APLIKÁCIA ČASTICOVÝCH FILTROV NA MERANIA MULTISTATICKÉHO RADARU

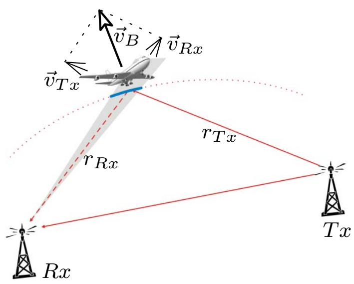
MATEJ BENKO a PAVEL KULMON

Abstrakt. Tento článok sa zaoberá aplikáciou časticových filtrov (skrátene PF z *angl.* Particle Filters) na problematiku určovania polohy a rýchlosti cieľov systémom Multi-Static Primary Surveillance Radar (MSPSR). V článku je popísaný základný princíp fungovania systému, merania vydávané systémom a ich vzťah k polohe a rýchlosti objektu. Ďalej je použitie PF ilustrované na konkrétnom prípade určenia polohy a rýchlosti cieľa v systéme s dvoma prijímačmi a dvoma vysielačmi. Je uvedené zhodnotenie presnosti a analýza dosiahnutých výsledkov pre rôzne druhy filtrácie voči referenčným dátam a tiež načrtnutý smer pre budúci výskum.

1. Úvod

1.1. Popis MSPSR radaru

Multi-Static Primary Surveillance Radar (MSPSR) je pasívne sledovacie zariadenie slúžiace na detekciu a určenie polohy a rýchlosti cieľov vo vzdušnom priestore. Skladá sa z niekoľkých *bistatických párov.* Jeden bistatický pár obsahuje prijímač Rx a vysielač Tx.



Obr. 1. Bistatický pár zakreslený v rovine [4].

2010 *MSC.* Primární 62M05; Sekundární 62P30, 65C35, 65C40.

Klíčová slova. Multistatický radar, optimálny Bayesov odhad, časticová filtrácia.

Článok vznikol na základe bakalárskej práce Mateja Benka v odbore Matematické in-žinierstvo na FSI VUT v Brne. Vedúcim práce bol Libor Žák z Ústavu matematiky FSI VUT v Brne. Práca bola riešená v spolupráci so spoločnosťou ERA a.s.

Jeden takýto pár vie zmerať dve hodnoty. *Bistatickú polohu* a *bistatickú rýchlosť*. Bistatická poloha predstavuje súčet vzdialeností od lietadla (cieľa) k prijímaču Rx a vysielaču Tx. Formálne zapísané $r_B = r_{Rx} + r_{Tx}$. Bistatická rýchlosť predstavuje deriváciu bistatickej polohy podľa času, teda $v_B = \dot{r}_B$. Geometricky je to $\|\vec{v}_B\|$ s kladným znamienkom, ak $\vec{v}_B$ smeruje von z elipsy na obrázku 1 (v skutočnosti elipsoidu), a záporným, ak smeruje dovnútra. V tomto článku je použitý MSPSR radar so 4 takýmito bistatickými pármi (2 vysielače a 2 prijímače).

1.2. Optimálny Bayesov odhad

Definícia (stavovo-priestorového modelu)**.** Nech postupnosť stavov $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}, \dots$ je Markovova ($\mathbf{x}^{(k)}$ závisí len od $\mathbf{x}^{(k-1)}$), $\mathbf{x}^{(k)} \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$.[1] Ďalej nech je postupnosť meraní $\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(k)}, \dots$, $\mathbf{y}^{(k)} \in \mathbb{R}^{m_k}$, pričom $m_k \in \mathbb{N}$ môže závisieť na $k \in \{1, 2, \dots\}$. Dynamickým systémom v stavovo-priestorovej formulácii sa nazve model

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathscr{A}^{(k-1)}(\mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{u}^{(k-1)}), \tag{1}$$

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathscr{B}^{(k)}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{w}^{(k)}); \tag{2}$$

$\mathbf{x}^{(0)}$, $\mathbf{u}^{(0)}$ sú dané, zatiaľ čo $\mathbf{y}^{(0)}$, $\mathbf{w}^{(0)}$ nie je k dispozícii. $\mathscr{A}^{(k-1)} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sa nazýva model systému, kde $\mathbf{u}^{(k-1)}$ je realizáciou riadiaceho šumu

$$\boldsymbol{U}^{(k-1)} \sim F(\boldsymbol{\phi}^{(k-1)})$$

s parametrami $\boldsymbol{\phi}^{(k-1)} \in \mathcal{P}$.[2] $\boldsymbol{U}^{(k-1)}$ vyjadruje neurčitosť systému. $\mathscr{B}^{(k)} : \mathbb{R}^{m_k} \times \mathbb{R}^{m_k} \to \mathbb{R}^{m_k}$ sa nazýva model meraní. $\mathbf{w}^{(k)}$ je realizáciou $\boldsymbol{W}^{(k)} \sim F(\boldsymbol{\psi}^{(k)})$, šumu meraní, určeného parametrami $\boldsymbol{\psi}^{(k)} \in \mathcal{P}$. Charakterizuje nepresnosť senzorov. Zvyčajne býva konštantný od k, avšak nie nutne.

