolné části sledované oblasti musí změna objemu vody odpovídat rozdílu objemu vody přitéklé a odtéklé. Celková bilance může být ještě ovlivněna případnými zdroji.

Nejdříve vypočteme objem vody nad elementární plochou Ω_{el} v čase t_k . Upřesněme, že rovnice odvozujeme pro vnitřní body sítě, tj. $0 < x_i < L$ a pro časy $0 < t_k < T$. Jelikož je v případě proudění podzemní vody sklon hladiny malý (viz Dupuitovy-Forchheimerovy předpoklady, oddíl 2.6), můžeme pro dostatečně malé

elementární plochy Ω_{el} předpokládat, že výška hladiny nad touto plochou je

$$\frac{h(x_i, t_k) + h(x_{i+1}, t_k)}{2}.$$

Objem vody nad Ω_{el} v čase t_k tedy je

$$V_{\text{voda}} = n \Delta x \Delta y \frac{h(x_i, t_k) + h(x_{i+1}, t_k)}{2}$$

a změna tohoto objemu za čas Δt je

$$\Delta V_{\text{voda}} = n \Delta x \Delta y \frac{h(x_i, t_{k+1}) + h(x_{i+1}, t_{k+1}) - h(x_i, t_k) - h(x_{i+1}, t_k)}{2}.$$

Dále vyjádříme tok nad hranicí $\partial\Omega_{el}$ elementární plochy Ω_{el} za čas Δt . Připomeňme, že k toku dochází pouze ve směru osy x . Objem vody proteklé za čas Δt stěnou nad hranou e_i spojující body (x_i, y_j) a (x_i, y_{j+1}) označme Q_{x_i} a nad hranou e_{i+1} spojující body (x_{i+1}, y_j) a (x_{i+1}, y_{j+1}) označme $Q_{x_{i+1}}$. Nyní označme symbolem ΔQ změnu objemu vody za čas Δt nad elementární plochou Ω_{el} , potom $\Delta Q = Q_{x_i} - Q_{x_{i+1}}$. Zákon zachování lze tedy zapsat ve tvaru

$$\Delta V_{\text{voda}} = \Delta Q + \frac{f(x_i, t_k) + f(x_i, t_{k+1}) + f(x_{i+1}, t_k) + f(x_{i+1}, t_{k+1})}{4}, \quad (6)$$

kde funkce f popisuje zdroje.

V čase t_k je obsah plochy nad hranou e_i

$$\Delta y h(x_i, t_k),$$

a proto je průtok danou plochou vztažený na jednotku času roven

$$\Delta y h(x_i, t_k) q_x(x_i, t_k),$$

kde $q_x(x_i, t_k)$ je hustota toku v čase t_k v místě x_i (tok vztažený na jednotku plochy a jednotku času). Vztah mezi hustotou toku a výškou hladiny podzemní vody je dán konstitutivním vztahem, který jsme popisovali v oddíle 2.7. Obdobně v čase t_{k+1} máme

$$\Delta y h(x_i, t_{k+1}) q_x(x_i, t_{k+1}).$$

Celkový objem vody proteklé nad hranou e_i za čas Δt aproximujeme průměrem

$$Q_{x_i} = \Delta t \Delta y \frac{1}{2} (h(x_i, t_k) q_x(x_i, t_k) + h(x_i, t_{k+1}) q_x(x_i, t_{k+1})). \quad (7)$$

Obdobně dostaneme objem vody proteklé nad hranou e_{i+1} , tj.

$$Q_{x_{i+1}} = \Delta t \Delta y \frac{1}{2} (h(x_{i+1}, t_k) q_x(x_{i+1}, t_k) + h(x_{i+1}, t_{k+1}) q_x(x_{i+1}, t_{k+1})). \quad (8)$$

Po dosazení vztahů (7) a (8) do zákona zachování (6) dostaneme

$$n \Delta x \Delta y \frac{h(x_i, t_{k+1}) + h(x_{i+1}, t_{k+1}) - h(x_i, t_k) - h(x_{i+1}, t_k)}{2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \Delta t \Delta y \frac{1}{2} (h(x_i, t_j) q_x(x_i, t_k) + h(x_i, t_{k+1}) q_x(x_i, t_{k+1})) \\
 &\quad - \Delta t \Delta y \frac{1}{2} (h(x_{i+1}, t_k) q_x(x_{i+1}, t_k) + h(x_{i+1}, t_{k+1}) q_x(x_{i+1}, t_{k+1})) \\
 &\quad + \Delta t \Delta x \Delta y \frac{f(x_i, t_k) + f(x_i, t_{k+1}) + f(x_{i+1}, t_k) + f(x_{i+1}, t_{k+1})}{4}.
 \end{aligned}$$

Rovnici vydělíme $\Delta t \Delta x \Delta y$ a po přeuspořádání členů dostaneme

$$\begin{aligned}
 n \frac{h(x_i, t_{k+1}) + h(x_{i+1}, t_{k+1}) - h(x_i, t_k) - h(x_{i+1}, t_k)}{2\Delta t} \\
 &= \frac{1}{2\Delta x} [h(x_i, t_k) q_x(x_i, t_k) - h(x_{i+1}, t_k) q_x(x_{i+1}, t_k) \\
 &\quad + h(x_i, t_{k+1}) q_x(x_i, t_{k+1}) - h(x_{i+1}, t_{k+1}) q_x(x_{i+1}, t_{k+1})] \\
 &\quad + \frac{f(x_i, t_k) + f(x_i, t_{k+1}) + f(x_{i+1}, t_k) + f(x_{i+1}, t_{k+1})}{4}.
 \end{aligned}$$

Dosadíme konstitutivní vztah (s přihlédnutím k tomu, že tok q_x má směr spádu h)

$$q_x(x_i, t_k) = -n\varphi \left(\frac{h(x_i, t_k) - h(x_{i-1}, t_k)}{\Delta x} \right),$$

