MATEMATICKÉ KYVADLO A FUNKCIONÁLNA ANALÝZA

DANIEL ČAPUTA

Abstrakt. Tento článok sa zaoberá existenciou (a prípadnou jednoznačnosťou) periodických riešení nelineárneho modelu matematického kyvadla so spojitou, nepárnou a periodickou pravou stranou. V článku je naznačené odvodenie diferenciálnej rovnice výchylky kyvadla a prevedenie príslušného okrajového problému na ekvivalentnú integrálnu rovnicu. Jej zovšeobecnením je integrálna rovnica tzv. Hammersteinovho typu. Na túto rovnicu sú aplikované vety o pevnom bode, ktorých dôsledkom je existencia, resp. jednoznačnosť jej riešenia. Tieto výsledky sú potom aplikované na model matematického kyvadla a je hlbšie diskutovaná podmienka pre jednoznačnosť riešenia.

1. Úvod

Matematické kyvadlo je jedným z najjednoduchších modelov nelineárneho oscilátora, napriek tomu ale môže jeho analýza viesť k netriviálnym problémom. Jedným z nich je otázka existencie (a jednoznačnosti) periodických riešení nelineárneho modelu s pravou stranou.

Štruktúra článku je nasledovná. V ďaľšej sekcii naznačíme odvodenie pohybovej rovnice matematického kyvadla, priblížime vybrané úseky z histórie problematiky a popíšeme možnú linearizáciu rovnice a problémy, ktoré prináša. V sekcii 3 sa budeme zaoberať naším problémom – dokázať existenciu (a prípadne jednoznačnosť) nepárneho, periodického riešenia nelinárnej diferenciálnej rovnice matematického kyvadla. Túto úlohu vieme previesť na okrajový problém, ktorý prepíšeme na ekvivalentnú integrálnu rovnicu. Tú zovšeobecníme na integrálnu rovnicu tzv. Hammersteinovho typu a na túto rovnicu budeme aplikovať Schauderovu (resp. Banachovu) vetu o pevnom bode. Posledná časť tejto sekcie je venovaná podmienke pre jednoznačnosť riešenia v priestore L^p, kde sú odvodené nové výsledky.

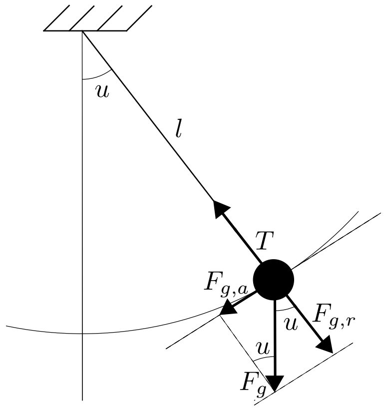
2. Matematické kyvadlo

Uvažujme hmotný bod o hmotnosti m zavesený na konci rovného, tenkého lana dĺžky l, ktorého druhý koniec je pevne ukotvený. Počas pohybu si lano zachováva

2010 *MSC.* Primární 34B15.

Klíčová slova. matematické kyvadlo, Banachova veta o pevnom bode, Schauderova veta o pevnom bode, Hammersteinova integrálna rovnica.

Vedúcim bakalárskej práce autora bol Pavel Řehák z Ústavu matematiky FSI VUT v Brně.



tvar – nedeformuje sa a jeho vlastnú hmotnosť zanedbávame. Hmotný bod sa nachádza v homogénnom gravitačnom poli s gravitačným zrýchlením g, odporové sily prostredia a trenie neuvažujeme.

Po vychýlení z rovnovážnej polohy pôsobia na hmotný bod dve sily. Ťahová sila od lana T pôsobí vždy v radiálnom smere, na pohybe sa nepodieľa. Sila spôsobená gravitačným zrýchlením $F_g = mg$ sa rozdelí na radiálnu a axiálnu zložku. Radiálna zložka $F_{g,r}$ je v rovnováhe s ťahovou silou od lana, axiálna zložka $F_{g,a} = -mg \sin u$, kde u je uhol medzi kyvadlom a vertikálou, sa snaží vrátiť hmotný bod do rovnovážnej polohy. Za týchto predpokladov vieme odvodiť pohybovú rovnicu hmotného bodu

$$u'' + \alpha^2 \sin u = 0,$$

kde u je uhol medzi hmotným bodom a vertikálou a $\alpha = \sqrt{g/l}$; číslo α sa vetšinou nazýva vlastná frekvencia kyvadla. Ak na hmotný bod pôsobí aj externá sila $f(x)$, pohybová rovnica vyzerá nasledovne

$$u'' + \alpha^2 \sin u = f(x). \tag{1}$$

Napriek veľmi jednoduchým predpokladom sme dospeli k nelineárnej diferenciálnej rovnici druhého rádu, ktorú prakticky nevieme analyticky riešiť.