Odvodenie (Bayesovho odhadu)**.** Zmyslom Bayesovho odhadu je v čase k odhadnúť stav $\mathbf{x}^{(k)}$ ako číselnú charakteristiku (stredná hodnota, medián, ...) náhodného vektora, ktorý je daný aposteriórnou hustotou $f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k)})$, kde $\mathbf{Y}^{(k)} = \{\mathbf{y}^{(i)}\}_{i=1}^{k}$ je postupnosť všetkých meraní až po k (odhad stavu sa tiež zvykne nazývať filtrácia). Teda hlavným cieľom je získať $f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k)})$. Jej odvodenie je v nasledujúcich riadkoch, skladá sa z 2 krokov.

1. predikčný krok. Určí sa apriórna hustota $f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k-1)})$ pomocou *Chapman-Kolmogorovej vety* (je použiteľná len pri Markovových reťazcoch, čo je splnené).

$$f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k-1)}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{x}^{(k-1)}) \cdot f(\mathbf{x}^{(k-1)}|\mathbf{Y}^{(k-1)})\, \mathrm{d}\mathbf{x}^{(k-1)}.$$

Hustota $f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{x}^{(k-1)})$ vychádza z rovnice (1). $f(\mathbf{x}^{(k-1)}|\mathbf{Y}^{(k-1)})$ je aposteriórna hustota pravdepodobnosti v čase $k-1$. Cieľom filtrácie je túto hustotu určiť, tzn.

[1] Symbolom $\mathcal{S}$ sa myslí stavový priestor. Je to „vhodná“ oblasť (záujmu), kde sa pozorujú stavy sledovaných objektov a je k nim možné získať merania $\mathbf{y}^{(k)}$ zo senzorov.

[2] Symbolom $\mathcal{P}$ sa myslí parametrický priestor, ktorého prvky jednoznačne určujú rozdelenie (distribučnú funkciu) šumu (náhodného vektora).

že v čase k je už táto hustota známa. Pre $k = 1$ platí $f(\mathbf{x}^{(1)}|\mathbf{Y}^{(0)}) \equiv f(\mathbf{x}^{(1)})$. Pretože $\mathbf{y}^{(0)}$, je $\mathbf{Y}^{(0)} = \emptyset$ a $f(\mathbf{x}^{(1)}|\,\emptyset\,) \equiv f(\mathbf{x}^{(1)})$.

2. aktualizačný krok. Na vyjadrenie $f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k)})$ sa využije *Bayesova veta*:

$$f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k)}) = \frac{f(\mathbf{y}^{(k)}|\mathbf{x}^{(k)}) \cdot f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k-1)})}{f(\mathbf{y}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k-1)})}.$$

Obe hustoty v čitateli zlomku sú už v tomto kroku známe. Zostáva vyjadriť len hustotu v menovateli, tzv. normalizujúcu konštantu. Opäť sa využije Chapman-Kolmogorova rovnica a získa sa vzťah

$$f(\mathbf{y}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k-1)}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{y}^{(k)}|\mathbf{x}^{(k)}) \cdot f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k-1)})\,\mathrm{d}\mathbf{x}^{(k)}.$$

$f(\mathbf{y}^{(k)}|\mathbf{x}^{(k)})$ je tzv. dôveryhodnosť meraní a vychádza priamo z rovnice (2). Keďže je daný počiatočný stav $\mathbf{x}^{(0)}$, je daná $f(\mathbf{x}^{(0)}|\mathbf{Y}^{(0)}) = f(\mathbf{x}^{(0)}|\,\emptyset\,) \equiv f(\mathbf{x}^{(0)})$. Tým je hotové odvodenie $f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k)})$. Problém však zostáva, ako túto hustotu spočítať.

1.3. Výpočet aposteriórnej hustoty časticovými filtrami (PF)

PF predstavujú tzv. *tvrdé numerické riešenie* na výpočet $f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k)})$. Existujú aj iné filtre (*optimálne*), ktoré spočítajú $f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k)})$ analyticky (napr. Kálmánov filter (KF) [1]), avšak merania z multistatického radaru nespĺňajú predpoklady na to, aby optimálne filtre mohli byť použité. Ďalej existujú filtre založené na rozšírení analytických filtrov, ktoré aproximujú $f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k)})$. Typicky napríklad Extended KF alebo Unscented KF [6]. S touto triedou algoritmov neboli dosiahnuté uspokojivé výsledky pre multistatické merania, preto nie sú bližšie popísané.

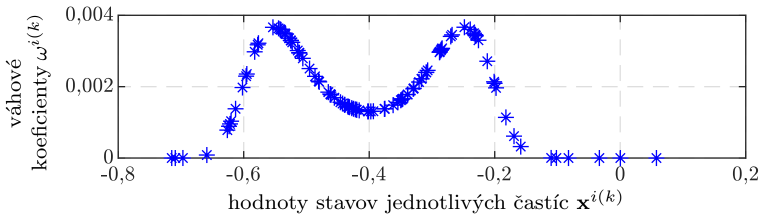
PF kladú minimálne požiadavky na $\mathscr{A}^{(k-1)}$, $\mathscr{B}^{(k)}$ a rozdelenie šumov $\boldsymbol{U}^{(k-1)}$, $\boldsymbol{W}^{(k)}$. Jediné obmedzenie je, aby boli ich hodnoty fyzikálne prípustné (zmysluplné). PF sú trieda algoritmov založených na náhodnom vzorkovaní častíc (stav každej častice v čase k sa označí $\mathbf{x}^{i(k)}$), pomocou ktorých diskrétne aproximujú $f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k)})$. Základný PF je SIS (Sequence Importance Sampling) filter. Všetky ostatné PF sú z neho odvodené pridaním výpočtov. Stručný popis SIS filtra:

1. predikčný krok. Vďaka znalosti stavu každej častice v predchádzajúcom kroku $\mathbf{x}^{i(k-1)}$, rozdelenia šumu $\boldsymbol{U}^{(k-1)}$ a modelu systému $\mathscr{A}^{(k-1)}$ vygeneruje nové stavy častíc $\mathbf{x}^{i(k)}$. Tieto nové stavy sú náhodnými nezávislými vzorkami (i.i.d.) z apriórnej hustoty, značí sa $\mathbf{x}^{i(k)} \sim f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k-1)})$.