čímž po vydělení pórovitostí n získáme

$$\begin{aligned}
 &\frac{h(x_i, t_{k+1}) + h(x_{i+1}, t_{k+1}) - h(x_i, t_k) - h(x_{i+1}, t_k)}{2\Delta t} \\
 &= -\frac{1}{2\Delta x} \left[h(x_i, t_k) \varphi \left(\frac{h(x_i, t_k) - h(x_{i-1}, t_k)}{\Delta x} \right) \right. \\
 &\quad - h(x_{i+1}, t_k) \varphi \left(\frac{h(x_{i+1}, t_k) - h(x_i, t_k)}{\Delta x} \right) \\
 &\quad + h(x_i, t_{k+1}) \varphi \left(\frac{h(x_i, t_{k+1}) - h(x_{i-1}, t_{k+1})}{\Delta x} \right) \\
 &\quad \left. - h(x_{i+1}, t_{k+1}) \varphi \left(\frac{h(x_{i+1}, t_{k+1}) - h(x_i, t_{k+1})}{\Delta x} \right) \right] \\
 &\quad + \frac{f(x_i, t_k) + f(x_i, t_{k+1}) + f(x_{i+1}, t_k) + f(x_{i+1}, t_{k+1})}{4n}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Nyní si vysvětlíme přechod od diferenční rovnice (9) k diferenciální rovnici. Pro jednoduchost budeme předpokládat stacionární případ, což znamená, že uvažované funkce h a f se nemění v čase a tudíž můžeme psát $h(x)$ a $f(x)$ místo $h(x, t)$ a $f(x, t)$. Navíc budeme uvažovat Darcyho zákon $\varphi(s) = s$. Tím se rovnice (9) zjednoduší na

$$\begin{aligned}
 0 &= -\frac{1}{\Delta x} \left(h(x_i) \frac{h(x_i) - h(x_{i-1})}{\Delta x} - h(x_{i+1}) \frac{h(x_{i+1}) - h(x_i)}{\Delta x} \right) \\
 &\quad + \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2n}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Za předpokladu, že existuje druhá derivace funkce h , platí podle Taylorovy věty pro hodnoty funkce h v bodech $x_{i-1} = x_i - \Delta x$, $x_{i+1} = x_i + \Delta x$ vzorce

$$h(x_i \pm \Delta x) = h(x_i) \pm h'(x_i)\Delta x + \frac{1}{2}h''(\xi_{\pm})(\Delta x)^2, \quad (11)$$

kde $\xi_- \in (x_{i-1}, x_i)$ a $\xi_+ \in (x_i, x_{i+1})$ jsou neznámá čísla ležící v daných intervalech. Odtud dosazením

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\Delta x} \left(h(x_i) \frac{h(x_i) - h(x_{i-1})}{\Delta x} - h(x_{i+1}) \frac{h(x_{i+1}) - h(x_i)}{\Delta x} \right) \\ &= -\frac{1}{\Delta x} \left(h(x_i) \left(h'(x_i) - \frac{1}{2}h''(\xi_-)\Delta x \right) \right. \\ & \quad \left. - \left(h(x_i) + h'(x_i)\Delta x + \frac{1}{2}h''(\xi_+)(\Delta x)^2 \right) \left(h'(x_i) + \frac{1}{2}h''(\xi_+)\Delta x \right) \right) \quad (12) \\ &= \frac{1}{2}h(x_i) (h''(\xi_-) + h''(\xi_+)) + (h'(x_i))^2 \\ & \quad + h''(\xi_+) \left(h'(x_i) - \frac{1}{4}h''(\xi_+)\Delta x \right) \Delta x \end{aligned}$$

Pro jednoduchost dále uvažujeme $L = 1$. Zvolíme libovolné $x \in (0, 1)$. Nyní zjemňujeme síť bodů, tj. $\Delta x \rightarrow 0$, a v každém kroku zjemňování vybíráme uzel sítě x_i tak, aby $x_i \rightarrow x$, a tedy i $\xi_{\pm} \rightarrow x$. Předpokládejme, že h'' a f jsou v $(0, 1)$ spojité funkce (píšeme $h \in C^2(0, 1)$ a $f \in C(0, 1)$). Potom limita výrazu v (12) pro $\Delta x \rightarrow 0$ existuje a rovná se

$$h(x)h''(x) + (h'(x))^2 = \left(\frac{1}{2}h^2 \right)''(x)$$

a obdobně

$$\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2n} \rightarrow \frac{f(x)}{n},$$

přičemž dále budeme psát pouze $f(x)$ místo $f(x)/n$.

Z diferenční rovnice (10) tedy limitním zjemňováním sítě dostaneme okrajovou úlohu

$$\begin{cases} -\left(\frac{1}{2}h^2 \right)''(x) = f(x) & \text{v } (0, 1), \\ h(0) = h(1) = 0, \end{cases}$$

kde jsme zvolili co nejjednodušší okrajové podmínky, kvůli nimž navíc předpokládáme $h \in C[0, 1]$.

Po substituci $u(x) = h^2(x)/2$ dostaneme rovnici

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & \text{v } (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (13)$$

se kterou budeme později pracovat.

Nyní se vrátíme k obecnější situaci (9). Předpokládejme, že funkce f a h jsou dostatečně hladké, např. $f \in C([0, L] \times [0, T])$, $h \in C^1((0, L) \times (0, T)) \cap C([0, L] \times$

$[0, T]$) a současně $h(\cdot, t) \in C^3(0, L)$ pro všechna $t \in [0, T]$. Navíc předpokládejme, že ve všech bodech $(x, t) \in (0, L) \times (0, T)$, kde $\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = 0$, platí buď $h(x, t) = 0$ nebo $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) = 0$. Potom můžeme provést limitní přechody $\Delta t \rightarrow 0$ a $\Delta x \rightarrow 0$. Tím dostaneme diferenciální rovnici

$$\frac{\partial}{\partial t} h(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(h(x, t) \varphi \left(\frac{\partial}{\partial x} h(x, t) \right) \right) + f(x, t).$$

