GEOMETRICKÉ ALGEBRY PRO EUKLEIDOVSKOU GEOMETRII

ALEŠ NÁVRAT

ABSTRAKT. Na eukleidovskou geometrii se lze dívat jako na Kleinovu geometrii určenou Lieovou grupou eukleidovských transformací, a tu lze vidět jako podgrupu ortogonální grupy. Tento pohled pak umožňuje reprezentovat eukleidovské transformace, a tím i body Eukleidova prostoru, pomocí prvků příslušné Cliffordovy algebry. Díky grassmannovské struktuře Cliffordovy algebry v ní lze navíc reprezentovat geometrické objekty odpovídající podprostorům generujícího vektorového prostoru. Další výhodou této reprezentace oproti klasické maticové reprezentaci je snadné vyjádření ortogonálních projekcí.

1. Úvod

Geometrickou algebrou se v tom nejobecnějším smyslu rozumí algebraická reprezentace geometrických konceptů. Jedním z nejstarších příkladů jsou Grassmannova algebra a Hamiltonova algebra kvaternionů, které byly později Cliffordem sjednoceny do jedné geometrické algebry. V dnešní době se geometrickou algebrou většinou rozumí právě nějaká Cliffordova algebra. Její vztah ke geometrii je nejlépe vidět na dobře známých příkladech z nízkých dimenzí, konkrétně na tělesech komplexních čísel $\mathbb{C}$ a kvaternionů $\mathbb{H}$, která lze obě považovat za podalgebry Cliffordovy algebry. Pokud ztotožníme rovinu $\mathbb{R}^2$ s komplexní rovinou $\mathbb{C}$, pak jsou rotace v rovině dány násobením jednotkovým komplexním číslem. Rotace v prostoru $\mathbb{R}^3$ lze reprezentovat následujícím způsobem pomocí jednotkového kvaternionu. Každému vektoru $v = (v^1, v^2, v^3) \in \mathbb{R}^3$ nejprve přiřadíme ryze imaginární kvaternion

$$\mathbf{v} = v^1\mathbf{i} + v^2\mathbf{j} + v^3\mathbf{k}. \tag{1.1}$$

Připomeňme, že $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$ jsou tři komplexní jednotky, které navíc splňují $\mathbf{k} = \mathbf{ij} = -\mathbf{ji}$. Rotace v prostoru o úhel φ podle osy určené jednotkovým vektorem n reprezentovaným kvaternionem $\mathbf{n}$ ve smyslu (1.1) je pak dána předpisem

$$\mathbf{v} \mapsto \mathbf{R}\mathbf{v}\mathbf{R}^{-1},$$

kde $\mathbf{R}$ je jednotkový kvaternion

$$\mathbf{R} = \cos\frac{\varphi}{2} + \mathbf{n}\sin\frac{\varphi}{2}. \tag{1.2}$$

2010 *MSC.* Primární 15A66; Sekundární 51N25.
Klíčová slova. Cliffordova algebra, geometrická algebra, euleidovská geometrie.
Autor byl podpořen grantem č. FSI-S-20-6187.

Skládání rotací odpovídá násobení příslušných kvaternionů, což je mnohem jednodušší oproti známější reprezentaci rotací pomocí Eulerových úhlů. Další výhody jsou například eliminace efektu známého jako gimbal lock nebo jednodušší a efektivnější softwarová implementace vedoucí ke snížení časové složitosti algoritmů.

V tomto článku je popsáno, jak lze kvaternionovou reprezentaci rotací v prostoru zobecnit na reprezentaci všech eukleidovských transformací v obecné dimenzi, tj. rotací, translací a reflexí. Navíc dostaneme i reprezentaci ortogonálních projekcí a některých geometrických objektů. Přehled těchto reprezentací v geometrických algebrách používaných pro popis eukleidovské geometrie je v kapitole 6. Pro každou geometrickou algebru jsou hlavní výsledky shrnuty, viz věty 6.1, 6.5, 6.8, a demonstrovány vždy na příkladu třírozměrného prostoru. Zkušenému čtenáři je doporučeno začít rovnou touto kapitolou. Předchozí kapitoly shrnují vše potřebné pro dobré pochopení kapitoly 6. Algebraická příprava probíhá v kapitolách 2–4, kde jsou představeny bilineární formy a ortogonální grupa, Grassmannova algebra a Plückerovo vložení, Cliffordova algebra a reprezentace ortogonální grupy na Cliffordově algebře. Zde je čerpáno především z [1] a částečně také z [9, 8, 10]. V kapitole 5 je krátce popsána eukleidovská a konformní geometrie z Kleinova pohledu. Pro detailní popis Kleinových geometrií a jejich „zakřivených“ analogií viz [2, 3].

2. Grupa ortogonálních transformací

2.1. Symetrická bilineární forma

Připomeňme, že *symetrická bilineární forma* na konečně dimenzionálním vektorovém prostoru V je zobrazení $B : V \times V \to \mathbb{R}$, které je v obou argumentech lineární a které je symetrické, tj. $B(u,v) = B(v,u)$ pro všechna $u, v \in V$. Podprostor tvořený vektory $v \in V$, pro které je $B(v,w) = 0$ pro všechny $w \in V$ se nazývá *jádro* B. Bilineární forma B se nazývá *nedegenerovaná*, pokud je její jádro triviální. Právě v takovém případě definuje B izomorfismus

$$V \to V^*,\ v \mapsto B(v, \cdot), \tag{2.1}$$

kde V^* je prostor lineárních forem na V. Podle Sylvesterova zákonu o setrvačnosti lze každá symetrická forma diagonalizovat. Konkrétně v každém reálném vektorovém prostoru s nedegenerovanou bilineární formou dimenze n nalezneme tzv. *kanonickou bázi* $e_1, \dots, e_n$, pro kterou platí $B(e_i, e_i) = 1$ pro prvních p bázových vektorů a $B(e_i, e_i) = -1$ pro zbylých q bázových vektorů. Dvojice (p, q) se nazývá *signatura* bilineární formy B. Vektorový prostor $\mathbb{R}^{p+q}$ spolu s bilineární formou signatury (p, q) budeme značit $\mathbb{R}^{p,q}$. Pokud budeme uvažovat i degenerované symetrické bilineární formy, pak kanonickou bázi rozšíříme o nějakou bázi jádra a signaturou pak budeme rozumět trojici (p, q, r), kde r je dimenze jádra, a vektorový prostor s touto formou budeme značit $\mathbb{R}^{p,q,r}$.

Vektor $v \in V$ se nazývá *izotropní*, pokud $B(v, v) = 0$, a v opačném případě se nazývá *neizotropní*. *Anizotropní podprostor* je maximální podprostor V, který neobsahuje žádný izotropní vektor. Vektorový prostor obsahující naopak samé izotropní vektory se nazývá *izotropní podprostor.* Maximální izotropní podprostor pro $\mathbb{R}^{p,q}$ má dimenzi rovnu $d = \min(p, q)$. Navíc v něm existuje význačná báze, která je tvořena vektory $e_1, \ldots, e_d, f_1, \ldots, f_d$, které splňují $B(e_i, f_j) = \delta_{ij}$ a $B(e_i, e_j) = B(f_i, f_j) = 0$, a která se nazývá *Wittova báze.* Pokud tuto bázi rozšíříme kanonickou bází anizotropního prostoru na celé $\mathbb{R}^{p,q}$, bude v ní mít bilineární forma matici

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_d \\ 0 & 1_{|p-q|} & 0 \\ 1_d & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

2.2. Ortogonální grupa a algebra

Invertibilní transformace prostoru (V, B), které zachovávají danou symetrickou bilineární formu se nazývají *ortogonální transformace.* Tyto transformace tvoří *ortogonální grupu*, kterou značíme $O(V)$, tj.

$$O(V) = \{A \in \mathrm{GL}(V) |\ B(Au, Av) = B(u, v) \text{ pro všechny } u, v \in V\}. \tag{2.3}$$

Grupa ortogonálních transformací je Lieova grupa, tj. je to zároveň hladká varieta a grupové násobení je hladké zobrazení. Lokální struktura grupy $O(V)$ je tedy dána strukturou příslušné Lieovy algebry, tj. strukturou tečného prostoru v identitě. Derivací (2.3) dostáváme *ortogonální Lieovu algebru*

$$\mathfrak{o}(V) = \{A \in \mathrm{End}(V) |\ B(Au, v) + B(u, Av) = 0 \text{ pro všechny } u, v \in V\},$$

kde závorka je dána komutátorem. Připomeňme, že lokálně je Lieova algebra difeomorfní Lieově grupě a difeomorfismus je dán exponenciálním zobrazením. To lze definovat různými způsoby, například pomocí křivky v $O(V)$, která je řešením počátečního problému

$$\dot{g} = A \circ g, \ g(0) = \mathrm{id}, \tag{2.4}$$

kde $g(t) \in O(V)$. *Exponenciální zobrazení* $\exp : \mathfrak{o}(V) \to O(V)$ je pak řešením v čase 1, tj. $\exp(A) = g(1)$. Pokud bereme v úvahu i čas, pak píšeme $g(t) = \exp(At)$. Postupným integrováním rovnice (2.4) pak dostaneme známou řadu pro exponenciální zobrazení

$$\exp(At) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k.$$

Grupa ortogonálních transformací prostoru $\mathbb{R}^{p,q}$ se značí zjednodušeně $O(p, q)$ a její podgrupa daná maticemi s jednotkovým determinantem, tj. zachovávající orientaci, se značí $SO(p, q)$. Příslušná Lieova algebra se značí $\mathfrak{so}(p, q)$.