2. aktualizačný krok. V tomto kroku sú do systému dodané merania v čase k ($\mathbf{y}^{(k)}$), viď odsek 1.2. Každá častica sa ohodnotí tzv. váhovým koeficientom $\omega^{i(k)} \propto \omega^{i(k-1)} f(\mathbf{y}^{(k)}|\mathbf{x}^{i(k)})$. Aposteriórna hustota $f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k)})$ sa aproximuje vzťahom

$$f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k)}) \approx \sum_{i=1}^{N} \omega^{i(k)} \delta(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{i(k)}), \tag{3}$$

kde $\delta(\cdot)$ je Diracova miera. Ukážka aproximácie (3) je znázornená na obrázku 2.



Obr. 2. Ukážka aproximácie $f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k)})$ v určitom k použitím SIS filtra pre $n = 1$, $m_k = 1$.

2. Metodológia

2.1. Základné varianty časticových filtrov (PF)

SIS filter predstavený v odseku 1.3 trpí tzv. *degeneračným fenoménom* – viď nižšie a preto je v praxi nepoužiteľný. V tomto odseku sú stručne predstavené tri základné použiteľné PF: SIR, Auxiliary a Regularized. Ich podrobnejší opis je možné nájsť napríklad v [1]. Všetky sú odvodené zo SIS filtra.

2.1.1. Riešenie degeneračného fenoménu. Problém spôsobený SIS filtrom. Po niekoľkých iteráciach má iba malé množstvo častíc nenulový váhový koeficient $\omega^{i(k)}$ (viď obrázok 3a). Ostatné nemajú vplyv na aproximáciu $f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k)})$. Sú uvažované nasledujúce 2 riešenia tohoto problému:

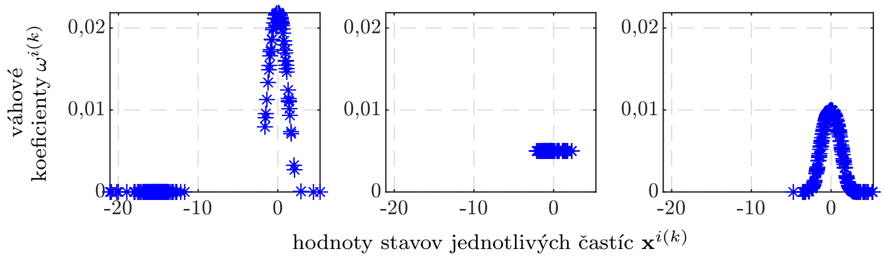
1. Sampling Importance Resampling (SIR) PF. Je rozšírený SIS filter, kde na konci je pridaný algoritmus *Resampling* [1]. Jeho výsledkom sa častice stanú i.i.d. vzorkami z $f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k)})$, t.j. majú rovnaké $\omega^{i(k)}$ a vyššie hodnoty $f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k)})$ určuje vyššia hustota častíc v danej oblasti. Viď obrázok 3b.

2. Auxiliary Sampling Importance Resampling (Auxiliary) PF. Predstavuje rozšírenie SIR filtra. Postupom zhodným so SIS filtrom vygeneruje pomocné častice $\boldsymbol{\mu}^{i(k)}$. Ohodnotí ich váhovými koeficientami $\omega^{i(k)} \propto \omega^{i(k-1)} f(\mathbf{y}^{(k)}|\boldsymbol{\mu}^{i(k)})$. Nasleduje algoritmus *Resampling*, ale výstup z neho sú len referencie i^j na pôvodné $\boldsymbol{\mu}^{i(k)}$. Nakoniec sa opakuje postup ako pri SIS filtri, avšak s dvoma rozdielmi. Na vzorkovanie sa použijú častice $\mathbf{x}^{i^j(k-1)}$ a výsledné vzorky sa ohodnotia $\omega^{j(k)} \propto f(\mathbf{y}^{(k)}|\mathbf{x}^{j(k)})/f(\mathbf{y}^{(k)}|\boldsymbol{\mu}^{i^j(k)})$.[3] Viď obrázok 3c.

2.1.2. Riešenie problému vyčerpania vzoriek. Použitie algoritmu *Resampling* môže spôsobiť pri nízkych hodnotách rozptylu šumu (variačnej matice) tzv. *problém vyčerpania vzoriek.* Najmä viditeľný pri SIR filtroch. Tento problém znamená stratu diverzity častíc, čo sa prejavuje na znížení spoľahlivosti filtra. Jeho riešením je algoritmus *Regularization* [5].