Použijeme-li mocninový konstitutivní vztah (5) a vezmeme-li v úvahu i počáteční situaci a pevnou výšku hladiny v kanálech, získáme následující model

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} h(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(h(x, t) \left| \frac{\partial}{\partial x} h(x, t) \right|^{p-2} \frac{\partial}{\partial x} h(x, t) \right) + f(x, t) \\ \hspace{15em} \text{v } (0, L) \times (0, T), \\ h(0, t) = g_0, \quad h(L, t) = g_L \quad \text{pro všechna } t \in (0, T), \\ h(x, 0) = h_0(x) \quad \text{pro všechna } x \in (0, L). \end{cases} \quad (14)$$

Pro úlohu (14) je hledání klasického řešení splňujícího rovnici v každém bodě komplikované, protože je rovnice pro $\frac{\partial h}{\partial x} \rightarrow 0$ buď singulární (pro $1 < p < 2$), tj. difuzní koeficient jde do nekonečna, nebo degenerovaná (pro $p > 2$), tj. difuzní koeficient jde k nule. Zásadní otázkou pro nově definované řešení je jeho existence, jednoznačnost (v dané množině – prostoru – funkcí) a regularita (dostatečná spojitost).

Poznámka (slabé řešení). Koncept slabého řešení si přiblížíme na stacionární (eliptické) úloze (13). Hledáme-li klasické řešení, tj. má-li být rovnice (13) splněna v každém bodě intervalu $(0, 1)$, je nutné, aby druhá derivace hledaného řešení v každém bodě existovala. Kvůli výše popsanému limitnímu přechodu navíc požadujeme její spojitost.

Ukazuje se, že pro praktické aplikace je takový požadavek příliš silný. Fyzikálně přirozeným přístupem je nejprve definovat celkovou potenciální energii soustavy a hledat funkci u , pro kterou je tato energie minimální (tzv. *princip minimální energie*). Uvažujeme-li pravou stranu f v (13) takovou, aby měla potenciální energie matematicky smysl (nemusí být spojitá), a množinu (prostor) funkcí, ve kterém je existence a jednoznačnost řešení u zaručena tzv. *funkcionální analýzou* (konkrétně Laxovou–Milgramovou větou), dojdeme k tzv. *Sobolevovu prostoru* $W_0^{1,2}(0, 1)$. Takové řešení pak nazýváme *slabým řešením*. Funkce z tohoto prostoru např. nemusí mít spojitou druhou a dokonce ani první derivaci, takže slabé řešení nemusí být klasické řešení, ale lze dokázat, že každé klasické řešení je zároveň slabé řešení (tzv. *regularita*).

V případě úlohy (14) hledáme slabé řešení stacionární úlohy (nezávislé na čase) v Sobolevově prostoru $W^{1,p}(0, L)$. Vynechání indexu nula značí, že nevyžadujeme nulovou funkční hodnotu řešení v krajních bodech intervalu. Slabá řešení nestacionárních (parabolických) úloh hledáme v tzv. *Bochnerových prostorech*, např. pro úlohu (14) v prostoru $L^p([0, T] \rightarrow W^{1,p}(0, L))$.

4. PRINCIPY MAXIMA A SROVNÁVACÍ PRINCIPY

Pro singulární a/nebo degenerované parabolické rovnice nelze nalézt explicitní řešení s výjimkou velmi speciálních případů. Jejich studium je tedy založené na kvalitativních metodách v kombinaci s numerickými výpočty. Zásadní roli mezi kvalitativními metodami hrají *principy maxima a srovnávací principy*. Ty si nejprve vysvětlíme na klasické *eliptické* Dirichletově okrajové úloze pro Poissonovu rovnici s lineárním Laplaceovým operátorem (Laplaciánem)

$$\Delta u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2} = \operatorname{div}(\nabla u),$$

kde $(x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$,

$$\nabla u \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right), \quad \operatorname{div}(w_1, w_2, \dots, w_N) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial w_N}{\partial x_N}.$$

Alespoň pro nejjednodušší případ rovnice⁸ $\Delta u = f$ v omezené oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ uveďme, že jejím *slabým řešením* nazýváme funkci $u \in W^{1,2}(\Omega)$ splňující

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} u \varphi \, dx$$

pro všechny tzv. *testovací funkce*.

Nechť $u_i \in W^{1,2}(\Omega)$, $i = 1, 2$, jsou (slabá) řešení rovnic

$$-\Delta u_i = f_i(x) \quad \text{v } \Omega,$$

kde $f_i \in L^\infty(\Omega)$ jsou dvě (obecně různé) pravé strany. Tzv. *slabý srovnávací princip* říká, že je-li $f_1 \leq f_2$ v oblasti Ω a $u_1 \leq u_2$ na hranici $\partial\Omega$ (ve smyslu tzv. *stop*⁹), pak platí $u_1 \leq u_2$ v celé oblasti Ω . Tzv. *silný srovnávací princip* dále říká, že je-li navíc $f_1 \not\equiv f_2$ v Ω nebo $u_1 \not\equiv u_2$ na $\partial\Omega$, potom platí dokonce ostrá nerovnost $u_1 < u_2$ v celé oblasti Ω . To například znamená, že pokud $f_1 < f_2$ platí alespoň na nějaké části oblasti Ω , která má kladnou míru, ale může být velmi malá, a na zbytku oblasti je $f_1 \equiv f_2$, potom platí $u_1 < u_2$ všude v Ω .