3. Grassmannova algebra

Připomeňme, že Grassmannova algebra je definována *vnějším součinem* $\wedge$, který je lineární vůči násobení skalárem, je distributivní vzhledem ke sčítání vektorů, je asociativní a splňuje

$$v \wedge v = 0. \tag{3.1}$$

Dosazením $u + v$ za v do této rovnice vidíme, že (3.1) je ekvivalentní rovnici $u \wedge v + v \wedge u = 0$, tj. vnější součin je antikomutativní. Vlastnost (3.1) můžeme zobecnit na vnější součin k vektorů. Platí $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = 0$ právě tehdy, když vektory $v_1, \ldots, v_k$ jsou lineárně závislé. Pro lineárně nezávislé vektory se prvky $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ nazývají *k–blady*. Jejich lineární kombinace tvoří vektorový prostor $\Lambda^k V$ Grassmannových prvků *stupně k*. Tyto prvky se nazývají *k–vektory*. Pokud za 0–blady budeme považovat skaláry, pak lineární kombinace k–bladů, kde $k \in \mathbb{Z}$, tvoří asociativní algebru s jednotkou 1, která se nazývá *Grassmannova algebra* ΛV (nebo také *vnější algebra*) a její prvky se nazývají *multivektory*. Prvek nejvyššího stupně, tj. jedno dimenzionálního prostoru $\Lambda^n V$, se nazývá *pseudoskalár*.

3.1. Dualita v Grassmannově algebře

Pomocí duálního prostoru V^* lze na Grassmannově algebře definovat součin, který na rozdíl od vnějšího součinu snižuje stupeň k–vektorů. Pro $\alpha \in V^*$ je *levá kontrakce* lineární zobrazení, které je na bázových k–bladech definováno předpisem

$$\alpha \lrcorner (v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \alpha(v_i)\, v_1 \wedge \cdots \hat{v}_i \cdots \wedge v_k. \tag{3.2}$$

Pomocí rekurzivního vztahu $(\alpha \wedge \beta) \lrcorner = \alpha \lrcorner \circ \beta \lrcorner$ pak dostáváme kontrakci libovolným prvkem Grassmannovy algebry $\boldsymbol{\alpha} \in \Lambda(V^*) \cong (\Lambda V)^*$. Zejména při zafixování nějakého pseudoskaláru $\mathbf{I} \in \Lambda^n V$ definuje jeho kontrakce prvkem $\boldsymbol{\alpha} \in \Lambda^k V^*$ dualitu

$$\Lambda^k V^* \to \Lambda^{n-k} V,\ \boldsymbol{\alpha} \mapsto \boldsymbol{\alpha}^* = \boldsymbol{\alpha} \lrcorner \mathbf{I} \tag{3.3}$$

mezi Grassmannovými algebrami generovanými vektorovým prostorem V a jeho duálním prostorem V^*. Pokud vyměníme roli prostorů V a V^*, dostaneme analogicky levou kontrakci formy vektorem $\mathbf{v} \lrcorner \boldsymbol{\alpha}$ a dualitu $\mathbf{v}^* = \mathbf{v} \lrcorner \mathbf{I}^*$, kde $\mathbf{I}^*$ je pseudoskalár na ΛV^*. Z definice levé kontrakce přitom lze jednoduše odvodit rovnici $\mathbf{v} \wedge (\mathbf{v}^* \lrcorner \mathbf{I}) = 0$, a proto je $\mathbf{v}^{**}$ rovno $\mathbf{v}$ až na násobek nenulovým skalárem, který závisí na volbě pseudoskalárů $\mathbf{I}$ a $\mathbf{I}^*$. Z definice levé kontrakce lze také přímo odvodit rovnici pro duální prvek k vnějšímu součinu dvou multivektorů

$$(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})^* = \mathbf{u} \lrcorner \mathbf{v}^*. \tag{3.4}$$

V případě, že máme k dispozici nedegenerovanou bilineární formu B, pak je vektorový prostor V identifikovaný s jeho duálem V^* pomocí (2.1) a tím pádem můžeme kontrakci považovat za nový součin na Grassmannově algebře. Konkrétně předpis pro kontrakci vektorem $u \in V$ dostaneme z předpisu (3.2) tak, že výraz $\alpha(v_i)$ nahradíme výrazem $B(u, v_i)$ a kontrakci vektorem opět rozšíříme na kontrakci bladem rekurzivně pomocí $(u \wedge v) \lrcorner = u \lrcorner \circ v \lrcorner$. Dualita (3.3) je pak unární operace na Grassmannově algebře $\Lambda^k V \to \Lambda^{n-k} V$.

3.2. Reprezentace podprostorů

Podprostory vektorového prostoru V jsou v Grassmannově algebře reprezentovány pomocí *Plückerova vložení* následujícím způsobem. Pro podprostor W dimenze k vyberme jeho bázi $w_1, \ldots, w_k$ a zformujme vnější součin $\mathbf{w} = w_1 \wedge \cdots \wedge w_k$. Pokud vybereme jinou bázi dostaneme stejný k–blade až na násobek determinantem matice přechodu mezi těmito bázemi, a proto je projektivní třída $[\mathbf{w}] = [w_1 \wedge \cdots \wedge w_k]$

na volbě báze nezávislá. Přiřazení $W \mapsto [\mathbf{w}]$ tak definuje zobrazení $\iota : W \to \mathbb{P}(\Lambda^k V)$, které se nazývá Plückerovo vložení. Injektivita tohoto zobrazení plyne z toho, že pro $v \in V$ platí

$$v \wedge \mathbf{w} = 0 \text{ právě tehdy, když } v \in W. \tag{3.5}$$

V tomto smyslu můžeme podprostor W jednoznačně reprezentovat projektivní třídou k–bladů $\mathbf{w} \in \Lambda^k V$. Z vlastností vnějšího součinu dále plyne, že pokud $[\mathbf{w}_1], [\mathbf{w}_2]$ reprezentují disjunktní podprostory W_1 a W_2, pak $[\mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{w}_2]$ v tomto smyslu reprezentuje přímý součet podprostorů $W_1 \oplus W_2$. Navíc platí, že tyto podprostory mají neprázdný průnik právě tehdy, když $\mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{w}_2 = 0$. Pomocí vnějšího součinu tedy takto konstruujeme součty podprostorů.

3.3. Duální reprezentace

Vektorový podprostor $W \subset V$ můžeme také reprezentovat jeho anihilátorem $W^\perp \subset V^*$. Ten je z definice prostorem forem, které se nulují na W a má dimenzi $n-k$. Zejména je podprostorem v duálním prostoru V^*, a proto lze pomocí Plückerova vložení reprezentovat ve smyslu (3.5) projektivní třídou bladu stupně $n-k$ duální Grassmannovy algebry ΛV^*. Není těžké z vlastností vnějšího součinu a levé kontrakce dokázat, že tato třída je $[\mathbf{w}^*] = [\mathbf{w} \,\lrcorner\, \mathbf{I}^*]$, to znamená, že je duální k třídě reprezentující W ve smyslu (3.3). Podprostor $W \subset V$ má tedy kromě reprezentace $\mathbf{w}$ ve smyslu (3.5) i duální reprezentaci $\mathbf{w}^*$ na duální Grassmannově algebře. Protože z (3.4) plyne $v \wedge \mathbf{w} = 0$ právě tehdy, když $v \,\lrcorner\, \mathbf{w}^* = 0$, tak duální reprezentaci lze popsat takto:

$$v \,\lrcorner\, \mathbf{w}^* = 0 \text{ právě tehdy, když } v \in W. \tag{3.6}$$

Vnější součin na duální algebře reprezentuje přímý součet anihilátorů. Konkrétně, pokud je blade $\mathbf{w}_1^* \wedge \mathbf{w}_2^*$ nenulový, pak reprezentuje podprostor $W_1^\perp \oplus W_2^\perp = (W_1 \cap W_2)^\perp$. Nulový je právě tehdy, když platí $W_1^\perp \cap W_2^\perp = (W_1 + W_2)^\perp = \emptyset$, a to nastane právě, když $W_1 + W_2 \neq V$. Pokud ale budeme brát anihilátor jen vůči sjednocení podprostorů $W_1 \cup W_2$ a ne celému V, tak toto nenastane a projektivní třída $[\mathbf{w}_1^* \wedge \mathbf{w}_2^*]$ reprezentuje vždy průnik podprostorů W_1 a W_2 ve smyslu duální reprezentace (3.6). Na duální Grassmannovu algebru lze nahlížet i tak, že její vnější součin definuje na Grassmannově algebře pomocí duality (3.3) nový součin, kterým počítáme průniky podprostorů

$$\mathbf{w}_1 \vee \mathbf{w}_2 := (\mathbf{w}_1^* \wedge \mathbf{w}_2^*)^*.$$

V případě existence negenerované bilineární formy lze pomocí (2.1) ztotožnit vektorové prostory V a V^* i příslušné Grassmannovy algebry. V tomto ztotožnění je anihilátor $W^\perp$ roven ortogonálnímu komplementu podprostoru W a duální reprezentace $\mathbf{w}^*$ lze považovat za prvek stejné Grassmannovy algebry jako $\mathbf{w}$.

4. Cliffordova algebra

Na rozdíl od Grassmannovy algebry, která je určena pouze vektorovým prostorem V, nyní od začátku vezmeme v úvahu i bilineární formu B a zkonstruujeme pomocí ní nový součin na ΛV, který nebudeme značit žádným symbolem, jen zřetězením.