2.1. História

V tejto časti priblížime vybrané úseky histórie problematiky súvisiace s naším problémom, viac informácii sa dá nájsť napríklad v [3]. Jednou z najdôležitejších prác týkajúcou sa rovnicami nútených kmitov kyvadla, bol článok nemeckého matematika Hamela publikovaný v časopise *Mathematische Annalen* v roku 1922. Hamel v tomto článku nadviazal na Duffingovu monografiu z roku 1918, ktorá sa zaoberala približným určením periodických riešení rovnice (tzv. Duffingovej rovnice)

$$u'' + au - cu^3 = b \sin x,$$

kde sa využili prvé dva členy Taylorovho rozvoja $\sin u$. Hamel vo svojom článku ako prvý dokázal existenciu 2π-periodického riešenia rovnice

$$u'' + a \sin u = b \sin x \tag{2}$$

pomocou variačného počtu. Jeho dôkaz založený na variačnom princípe sa dá rozšíriť na všeobecnejšiu pravú stranu, kde $b \sin x$ je nahradená ľubovoľnou spojitou, 2π-periodickou funkciou so strednou hodnotou nula. Hamel sa ďalej zaoberal existenciou nepárnych riešení rovnice (2), kde s využitím nepárneho a periodického charakteru úlohy prevedie okrajový problém, pozostávajúci z (2) a $u(0) = u(\pi) = 0$, na ekvivalentnú nelineárnu integrálnu rovnicu a pomocou metódy postupných aproximácií dokáže jednoznačnosť riešenia za predpokladu $a < 1$.

Článok Birkhoffa a Kellogga o pevných bodoch publikovaný v tom istom roku obsahuje aplikáciu, ktorá by implikovala existenciu riešenia pre každé a. Touto časťou článku inšpiruje Hammersteina k jeho výskumu nelineárnych integrálnych rovníc. Hamel v tomto článku použil viaceré zo základných metód nelineárnej analýzy, pričom niektoré z nich sám vymyslel, čím ďalej rozvinul záujem o túto disciplínu.

Po Hamelovi sa problematike periodických riešení rovnice (2) venovali viacerí matematici. Záujem o rovnicu nútených kmitov kyvadla znovu vzbudil Fučík v roku 1970, keď skúmal periodické riešenia rovnice

$$-u'' + \sin u = f(x),$$

a napriek tomu, že dosiahol len čiastočné výsledky, jeho práca motivovala Castra, Dancera a Willema, ktorí využili pri analýze nútených kmitov variačný počet, a po viac ako šesťdesiatich rokoch po Hamelovom prvom periodickom riešení bolo dokázané druhé periodické riešenie. Poznamenajme ešte, že na začiatku deväťdesiatych rokov sa stala rovnica nútených kmitov (dvojitého) kyvadla jedným zo symbolov pre teóriu chaosu.

2.2. Linearizácia

Nakoľko $\lim_{u\to 0} \sin u/u = 1$, pre malé výchylky u vieme približne aproximovať sinus jeho argumentom. Použitím tohto odhadu v rovnici (1) dostaneme lineárnu diferenciálnu rovnicu v tvare

$$u'' + \alpha^2 u = f(x), \tag{3}$$

ktorú vieme analyticky vyriešiť. Ak je budiaca sila $f(x)$ periodická, s uhlovou frekvenciou ω, tak má táto rovnica periodické riešenie s rovnakou uhlovou frekvenciou pre každé ω, také že vlastná frekvencia kyvadla nie je ich prirodzeným násobkom. Z fyzikálneho pohľadu to znamená, že ak na kyvadlo pôsobí oscilačná sila, tak pri istých počiatočných podmienkach kyvadlo začne kmitať v súlade s touto silou. Problém nastáva najmä, ak má vonkajšia sila rovnakú uhlovú frekvenciu ako je vlastná frekvencia kyvadla. V tomto prípade neexistuje periodické riešenie rovnice (3) a všetky riešenia sú neobmedzené, hovoríme o rezonancii.

Jednou z možností, ako mať lineárny model nevykazujúci tento jav, je nezanedbanie trecích a odporových síl. Pohybová rovnica takéhoto systému môže vyzerať nasledovne

$$u'' + cu' + \alpha^2 u = f(x), \tag{4}$$

kde tlmiaci člen má podobu výrazu s prvou deriváciou a c je konštanta. Ak v rovnici zahrnieme tieto sily, tak rezonancia nenastane a rovnica (4) má vždy periodické riešenie. Z fyzikálneho hľadiska to môžeme vysvetliť tak, že konečná sila nemôže vyprodukovať nekonečnú odozvu, pri prítomnosti trecích síl je amplitúda pohybu obmedzená. Tento fakt naznačuje, že pre periodickú vonkajšiu silu bude vždy existovať periodická odozva, rezonancia nenastane.

Prirodzená otázka je, či nelinearita v našom modeli dokáže rovnako, ako trecie sily, zamedziť rezonancii, a teda, či má rovnica (1) vždy periodické riešenie, čo intuitívne očakávame.

3. Analýza rovnice matematického kyvadla

Predpokladajme, že funkcia $f(x)$ – sila pôsobiaca na kyvadlo, je spojitá, nepárna a periodická funkcia s uhlovou frekvenciou ω a zaujíma nás, či má za týchto predpokladov rovnica (1) periodické riešenie. Zjednodušme problém preškálovaním času tak, aby vonkajšia sila mala periódu 2. Zavedením substitúcie $t = \omega x/\pi$ nadobudne rovnica (1) tvar

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\alpha^2\pi^2}{\omega^2}\sin u = f(t)\frac{\pi^2}{\omega^2}.$$

Označme

$$\beta = \frac{\alpha\pi}{\omega} \quad \text{a} \quad F(t) = f(t)\frac{\pi^2}{\omega^2}. \tag{5}$$