Obdobná tvrzení lze dokázat i pro *parabolickou* Cauchyho-Dirichletovu úlohu s laplaciánem. Nechť $u_i \in L^2([0, T] \rightarrow W^{1,2}(\Omega))$, $i = 1, 2$, jsou (slabá) řešení rovnic

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \Delta u_i = f_i(x, t) \quad \text{v } Q_T \stackrel{\text{def}}{=} \Omega \times (0, T],$$

kde $f_i \in L^\infty(Q_T)$. Pak lze dokázat, že pokud $f_1 \leq f_2$ v Q_T a $u_1 \leq u_2$ na $\Gamma_T \stackrel{\text{def}}{=} (\partial\Omega \times [0, T]) \cup (\Omega \times \{0\})$ (ve smyslu stop), pak $u_1 \leq u_2$ v Q_T (slabý srovnávací princip, viz Friedman [17]). Platí-li navíc alespoň jedna z následujících tří podmínek:

- $f_1 \not\equiv f_2$ v $\Omega \times (0, t_0)$ pro libovolné $0 < t_0 \leq T$,
- $u_1 \not\equiv u_2$ na $\Omega \times \{0\}$ (ve smyslu stop),
- $u_1 \not\equiv u_2$ na $\partial\Omega \times (0, t_0)$ (ve smyslu stop) pro libovolné $0 < t_0 \leq T$,

⁸Speciálně pro $N = 1$ a $\Omega = (0, 1)$ je $\Delta u = u''$, a jedná se tedy o rovnici v (13).

⁹Funkce v prostoru $W^{1,2}(\Omega)$ jsou příliš obecné, aby mělo smysl mluvit přímo o jejich hodnotách na $\partial\Omega$. Místo toho se uvažuje, jaké na $\partial\Omega$ zanechají „stopy“.

potom $u_1 < u_2$ v Q_T (silný srovnávací princip).

Pro lineární úlohy se obvykle nejprve dokazuje princip *maxima*, protože srovnávací princip pak snadno dostaneme jako jeho důsledek. Nechť $u \in L^2([0, T] \rightarrow W^{1,2}(\Omega))$ je (slabé) řešení rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x, t) \quad \text{v } Q_T,$$

kde $f \in L^\infty(\Omega)$. *Slabý* princip maxima říká, že je-li $f \geq 0$ v Q_T , potom $u \geq M \stackrel{\text{def}}{=} \text{ess inf}_{\Gamma_T} u$ (ve smyslu stop) v Q_T . Zjednodušeně řečeno, spojitě řešení u nabývá své minimální hodnoty přes Q_T v nějakém bodě množiny Γ_T , neboli v žádném bodě uvnitř Q_T nemá menší hodnotu, než je minimum přes Γ_T . Poznamenejme, že i když by se zdálo logičtější nazývat toto tvrzení principem *minima* a *principem maxima* nazývat tvrzení, že z $f \leq 0$ plyne $u \leq \text{ess sup}_{\Gamma_T} u$, tato dvě tvrzení jsou ekvivalentní

(jedno z druhého plyne nahrazením u za $-u$), a tedy používáme pouze tradiční pojem princip *maxima*. *Silný* princip maxima říká, že jestliže je navíc splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

- $f \not\equiv 0$ v $\Omega \times (0, t_0)$ pro libovolné $0 < t_0 \leq T$,
- $u \not\equiv M$ na $\Omega \times \{0\}$ (ve smyslu stop),
- $u \not\equiv M$ na $\partial\Omega \times (0, t_0)$ (ve smyslu stop) pro libovolné $0 < t_0 \leq T$,

potom $u > M$ v Q_T .

Jakmile máme dokázán princip maxima (slabý, resp. silný), srovnávací princip (slabý, resp. silný) snadno obdržíme volbou $u = u_2 - u_1$ (tudíž $M \geq 0$) a $f = f_2 - f_1$. Všimněme si, že jsme využili linearitu levé strany rovnice. Naopak, máme-li dokázán srovnávací princip, příslušný princip maxima lze odvodit volbou $u_1 \equiv M$, $f_1 \equiv 0$, $u_2 = u$ a $f_2 = f$ (zde žádná linearita využita nebyla).

Uvažujme nyní místo Laplaciánu obecnější¹⁰ operátor p -laplacián

$$\Delta_p u \stackrel{\text{def}}{=} \text{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u),$$

$p > 1$. Podobně jako v lineárním případě $p = 2$ výše, ze srovnávacího principu plyne příslušný princip maxima. Ale protože je p -laplacián nelineární operátor (pro $p \neq 2$), z principu maxima neplyne srovnávací princip. Jinými slovy, princip maxima je slabší tvrzení, protože je to vlastně srovnání pouze s konstantním řešením. Navíc platí, že jednoznačnost (slabého) řešení je snadným důsledkem slabého srovnávacího principu, ale ne důsledkem principu maxima.

Pokud jde o (slabé) řešení $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *eliptické* Dirichletovy okrajové úlohy pro rovnici s p -laplaciánem

$$-\Delta_p u = f(x) \quad \text{v } \Omega,$$

jak *slabý* princip maxima, tak *slabý* srovnávací princip lze dokázat standardními metodami zvolením vhodné testovací funkce v definici slabého řešení. *Slabý* srovnávací princip v podstatě říká, že p -laplacián je tzv. monotónní operátor. *Silný* princip maxima byl dokázán v roce 1984 (Vázquez, [37]). *Silný* srovnávací princip

¹⁰Platí $\Delta_2 \equiv \Delta$.

(tj. silnější tvrzení) pak byl dokázán v roce 1998 (Cuesta, Takáč [9]) alespoň v případech, že $0 \leq f_1 \leq f_2$, $f_1 \not\equiv f_2$ a $u \equiv 0$ na $\partial\Omega$ (autoři se zaměřili pouze na vliv pravé strany rovnice a ne na vliv okrajové podmínky).