Stejně jako u vnějšího součinu budeme požadovat distributivitu a asociativitu, ale místo (3.1) budeme požadovat

$$v^2 = B(v, v). \tag{4.1}$$

Tento součin se nazývá *geometrický součin*, nebo také *Cliffordův součin.* Na rozdíl od vnějšího součinu není obecně antikomutativní, ale dosazením $u + v$ za v do předchozí rovnice dostaneme $uv + vu = 2B(u, v)$. Množina všech lineárních kombinací geometrických součinů k vektorů, kde $k \in \mathbb{N}$, spolu s geometrickým součinem pak definují *Cliffordovu algebru* $\mathrm{Cl}(V)$. Pro počítání je dobré si uvést i definici pomocí báze. Pokud (p, q) je signatura nedegenerované bilineární formy B a $e_1, \dots, e_n$ je kanonická báze vektorového prostoru $V = \mathbb{R}^{p,q}$, pak se Cliffordova algebra značí $\mathrm{Cl}(p, q)$ a lze ekvivalentně definovat jako asociativní algebra, ve které platí

$$e_i^2 = 1,\ 1 \le i \le p, \quad e_i^2 = -1,\ p < i \le n, \quad e_i e_j = -e_j e_i,\ i \ne j.$$

Pokud má bilineární forma B netriviální jádro dimenze r, pak přibude ještě r vektorů, které jsou izotropní, $e_i^2 = 0$, a Cliffordova algebra se v tomto případě značí $\mathrm{Cl}(p, q, r)$. Analogicky k terminologii v 2.1 budeme nazývat prvek $\mathbf{v} \in \mathrm{Cl}(V)$ *izotropní,* jestliže $\mathbf{v}^2 = 0$, a *neizotropní* v opačném případě.

4.1. Grassmannova algebra v Cliffordově algebře

Vnější součin vektorů $u, v \in V$ je v Cliffordově algebře dán pomocí komutátoru $u \wedge v = \frac{1}{2}(uv - vu)$. Můžeme tedy naopak vyjádřit geometrický součin pomocí vnějšího součinu a bilineární formy vztahem $uv = u \wedge v + B(u, v)$. Podobně je dán geometrický součin vektoru u a bladu $\mathbf{v}$ pomocí vnějšího součinu a levé kontrakce

$$u\mathbf{v} = u \wedge \mathbf{v} + u \rfloor \mathbf{v}. \tag{4.2}$$

Geometrický součin libovolného počtu k vektorů lze opakovaným použitím rovnice (4.2) převést na lineární kombinaci bladů stupně $\le k$, přesněji řečeno se v této lineární kombinaci mohou vyskytovat jen blady stupně $k, k-2$, atd. Tím dostáváme zobrazení z Cliffordovy do Grassmannovy algebry o kterém se jednoduše ukáže, že je to izomorfismus filtrovaných vektorových prostorů, [1]. Inverzní zobrazení se pak nazývá *kvantové zobrazení* a pomocí něj můžeme vidět strukturu Grassmannovy algebry v Cliffordově algebře. Zejména vnějším součin lze vidět jako část geometrického součinu nejvyššího stupně a levou kontrakci jako část nejnižšího stupně, tj. pro blady $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ stupně k, ℓ platí

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \langle \mathbf{uv} \rangle_{k+\ell},\ \mathbf{u} \rfloor \mathbf{v} = \langle \mathbf{uv} \rangle_{\ell-k}, \tag{4.3}$$

kde $\langle\rangle_k$ je projekce na blade stupně k. V aplikacích se pak většinou místo levé kontrakce používá její symetrická verze, která je na bladech definovaná

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \langle \mathbf{uv} \rangle_{|\ell-k|}.$$

Díky kvantovému zobrazení také vidíme, že Cliffordova algebra má dimenzi 2^n a jako její bázi můžeme zvolit bázi Grassmannovy algebry. Dualitu na Grassmannově algebře (3.3) pak lze v případě nedegenerované bilineární formy považovat za unární operaci na Cliffordově algebře. Vzhledem k tomu, že pseudoskalár má nejvyšší možný stupeň, je duální prvek k multivektoru $\mathbf{u}$ podle (4.3) roven

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u} \lrcorner \mathbf{I} = \mathbf{u}\mathbf{I}. \tag{4.4}$$

4.2. Reprezentace ortogonálních transformací

Invertibilní prvky Cliffordovy algebry tvoří spolu s geometrickým součinem grupu, která se nazývá *Cliffordova grupa*. Těmito prvky chceme reprezentovat transformace vektorového prostoru $V \subset \mathrm{Cl}(V)$ a to můžeme až na násobek udělat jediným způsobem, [1], a to

$$v \mapsto \mathbf{g} v \mathbf{g}^{-1} \in V, \tag{4.5}$$

kde $\mathbf{g} \in \mathrm{Cl}(V)$ je invertibilní a $v \in V$. Pomocí základních vlastností geometrického součinu se jednoduše odvodí, že tato transformace je ortogonální. Naopak podle Cartan-Dieudonného věty je každý prvek ortogonální grupy dán složením jednoduchých reflexí a pro reflexi vektoru u podle vektoru v snadno spočítáme

$$R_v(u) = u - 2\frac{B(u,v)}{B(v,v)}v = u - \frac{uv^2 + vuv}{v^2} = -\frac{vuv}{v^2} = -vuv^{-1}. \tag{4.6}$$

Zde jsme využili rovnici (4.1), z ní plynoucí $B(u,v) = \frac{1}{2}(uv+vu)$ a $v^{-1} = v/B(v,v)$ a fakt, že geometrický součin vektoru a skaláru je obvyklé násobení skalárem. Složení dvou reflexí $R_{v_1} \circ R_{v_2}$ zřejmě odpovídá zobrazení (4.5), kde $\mathbf{g} = v_1 v_2$. Obecně pak můžeme říci, že každý prvek ortogonální grupy $\mathrm{SO}(V)$ je v Cliffordově algebře reprezentovaný zobrazením (4.5), kde invertibilní prvek $\mathbf{g}$, tzv. *versor*, je daný sudým počtem neizotropních vektorů. Prvky grupy $\mathrm{O}(V)$, které nejsou v $\mathrm{SO}(V)$, například reflexe, jsou reprezentovány součinem lichého počtu neizotropních vektorů a jejich akce je dána předpisem (4.5) se znaménkem mínus.

4.3. Lieova algebra bivektorů

Reprezentace grupy $\mathrm{SO}(V)$ v Cliffordově algebře definuje i reprezentaci příslušné Lieovy algebry $\mathfrak{so}(V)$, která je z definice generována prvky $\dot{g}(0)$, kde $g = g(t)$ je křivka vedoucí z identity v grupě $\mathrm{SO}(V)$. Tato křivka odpovídá v Cliffordově algebře křivce versorů $\mathbf{g}(t)$, které splňují $\mathbf{g}(0) = 1$, a které na vektorovém prostoru V působí pomocí (4.5). Zderivováním tohoto předpisu a s využitím linearity geometrického součinu zjistíme, že antisymetrické zobrazení $A = \dot{g}(0) \in \mathfrak{so}(V)$ je na $v \in V$ dáno jednoduše komutátorem v Cliffordově algebře

$$v \mapsto \mathbf{A}v - v\mathbf{A}, \tag{4.7}$$

kde $\mathbf{A} = \dot{\mathbf{g}}(0) \in \Lambda^2 V$ má vždy stupeň dva, tj. je to tak zvaný *bivektor*, viz [1]. Toto tvrzení není na první poled vidět, ale jednoduše se dokáže pomocí základních vlastností geometrického součinu. Skutečně, bivektory mají tu vlastnost, že jejich komutátor vzhledem ke geometrickému součinu je opět bivektor. Bivektory tak tvoří Lieovu algebru $\Lambda^2 V$ a předpis (4.7) definuje surjektivní homomorfismus Lieových algeber $\Lambda^2 V \to \mathfrak{so}(V)$. Pokud je bilineární forma B nedegenerovaná, tak dimenze těchto prostorů jsou stejné a tento homomorfismus je dokonce izomorfismus Lieových algeber

$$\Lambda^2 V \cong \mathfrak{so}(V). \tag{4.8}$$

V případě degenerované bilineární formy je algebra bivektorů větší než $\mathfrak{so}(V)$. Je dobré cvičení si promyslet, jak přesně vypadá algebra bivektorů pro obecnou signaturu (p, q, r).

4.4. Exponenciální zobrazení

Každý bivektor $\mathbf{A}$ zadává v Cliffordově algebře počáteční problém $\dot{\mathbf{g}} = \mathbf{A}\mathbf{g}$, $\mathbf{g}(0) = 1$, a tím určuje i křivku versorů $\mathbf{g}(t)$, která je jeho řešením. Dostáváme tak Cliffordovské exponenciální zobrazení, které zobrazuje Lieovu algebru bivektorů na souvislou Lieovu grupu versorů. Postupným integrováním dostaneme pro toto zobrazení klasický výraz pomocí nekonečné řady, kde jsou ovšem mocniny počítány geometrickým součinem

$$\exp(\mathbf{A}t) := \mathbf{g}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbf{A}^k. \tag{4.9}$$

V případě nedegenerované bilineární formy je výsledná grupa podle (4.8) izomorfní grupě $\mathrm{SO}(V)$. Připomeňme, že grupa versorů působí na vektorovém prostoru V transformacemi (4.5). Ty mají v případě versoru generovaného bivektorem $\mathbf{A}$ tvar

$$v \to \exp(\mathbf{A}t) v \exp(-\mathbf{A}t). \tag{4.10}$$

4.5. Ortogonální projekce

Klasický výraz pro ortogonální projekci vektoru $u \in V$ na jednorozměrný podprostor daný vektorem $v \in V$ lze v Cliffordově algebře generované bilineární formou B vyjádřit následovně

$$P_v(u) = \frac{B(u, v)}{B(v, v)} v = B(u, v^{-1}) v. \tag{4.11}$$

Opravdu, toto zobrazení je lineární, idempotentní, tj. $P_v \circ P_v = P_v$, a je ortogonální vůči bilineární formě B, tj. splňuje $B(P_v(u), w) = B(u, P_v(w))$. Předchozí výraz umožňuje jednoduché zobecnění na prvky Grassmannovy algebry. Konkrétně projekcí bladu $\mathbf{u}$ na blade $\mathbf{v}$ budeme nazývat zobrazení

$$P_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = (\mathbf{u} \,\lrcorner\, \mathbf{v}^{-1}) \,\lrcorner\, \mathbf{v}. \tag{4.12}$$