Rovnica potom vyzerá nasledovne

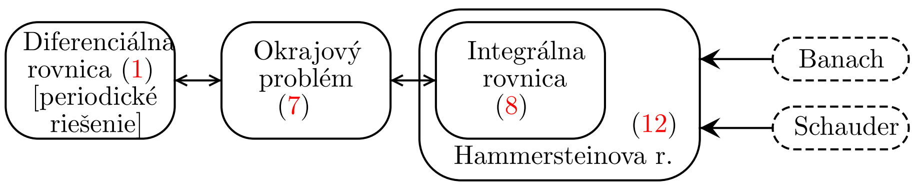
$$u'' + \beta^2 \sin u = F(t), \tag{6}$$

kde $u'' = \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2}$. Budeme redukovať problém nájdenia periodického riešenia (6) na problém nájdenia riešenia dvojbodovej okrajovej úlohy na $[0,1]$. Predpokladajme, že vieme nájsť funkciu $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ tak, že $u(0) = u(1) = 0$ a $u(t)$ je riešením rovnice (6) (v zmysle, že u je spojitá funkcia so spojitými deriváciami prvého a druhého rádu a u spĺňa rovnicu (6) pre všetky $t \in [0,1]$). Potom, vzhľadom na nepárny a periodický charakter úlohy vieme túto funkciu rozšíriť najprv na interval $[-1,1]$, kde položíme $u(t) = -u(-t)$ pre $t \in [-1,0]$ a potom periodicky na celú reálnu osu. Takto obdržaná funkcia u je 2-periodickým riešením rovnice na $\mathbb{R}$ a je nepárna.

Riešime okrajový problém

$$\begin{aligned} u'' + \beta^2 \sin u &= F(t), \\ u(0) = u(1) &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

na $[0,1]$. Prehľadový obrázok načrtáva, ako budeme postupovať. Využitím periodického a nepárneho charakteru úlohy a preškálovania času sme dokázali prepísať diferenciálnu rovnicu (1) na okrajový problém (7), ktorý vieme previesť na ekvivalentnú integrálnu rovnicu (8), viď nasledujúca sekcia. Túto rovnicu zovšeobecníme na Hammersteinovu integrálnu rovnicu (12), pre ktorú pomocou Schauderovej vety o pevnom bode dokážeme existenciu riešenia a pomocou Banachovej vety o pevnom bode odvodíme podmienku, za ktorej bude existovať jej jednoznačné riešenie. Tieto poznatky potom aplikujeme na našu konkrétnu rovnicu.



3.1. Prevedenie okrajovej úlohy na integrálnu rovnicu

Teraz ukážeme, že vieme okrajový problém (7) prepísať do ekvivalentnej integrálnej rovnice

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)h(s,u(s))\,\mathrm{d}s, \tag{8}$$

v priestore $C[0,1]$, kde

$$G(t,s) = \begin{cases} t(s-1) & \text{pre } 0 \le t \le s \le 1, \\ (t-1)s & \text{pre } 0 \le s < t \le 1 \end{cases} \quad \text{a} \quad h(s,t) = F(s) - \beta^2 \sin t.$$

Veta 3.1. *Funkcia $u(t)$ je riešením okrajového problému (7) práve vtedy, ak je spojitým riešením integrálnej rovnice (8).*

Dôkaz. Dokážme najprv smer „$\Leftarrow$“. Napíšme integrálnu rovnicu (8) v tvare

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^t (t-1)sh(s,u(s))\,\mathrm{d}s + \int_t^1 t(s-1)h(s,u(s))\,\mathrm{d}s \\ &= (t-1)\int_0^t sh(s,u(s))\,\mathrm{d}s + t\int_t^1 (s-1)h(s,u(s))\,\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{9}$$

pre $t \in [0,1]$. Dosadením do tohto vyjadrenia integrálnej rovnice ľahko overíme okrajové podmienky. Toto vyjadrenie dvakrát zderivujeme podľa premennej t (kde integrály derivujeme ako funkciu hornej resp. dolnej medze) a postupne dostávame

$$\begin{aligned} u'(t) &= \int_0^1 sh(s,u(s))\,\mathrm{d}s - \int_t^1 h(s,u(s))\,\mathrm{d}s, \\ u''(t) &= h(t) \end{aligned}$$

pre $t \in [0,1]$, čím sme dokázali smer „$\Leftarrow$“.

Ukážme, že platí aj implikácia „$\Rightarrow$“. Výjdeme z rovnice

$$u''(t) = h(t,u(t)) \tag{10}$$

pre $t \in [0,1]$. Túto rovnicu dvakrát zintegrujeme od 0 do t a využitím okrajových podmienok, Fubiniovej vety a úpravou postupne získame

$$u(t) = \int_0^t (t-1)sh(s,u(s))\,\mathrm{d}s + \int_t^1 t(s-1)h(s,u(s))\,\mathrm{d}s, \tag{11}$$

a teda

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)h(s,u(s))\,\mathrm{d}s$$ [1]

pre $t \in [0,1]$. □

Poznamenajme, že na dôkaz tohto tvrdenia nám stačili len základné výsledky z diferenciálneho a integrálneho počtu.

Ak chceme dokázať iba existenciu riešenia nášho okrajového problému (7) pomocou integrálnej rovnice (8), stačí nám iba smer „$\Leftarrow$“, avšak pre dôkaz jednoznačnosti pomocou jednoznačné riešiteľnosti integrálnej rovnice potrebujeme aj

[1] Funkcia $G(t,s)$ je tzv. Greenova funkcia príslušného problému.

smer „⇒“. Ak by platila len implikácia „⇐“, tak všeobecne nevieme vylúčiť existenciu riešenia u^* okrajového problému takého, že u^* nespĺňa integrálnu rovnicu.