Zatímco *slabý* princip maxima a dokonce i *slabý* srovnávací princip pro (slabé) řešení $u \in L^p([0, T] \rightarrow W^{1,p}(\Omega))$ *parabolické* Cauchyho-Dirichletovy úlohy s p -laplaciánem

$$c \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_p u = f(x, t) \quad \text{v } Q_T \quad (15)$$

lze stále dokázat standardními metodami (viz IVANOV [19]), důkaz *silného* principu maxima a *silného* srovnávacího principu je pro $p \neq 2$ mnohem komplikovanější. Ukážeme si, že z Barenblattova článku [2] plyne, že silný princip maxima nelze očekávat v tzv. *degenerovaném* případě $p > 2$ (pomalá difuze) ani pro malé $T > 0$. Vezmeme-li slavné Barenblattovo explicitní řešení $\varrho(r, t)$, $r, t > 0$, rovnice [2, (1.3)]

$$c \frac{\partial \varrho}{\partial t} = \frac{1}{r^{N-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^{N-1} \left(\frac{\partial}{\partial r} \varrho^k \right) \left| \frac{\partial}{\partial r} \varrho^k \right|^{m-1} \right], \quad (16)$$

kde $m = p - 1$, $k = 1$ a $c > 0$ je konstanta, potom jeho „rotací“ dostaneme radiálně (sféricky) symetrickou funkci (tj. takovou, která je konstantní na libovolné sféře v \mathbb{R}^N se středem v počátku) $u(x, t) \equiv \varrho(|x|, t) = \varrho(r, t)$, $r = |x|$, která je řešením rovnice (15), kde $f \equiv 0$. Degenerovaný případ $p > 2$ odpovídá případu $k > 1/m$ v [2]. Množina bodů \mathbb{R}^N , ve kterých je v tomto případě řešení u nenulové (viz [2, Fig. 1]), je v libovolné časové okamžiku omezená koule s poloměrem, který začíná od 0 v čase $t = 0$ (počáteční podmínka je Diracova distribuce v počátku, tj. veškerá hmota je soustředěna do jednoho bodu) a roste v čase s konečnou rychlostí. Za oblast Ω tedy zvolíme nějakou (libovolnou) kouli v \mathbb{R}^N se středem v počátku a počáteční čas nastavíme tak, aby poloměr koule, ve které je (rotované) Barenblattovo řešení nenulové, byl menší, než poloměr Ω (v [2] nahradíme t za $t + \varepsilon$ s nějakým dostatečně malým $\varepsilon > 0$). Platí tedy $u \not\equiv M = 0$ na $\Omega \times \{0\}$ a $u \not\equiv 0$ v Q_T , protože $u = 0$ v části Ω (mezi $\partial\Omega$ a nějakou menší sférou) pro t od 0 až dokud menší sféra nenarazí na $\partial\Omega$. Jiný protipříklad na silný srovnávací princip v jedné prostorové dimenzi, ve kterém $u_1 \equiv u_2$ na Γ_T , $f_1 \leq f_2$, $f_1 \not\equiv f_2$, ale $u_1 \not\leq u_2$, je uveden v [8]. Na druhou stranu jsou v [8] uvedeny jisté (silnější) podmínky na oddělení pravých stran f_1 a f_2 , za kterých už silný srovnávací princip platí.

Ani v tzv. singulárním případě $1 < p < 2$ (silná difuze) nemůže silný princip maxima platit pro libovolně velké T . V [13, Chapter VII, §2]) je dokázáno, že pokud $u > 0$ na $\Omega \times \{0\}$, $u \equiv 0$ na $\partial\Omega \times (0, T)$ a $f \equiv 0$ in Q_T , pak existuje dostatečně velké t , od kterého je už $u(\cdot, t)$ nulové v Ω , neplatí tedy $u > M = 0$ pro libovolně dlouhý čas. Silný princip maxima alespoň pro dostatečně krátký čas je dokázán v [6, Theorem 1.1], a to dokonce pro ještě obecnější, tzv. dvojitě nelineární rovnici

$$\frac{\partial}{\partial t} b(u(x, t)) - \Delta_p u = f(x, t) \quad \text{v } Q_T, \quad (17)$$

kde $b: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ je spojitá funkce, $b(0) = 0$, $b \in C^1(0, +\infty)$ a $b' > 0$ na $(0, +\infty)$. Ve speciálním případě $b(s) \equiv s$ přejde rovnice (17) na (15). Necht' $1 < p < 2$ a

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s^{2-p} b'(s)}{|\log s|^{p-1}} = 0. \quad (18)$$

Předpokládejme, že $u: \bar{\Omega} \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}_+$ je spojitě nezáporné slabé řešení (17). Potom pro libovolné pevné $t_0 \in (0, T)$ platí, že řešení $u(\cdot, t_0)$ je buď kladné všude v Ω , nebo nulové všude v Ω . Z toho plyne, že jestliže $u(\xi, 0) > 0$ v nějakém bodě $\xi \in \Omega$, potom existuje $\tau \in (0, T]$ takové, že $u(x, t) > 0$ pro všechna $(x, t) \in \Omega \times (0, \tau)$, tj. silný princip maxima platí na $\Omega \times (0, \tau)$. Hodnotu $\tau \in (0, T)$ lze zdola odhadnout:

$$\tau = \sup\{T' \in (0, T]: u(\xi, t) > 0 \text{ pro všechna } t \in [0, T')\} > 0.$$

Poznamenejme, že $u(x, t) \equiv \varrho^k(|x|, t)$, kde ϱ je Barenblattovo řešení (16), je řešení (17), kde $b(s) = s^{1/k}$, $p = m + 1$ a $f \equiv 0$. Pokud $k \leq 1/m$, tj. $k \leq 1/(p - 1)$, potom (rotované) Barenblattovo řešení je kladné všude v \mathbb{R}^N pro libovolný kladný čas. Jinými slovy, rychlost šíření je nekonečná, a je tedy v tomto případě rozumné očekávat platnost silného srovnávacího principu alespoň pro malé $T > 0$. A skutečně, pro $b(s) = s^{1/k}$ je podmínka (18), tj.

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s^{1-p+1/k}}{k|\log s|^{p-1}} = 0,$$

splněna právě tehdy, je-li $1 - p + 1/k \geq 0$, tj. $k \leq 1/(p - 1)$. Podmínka (18) je tedy přirozená a přesně odpovídá Barenblattovu výsledku.