Toto zobrazení skutečně splňuje podmínku idempotence a je ortogonální vůči rozšíření bilineární formy B na blady, viz [4]. Protože každý blade splňuje $\mathbf{v}^2 \in \mathbb{R}$, tak inverze bladu $\mathbf{v}^{-1}$ existuje právě tehdy, pokud je daný blade neizotropní, a navíc se pak od něj liší jen nenulovým násobkem. Projektivní třída projekce (4.12) je tedy stejná jako projektivní třída bladu $(\mathbf{u} \,\lrcorner\, \mathbf{v}) \,\lrcorner\, \mathbf{v}$. Pokud předpokládáme, že $\mathbf{u}$ má menší stupeň než $\mathbf{v}$, pak levou kontrakci můžeme nahradit její symetrickou verzí a projektivní třída projekce (4.12) splňuje

$$[P_{\mathbf{v}}(\mathbf{u})] = [(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}] = [(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}^*) \vee \mathbf{v}], \tag{4.13}$$

kde poslední rovnost plyne z duality mezi levou kontrakcí a vnějším součinem dané rovnicí (3.4). Z posledního výrazu je okamžitě vidět, že projekce (4.12) reprezentuje ve smyslu (3.5) ortogonální projekci podprostorů. Skutečně, $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}^*$ reprezentuje podprostor obsahující podprostor $\mathbf{u}$ a kolmý k podprostoru $\mathbf{v}$. Ortogonální projekce je pak právě průnik $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}^*$ a $\mathbf{v}$.

5. Kleinova geometrie

Kleinova geometrie je dvojice (G, H), kde G je Lieova grupa a H je její uzavřená podgrupa taková, že prostor levých tříd G/H je souvislý. Grupa G se nazývá hlavní grupou geometrie, rozklad G/H se nazývá homogenním prostorem Kleinovy geometrie, nebo jednoduše Kleinovou geometrií, a varieta $M \cong G/H$ se nazývá jejím *modelem*. Kromě eukleidovské a konformní geometrie, viz níže, jsou příkladem Kleinových geometrií například: sférická geometrie $S^n = \mathrm{O}(n+1)/\,\mathrm{O}(n)$, hyperbolická geometrie $\mathrm{O}(n+1)/\,\mathrm{O}(n)$, projektivní geometrie $\mathbb{R}P^n = SL(n+1)/P$, kde P je stabilizátor nějaké přímky v $\mathbb{R}^{n+1}$ procházející počátkem.

5.1. Eukleidovská geometrie

Místo pěti Eukleidových axiomů se lze dívat na eukleidovskou geometrii jako na Kleinovu geometrii $E^n = \mathrm{E}(n)/\,\mathrm{O}(n)$. Hlavní grupa $G = \mathrm{E}(n)$ je grupa eukleidovských transformací v n–dimenzionálním prostoru. Ta je dána polopřímým součinem ortogonální grupy $\mathrm{O}(n)$ a vektorové grupy $\mathbb{R}^n$, tj. každý prvek grupy je dán složením nějaké rotace s translací. Eukleidovskou geometrii lze také vidět jako $E^n = \mathrm{SE}(n)/\,\mathrm{SO}(n)$, pokud budeme uvažovat pouze transformace zachovávající orientaci. Standardní prezentaci Eukleidovy grupy dostaneme, pokud E^n chápeme jako afinní nadrovinu $\{x_1 = 1\}$ v prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$. Pak lze grupu $\mathrm{E}(n)$ vidět jako grupu všech lineárních automorfismů $\mathbb{R}^{n+1}$, které zachovávají tuto nadrovinu, a které v ní indukují izomerie. Maticová reprezentace této grupy je

$$\mathrm{E}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & A \end{pmatrix} : A \in \mathrm{O}(n),\ x \in \mathbb{R}^n \right\}. \tag{5.1}$$

Stabilizátor $H = \mathrm{O}(n)$ prvního vektoru ve standardní bázi $\mathbb{R}^{n+1}$ je pak reprezentován prvky (5.1), pro které je $x = 0$. Bod $x \in E^n$ je tedy v maticovém popisu reprezentován třídou matic (5.1) určenou vektorem $x \in \mathbb{R}^n$ a v modelu odpovídá vektoru $(1, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Ekvivalentně lze E^n modelovat v projektivním prostoru $\mathbb{RP}^n$, ve kterém bod $x \in E^n$ odpovídá projektivnímu bodu s homogenními souřadnicemi $[1 : x]$. Tato chápání eukleidovského bodu budeme střídat podle potřeby a budeme psát prostě $x \in E^n$. Lokální struktura Eukleidovy geometrie je dána Lieovou algebrou grupy eukleidovských transformací, která je v tomto popisu zřejmě tvořena maticemi tvaru

$$\mathfrak{se}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & A \end{pmatrix} : A \in \mathfrak{so}(n), x \in \mathbb{R}^n \right\} = \mathfrak{so}(n) \oplus \mathbb{R}^n.$$

5.2. Konformní geometrie

Konformní geometrii na n–rozměrné sféře lze vidět v Kleinově smyslu následovně. Uvažujeme sféru S^n jako jednotkovou sféru v $\mathbb{R}^{n+1}$, kterou vložíme do prostoru $\mathbb{R}^{n+1,1}$ s bilineární formou B signatury $(n+1,1)$ pomocí zobrazení $x \mapsto (x,1)$. Množina všech izotropních vektorů je n–rozměrný kužel a velmi jednoduše se ukáže, že body na sféře odpovídají právě izotropním přímkám na tomto kuželu. Je známé, že ortogonální grupa i speciální ortogonální grupa působí na izotropním podprostoru tranzitivně, a proto dostáváme na sféře konformní geometrii $S^n = \mathrm{SO}(n+1,1)/P$, kde P je stabilizátor nějaké izotropní přímky. Podgrupa P je tzv. parabolická podgrupa a lze ji popsat jako polopřímý součin konformní grupy $\mathrm{CO}(n)$ a vektorové grupy $\mathbb{R}^n$. Lze ji také popsat pomocí její Lieovy algebry $\mathfrak{p}$ následujícím způsobem. Ve Wittově bázi (2.2) prostoru $\mathbb{R}^{n+1,1}$ je maticová reprezentace Lieovy algebry grupy $\mathrm{SO}(n+1,1)$ dána výrazem

$$\mathfrak{so}(n+1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & z & 0 \\ x & A & -z^T \\ 0 & -x^T & -a \end{pmatrix} : A \in \mathfrak{so}(n), z \in \mathbb{R}^{n*}, x \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R} \right\} \tag{5.2}$$

a stabilizátor izotropní přímky e_1 je dán maticemi s $x = 0$, tj. jeho Lieova algebra je $\mathfrak{p} = \mathfrak{so}(n) \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{n*}$.

5.3. Eukleidovská geometrie v konformní geometrii

Z předchozího popisu konformní geometrie a příslušné Lieovy algebry (5.2) pomocí Wittovy báze je mimo jiné vidět, že existuje injektivní homomorfismus Lieových algeber $\mathfrak{se}(n) \to \mathfrak{so}(n+1,1)$, ve kterém se podalgebra $\mathfrak{so}(n)$ zobrazí do $\mathfrak{p}$. Složení tohoto homomorfismu s exponenciálním zobrazením pak definuje injektivní homomorfismus mezi souvislými komponentami identity příslušných Lieových grup, který se faktorizuje na injektivní zobrazení

$$E^n = \mathrm{SE}(n)/\,\mathrm{SO}(n) \to \mathrm{SO}(n+1,1)/P = S^n, \tag{5.3}$$

které přenáší eukleidovskou strukturu z E^n na konformní sféru $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1,1}$. Toto zobrazení je dobře známé, jedná se o inverzi ke stereografické projekci. V tomto smyslu můžeme vidět eukleidovskou geometrii jako tzv. redukci konformní geometrie k podgrupě $\mathrm{SE}(n)$. Přitom ve výše uvedeném popisu pomocí Wittovy báze je počátek reprezentovaný prvním bázovým vektorem a translace jsou na sféře dány násobením matic

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & -x^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1_n & 0 \\ \frac{1}{2}x^T x & -x^T & 1 \end{pmatrix}.$$

Protože bod $x \in E^n$ v Kleinově popisu geometrie ztotožňujeme právě s translací počátku do tohoto bodu, má zobrazení (5.3) v námi zvolené bázi předpis

$$x \mapsto \left(1, x, \frac{1}{2}x^T x\right). \tag{5.4}$$

6. Geometrické algebry pro eukleidovskou geometrii

Geometrickou algebrou se nazývá Cliffordova algebra, ve které se navíc uvažuje i její Grassmannova struktura s operacemi $\wedge, \lrcorner, \cdot, *, \vee$, viz 4.1. Ta umožňuje pomocí Plückerova vložení reprezentovat objekty, které odpovídají podprostorům generujícího vektorového prostoru, viz 3.2 a 3.3. Naopak struktura Cliffordovy algebry umožňuje reprezentovat transformace pomocí versorů, které odpovídají ortogonálním transformacím tohoto vektorového prostoru, viz 4.2, a také reprezentovat ortogonální projekce, viz 4.5. Chápání geometrie v Kleinově smyslu, viz 5, pak umožňuje jednoduše definovat geometrickou algebru pro konkrétní geometrii – Kleinova geometrie G/H je modelovaná v geometrické algebře $\mathrm{Cl}(V)$, pokud existuje model $G/H \cong M \subset \mathrm{Cl}(V)$, kde hlavní grupa G působí na M ortogonálními transformacemi reprezentovanými versory. Konkrétně eukleidovská geometrie je modelovaná v takové $\mathrm{Cl}(V)$, ve které existuje podvarieta, na které působí speciální Eukleidova grupa $\mathrm{SE}(n)$ pomocí versorů tranzitivně se stabilizátorem izomorfním $\mathrm{SO}(n)$. Rozebereme nyní podrobněji, jak je popsána eukleidovská geometrie v geometrických algebrách generovaných vektorovým prostorem s bilineární formou $V = \mathbb{R}^{n,0}$, $V = \mathbb{R}^{n,0,1}$, a $V = \mathbb{R}^{n+1,1}$. Detailní popis těchto geometrických algeber lze nalézt v [10, 4, 9, 5, 6, 8].