3. Regularized PF. Vznikne rozšírením SIS filtra o algoritmus *Regularization.* Tento algoritmus v prvom kroku vytvorí množinu častíc ako vzoriek zo spojitej aproximácie $f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k)}) \approx \sum_{i=1}^{N} \omega^{i(k)} K_h(\mathbf{x}^{(\mathbf{k})} - \mathbf{x}^{i(k)})$. K_h je jadro, štandardne

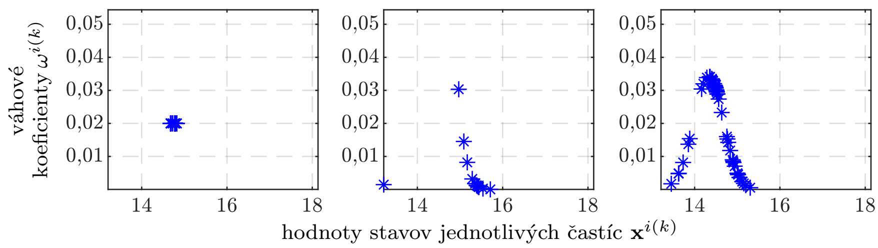
[3] Algoritmus *Resampling* vytvorí častice ako i.i.d vzorky tak, že častice s nízkymi $\omega^{i(k)}$ odstráni a s vyššími zdupľuje. Auxiliary PF teda pomocné vzorky $\boldsymbol{\mu}^{i(k)}$ využije na odstránenie častíc, ktorých $\omega^{i(k)}$ by boli nízke. i^j odkazujú na častice, ktoré zostanú zachované.



a) SIS filter b) SIR filter c) Auxiliary filter

Obr. 3. Ukážka degeneračného fenoménu a jeho riešenia v podobe SIR a Auxiliary filtrov pre $n = 1$, $m_k = 1$.

sa používa Epanechnikovo. Potom tieto častice znova ohodnotí váhovými koeficientami. Viď obrázok 4c.



a) SIR filter b) Auxiliary filter c) Regularized filter

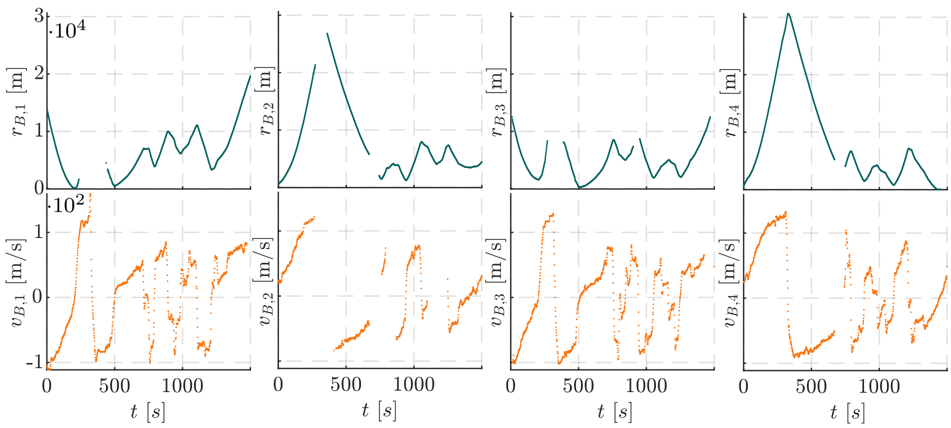
Obr. 4. Ukážka problému vyčerpania vzoriek a jeho riešenia v podobe Regularized filtra pre $n = 1$, $m_k = 1$.

2.2. Popis dostupných dát a použitej referencie

Spracovávané dáta sú multistatické meranie (hodnoty bistatických polôh a rýchlostí pre 4 bistatické páry - získané v rovnakých časoch $t^{(k)}$, $k \in \{1, 2, \ldots, 1\,192\}$) plánovaného preletu ľahkého civilného jednomotorového lietadla Cessna C172SP. Toto plánované meranie nezahŕňalo obmedzenie inej letovej prevádzky v stavovom priestore $\mathcal{S}$. Preto sú v meraných dátach prítomné detekcie od všetkých cieľov, ktoré bol systém schopný detekovať (meranie prebiehalo v okolí Čáslavi). V rámci predspracovania boli ostatné detekcie odstránené.

Ďalej, táto sada nameraných dát obsahuje niekoľko narušených úsekov, kedy zlyhal HW niektorého vysielača a meranie neprebiehalo určitý čas vo všetkých (štyroch) bistatických pároch. Získané dáta očistené od ostatných detekcií sú zobrazené na obrázku 5.

Ako referencia k nameraným multistatickým meraniam bol použitý záznam z palubnej GPS lietadla, ktorý dosahuje o niečo lepšiu presnosť v určení polohy. Súradnice rýchlosti boli dopočítané, teda majú nižšiu presnosť. Označenie $\mathbf{x}^{\mathrm{GPS}}$.



Obr. 5. Namerané hodnoty bistatickej polohy a rýchlosti pre 4 bistatické páry v čase.

Boli upravené tak, aby tvorili referenciu v rovnakých časoch $t^{(k)}$ ako sú získané multistatické merania.