5. ANALÝZA MODELU PROUDĚNÍ VODY MEZI ROVNOBĚŽNÝMI KANÁLY

Nyní aplikujeme teoretické poznatky z předchozí části na matematický model odvozený v části 3, tj.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} h(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(h(x, t) \left| \frac{\partial}{\partial x} h(x, t) \right|^{p-2} \frac{\partial}{\partial x} h(x, t) \right) + f(x, t) \\ \hspace{15em} \text{v } (0, L) \times (0, T), \\ h(0, t) = g_0, \quad h(L, t) = g_L \quad \text{pro všechna } t \in (0, T), \\ h(x, 0) = h_0(x) \quad \text{pro všechna } x \in (0, L). \end{cases}$$

V dalším textu předpokládáme, že výška hladiny v obou kanálech je stejná, tj. $g_0 = g_L = H \geq 0$. Případ $g_0 \neq g_L$ nebo ještě obecnější (a reálnější) závislost okrajových podmínek na čase jsou stále otevřené problémy, čekající na své vyřešení. My zde popíšeme dvě zajímavé a překvapivě rozdílné situace, vyschlé kanály $H = 0$ a zavodněné kanály $H > 0$.

Prvně budeme předpokládat, že jsou kanály vyschlé ($H = 0$) a ani mezi kanály není žádná voda. Poté v čase $t = 0$ dojde k náhlému zvýšení hladiny mezi příkopy o $\Delta h_0 \geq 0$, což se modeluje počáteční podmínkou $h_0 = H + \Delta h_0 = \Delta h_0$ pro čas $t = 0$. Lze ukázat, že pro rozumnou volbu nárůstu Δh_0 (představme si např. spojitě

diferencovatelnou funkci¹¹ na uzavřeném intervalu $[0, L]$ s $\Delta h_0(0) = \Delta h_0(L) = 0$ má (14) jednoznačné řešení (viz [19]). Pokud navíc $f = 0$ na $(0, L) \times (0, T)$, $\Delta h_0(x_0) > 0$ pro nějaké $x_0 \in (0, L)$ a existuje hodnota $0 < \delta < \min\{x_0, L - x_0\}$ taková, že funkce Δh_0 je nulová vně intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, lze pomocí slabého srovnávacího principu popsaného v předchozí části ukázat, že $h(\cdot, t) = 0$ vně intervalu $(\delta - w_{max}t, L - \delta + w_{max}t)$ pro všechna $0 < t < \min\{\delta/w_{max}, (L - \delta)/w_{max}\}$, kde $w_{max} > 0$. Tuto vlastnost dostaneme, stejně jako v předchozí části, srovnáním s řešením inspirovaným Barenblattem (viz Díaz [12, str. 328–329]). Jako horní řešení (řešení rovnice (14) s jistou $f(x, t) \geq 0$ - srovnajte s formulací srovnávacího principu) vezmeme

$$U(x, t) = \max \left\{ \frac{1}{(t + \tau)^\lambda} \left[C - k \frac{|x - x_0|^{p'}}{(t + \tau)^{\frac{p'}{2p-1}}} \right]^{p'}, 0 \right\}$$

s

$$p' = \frac{p}{p-1}, \quad \lambda = \frac{p}{2p^2 - 3p + 1}, \quad k = \left(\frac{p-1}{p} \right)^2 \left(\frac{1}{2p-1} \right)^{\frac{p}{p-1}},$$

kde $\tau > 0$ a $C > 0$ budou vhodně zvoleny níže. Poznamenejme, že funkce $U(\cdot, t)$ je nulová vně intervalu

$$\left(x_0 - \left(\frac{C}{k} \right)^{\frac{1}{p'}} (t + \tau)^{\frac{1}{2p-1}}, x_0 + \left(\frac{C}{k} \right)^{\frac{1}{p'}} (t + \tau)^{\frac{1}{2p-1}} \right).$$

pro každé $t > 0$. Nyní zvolíme konstanty $\tau > 0$ a $C > 0$ tak, aby $h_0(x) \leq U(x, 0)$ a

$$[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq \left(x_0 - \left(\frac{C}{k} \right)^{\frac{1}{p'}} \tau^{\frac{1}{2p-1}}, x_0 + \left(\frac{C}{k} \right)^{\frac{1}{p'}} \tau^{\frac{1}{2p-1}} \right) \subsetneq (0, L),$$

viz obr. 7, kde značíme $\eta_{\pm} = \left(\frac{C}{k} \right)^{\frac{1}{p'}} \tau^{\frac{1}{2p-1}}$.

Potom $h(\cdot, t)$ je nulová vně

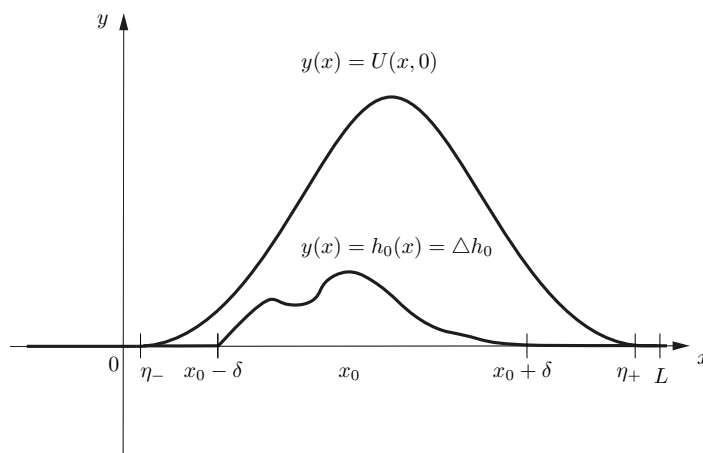
$$\left(x_0 - \left(\frac{C}{k} \right)^{\frac{1}{p'}} (t + \tau)^{\frac{1}{2p-1}}, x_0 + \left(\frac{C}{k} \right)^{\frac{1}{p'}} (t + \tau)^{\frac{1}{2p-1}} \right).$$

To znamená, že voda z lokalizovaného náhlého navýšení hladiny podzemní vody h_0 nedosáhne okamžitě břehů kanálů a

$$w_{max} = \left(\frac{C}{k} \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Nyní se podíváme na situaci, kdy jsou kanály zavodněné ($H > 0$) a ve stejné výši je i původní hladina podzemní vody. Poté v čase $t = 0$ dojde k náhlému zvýšení hladiny mezi příkopy o Δh_0 , což se modeluje počáteční podmínkou $h_0 = H + \Delta h_0$ pro čas $t = 0$. Stejně okamžité zvýšení hladiny podzemní vody o Δh_0 jako v předchozím případě ihned způsobí zvýšení hladiny podzemní vody v celém

¹¹Přesněji postačuje lipschitzovsky spojitá funkce.