6.1. Geometrická algebra $\mathrm{Cl}(n)$

První geometrickou algebrou, která se nabízí pro popis eukleidovského prostoru, je geometrická algebra $\mathrm{Cl}(n)$. Ta je totiž definovaná eukleidovskou bilineární formou B signatury $(n, 0)$, která definuje na $\mathbb{R}^n$ standardní skalární součin respektive eukleidovskou vzdálenost. Nejedná se ovšem o geometrickou algebru pro eukleidovskou geometrii, protože algebra bivektorů je podle (4.8) izomorfní $\mathfrak{so}(n)$, a proto je grupa versorů v $\mathrm{Cl}(n)$ izomorfní pouze ortogonální grupě $\mathrm{SO}(n)$. Také objekty, které můžeme reprezentovat jsou pouze vektorové podprostory $\mathbb{R}^n$. Nicméně tuto algebru lze využít na popis příslušné vektorové algebry a na popis Eukleidova prostoru v počátku. Konkrétně bivektor $u \wedge v$ reprezentuje ve smyslu (3.5) rovinu procházející počátkem se směrovými vektory $u, v \in \mathbb{R}^n$ a zobrazení (4.10), kde $\mathbf{A} = u \wedge v$, reprezentuje rotaci v této rovině. Skutečně, z definice exponenciálního zobrazení (2.4) plyne, že versor $\exp(\mathbf{A}t)$ komutuje se svým generátorem $\mathbf{A}$, a proto rotace tímto versorem nechává $\mathbf{A} = u \wedge v$ invariantní. Pokud chceme vyjádřit rotaci o konkrétní úhel, pak je potřeba následujícím způsobem normovat bivektor, který rotaci generuje.

Věta 6.1. *Rotace v rovině určené vektory $u, v \in \mathbb{R}^n \subset \mathrm{Cl}(n)$ o úhel φ je v geometrické algebře $\mathrm{Cl}(n)$ dána versorem*

$$\mathbf{R} = \exp\left(\frac{1}{2}\varphi \frac{u \wedge v}{\sqrt{-(u \wedge v)^2}}\right) = \cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2} \frac{u \wedge v}{\sqrt{-(u \wedge v)^2}}. \tag{6.1}$$

Důkaz. Bivektor v exponentu je zřejmě normovaný tak, aby jeho kvadrát byl roven -1, a proto rovnost v (6.1) plyne přímo z definice exponenciálního zobrazení (2.4). Abychom dokázali, že jde skutečně o danou rotaci, vyberme vektory

$\bar{u}, \bar{v}$ reprezentující rovinu tak, že jsou jednotkové a svírají úhel $\varphi/2$. Potom rotaci o dvojnásobný úhel v této rovině můžeme vyjádřit jako složení reflexí (4.6) ve vektoru $\bar{u}$ a ve vektoru $\bar{v}$, takže je reprezentována versorem

$$\mathbf{R} = \bar{v}\bar{u} = \bar{v} \cdot \bar{u} + \bar{v} \wedge \bar{u} = \cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\frac{\bar{u} \wedge \bar{v}}{\sqrt{-(\bar{u} \wedge \bar{v})^2}},$$

protože v algebře $\mathrm{Cl}(n)$ je $B(u, v)$ standardní skalární součin a pro druhou mocninu bivektoru platí $(\bar{u} \wedge \bar{v})^2 = (\bar{u} \cdot \bar{v})^2 - \bar{u}^2\bar{v}^2 = -\sin^2\frac{\varphi}{2}$. Normovaný bivektor přitom zřejmě nezávisí na volbě reprezentantů u, v v rovině $u \wedge v$, takže předchozí výraz je totožný s (6.1). $\square$

Versor reprezentující rotaci se nazývá *rotor.* Z důkazu je navíc vidět, že rotor splňuje $\mathbf{R}\tilde{\mathbf{R}} = 1$, kde $\sim$ je tzv. *reverzní zobrazení,* které na versoru působí tak, že obrací pořadí neizotropních vektorů, jejichž je součinem. V obecném předpisu pro akci prvků ortogonální grupy na vektorech (4.5) tedy v případě rotoru můžeme nahradit jeho inverzi reverzí. Tato akce navíc zřejmě zachovává vnější násobení, a proto se rozšiřuje na blady libovolného stupně. Dostáváme tedy předpis pro rotaci libovolného podprostoru reprezentovaného bladem $\mathbf{w}$ v geometrické algebře $\mathrm{Cl}(n)$ ve tvaru

$$\mathbf{w} \mapsto \mathbf{R}\mathbf{w}\tilde{\mathbf{R}}. \tag{6.2}$$

Kromě rotací v $\mathbb{R}^n$ lze pomocí geometrické algebry $\mathrm{Cl}(n)$ šikovně reprezentovat zrcadlení v nadrovinách a ortogonální projekce na podprostory. Zrcadlení vektoru v nadrovině reprezentované $(n-1)$–bladem $\boldsymbol{\pi}$ je totiž až na znaménko dáno reflexí R_v, kde v je vektor kolmý na nadrovinu, a reflexe je podle (4.6) v geometrické algebře dána výrazem $R_v(u) = -vuv$. Vektor v je zároveň duální reprezentací této roviny, $v = \boldsymbol{\pi}^* = \boldsymbol{\pi}\mathbf{I}$, protože dualita (4.4) reprezentuje v $\mathrm{Cl}(n)$ eukleidovský ortogonální doplněk. Reflexe (4.6) navíc také zachovává vnější násobení, a proto dostáváme předpis pro zrcadlení podprostoru reprezentovaného bladem $\mathbf{w}$ v nadrovině $\boldsymbol{\pi}$:

$$\mathbf{w} \mapsto \boldsymbol{\pi}\mathbf{w}\boldsymbol{\pi}.$$

Ortogonální projekce na vektorové podprostory jsou dány přímo rovnicí (4.13), protože bilineární forma v $\mathrm{Cl}(n)$ definuje standardní eukleidovský skalární součin.

Příklad 6.2. V geometrické algebře $\mathrm{Cl}(3)$ reprezentují rotory $\mathbf{R}$ ve smyslu (6.2) grupu $\mathrm{SO}(3)$, tj. rotace v prostoru. Tato dimenze je speciální tím, že bivektor určující rovinu rotace je duální k vektoru reprezentující osu rotace. Pokud pseudoskalár splňuje $\mathbf{I}^2 = -1$, což je případ obvyklé volby $\mathbf{I} = e_1e_2e_3$, kde e_1, e_2, e_3 je ortonormální báze $\mathbb{R}^3$, a pokud n je jednotkový vektor ve směru osy rotace, tak n^* je bivektor určující rovinu rotace, který je normovaný $(n^*)^2 = -1$. Rotor (6.1), který určuje rotaci kolem osy s jednotkovým vektorem n o úhel φ, má tedy v tomto případě tvar

$$\mathbf{R} = \exp\left(\frac{1}{2}\varphi n^*\right) = \cos\frac{\varphi}{2} + n^* \sin\frac{\varphi}{2}.$$

Tento způsob reprezentace rotací je totožný s rotováním pomocí kvaternionů (1.2), protože podalgebra prvků Cl(3) sudého stupně je právě s tělesem kvaternionů izomorfní. V ortonormální bázi e_1, e_2, e_3 je tento izomorfismus realizovaný zobrazením $i \mapsto -e_2e_3, j \mapsto -e_3e_1, k \mapsto -e_1e_2$. Navíc oproti kvaternionům lze v algebře Cl(3) reprezentovat vektory a všechny běžné vektorové operace. Skalární součin je $u \cdot v$, vektorový součin $u \times v = (u \wedge v)^*$, smíšený součin $[uvw] = (u \wedge v \wedge w)^*$. V tomto smyslu lze Cl(3) chápat jako zúplnění vektorové algebry.

6.2. Projektivní geometrická algebra

Abychom získali skutečně geometrickou algebru pro eukleidovskou geometrii, tak potřebujeme, aby v ní bylo možné pomocí versorů reprezentovat nejen rotace, ale i translace. Minimální taková algebra je právě projektivní geometrická algebra, která vychází přímo z modelu eukleidovské geometrie popsaného v 5.1, kde je E^n ztotožněno s nadrovinou ve $\mathbb{R}^{n+1}$, respektive podprostorem v projektivním prostoru $\mathbb{RP}^n$. Aby byla algebra bivektorů izomorfní Lieově algebře Eukleidovy grupy, je potřeba na $\mathbb{R}^{n+1}$ uvažovat degenerovanou bilineární formu signatury $(n, 0, 1)$. Příslušná geometrická algebra $\mathrm{Cl}(n, 0, 1)$ se nazývá *projektivní geometrická algebra.*

Generující vektorový prostor $\mathbb{R}^{n,0,1}$ přímým součtem anizotropní části $\mathbb{R}^{n,0}$ a jedno-dimenzionálního jádra $\operatorname{Ker} B$, a pro algebru bivektorů se pak lehce spočítá

$$\Lambda^2\mathbb{R}^{n,0,1} = \Lambda^2\mathbb{R}^{n,0} \oplus \big(\mathbb{R}^{n,0} \wedge \operatorname{Ker} B\big) \cong \mathfrak{so}(n) \oplus \mathbb{R}^n = \mathfrak{se}(n). \tag{6.3}$$

Bivektory z $\Lambda^2\mathbb{R}^{n,0}$ generují rotace a bivektory z $\mathbb{R}^{n,0} \wedge \operatorname{Ker} B$ generují translace. Vzhledem k používaným konvencím je dobré volit generátor translace vektorem $x \in \mathbb{R}^n$ ve tvaru $-1/2x \wedge e_\infty$, kde $e_\infty \in \operatorname{Ker} B$. Kvadrát tohoto bivektoru v $\mathrm{Cl}(n, 0, 1)$ je nulový, a proto má příslušný versor pro translaci, tzv. *translátor*, tvar

$$\mathbf{T} = \exp\left(-\frac{1}{2}x \wedge e_\infty\right) = 1 - \frac{1}{2}x \wedge e_\infty. \tag{6.4}$$

Abychom získali model eukleidovské geometrie v $\mathrm{Cl}(n, 0, 1)$, potřebujeme v této algebře najít množinu reprezentující body Eukleidova prostoru, na které translátory působí jednoduše tranzitivně, tj. tranzitivně s triviálním stabilizátorem. Na rozdíl od geometrické algebry $\mathrm{Cl}(n)$ nelze reprezentovat body projektivními třídami vektorů, tj. jejich homogenními souřadnicemi, protože translátory působí na $\mathbb{R}^{n,0,1}$ triviálně, viz poznámka 6.4, a proto potřebujeme body reprezentovat „duálně“.