2.3. Nastavenia parametrov pre časticové filtre

Pre filtráciu dát popísaných v odseku 2.2 boli použité nasledovné parametre. Stavový vektor $\mathbf{x} = [x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^\top$. Šum $\mathbf{u}^{(k-1)}$ je realizáciou $\boldsymbol{U}^{(k-1)} \sim \mathsf{N}_6(\mathbf{0}, \mathbf{Q})$, časový rozdiel medzi dvoma meraniami je $\Delta t^{(k-1)} = t^{(k)} - t^{(k-1)}$,

$$\mathscr{A}^{(k-1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta t^{(k-1)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t^{(k-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t^{(k-1)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{u}^{(k-1)}, \mathbf{Q} = \operatorname{diag}\begin{pmatrix} 700 \\ 700 \\ 1 \\ 70 \\ 70 \\ 10^{-6} \end{pmatrix}.$$

Vektor meraní $\mathbf{y} = [r_{B,1}, r_{B,2}, r_{B,3}, r_{B,4}, v_{B,1}, v_{B,2}, v_{B,3}, v_{B,4}]^\top$. Pre stručnosť sa označí $\mathbf{r} = [x, y, z]^\top$ a $\mathbf{v} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^\top$. Šum $\mathbf{w}^{(k)}$ je realizáciou $\boldsymbol{W}^{(k)} \sim \mathsf{N}_8(\mathbf{0}, \mathbf{R})$,

$$\mathscr{B}^{(k)} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{Rx_1}\| + \|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{Tx_1}\| \\ \|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{Rx_1}\| + \|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{Tx_2}\| \\ \|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{Rx_2}\| + \|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{Tx_1}\| \\ \|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{Rx_2}\| + \|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{Tx_2}\| \\ \left(\frac{\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{R_1}}{\|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{R_1}\|} + \frac{\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{Tx_1}}{\|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{Tx_1}\|}\right)^\top \cdot \mathbf{v}^{(k)} \\ \left(\frac{\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{Rx_1}}{\|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{Rx_1}\|} + \frac{\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{Tx_2}}{\|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{Tx_2}\|}\right)^\top \cdot \mathbf{v}^{(k)} \\ \left(\frac{\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{Rx_2}}{\|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{Rx_2}\|} + \frac{\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{Tx_1}}{\|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{Tx_1}\|}\right)^\top \cdot \mathbf{v}^{(k)} \\ \left(\frac{\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{Rx_2}}{\|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{Rx_2}\|} + \frac{\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{Tx_2}}{\|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{Tx_2}\|}\right)^\top \cdot \mathbf{v}^{(k)} \end{pmatrix} + \mathbf{w}^{(k)}, \quad \mathbf{R} = \operatorname{diag}\begin{pmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \\ 400 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

V čase k bol odhad stavu $\mathbf{x}^{*(k)}$ braný ako stredná hodnota aposteriórnej hustoty, t.j. $\mathbf{x}^{*(k)} = E(f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k)}))$.

Pre niektoré k nie sú všetky hodnoty multistatických meraní k dispozícii (viď odsek 2.2). V takom prípade sú vynechané príslušné riadky v rovnici (4). Na určenie počiatočného stavu $\mathbf{x}^{*(0)}$ bola použitá GPS referencia, t.j. $\mathbf{x}^{*(0)} = \mathbf{x}^{\mathrm{GPS}(0)}$ (odhadnuté stavy (výsledok filtrácie) budú ďalej pre rozlíšenie značené ako $\mathbf{x}^{*(k)}$). Počiatočný riadiaci šum $\mathbf{u}^{(0)}$ ako realizácia $\boldsymbol{U}^{(0)} \sim \mathsf{N}(\mathbf{o}, \mathbf{Q})$.

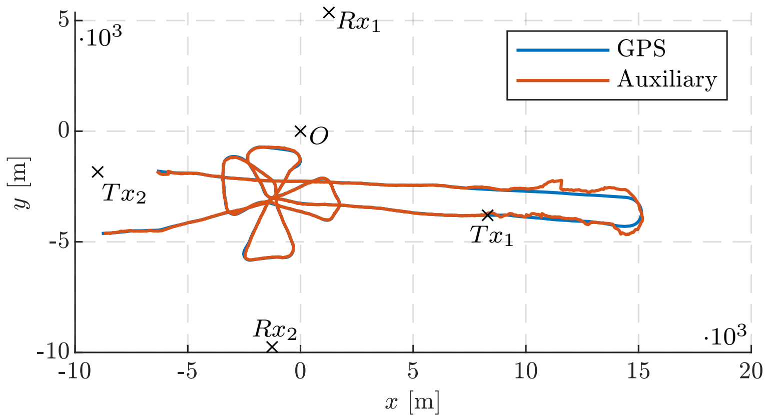
2.4. Testy štatistických hypotéz

Pre vyhodnotenie úspešnosti filtrov bolo potrebné ohodnotiť, či dve množiny stavov $\mathbf{x}_a = \{\mathbf{x}_a^{(k)}\}_{k=1}^N$, $\mathbf{x}_b = \{\mathbf{x}_b^{(k)}\}_{k=1}^N$ sú ekvivalentné pre odpovedajúce si hodnoty k. Test hypotézy $H : \mathbf{x}_a = \mathbf{x}_b$ proti $H_A : \mathbf{x}_a \neq \mathbf{x}_b$, súhrnne značí testy po zložkách stavového vektora $\mathbf{x}$, t.j. $H : x_a - x_b = 0$ proti $H_A : x_a - x_b \neq 0$, $H : y_a - y_b = 0$ proti $H_A : y_a - y_b \neq 0$, atď. Ako miera zhody bola uvažovaná p-hodnota testu, ktorým bol znamienkový, resp. Wilcoxonov, resp. t-test v závislosti od splnenia predpokladov pre dané testy. Je potrebné poznamenať, že sila testov β vzrastá v poradí ako sú vymenované, na čo bol braný ohľad.