Obrázek 7. Srovnání počáteční podmínky a horního řešení v čase $t = 0$.

intervalu $(0, L)$. Uvažujeme $\Delta h_0 \geq 0$, které splňuje stejné předpoklady jako v předchozím odstavci. Pomocí substituce $v(x, t) = h(x, t) - H$ dostaneme úlohu

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(|v + H| \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = f(x, t) \\ \text{pro } (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ v(0, t) = v(L, t) = 0 \text{ pro } t \in (0, T), \\ v(x, 0) = h_0(x) - H = \Delta h_0(x) \text{ pro } x \in (0, L), \end{cases} \quad (19)$$

u které lze dokázat existenci a jednoznačnost spojitěho¹² řešení (viz [5]). Chceme ukázat, že pro tento problém platí silný princip maxima popsaný v předchozí kapitole pro dvojitě nelineární rovnici (17). Pomocí další substituce dále rovnici v (19) přepíšeme do tvaru (17). Protože

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial(v + H)}{\partial x} \quad \text{a} \quad (v + H)^{\frac{1}{p-1}} \frac{\partial(v + H)}{\partial x} = \frac{p-1}{p} \frac{\partial(v + H)^{\frac{p}{p-1}}}{\partial x}$$

dostaneme

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \left(\frac{p-1}{p} \right)^{p-1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left| \frac{\partial(v + H)^{\frac{p}{p-1}}}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial(v + H)^{\frac{p}{p-1}}}{\partial x} \right) = f(x, t).$$

Substitucí $u = (v + H)^{p/(p-1)} - H^{p/(p-1)}$ získáme

$$\frac{\partial \left(\left(u + H^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} - H \right)}{\partial t} - \left(\frac{p-1}{p} \right)^{p-1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f(x, t),$$

¹²Dokonce hölderovsky spojitěho.

což je požadovaná rovnice (17) s $b(s) = \left(s + H^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} - H$. Funkce b je spojitá, $b(0) = 0$, $b \in C^1(0, +\infty)$ s $b' > 0$ v $(0, +\infty)$ a podmínka (18) je splněná. Potom ze silného principu maxima dostaneme, že řešení $u(\cdot, t_0)$ je pro každé pevné $t_0 \in (0, T)$ buď kladné všude v $(0, L)$, nebo nulové všude v $(0, L)$. Ze spojitosti řešení a podmínky $h_0 > 0$ dostaneme existenci $\tau \in (0, T)$ takového, že $u(x, t) > 0$ pro všechny $(x, t) \in (0, L) \times (0, \tau)$, a proto z výše uvedených transformací je $h(t, x) > H$ pro všechny $(x, t) \in (0, L) \times (0, \tau)$.

Závěr. Pokud jsou příkopy vyschlé ($H = 0$), voda z náhlého lokálního navýšení hladiny podzemní vody dosáhne břehů odvodňovacích příkopů až po určitém čase. Naopak v případě částečně zatopených kanálů způsobí náhlé lokální navýšení hladiny podzemní vody okamžité zvýšení hladiny podzemní vody v celém prostoru mezi kanály. V reálných situacích se tekutina pohybuje vždy konečnou rychlostí. Výše zmíněné výsledky je tedy nutné interpretovat tak, že pro $H > 0$ je pohyb rozhraní mezi suchou a zavodněnou částí mnohem rychlejší než v případě vyschlého prostředí.

Poděkování

Tato práce je založena na společném výzkumu, který byl iniciován Peterem Takáčem a publikován v sérii článků [6, 7, 8]. Výzkum Jiřího Benedikta, Petra Girga a Lukáše Kotrly byl částečně podpořen Grantovou agenturou ČR (GAČR) v rámci projektu č. 18-03253S. Lukáš Kotrla byl také částečně podpořen Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy (MŠMT, ČR) v rámci projektu NPU I, projekt č. LO1506 (PU-NTIS).

REFERENCE

- [1] V. I. Aravin, S. N. Numerov: *Teoriya dvizheniya zhidkosti i gazov v nedeformiruemoi poristoï srede* Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit., Moskva, 1953. *Anglický překlad*: A. Moscona: *Theory of Fluid Flow in Undeformable Porous Media*, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1965.
- [2] G. I. Barenblatt: *On some unsteady motions of a liquid and gas in a porous medium*, Akad. Nauk SSSR, Prikl. Mat. Meh. **16** (1952), 67–78, rusky.
- [3] P. Basak: *An analytical solution for the transient ditch drainage problem*, Journal of Hydrology **41** (1979), No. 3, 377–382.
- [4] J. Bear: *Dynamics of Fluids in Porous Media*, Environmental science series, American Elsevier Publishing Company, Inc., New York, 1972.
- [5] J. Benedikt, P. Girg, L. Kotrla: *Nonlinear models of the fluid flow in porous media and their methods of study*, v recenzním řízení.
- [6] J. Benedikt, P. Girg, L. Kotrla, P. Takáč: *The strong maximum principle in parabolic problems with the p -Laplacian in a domain*, Appl. Math. Lett. **63** (2017), 95–101.
- [7] J. Benedikt, P. Girg, L. Kotrla, P. Takáč: *Origin of the p -Laplacian and A. Missbach*, Electron. J. Differential Equations (2018), Paper No. 16.
- [8] J. Benedikt, P. Girg, L. Kotrla, P. Takáč: *The strong comparison principle in parabolic problems with the p -Laplacian in a domain*, Appl. Math. Lett. **98** (2019), 365–373.
- [9] M. Cuesta, P. Takáč: *A strong comparison principle for the Dirichlet p -Laplacian*, In Reaction diffusion systems (Trieste, 1995), Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **194**, Dekker, New York, 1998, 79–87.