Věta 6.3. *Projektivní třídy neizotropních multivektorů stupně n modelují v projektivní geometrické algebře $\mathrm{Cl}(n, 0, 1)$ eukleidovskou geometrii dimenze n.*

Důkaz. Nejdříve podrobněji popíšeme projektivní třídy neizotropních multivektorů v $\Lambda^n\mathbb{R}^{n,0,1} \subset \mathrm{Cl}(n, 0, 1)$. Vzhledem k rozkladu vektorového prostoru $\mathbb{R}^{n,0,1}$ na jeho anizotropní část $\mathbb{R}^{n,0}$ a jádro $\operatorname{Ker} B$ je

$$\Lambda^n\mathbb{R}^{n,0,1} = \Lambda^n\mathbb{R}^{n,0} \oplus \operatorname{Ker} B \wedge \Lambda^{n-1}\mathbb{R}^{n,0}.$$

Druhá mocnina prvků z jedno-dimenzionálního prostoru $\Lambda^n\mathbb{R}^{n,0} \subset \mathrm{Cl}(n, 0, 1)$ je nenulová, protože zúžení bilineární formy B na $\mathbb{R}^{n,0}$ je nedegenerované. Naopak prvky $\mathbf{u} \in \operatorname{Ker} B \wedge \Lambda^{n-1}\mathbb{R}^{n,0}$ obsahují vektor z jádra, a proto $\mathbf{u}^2 = 0$ a také jejich součin s prvky $\Lambda^n\mathbb{R}^{n,0}$ je nulový. Projektivní třída libovolného neizotropního multivektoru v $\Lambda^n\mathbb{R}^{n,0,1}$ je tedy tvaru $[\mathbf{I}_n+\mathbf{u}]$, kde $\mathbf{I}_n \in \Lambda^n\mathbb{R}^{n,0}$ značí pseudoskalár anizotropního podprostoru $\mathbb{R}^{n,0} \subset \mathbb{R}^{n,0,1}$. Přímým výpočtem lze ověřit, že versory (6.4) působí na těchto třídách tranzitivně. Opravdu, jejich infinitezimální akce je

$$[x \wedge e_\infty, \mathbf{I}_n + \mathbf{u}] = -2e_\infty \wedge (x \lrcorner \mathbf{I}_n),$$

a vhodnou volbou vektoru $x \in \mathbb{R}^n$ tedy dostaneme libovolné posunutí $\operatorname{Ker} B \wedge \Lambda^{n-1}\mathbb{R}^{n,0}$. Navíc stabilizátor pseudoskaláru $\mathbf{I}_n$ je dán versory generovanými bivektory $u \wedge v \in \Lambda^2\mathbb{R}^{n,0} \cong \mathfrak{so}(n)$, a proto akce versorů na těchto neizotropních n–vektorech definuje model eukleidovské geometrie, viz 5.1. □

Poznámka 6.4. Eukleidův prostor nelze reprezentovat v projektivní geometrické algebře vektory, protože generátory translací působí na $\mathbb{R}^{n,0,1} \subset \mathrm{Cl}(n,0,1)$ triviálně. Skutečně, z definice geometrického a vnějšího součinu je infinitezimální akce bivektoru $u \wedge e_\infty \in \mathbb{R}^{n,0} \wedge \operatorname{Ker} B$ na vektoru $v \in \mathbb{R}^{n,0,1}$ rovna

$$[u \wedge e_\infty, v] = B(u,v)e_\infty - B(e_\infty,v)u - B(v,u)e_\infty + B(u,e_\infty)v = 0.$$

Díky izomorfismu $\Lambda^k\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{(n+1)*}$, viz (3.3), lze reprezentanty bodů Eukleidova prostoru také vidět jako prvky v projektivním prostoru $\mathbb{PR}^{(n+1)*}$, tj. jako projektivní třídy lineárních forem na $\mathbb{R}^{n+1}$. Duální reprezentace ve smyslu 3.3 pak umožňuje reprezentovat libovolný podprostor $W \subset \mathbb{R}^{n+1}$ pomocí prvků duální Grassmannovy algebry. Průnik podprostoru W s nadrovinou $\{x_{n+1} = 1\}$, která modeluje Eukleidův prostor, pak určuje jednoznačně afinní podprostor v E^n. Afinní prostory jsou tedy právě ty objekty, které v projektivní geometrické algebře lze reprezentovat. Oproti $\mathrm{Cl}(n)$ je tato reprezentace duální v tom smyslu, že vnější součin počítá průniky afinních prostorů a součin $\vee$ generuje afinní prostory. Konkrétně pokud $\mathbf{X} \in \Lambda^n\mathbb{R}^{n,0,1} \subset \mathrm{Cl}(n,0,1)$ je reprezentant bodu $x \in E^n$, pak multivektor $\mathbf{w}$ reprezentuje afinní prostor ve smyslu

$$\mathbf{X} \vee \mathbf{w} = 0 \text{ právě tehdy, když } x \in W \cap \{x_{n+1} = 1\}. \tag{6.5}$$

Vzhledem k degenerovanosti bilineární formy v projektivní geometrické algebře nelze dualitu (3.3) chápat jako zobrazení na $\mathrm{Cl}(n,0,1)$, a proto k (6.5) neexistuje duální reprezentace. Zobrazení (4.4), které je dané předpisem $\mathbf{w} \mapsto \mathbf{w}^* = \mathbf{wI}$, kde $\mathbf{I}$ je pseudoskalár v $\mathrm{Cl}(n,0,1)$, neurčuje afinní prostor, ale reprezentuje ortogonální doplněk k vektorovému prostoru určujícímu zaměření afinního prostoru $\mathbf{w}$.

Kromě afinních prostorů a jejich translací lze v projektivní geometrické algebře reprezentovat jejich obecné rotace, translace, zrcadlení a ortogonální projekce. Nejdůležitější rovnice lze shrnout do následující věty.

Věta 6.5. (a) *Geometrické objekty v projektivní geometrické algebře. Bod $x \in E^n$ je v $\mathrm{Cl}(n,0,1)$ reprezentován projektivní třídou multivektoru*

$$\mathbf{X} = \mathbf{I}_n + e_\infty \wedge (x \lrcorner \mathbf{I}_n), \tag{6.6}$$

kde $\mathbf{I}_n \in \Lambda^n \mathbb{R}^{n,0}$ *a* $e_\infty \in \operatorname{Ker} B$. *Afinní podprostor dimenze* k *definovaný body* $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_{k+1}$ *je reprezentovaný prvkem*

$$\mathbf{w} = \mathbf{X}_1 \vee \cdots \vee \mathbf{X}_{k+1} \in \mathbb{P}(\Lambda^{n-k} \mathbb{R}^{n+1}). \tag{6.7}$$

a průnik afinních prostorů $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ *je reprezentovaný prvkem* $\mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{w}_2$.

(*b*) *Transformace v projektivní geometrické algebře. Rotace v obecném bodě* x *je dána versorem*

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{T}\mathbf{R}\tilde{\mathbf{T}}, \tag{6.8}$$

kde $\mathbf{T}$ *je versor pro translaci* (6.4), $\tilde{\mathbf{T}}$ *jeho reverze a* $\mathbf{R}$ *je versor pro rotaci* (6.1). *Zrcadlení afinního prostoru* $\mathbf{w}$ *v nadrovině reprezentované vektorem* $\pi \in \mathbb{R}^{n+1}$ *je*

$$\mathbf{w} \mapsto \pi \mathbf{w} \pi, \tag{6.9}$$

a ortogonální projekce afinního prostoru $\mathbf{w}$ *na afinní prostor* $\mathbf{v}$ *je*

$$\mathbf{w} \mapsto (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}. \tag{6.10}$$

Důkaz. (a) V Kleinově smyslu je bod v Eukleidově prostoru dán translací z počátku do tohoto bodu. Multivektor (6.6) reprezentující bod $x \in E^n$ tedy dostaneme působením translátoru (6.4) na pseudoskalár $\mathbf{I}_n$ reprezentující v našem modelu počátek

$$\mathbf{X} = \mathbf{T}\mathbf{I}_n\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{I}_n + e_\infty \wedge (x \lrcorner \mathbf{I}_n).$$

Reprezentace afinních prostorů (6.7) a jejich průniků plyne přímo z (6.5) a popisu reprezentace vektorových podprostorů v 3.2.