3.2. Aplikácia Schauderovej vety

Uvažujme nelineárnu integrálnu rovnicu (tzv. Hammersteinovu rovnicu) v tvare

$$u(x) = \int_a^b K(x,y) f(y, u(y))\, \mathrm{d}y, \tag{12}$$

kde K, f sú dané funkcie a u je neznáma funkcia. Riešením rovnice (12) máme na mysli spojitú funkciu, ktorá spĺňa túto rovnicu pre každé $x \in [a,b]$. Ak dosadíme $K(x,y) = G(x,y)$ a $f(x,u(x)) = h(x,u(x)) = F(x) - \beta^2 \sin u(x)$, tak vidíme, že rovnica (8) je špeciálnym prípadom rovnice (12). Ukážeme, že rovnica (12) spĺňa za určitých predpokladov podmienky Schauderovej vety o pevnom bode, čím dokážeme existenciu riešenia tejto rovnice.

Veta 3.2. *Predpokladajme, že*

- $K(x,y)$ *je spojitá funkcia pre* $a \le x, y \le b$,
- $f(y,z)$ *je spojitá a ohraničená funkcia pre* $a \le y \le b$ *a pre všetky* $z \in \mathbb{R}$.

Potom má rovnica (12) *spojité riešenie.*

Dôkaz. Pracujme v Banachovom priestore $(C[a,b], \|\cdot\|_C)$. Definujme množinu

$$S = \{u \in C[a,b]\,;\, \|u\|_C \le D\},$$

kde hodnotu konštanty D určíme neskôr. Ďalej definujme operátor $F : S \to C[a,b]$ predpisom

$$(Fu)(x) = \int_a^b K(x,y) f(y,u(y))\, \mathrm{d}y.$$

Z predpokladu vety je funkcia K spojitá na kompaktnom intervale $[a,b] \times [a,b]$, z čoho vyplýva, že je ohraničená, tj. $|K(x,y)| \le A$ pre nejaké A a všetky $x, y \in [a,b] \times [a,b]$. Podobne, funkcia f je podľa predpokladu ohraničená, a teda existuje B také, že $|f(y,z)| \le B$ pre všetky $y, z \in [a,b] \times \mathbb{R}$. Hodnotu konštanty D definujeme ako

$$D = AB(b-a).$$

Chceme aplikovať Schauderovu vetu na operátor F. Potrebujeme overiť, že množina S je neprázdná, ohraničená, uzavrená a konvexná a operátor F je spojitý a zobrazuje S do seba ($F(S) \subseteq S$) tak, že $F(S)$ je relatívne kompaktná množina.

Relatívnu kompaktnosť $F(S)$ vieme dokázať pomocou Arzeláovej-Ascoliho vety, kde sa pri dôkaze rovnomocnej spojitosti funkcií z $F(S)$ využije fakt, že spojitá funkcia na kompaktnom intervale je rovnomerne spojitá. Tento fakt využijeme aj pri dôkaze spojitosti operátoru F, alternatívne ju môžeme dokázať pomocou Lebesgueovej vety o dominantnej konvergencii.

Všetky predpoklady Schauderovej vety o pevnom bode sú splnené, a teda F má pevný bod v S, ktorý je zrejme riešením integrálnej rovnice (12). □

Vráťme sa k integrálnej rovnici (8).

Veta 3.3. *Integrálna rovnica* (8) *má spojité riešenie.*

Dôkaz. Plynie z predchádzajúcej vety a úvahy zo začiatku sekcie 3.2. □

Kombináciou úvahy zo začiatku tretej kapitoly, vety 3.1 a vety 3.3 dostávame nasledujúci výsledok.

Veta 3.4. *Nech je sila f pôsobiaca na kyvadlo spojitá, nepárna a periodická. Potom má rovnica výchylky matematického kyvadla* (1) *spojité, nepárne a periodické riešenie s rovnakou periódou ako f.*

3.3. Aplikácia Banachovej vety

Opäť uvažujme nelineárnu integrálnu rovnicu (12) (Hammersteinovu rovnicu). V predchádzajúcej časti sme ukázali existenciu riešenia tejto rovnice za pomerne všeobecných podmienok. Teraz nás bude zaujímať, za akých podmienok môžeme aplikovať Banachovu vetu, a teda zaručiť jednoznačnosť riešenia.

Veta 3.5. *Nech platia predpoklady vety 3.2 a nech existuje spojitá funkcia $N(x,y)$ taká, že*

$$|K(x,y)\,[f(y,z_1)-f(y,z_2)]| \le N(x,y)\,|z_1-z_2|$$

pre $x,y\in[a,b]$ a $z_1,z_2\in\mathbb{R}$ a $\max_{x\in[a,b]}\int_a^b |N(x,y)|\,\mathrm{d}y = M$, kde $M<1$. Potom má rovnica (12) *jediné spojité riešenie.*

Dôkaz. Pracujeme v Banachovom priestore $(C\,[a,b]\,,\|\cdot\|_C)$. Definujme operátor $F : C\,[a,b] \to C\,[a,b]$ predpisom

$$(Fu)(x) = \int_a^b K(x,y)f(y,u(y))\,\mathrm{d}y.$$

Pre $u\in C\,[a,b]$ je integrand spojitá funkcia na $[a,b]\times[a,b]$, a teda platí, že Fu je spojité na $[a,b]$, z čoho vyplýva, že F zobrazuje priestor $C\,[a,b]$ do seba. Kontraktivita operátoru sa ukáže pomocou odhadu $\left|\int f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int f(x)\,\mathrm{d}x$ a využitím predpokladu vety. Predpoklady Banachovej vety sú splnené, z čoho plynie, že operátor F má práve jeden pevný bod, ktorý je zrejme jediným riešením rovnice (12). □

Vráťme sa k integrálnej rovnici (8). Pomocou vety 3.5 ukážeme, za akých podmienok má táto rovnica jediné spojité riešenie.