- [10] H. Darcy: *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*, Victor Dalmont, Paris, 1856.
- [11] G. R. de Prony: *Recherches physico-mathématiques sur la théorie des eaux courantes*. Imprimerie impériale, Paris, 1804.
- [12] J. I. Díaz: *Qualitative study of nonlinear parabolic equations: an introduction*, Extracta Math. **16** (2001), No. 3, 303–341.
- [13] E. DiBenedetto: *Degenerate parabolic equations*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [14] P. Drábek, G. Holubová: *Parciální diferenciální rovnice: úvod do klasické teorie*, Západočeská univerzita, Plzeň, 2001.
- [15] J. Dupuit: *Études théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux dans les canaux découverts et à travers les terrains perméables*, Dunod, Paris, 1863.
- [16] P. Forchheimer: *Wasserbewegung durch boden*, Zeit. Ver. Deutsch. Ing. **45** (1901), 1736–1741 a 1781–1788.
- [17] A. Friedman: *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1964.
- [18] M. Harr: *Groundwater and Seepage* Dover Civil and Mechanical Engineering Series, Dover, 1991.
- [19] A. V. Ivanov: *Regularity for doubly nonlinear parabolic equations*, Zap. Nauchn. Sem., S.-Peterburg, Otdel. Mat. Inst. Steklov (POMI) **209**, Voprosy Kvant. Teor. Polya i Statist. Fiz. **12** (1994), 37–59, 261. Přetištěno v J. Math. Sci. **83** (1997), No. 1, 22–37.
- [20] S. V. Izbash: *O filtracii v krupnozernistom materiale*, Izv. Nauchno-Issled. Inst. Gidro-Tekh. (N.I.LG.), Leningrad 1, 1931, rusky.
- [21] J. Jandora, V. Stará, M. Starý: *Hydraulika a hydrologie*, 2. vydání, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno, 2011.
- [22] F. King: *Principles and conditions of the movements of ground water*, In Nineteenth Annual Report of the United States Geological Survey to the Secretary of the Interior 1897 - 1898, pt. 2 (1899), 59–294.
- [23] M. Marino: *Rise and decline of the water table induced by vertical recharge*, Journal of Hydrology **23** (1974), No. 3–4, 289–298.
- [24] A. A. Missbach: *Filtrovatelnost čerčených a saturovaných štáv. IV. Přeběhnutí vzorce van Gilse, van Ginnekena a Watermana se štávou I. saturace*, Listy cukrov. **54** (1936), No. 39, 361–368.
- [25] A. A. Missbach: *Filtrovatelnost čerčených a saturovaných štáv. V. Vliv tlaku*, Listy cukrov. **55** (1937), No. 18, 169–172.
- [26] A. A. Missbach: *Filtrovatelnost čerčených a saturovaných štáv. VI. Určování propustnosti hotového koláče kalovéhoho*, Listy cukrov. **55** (1937), No. 33, 176–180.
- [27] A. A. Missbach: *Filtrovatelnost čerčených a saturovaných štáv. VII. Průtok vrstvou kuliček*, Listy cukrov. **55** (1937), No. 33, 293–299.
- [28] N. N. Pavlovskii: *The theory of movement of ground water under hydraulic structures and its main applications*, Scientific Amelioration Institute, St. Petersburg, Lecture notes, 1922, rusky.
- [29] J. Říha, L. Petrula, M. Hala, Z. Alhasan: *Assessment of empirical formulae for determining the hydraulic conductivity of glass beads*, Journal of Hydrology and Hydromechanics **66** (2018), No. 3, 337–347.
- [30] H. Rouse: *Highlights in the history of hydraulics*, Books at Iowa **38** (1983), 3–17.
- [31] R. Singh, S. Rai: *On subsurface drainage of transient recharge*, Journal of Hydrology **48** (1980), No. 3–4, 303–311.
- [32] R. Singh, S. Rai: *A solution of the nonlinear Boussinesq equation for phreatic flow using an integral balance approach*, Journal of Hydrology **109** (1989), No. 3–4, 319–323.
- [33] O. Smreker: *Entwicklung eines Gesetzes für den Widerstand bei der Bewegung des Grundwassers*, Zeitschr. des Vereines deutscher Ing. **22** (1878), No. 4, No. 5, 117–128, 193–204.
- [34] J. P. Soni, N. Islam, P. Basak: *An experimental evaluation of non-Darcian flow in porous media*, J. Hydrol. **38** (1978), 231–241.

- [35] A. Thiem: *Resultate des Versuchsbrunnens für die Wasserversorgung der Stadt Strassburg*, Journ. Für Gasbeleuchtung und Wasserversorgung **19** (1876), 1736–1741, 1781–1788.
- [36] J. Valentová: *Hydraulika podzemní vody*, 4. přepracované vydání, České vysoké učení technické v Praze, Praha, 2018.
- [37] J. L. Vázquez: *A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations*, Appl. Math. Optim. **12** (1984), No. 3, 191–202.

Jiří Benedikt, Katedra matematiky a NTIS, Fakulta aplikovaných věd, Západočeská univerzita v Plzni, Univerzitní 8, 30100 Plzeň,
e-mail: benedikt@kma.zcu.cz

Petr Girg, Katedra matematiky a NTIS, Fakulta aplikovaných věd, Západočeská univerzita v Plzni, Univerzitní 8, 30100 Plzeň,
e-mail: pgirg@kma.zcu.cz

Lukáš Kotrla, Katedra matematiky a NTIS, Fakulta aplikovaných věd, Západočeská univerzita v Plzni, Univerzitní 8, 30100 Plzeň,
e-mail: kotrla@ntis.zcu.cz