(b) Z popisu bivektorů (6.3) vidíme, že rotace jsou generované prvky $\Lambda^2 \mathbb{R}^{n,0}$, a proto mají rotory v projektivní geometrické algebře stejný tvar jako rotory v $\mathrm{Cl}(n)$, viz (6.1). Skutečně, protože akce versoru zachovává součiny v geometrické algebře, a protože je vektor e_∞ kolmý na $\mathbb{R}^{n,0}$, je rotace bodu $\mathbf{X}$ daného předpisem (6.6) dána výrazem

$$\mathbf{R}\mathbf{X}\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{I}_n + e_\infty \wedge (\mathbf{R}x\tilde{\mathbf{R}} \lrcorner \mathbf{I}_n) = \mathbf{X}_{\mathbf{R}x\tilde{\mathbf{R}}},$$

který podle (6.1) reprezentuje rotovaný bod. Je potřeba zdůraznit, že $\mathbf{R}$ reprezentuje stále pouze rotace v počátku. Rotaci v bodě x můžeme vyjádřit jako složení translace $\tilde{\mathbf{T}}$ z bodu x do počátku, rotace v počátku $\mathbf{R}$ a translace $\mathbf{T}$ zpět z počátku do bodu x. Složení zobrazení odpovídá geometrickému součinu příslušných versorů, a proto je rotace v bodě x dána versorem (6.8). Podobně pomocí posunutí situace do počátku a použití duální reprezentace v geometrické algebře $\mathrm{Cl}(n)$ lze jednoduše odvodit rovnice pro zrcadlení a ortogonální projekci. Konkrétně translátor $\tilde{\mathbf{T}}$, který posune afinní nadrovinu $\pi \in \mathbb{R}^{n,0,1}$ do počátku, splňuje $\tilde{\mathbf{T}}\pi\mathbf{T} = \pi'$, kde $\pi' \in \mathbb{R}^{n,0}$. Zrcadlení v nadrovině π' je v $\mathrm{Cl}(n)$ dáno reflexí $R_{\pi'}$, viz (4.6), a proto je zrcadlení afinního prostoru $\mathbf{w}$ v nadrovině π dáno předpisem

$$\mathbf{w} \mapsto \mathbf{T}R_{\pi'}(\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{w}\mathbf{T})\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T}\pi'\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{w}\mathbf{T}\pi'\tilde{\mathbf{T}} = \pi\mathbf{w}\pi,$$

což je (6.9). Rovnice (6.10) zřejmě reprezentuje průnik afinního prostoru $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$ s afinním prostorem $\mathbf{v}$. K důkazu, že se jedná o ortogonální projekci afinního prostoru $\mathbf{w}$ na afinní prostor $\mathbf{v}$ pak tedy stačí ukázat, že $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$ reprezentuje afinní podprostor obsahující $\mathbf{w}$ a kolmý k $\mathbf{v}$. Proto je dobré si uvědomit, že každý reprezentant $\mathbf{w}$ afinního prostoru lze psát ve tvaru $\mathbf{w} = \mathbf{w}' + \mathbf{w}_\infty$, kde $\mathbf{w}'$ je součet bladů neobsahujících vektor z jádra B a reprezentuje zaměření afinního prostoru, a každý blade v $\mathbf{w}_\infty$ naopak obsahuje prvek z jádra a tato část reprezentuje vzdálenost afinního prostoru od počátku. Tento rozklad je charakteristický tím, že $\mathbf{w}'$ je invariantní vzhledem k translacím a každá kontrakce prvkem $\mathbf{w}_\infty$ je triviální. Pro afinní prostory $\mathbf{w}, \mathbf{v}$ proto platí

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \rfloor \mathbf{w} = \mathbf{T}(\mathbf{v}' \rfloor \mathbf{w}')\tilde{\mathbf{T}},$$

kde translátor $\tilde{\mathbf{T}}$ posouvá afinní prostor $\mathbf{w}$ do počátku, tj. platí $\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{w}\mathbf{T} = \mathbf{w}'$. Prvek $\mathbf{v}' \rfloor \mathbf{w}'$ je opravdu v $\mathrm{Cl}(n)$ duální reprezentace vektorového prostoru obsahujícího $\mathbf{w}'$ a kolmého k $\mathbf{v}'$. □

Příklad 6.6. Uvažujme Eukleidův prostor dimenze tři s kartézským souřadným systém s jednotkovými směrovými vektory e_1, e_2, e_3 a zvolme bilineární formu B tak, že tyto vektory tvoří ortonormální bázi $\mathbb{R}^{3,0} \subset \mathbb{R}^{3,0,1}$. Pokud pro jednoduchost označíme vnější součin zřetězením indexů $\mathbf{e}_{ij} = e_i \wedge e_j$, pak podle (6.6) je v této bázi bod o souřadnicích (x, y, z) reprezentovaný projektivní třídou multivektoru

$$\mathbf{X} = \mathbf{e}_{123} + x\mathbf{e}_{\infty 23} - y\mathbf{e}_{\infty 13} + z\mathbf{e}_{\infty 12}.$$

Bod lze také zadat jako průnik tří rovin $\mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{p}_2 \wedge \mathbf{p}_3$ nebo jako průnik roviny a přímky $\mathbf{p} \wedge \boldsymbol{\ell}$. Rovina s rovnicí $ax + by + cz + d = 0$ je reprezentována projektivní třídou vektoru

$$\mathbf{p} = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_\infty \tag{6.11}$$

a může být také dána přímkou a bodem $\boldsymbol{\ell} \vee \mathbf{X}$. Přímku reprezentuje projektivní třída multivektoru stupně dva, jehož koeficienty jsou její Plückerovy souřadnice

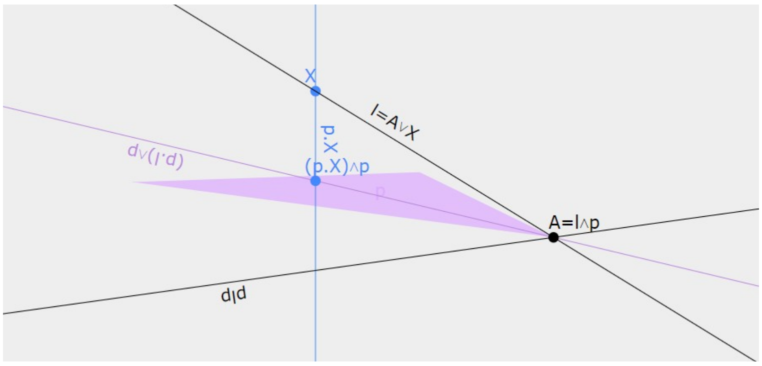
$$\boldsymbol{\ell} = p_1\mathbf{e}_{23} + p_2\mathbf{e}_{31} + p_3\mathbf{e}_{12} + d_1\mathbf{e}_{1\infty} + d_2\mathbf{e}_{2\infty} + d_3\mathbf{e}_{3\infty}, \tag{6.12}$$

kde (p_1, p_2, p_3) je jednotkový směrový vektor přímky a (d_1, d_2, d_3) je vzdálenost přímky od počátku. Přímku lze také zadat dvěma body $\mathbf{X}_1 \vee \mathbf{X}_2$ nebo jako průnik dvou rovin $\mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{p}_2$.

Obecné rotace (6.8) lze v třírozměrném prostoru jednoduše vyjádřit pomocí osy rotace. Pokud $\boldsymbol{\ell}$ je normovaný reprezentant osy rotace ve smyslu $\boldsymbol{\ell}^2 = -1$, tj. $\boldsymbol{\ell}$ je tvaru (6.12), pak rotace podle této osy o úhel φ je dána versorem

$$\mathbf{R}_\ell = \exp(\frac{1}{2}\varphi\boldsymbol{\ell}) = \cos\frac{\varphi}{2} + \boldsymbol{\ell}\sin\frac{\varphi}{2}. \tag{6.13}$$

Podle věty 6.5 lze jednoduše vyjádřit i zrcadlení v rovině a ortogonální projekce, viz obrázek 1. Zrcadlení přímky $\boldsymbol{\ell}$ v rovině $\mathbf{p}$ je reprezentované projektivní třídou multivektoru $\mathbf{p}\boldsymbol{\ell}\mathbf{p}$. Blade $\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{p}$ reprezentuje rovinu obsahující přímku $\boldsymbol{\ell}$, která je kolmá na rovinu $\mathbf{p}$ a blade $(\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{p}) \wedge \mathbf{p}$ reprezentuje kolmou projekci přímky $\boldsymbol{\ell}$ na rovinu $\mathbf{p}$. Podobně $\mathbf{X} \cdot \mathbf{p}$ je kolmice z bodu $\mathbf{X}$ na rovinu $\mathbf{p}$ a $(\mathbf{X} \cdot \mathbf{p}) \wedge \mathbf{p}$ je jeho kolmý průmět do této roviny.



Obrázek 1. Ukázka počítání v projektivní geometrické algebře – screenshot z vizualizace vytvořené programem ganja.js – Geometric Algebra code generator for javascript, [7].

6.3. Konformní geometrická algebra

Pokud chceme zavést geometrickou algebru pro eukleidovskou geometrii s nedegenerovanou bilineární formou B, pak je potřeba k izotropnímu vektoru e_∞ z projektivní geometrické algebry přidat jeho partnera do Wittova páru, který označíme e_0. Potom dostaneme dokonce dva izotropní vektory $e_\infty^2 = e_0^2 = 0$, ale protože $B(e_0, e_\infty) = -1$, je jádro B triviální. Izotropní prostor má indefinitní signaturu, a proto touto konstrukcí získáme nedegenerovanou bilineární formu na $V = \mathbb{R}^{n+2}$ se signaturou $(n+1, 1)$. Příslušná geometrická algebra $\mathrm{Cl}(n+1,1)$ se nazývá *konformní geometrická algebra.*

Podle rovnice (4.8) splňuje algebra bivektorů konformní geometrické algebry $\Lambda^2\mathbb{R}^{n+1,1} \cong \mathfrak{so}(n+1,1)$. Akce bivektorů na $\mathbb{R}^{n+1,1}$ dána rovnicí (4.7) v tomto izomorfismu odpovídá standardní maticové reprezentaci ortogonální Lieovy algebry popsané v 5.2. Tato akce je tranzitivní na projektivizaci kuželu izotropních vektorů, a její stabilizátor je parabolická podalgebra $\mathfrak{p}$ popsaná rovnicí (5.2). Skutečně, bivektory, které působí triviálně na izotropním vektoru e_0, jsou právě ty, které tento vektor neobsahují, a k tomu bivektor $e_0 \wedge e_\infty$, tj. podalgebra

$$\{u \wedge v, u \wedge e_\infty, e_0 \wedge e_\infty\} \cong \mathfrak{so}(n) \oplus \mathbb{R}^{n*} \oplus \mathbb{R} = \mathfrak{p},$$

kde $u, v \in \mathbb{R}^{n,0}$. Akce versorů na izotropních vektorech tedy modeluje v $\mathrm{Cl}(n+1,1)$ konformní geometrii a tím pádem i eukleidovskou geometrii, viz 5.3.