Veta 3.6. *Predpokladajme, že $\alpha < (2\sqrt{2}/\pi)\omega$, kde ω je uhlová frekvencia sily pôsobiacej na kyvadlo a α je vlastná frekvencia kyvadla. Potom má rovnica* (8) *jediné spojité riešenie.*

Dôkaz. Pre konštantu β definovanú v (5) využitím predpokladu vety dostávame

$$\beta = \frac{\alpha\pi}{\omega} < \frac{2\sqrt{2}\pi\omega}{\pi\omega} = 2\sqrt{2}.$$

Položme $N(t,s) = \beta^2\,|G(t,s)|$. Potom

$$\begin{aligned}|G(t,s)\,[h(s,z_1)-h(s,z_2)]| &= \beta^2\,|G(t,s)\,[\sin(z_1)-\sin(z_2)]| \\ &\le \beta^2\,|G(t,s)\,|z_1-z_2|| = N(t,s)\,|z_1-z_2|\,.\end{aligned}$$

Na intervale $[0,1] \times [0,1]$ platí $G(t,s) \leq 0$, a teda $|G(t,s)| = -G(t,s)$. Platí

$$\begin{aligned}\max_{t\in[0,1]} \int_0^1 |N(t,s)| \,\mathrm{d}s &= \beta^2 \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 -G(t,s)\,\mathrm{d}s \\ &= \beta^2 \max_{t\in[0,1]} \int_0^t (1-t)s\,\mathrm{d}s + \int_t^1 t(1-s)\,\mathrm{d}s \\ &= \beta^2 \max_{t\in[0,1]} \left(\frac{-t^2}{2} + \frac{t}{2}\right) = \frac{\beta^2}{8} < \frac{1}{8}(2\sqrt{2})^2 = 1,\end{aligned}$$

a teda predpoklady vety 3.5 sú splnené, čím je zaručené jednoznačná riešiteľnosť integrálnej rovnice (8). □

Znova uvažujme integrálnu rovnicu (12). Podmienku jednoznačnosti vieme vylepšiť prácou v $L^2[a,b]$.

Veta 3.7. *Nech platia predpoklady vety 3.2*[2] *a nech existuje merateľná funkcia $N(x,y)$ taká, že*

$$|K(x,y)\,[f(y,z_1) - f(y,z_2)]| \leq N(x,y)\,|z_1 - z_2|$$

pre všetky $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ a $x, y \in [a,b]$, $\int_a^b N^2(x,y)\,\mathrm{d}x < \infty$ pre všetky $y \in [a,b]$ a $\sqrt{\int_a^b \left(\int_a^b N^2(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y} = M$, kde $M < 1$. Potom má rovnica (8) jediné spojité riešenie.

Dôkaz. Pracujeme v Banachovom priestore $L^2[a,b]$ s normou

$$\|u\|_2 = \sqrt{\int_a^b |u(x)|^2 \,\mathrm{d}x}.$$

Definujme operátor $F : L^2[a,b] \to L^2[a,b]$ predpisom

$$(Fu)(x) = \int_a^b K(x,y) f(y,u(y))\,\mathrm{d}y.$$

Pomocou Cauchy-Schwarzovej nerovnosti, predpokladov a rôznych odhadov sa ukáže, že F je kontrakcia a $Fu \in L^2[a,b]$ pre $u \in L^2[a,b]$. Predpoklady Banachovej vety sú splnené, z čoho plynie, že operátor F má práve jeden pevný bod, ktorý je zrejme jediným riešením rovnice (12) v $L^2[a,b]$.

Všeobecne nám tento výsledok nemusí implikovať existenciu a jednoznačnosť spojitého riešenia, avšak uvažujme nasledujúcu myšlienku. Nech $u^\times, u^*$ sú rôzne spojité riešenia (12). Poznamenajme, že existenciu aspoň jedného spojitého riešenia zaručuje veta 3.2 (ktorá nepotrebuje žiadne dodatočné predpoklady). Ak sú $u^\times, u^*$ dve rôzne spojité funkcie, tak sa líšia na množine nenulovej miery, a teda sú rôzne aj v L^2 zmysle. Spojitá funkcia na kompaktnom intervale je určite integrovateľná s kvadrátom, z čoho plynie, že $u^\times, u^* \in L^2[a,b]$, odkiaľ vďaka jednoznačnosti v $L^2[a,b]$ dostávame, že $u^\times = u^*$, čo je spor. □

[2]Na dôkaz stačia aj slabšie predpoklady – menovite $K, f \in L^2[a,b]$, avšak v zmysle našej úlohy ponechávame tvrdšie predpoklady.

Aplikujme vetu 3.7 na integrálnu rovnicu (8).