3. Výsledky

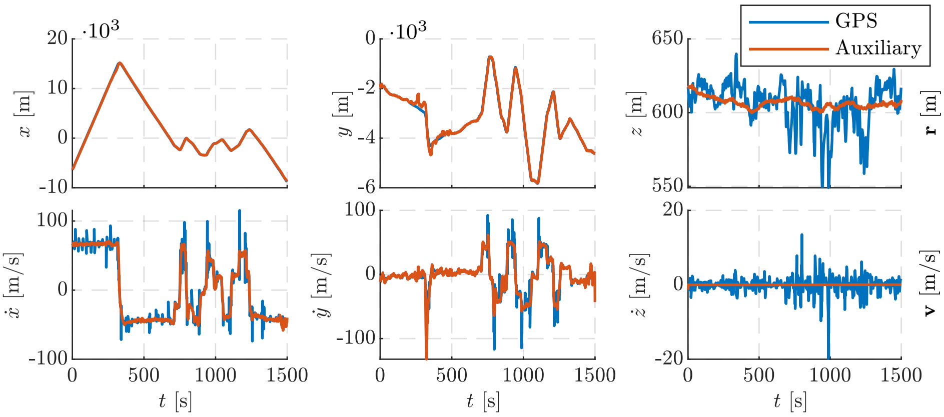
Získané multistatické merania (popísané v odseku 2.2) boli postupne prefiltrované za účelom odhadu kartézskych polôh a rýchlostí $\mathbf{x}^* = \{\mathbf{x}^{*(k)}\}_{k=1}^N$ $(N = 1\,192)$. Boli použité filtre SIR, Auxiliary a Regularized (viď odsek 2.1), ktorých výsledky sú ďalej diskutované (SIS filter nezachytil ani tvar trajektórie, čo sa aj predpokladalo, rovnako aj PF Progressive Proposal [3], ktorý v texte preto ani nebol uvádzaný).

Na Obrázku 6 sú znázornené výsledky filtrácie pre súradnice x^*, y^* filtra Auxiliary v porovnaní s GPS referenciou x^{GPS}, y^{GPS}.



Obr. 6. Trajektória letu v rovine xy.

Na obrázku 7 sú znázornené výsledky filtrácie pre všetky súradnice $\mathbf{x}^*$ v porovnaní s $\mathbf{x}^{\mathrm{GPS}}$. Z obrázku 6 je zjavné, že výsledky filtrácie sú vnútri štvoruholníka $Rx_1Tx_1Rx_2Tx_2 =: \mathcal{Q}$ kvalitnejšie ako v jeho okolí. Je to jednoznačne spôsobené



Obr. 7. Vývoj trajektórie letu v čase pre jednotlivé súradnice stavového vektora $\mathbf{x}$.

výrazne horšou presnosťou meraní pre stav mimo $\mathcal{Q}$ (viď [2]). Preto boli výsledky analyzované zvlášť pre let vnútri (t.j. $\{\mathbf{x}^{*(k)}; [x^{*(k)}, y^{*(k)}]^\top \in \mathcal{Q}$, bude sa skrátene písať $\mathbf{x}^* \in Q$) a mimo $\mathcal{Q}$ (analogicky $\mathbf{x}^* \notin \mathcal{Q}$). V tabuľke 1 sú vypísané pozorované stredné a maximálne hodnoty chyby odhadu vektorov polohy a rýchlosti od GPS.

Ako objektívne zhodnotenie úspešnosti filtrov slúžil test hypotézy $H : \mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{\mathrm{GPS}}$ proti $H_A : \mathbf{x}^* \neq \mathbf{x}^{\mathrm{GPS}}$, resp. výsledná p-hodnota. Pre súradnice $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ bol

Tabuľka 1. Vektorové charakteristiky vedenia leteckého cieľa zvlášť pre polohu a rýchlosť.

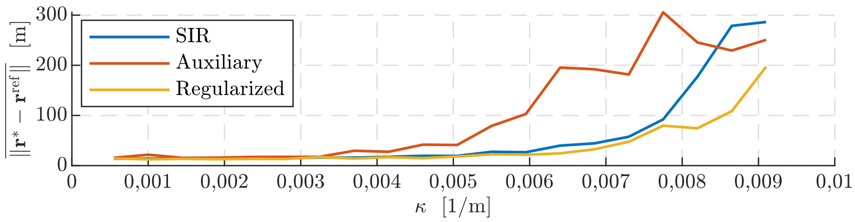
	$\overline{\lVert\mathbf{r}^* - \mathbf{r}^{\mathrm{GPS}}\rVert}$ [m]	$\max\lVert\mathbf{r}^* - \mathbf{r}^{\mathrm{GPS}}\rVert$ [m]	$\overline{\lVert\mathbf{v}^* - \mathbf{v}^{\mathrm{GPS}}\rVert}$ [m/s]	$\max\lVert\mathbf{v}^* - \mathbf{v}^{\mathrm{GPS}}\rVert$ [m/s]
vnútri $Rx_1Tx_1Rx_2Tx_2$ ($\mathbf{x}^* \in \mathcal{Q}$)				
SIR	79, 56	162, 05	10, 33	64, 23
Auxiliary	79, 14	166, 38	10, 33	65, 07
Regularized	87, 66	196, 36	10, 17	63, 95
mimo $Rx_1Tx_1Rx_2Tx_2$ ($\mathbf{x}^* \notin \mathcal{Q}$)				
SIR	236, 83	720, 52	14, 26	109, 67
Auxiliary	245, 83	817, 49	12, 45	113, 21
Regularized	273, 17	1018, 21	13, 64	111, 95