Veta 3.8. *Predpokladajme, že $\alpha < (\sqrt[4]{90}/\pi)\omega$, kde ω je uhlová frekvencia sily pôsobiacej na kyvadlo a α je vlastná frekvencia kyvadla. Potom má rovnica* (8) *jediné spojité riešenie.*

Dôkaz. Pre konštantu β definovanú v (5) využitím predpokladu vety dostávame

$$\beta = \frac{\alpha\pi}{\omega} < \frac{\pi}{\omega}\frac{\sqrt[4]{90}\omega}{\pi} = \sqrt[4]{90}.$$

Opäť položme $N(t,s) = \beta^2 |G(t,s)|$. Potom

$$\begin{aligned}\int_a^b \left(\int_a^b N^2(t,s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \beta^4 G^2(t,s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t \\ &= \beta^4 \int_0^1 \left(\int_0^t (t-1)^2 s^2\,\mathrm{d}s + \int_t^1 t^2(s-1)^2\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t \\ &= \beta^4 \int_0^1 \left(\frac{t^4}{3} - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^2}{3}\right)\mathrm{d}t = \frac{\beta^4}{90} = M^2,\end{aligned}$$

kde

$$M = \frac{\beta^2}{\sqrt{90}} < \frac{\left(\sqrt[4]{90}\right)^2}{\sqrt{90}} = 1.$$

Rovnica (8) spĺňa podmienky vety 3.7, a teda existuje jej jediné spojité riešenie. □

Poznámka 3.9. (i) Približným vyčíslením podmienky pre jednoznačnosť riešenia v priestore $C[a,b]$ získame $\alpha < (2\sqrt{2}/\pi)\omega \doteq 0{,}9003\,\omega$. Ak urobíme to isté pre podmienku v priestore $L^2[a,b]$, dostaneme $\alpha < (\sqrt[4]{90}/\pi)\omega \doteq 0{,}9804\,\omega$. Prácou v $L^2[a,b]$ sme si skutočne polepšili, pretože nám umožňuje brať za budiacu silu funkcie aj s nižšou periódou, a teda celkovo viac funkcií.

(ii) Ukázali sme, že náš okrajový problém bude mať jednoznačné riešenie, ak bude, zhruba povedané, frekvencia budiacej sily väčšia ako vlastná frekvencia kyvadla.

(iii) Jednoznačnosť riešenia integrálnej rovnice (8) sme mohli dokázať jednoduchším spôsobom, ktorý je obdobný dôkazu vety 3.2 a je založený na ohraničenosti funkcie G. Poskytuje však horšiu podmienku pre jednoznačnosť riešenia (8). Definujme operátor $F : C[0,1] \to C[0,1]$ predpisom

$$(Fu)(t) = \int_0^1 G(t,s)\left[F(s) - \beta^2 \sin(u(s))\right]\,\mathrm{d}s.$$

Platí

$$\begin{aligned}\|Fu_1 - Fu_2\|_C &\le \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 \beta^2 \left|G(t,s)\left[\sin(u_2(s)) - \sin(u_1(s))\right]\right|\,\mathrm{d}s \\ &\le \frac{\beta^2}{4}\int_0^1 \|u_2 - u_1\|_C\,\mathrm{d}s = \frac{\beta^2}{4}\|u_1 - u_2\|_C\,,\end{aligned}$$

kde sme využili fakt, že $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ a $\max\{|G(t,s)|, t, s \in [a,b]\} = 1/4$. Ak chceme, aby bola splnená podmienka kontraktivity, potrebujeme, aby

$$\frac{\beta^2}{4} = \frac{\alpha^2\pi^2}{4\omega^2} < 1, \text{ tj. } \alpha < \frac{2}{\pi}\omega \doteq 0{,}6366\,\omega,$$

a vidíme, že podmienka získaná jednoduchším spôsobom je skutočne výrazne horšia v porovnaní s tými získanými vo vyššie uvedených prístupoch.

3.4. Podmienka pre jednoznačnosť riešenia v priestore L^p

Ako sme už poznamenali, prácou v $L^2[a,b]$ sme si oproti práci v $C[a,b]$ polepšili. Prirodzená otázka je, či sa dá podmienka ďalej vylepšiť prácou v $L^p[a,b]$ s vhodne zvoleným p. Ukážeme, že sa to dá. V tejto časti budú odvedené nové výsledky.

Uvažujme rovnicu (12). Pracujme v priestore $L^p[a,b]$ s normou

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

Nech platia predpoklady vety 3.2. Ďalej predpokladajme, že existuje merateľná funkcia $N(x,y)$ taká, že

$$|K(x,y)\,[f(y,z_1) - f(y,z_2)]| \leq N(x,y)\,|z_1 - z_2|$$

pre všetky $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ a $x, y \in [a,b]$, $\int_a^b N^q(x,y)\,\mathrm{d}y < \infty$ pre všetky $y \in [a,b]$ a $\int_a^b \left(\int_a^b N^q(x,y)\,\mathrm{d}y\right)^{p/q} \mathrm{d}x < \infty$, kde $1 < p, q < \infty$ sú čísla zviazané vzťahom $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Definujme operátor $F : L^p[a,b] \to L^p[a,b]$ predpisom

$$(Fu)(x) = \int_a^b K(x,y) f(y,u(y))\,\mathrm{d}y.$$

Overme, že $Fu \in L^p[a,b]$. Nech $u \in L^p[a,b]$. Potom

$$\begin{aligned}|(Fu)(x)| &\leq |(Fu)(x) - (F0)(x)| + |(F0)(x)| \\ &\leq \int_a^b N(x,y)\,|u(y)|\,\mathrm{d}y + \int_a^b K(x,y) f(y,0)\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

kde 0 chápeme ako nulovú funkciu. Oba členy na pravej strane nerovnosti patria do $L^p[a,b]$. Druhý, pretože ide o spojitú funkciu na kompaktnom intervale a integrovateľnosť prvého plynie z Hölderovej nerovnosti a predpokladov, a teda $Fu \in L^p[a,b]$. Nájdime podmienku pre kontraktivitu operátoru. Využitím predpokladu a Hölderovej nerovnosti dostávame

$$\begin{aligned}|(Fu_1)(x) - (Fu_2)(x)| &\leq \int_a^b |K(x,y)\,[f(y,u_1(y)) - f(y,u_2(y))]|\,\mathrm{d}y \\ &\leq \int_a^b N(x,y)\,|u_1(y) - u_2(y)|\,\mathrm{d}y \leq \|u_1 - u_2\|_p \left(\int_a^b N^q(x,y)\,\mathrm{d}y\right)^{1/q}.\end{aligned}$$

Platí

$$\|Fu_1 - Fu_2\|_p \le \left\| \|u_1 - u_2\|_p \left(\int_a^b N^q(x,y)\,\mathrm{d}y \right)^{1/q} \right\|_p = \|u_1 - u_2\|_p \,\mathrm{I}_p,$$

kde

$$\mathrm{I}_p = \left(\int_a^b \left(\int_a^b N^q(x,y)\,\mathrm{d}y \right)^{p/q} \mathrm{d}x \right)^{1/p}.$$

Prejdime k nášmu problému, kde podobne ako v dôkaze vety 3.6 (resp. vety 3.8) vieme zvoliť tvar funkcie $N(x,y) = \beta^2\,|G(x,y)|$. Potom

$$\begin{aligned}\int_a^b N^q(x,y)\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \beta^{2q}\,|G(x,y)|^q\,\mathrm{d}y \\ &= \beta^{2q} \left(\int_0^x (1-x)^q\, y^q\,\mathrm{d}y + \int_x^1 (1-y)^q x^q\,\mathrm{d}y \right) \\ &= \beta^{2q}(1-x)^q x^q \frac{1}{q+1},\end{aligned}$$

kde sme využili, že $|G(x,y)| = -G(x,y)$ a

$$|G(x,y)|^q = \begin{cases} x^q(1-y)^q & \text{pre } 0 \le x \le y \le 1 \\ (1-x)^q y^q & \text{pre } 0 \le y < x \le 1 \end{cases}.$$

Z podmienky $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ plynie $q = \dfrac{p}{p-1}$. Potom

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_p = \left(\int_a^b \left(\int_a^b N^q(x,y)\,\mathrm{d}y \right)^{p/q} \mathrm{d}x \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_0^1 \left(\beta^{2q} \frac{(1-x)^q x^q}{q+1} \right)^{p/q} \mathrm{d}x \right)^{1/p} \\ &= \beta^2 \left(\int_0^1 \frac{(1-x)^p x^p}{\left(\frac{p}{p-1}+1\right)^{p-1}}\,\mathrm{d}x \right)^{1/p} \\ &= \beta^2 \left(\frac{p}{p-1} + 1 \right)^{(1-p)/p} \left(\int_0^1 (1-x)^p x^p\,\mathrm{d}x \right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Binomický integrál, ktorý sa objavil na pravej strane, sa dá vyjadriť v tvare

$$\int_0^1 (1-x)^p x^p\,\mathrm{d}x = \mathrm{B}(p+1, p+1),$$

kde B je beta funkcia. Potom

$$\mathrm{I}_p = \beta^2 \left(\frac{p}{p-1}+1\right)^{(1-p)/p} \sqrt[p]{\mathrm{B}\,(p+1,p+1)}.$$

Ak chceme, aby bol operátor kontraktívny, potrebujeme $\mathrm{I}_p < 1$. Odtiaľ s využitím definície β v (5) dostávame predpis pre správanie sa podmienky pre jednoznačnosť riešenia integrálnej rovnice (8) pre všeobecné p

$$\alpha < \frac{1}{\pi}\left(\frac{p}{p-1}+1\right)^{(p-1)/2p} \sqrt[-2p]{\mathrm{B}\,(p+1,p+1)}\,\omega, \tag{13}$$

kde ω je uhlová frekvencia sily pôsobiacej na kyvadlo a α je vlastná frekvencia kyvadla. Označme

$$k(p) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{p}{p-1}+1\right)^{(p-1)/2p} \sqrt[-2p]{\mathrm{B}\,(p+1,p+1)}.$$

Potom

$$\alpha < k(p)\,\omega.$$

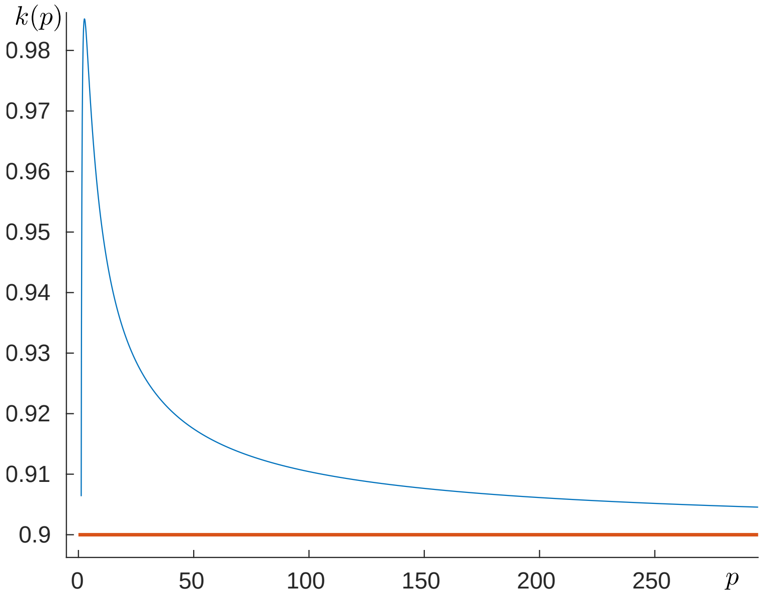
Je zrejmé, že hľadáme také p, aby bolo $k(p)$ čo najväčšie. Hľadať extrém analyticky je príliš náročné, nájdeme ho numericky s grafickou interpretáciou. Graf funkcie $k(p)$ je na obrázku 1, kde je naznačená aj hodnota konštanty pre prácu v priestore $C\,[0,1]$ a na obrázku 2. Prácou v priestore $L^p\,[0,1]$ sa podarilo zväčšiť hodnotu k_m takú, že $\alpha < k_m\,\omega \doteq 0{,}9852\,\omega$, ktorú nadobudne $k(p)$ zhruba pre $p \doteq 2{,}6$, čím sme ďalej vylepšili podmienku pre jednoznačnosť riešenia rovnice (8). Fakt, že toto riešenie je spojité by sa ukázalo rovnakým spôsobom ako tým na konci dôkazu vety 3.7.