[·] jednotka fyzikálnej veličiny.
$\overline{\lVert\cdot\rVert}$ stredná hodnota z euklidovských noriem vektorov,
$\max\lVert\cdot\rVert$ maximálna hodnota z euklidovských noriem vektorov,

test jemne skreslený vyšším rozptylom v referenčných GPS dátach, čo bolo aj vzaté do úvahy pri vyvodzovaní záverov. Na základe testu bolo vyhodnotené, že všetky filtre mali problém odhadnúť súradnicu z vnútri $\mathcal{Q}$ a pre $\mathbf{x}^* \notin \mathcal{Q}$ aj súradnicu y. Inak najvyššia presnosť voči GPS referenciám bola dosiahnutá s filtrom Auxiliary. Najhoršie obstál filter SIR (pre $\mathbf{x}^* \in \mathcal{Q}$ však stále dosiahol kvalitný výsledok).

Tie isté dáta boli následne prefiltrované SIR filtrom raz s 1 000 (ozn. $\mathbf{x}_s^*$) a potom so 100 000 (ozn. $\mathbf{x}_t^*$) generovanými časticami. Bol vykonaný test hypotézy $H : \mathbf{x}_s^* = \mathbf{x}_t^*$ proti $H_A : \mathbf{x}_s^* \neq \mathbf{x}_t^*$ opäť zvlášť pre $\mathbf{x}_s^* \in \mathcal{Q}$ a $\mathbf{x}_s^* \notin \mathcal{Q}$. Hypotéza bola zamietnutá pre súradnice $y, z, \dot{x}$; $\mathbf{x}_s^* \notin \mathcal{Q}$.

V nastaveniach parametrov filtrov (odsek 2.3) je predpokladaný model pohybu $\mathscr{A}^{(k-1)}$ ako takmer rovnomerný priamočiary pohyb so šumom. Vyvstáva otázka, aká je závislosť tvaru trajektórie od chyby odhadu s takýmto modelom. Pre tieto účely boli vygenerované syntetické dáta s rôznou krivosťou trajektórie κ a rôznou veľkosťou zrýchlenia a, ozn. $\mathbf{x}^{\mathrm{ref}}$. Zaujímavý výsledok bol získaný pre let s konštantným a v rovine $z = 500$ m pre priemernú chybu v odhade polohy, t.j. $\|\mathbf{r}^* - \mathbf{r}^{\mathrm{ref}}\|$ v závislosti od κ. Viď obrázok 8. Pre pohyb s nekonštantným z bola



Obr. 8. Ukážka závislosti chyby odhadu od zakrivenia trajektórie v rovine.

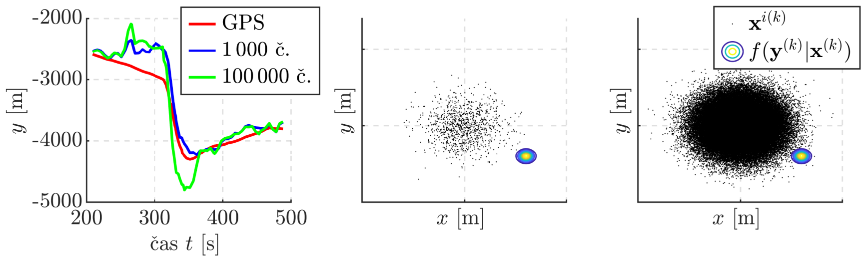
$\|\mathbf{r}^* - \mathbf{r}^{\mathrm{ref}}\|$ od κ nekorelovaná. Obdobne sa ukázalo, že chyba odhadu rýchlosti $\|\mathbf{v}^* - \mathbf{v}^{\mathrm{ref}}\|$ a veľkosť zrýchlenia a nie sú (štatisticky významne) korelované.

4. Diskusia

Na základe výsledkov v 3. kapitole je možno konštatovať vhodnosť použitia PF (konkrétne SIR, Auxiliary a Regularized) na multistatické radarové merania. Je potrebné spomenúť ich stabilitu rozdielu medzi realitou a modelom $\mathscr{A}^{(k-1)}$. Viď obrázok 8 (krivosť $\kappa = 0,005$ môže byť považovaná za hraničnú pre reálne lietadlo). Kriticky citlivý na tento rozdiel sa ukázal Unscented Kálmánov filter [6]. Tiež neboli pozorované štatisticky významné vychýlenia v prípade výpadku meraní z niektorých bistatických párov. V neposlednom rade je potrebné podtrhnúť vysporiadanie sa so silnou nelinearitou v meraniach (model $\mathscr{B}^{(k)}$), ktorá sa ukázala ako kritická pre iné filtre, ako Extended Kálmánov filter [6] alebo Progressive Proposal PF [3]. Medzi slabšie stránky PF sa radí vyššia výpočtová náročnosť (logicky vyplývajúca z generácie náhodných vzoriek).