Ďalej nás zaujíma správanie sa podmienky pre jednoznačnost pre $p \to \infty$, najmä, či platí, že podmienka v $(L^p\,[a,b]\,, \|\cdot\|_p)$ bude pre $p \to \infty$ rovnaká, ako v $(C\,[a,b]\,, \|\cdot\|_C)$, čo intuitívne očakávame. Ak $p \to \infty$, pre beta funkciu platí podľa Stirlingovho vzorca

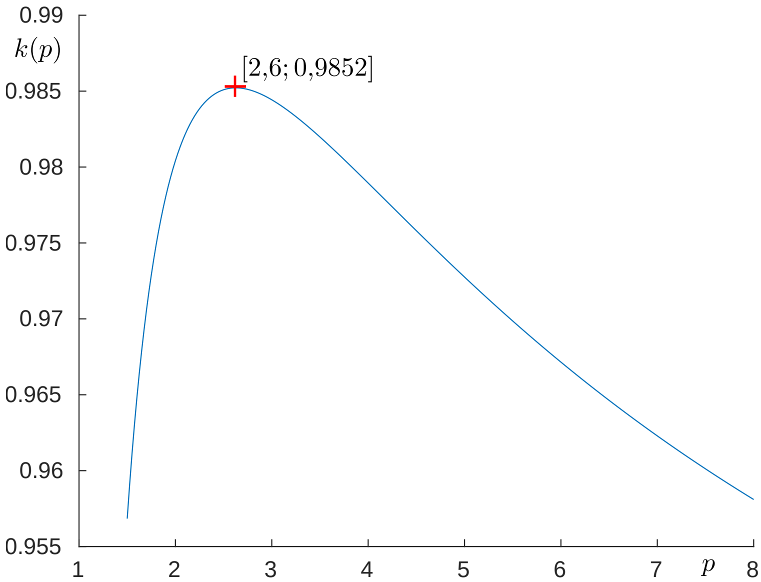
$$\mathrm{B}(p+1,p+1) \sim \frac{\sqrt{2\pi}(p+1)^{p+1/2}(p+1)^{p+1/2}}{(2p+2)^{2p+3/2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2^{2p+1}(2p+2)}$$

kde $f(x) \sim g(x)$ je symbol pre asymptotickú ekvivalenciu funkcií f a g, tj. platí $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Užitím predchádzajúcich relácií a L'Hospitalovho pravidla dostávame

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to\infty} \mathrm{I}_p &= \lim_{p\to\infty} \beta^2 \left(\frac{p}{p-1}+1\right)^{(1-p)/p} \sqrt[p]{\mathrm{B}\,(p+1+p+1)} \\
&= \beta^2 \lim_{p\to\infty} \left(\frac{p}{p-1}+1\right)^{(1-p)/p} \lim_{p\to\infty} \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{2^{2p+1}(2p+2)}\right)^{1/p} \\
&= \beta^2\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4} = \frac{\beta^2}{8}.
\end{aligned}$$



Obr. 1. Graf závislosti $k(p)$ na p.



Obr. 2. Graf závislosti $k(p)$ na p – priblíženie.

Ak chceme, aby bola podmienka kontraktivity splnená, potrebujeme $\lim_{p\to\infty} \mathrm{I}_p < 1$, čiže

$$\frac{\alpha^2\pi^2}{\omega^2}\,\frac{1}{8} = \frac{\beta^2}{8} < 1,$$

odkiaľ dostávame

$$\alpha < \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\omega,$$

čím sme získali rovnakú podmienku pre jednoznačnosť riešenia ako v priestore $(C\,[a,b],\,\|\cdot\|_C)$.

4. Záver

V článku sme sa zaoberali existenciou a jednoznačnosťou periodických riešení nelineárneho modelu matematického kyvadla so spojitou, nepárnou a periodickou pravou stranou. Ukázali sme, že s pomocou pomerne základných výsledkov funkcionálnej analýzy (a diferenciálneho a integrálneho počtu) dokážeme získať netriviálne výsledky.

Detailné dôkazy a rôzne alternatívne možnosti pri dokazovaní sa dajú nájsť v práci [1].

Literatúra

[1] D. Čaputa: *Funkcionální analýza a matematické kyvadlo*, Bakalářská práce, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Brno, 2019.
[2] D. H. Griffel: *Applied functional analysis*, New York, Dover, 2002.
[3] J. Mawhin: *Seventy-five years of global analysis around the forced pendulum equation*, In: Equadiff 9. Brno: Stony Brook, New York, 1998, 115–145.

Daniel Čaputa, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: daniel.caputa@gmail.com