Nefunkčnosť SIS filtra dokázala prítomnosť silného degeneračného fenoménu pri filtrácii reálnych multistatických meraní. Jeho odstránenie v podobe Auxiliary PF sa ukázalo ako veľmi vhodné. Na druhej strane pre výsledky zo syntetických meraní (obrázok 8), kde šum meraní presne zodpovedá modelu $\mathscr{B}^{(k)}$ sa ukázal najvhodnejší filter Regularized, ktorý zabezpečil dostatočnú diverzitu častíc. Vďaka nej aj dobre zachytil silnejší odklon od predpokladaného modelu systému $\mathscr{A}^{(k-1)}$.

Porovnaním výsledkov 1 000 a 100 000 generovaných častíc sa ukázalo, že výrazné navýšenie počtu vnútri $\mathcal{Q}$ nemá vplyv na presnosť odhadu a mimo $\mathcal{Q}$ sa presnosť zhorší, čo pôsobí paradoxne. Viď obrázok 9a pre y, $\mathbf{x}^* \notin \mathcal{Q}$. To je spôsobené



a) poloha v súradnici y b) 1 000 častíc c) 100 000 častíc

Obr. 9. Ukážka závislosti počtu častíc na presnosť odhadu a vysvetľujúce náčrty problému.

tým, že ak sú merania kvalitné a model $\mathscr{A}^{(k-1)}$ je dostatočne dobrý, aproximácia $f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k)})$ (3) má nenulové hodnoty v oblasti s vyššou hustotou častíc (aj pri 1 000 časticiach), ktoré sa ohodnotia nenulovými váhovými koeficientmi $\omega^{i(k)}$ a ďalšie navyšovanie počtu častíc je zbytočné. Ak sú však merania nekvalitné, v oblasti, kde by boli ohodnotené váhové koeficienty nenulovými hodnotami, nemusia byť žiadne častice. To znamená, že vo výsledku filter chybné merania nezoberie do úvahy (odfiltruje ich). Viď obrázok 9b. Ak je však počet častíc výrazne navýšený (napríklad z 1 000 na 100 000), viď obrázok 9c, bude oveľa pravdepodobnejšie, že v tejto oblasti s nízkou pravdepodobnosťou vyplývajúcou z $f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k-1)})$ bude nejaká častica, resp. niekoľko málo častíc. Tieto však budú ohodnotené významným váhovým koeficientom a odhad $\mathbf{x}^{*(k)}$ bude stiahnutý k chybným meraniam a filter ich neodfiltruje (viď obrázok 9a).

5. Záver

Cieľom článku bolo stručne načrtnúť problematiku optimálneho Bayesovho odhadu so zameraním na jeho riešenie pomocou časticovej filtrácie a jej následná aplikácia na multistatické merania z MSPSR radarového systému. Významnou časťou bolo následné zhodnotenie a analýza výsledkov.

Časticovými filtrami (konkrétne SIR, Auxiliary a Regularized) boli dosiahnuté uspokojivé výsledky. Z diskusie stojí za zmienku pomerne zaujímavé zistenie, že navýšenie počtu častíc môže spôsobiť zníženie presnosti výsledného odhadu. Je to možné považovať za zistenie, ktoré je paradoxné, avšak je v článku objasnené.

Problematiku aplikácie časticových filtrov nie je možné považovať za uzavretú. Z hľadiska nastavenia parametrov by bola v budúcnosti vhodná analýza vplyvu šumu $\boldsymbol{U}^{(k-1)}$. Tiež by bola vhodná analýza vplyvu nepresného počiatočného stavu $\mathbf{x}^{(0)}$ na celkový výsledok. Z hľadiska analýzy by bolo do budúcnosti dobré zistiť, prečo a za akých podmienok chyba odhadu nemá normálne rozdelenie, resp. jej rozdelenie nie je symetrické.

Literatúra

[1] M. Arulampalam, M. Sanjeev, S. MASKELL, N. GORDON, T. CLAPP: *Tutorial on Particle Filters for Online Nonlinear/Non-Gaussian Bayesian Tracking*, IEEE Transactions on Signal Processing **50** (2002), 174–188, doi:10.1109/78.978374.

[2] M. Benko: *Vyhodnocení úspěšnosti filtrů při sledování cílů*, Bakalářská práce, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Brno, 2019.

[3] P. Bunch, S. J. Godsill: *The Progressive Proposal Particle Filter: Better Approximations to the Optimal Importance Density*, Journal of the American Statistical Association **111** (2014), 748–762.

[4] P. Cabalkova, D. Kubal, M. Pelant, R.Plsek, V. Stejskal: *Aspects of target detection in MSPSR system under clutter conditions*, 15th International Radar Symposium (IRS), IEEE, 2014, 1–4, doi:10.1109/IRS.2014.6869190.

[5] Ch. Musso, N. Oudjane, F. Le Gland: *Improving Regularized Particle Filters*, Doucet A., de Freitas N., Gordon N. (eds) Sequential Monte Carlo Methods in Practice. Statistics for Engineering and Information Science, 1–25, Springer, New York, 2001.

[6] E. A. Wan, R. Van der Merwe: *The unscented Kalman filter for nonlinear estimation*, Proceedings of the IEEE 2000 Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium (Cat. No. 00EX373), IEEE, 2000, 153–158, doi:10.1109/ASSPCC.2000.882463.

Matej Benko, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: `matej.benko@vutbr.cz`

Pavel Kulmon, Oddělení výzkumu a analýzy, ERA a.s., Nekázanka 880/11, 110 00 Praha, Česká republika,
e-mail: `p.kulmon@era.aero`