Věta 6.7. *Množina obsahující všechny projektivní třídy izotropních vektorů až na jednu modeluje v konformní geometrické algebře eukleidovskou geometrii.*

Důkaz. Množinu tříd označme M, chybějící třídu $[e_\infty]$ a položme $e_{n+1} = e_\infty$. Předpis (5.4) pro inverzní stereografickou projekci (5.3) pak definuje bijektivní zobrazení $E^n \to M$. Vektor e_∞ je Wittův pár k izotropnímu vektoru e_0, který reprezentuje počátek, a lze ho chápat jako reprezentanta nekonečna. $\square$

Průnik vektorového podprostoru $W \subset \mathbb{R}^{n+1,1}$ dimenze $k+2$ s kuželem izotropních vektorů je opět kužel ve W, a přímky na tomto kuželu lze opět ztotožnit se sférou, tentokrát dimenze k. Pokud tento kužel obsahuje přímku e_∞, tj. bod na této sféře, ze kterého je stereografickou projekcí promítáno, pak W reprezentuje afinní prostor dimenze k v E^n. V opačném případě reprezentuje W sféru dimenze $k-1$ v E^n. Geometrické objekty, které v konformní geometrické algebře lze reprezentovat ve smyslu (3.5) jsou tedy právě zobecněné sféry, tj. sféry a afinní prostory, které chápeme jako sféry procházející nekonečnem. Zejména bod není přirozený objekt a je ho potřeba chápat buď jako limitní sféru s poloměrem nula, anebo jako tzv. „plochý bod“ $\mathbf{X} \wedge e_\infty$, což je vlastně sféra dimenze nula procházející nekonečnem. Díky existenci nedegenerované bilineární formy máme v konformní geometrické algebře k dispozici dualitu (4.4) a tím pádem pro každou zobecněnou sféru dvě reprezentace, které jsou vzájemně duální. Reprezentace (3.5) se hodí na konstrukci sfér z bodů nebo sfér nižší dimenze. Naopak z duální reprezentace (3.6) sféry můžeme jednoduše odečíst její poloměr a střed.

V konformní geometrické algebře existuje stejně jako v projektivní geometrické algebře versor pro translaci a rotaci a navíc existuje versor pro škálování. Kromě zrcadlení v nadrovinách a ortogonálních projekcí na afinní prostory zde lze reprezentovat podobně i reflexi ve sférách a ortogonální projekce na sféry. Hlavní výsledky opět shrneme do následující věty, kterou ale necháme tentokrát bez důkazu. S využitím výše uvedených informací je důkaz snadný a je ponechán jako cvičení pro čtenáře.

Věta 6.8. (*a*) *Geometrické objekty v konformní geometrické algebře. Bod $x \in E^n$ je v $\mathrm{Cl}(n+1,1)$ reprezentován projektivní třídou vektoru*

$$\mathbf{X} = e_0 + x + \frac{1}{2}x^2 e_\infty, \tag{6.14}$$

kde e_0, e_∞ je Wittova dvojice izotropních vektorů. Zejména pro normované reprezentanty bodů $\mathbf{X}^2 = \mathbf{Y}^2 = 1$ platí

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = -\frac{1}{2}\|x-y\|^2,$$

kde $\|x-y\|$ je eukleidovská norma v $\mathbb{R}^n$. Afinní podprostor dimenze k určený body $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{k+1}$ je reprezentován bladem stupně $k+2$

$$\mathbf{w} = \mathbf{X}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{X}_{k+1} \wedge e_\infty$$

a jeho duální reprezentace $\mathbf{w}^*$ je totožná s jeho reprezentací v projektivní geometrické algebře. Sféra dimenze k definovaná body $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{k+2}$ je reprezentována bladem stupně $k+2$

$$\mathbf{s} = \mathbf{X}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{X}_{k+2}$$

a průnik sfér $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$ je reprezentován prvkem $\mathbf{s}_1 \vee \mathbf{s}_2$. Pokud $\mathbf{s}$ je sféra maximální dimenze $n-1$, pak její duální reprezentace je dána vektorem

$$\mathbf{s}^* = \mathbf{S} + \frac{1}{2}\rho^2 e_\infty,$$

kde $\mathbf{S}$ je normovaný reprezentant středu této sféry a ρ je její poloměr.

(*b*) *Transformace v konformní geometrické algebře. Rotace a translace jsou reprezentovány stejnými versory jako v projektivní geometrické algebře. Škálování faktorem* r^2 *je dáno versorem*

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \frac{r^2+1}{2r} + \frac{r^2-1}{2r} e_0 \wedge e_\infty$$

Zrcadlení zobecněné sféry $\mathbf{s}$ *v nadrovině* $\boldsymbol{\pi} \in \Lambda^{n+1}\mathbb{R}^{n+1,1}$ *je dáno podobně jako v projektivní algebře výrazem* $\mathbf{s} \mapsto \boldsymbol{\pi}\mathbf{s}\boldsymbol{\pi}$. *Pokud* $\boldsymbol{\pi}$ *reprezentuje sféru maximální dimenze, definuje tento předpis sférickou inverzi v této sféře. Ortogonální projekce afinního prostoru* $\mathbf{w}$ *na zobecněnou sféru* $\mathbf{s}$ *je* $\mathbf{w} \mapsto (\mathbf{w} \cdot \mathbf{s}) \cdot \mathbf{s}$.

Příklad 6.9. Bod Eukleidova prostoru E^3 daný v kartézských souřadnicích s jednotkovými směrovými vektory $e_1, e_3, e_3 \in \mathbb{R}^3$ vekorem (x, y, z) je podle (6.14) reprezentován v konformní geometrické algebře vektorem

$$\mathbf{X} = e_0 + xe_1 + ye_2 + ze_3 + \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)e_\infty.$$

Reprezentant roviny dané třemi body je $\mathbf{p} = \mathbf{X}_1 \wedge \mathbf{X}_2 \wedge \mathbf{X}_3 \wedge e_\infty$ a její duální reprezentace $\mathbf{p}^*$ je totožná s její reprezentací v projektivní geometrické algebře (6.11). Podobně přímka je $\boldsymbol{\ell} = \mathbf{X}_1 \wedge \mathbf{X}_2 \wedge e_\infty$ a její duál je totožný s (6.12). Sféra generovaná čtyřmi body má v konformní geometrické algebře reprezentaci $\mathbf{s} = \mathbf{X}_1 \wedge \mathbf{X}_2 \wedge \mathbf{X}_3 \wedge \mathbf{X}_4$ a její duál je $\mathbf{s}^* = \mathbf{S} + \frac{1}{2}\rho^2 e_\infty$. Podobně lze vyjádřit kružnici buď pomocí třech generujících bodů $\mathbf{c} = \mathbf{X}_1 \wedge \mathbf{X}_2 \wedge \mathbf{X}_3$ nebo duálně $\mathbf{c}^* = (\mathbf{S} + \frac{1}{2}\rho^2 e_\infty) \wedge \boldsymbol{\pi}^*$, jako průnik sféry a roviny, ve které kružnice leží.

Rotace v E^3 podle osy $\boldsymbol{\ell}$ je stejně jako v projektivní geometrické algebře dána rotorem (6.13). Stejné reprezentace má i zrcadlení v rovině a ortogonální projekce na přímku nebo rovinu. Navíc lze v konformní geometrické algebře stejným způsobem reprezentovat i sférickou inverzi a ortogonální projekci na sféru.

Uvažujme příklad dvou sfér $\mathbf{s}, \mathbf{t}$, kružnici $\mathbf{c}$, přímku $\boldsymbol{\ell}$ a bod $\mathbf{X}$, viz obrázek 2. Průnik sfér je kružnice $\mathbf{s} \vee \mathbf{t}$, průnik přímky a sféry $\mathbf{t}$ je dvojbod $\boldsymbol{\ell} \vee \mathbf{t}$. Ortogonální projekce přímky na sféru $\mathbf{s}$ je kružnice $(\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{s}) \cdot \mathbf{s}$, ortogonální projekce bodu $\mathbf{X}$ na sféru $\mathbf{s}$ je dvojbod $(\mathbf{X} \cdot \mathbf{s}) \cdot \mathbf{s}$, kde ale $\mathbf{X}$ je potřeba chápat jako plochý bod $\mathbf{X} \wedge e_\infty$. Výraz $(\mathbf{c} \cdot \mathbf{t}) \cdot \mathbf{t}$ je kružnice na sféře $\mathbf{t}$ ležící zároveň na sféře, která obsahuje kružnici $\mathbf{c}$ a je kolmá na sféru $\mathbf{t}$.

Reference

[1] E. Meinrenken: *Clifford Algebras and Lie Theory*, A Series of Modern Surveys in Mathematics 58, Springer, 2013.

[2] R. W. Sharpe: *Differential geometry*, Graduate Texts in Mathematics 166, Springer, 1997.

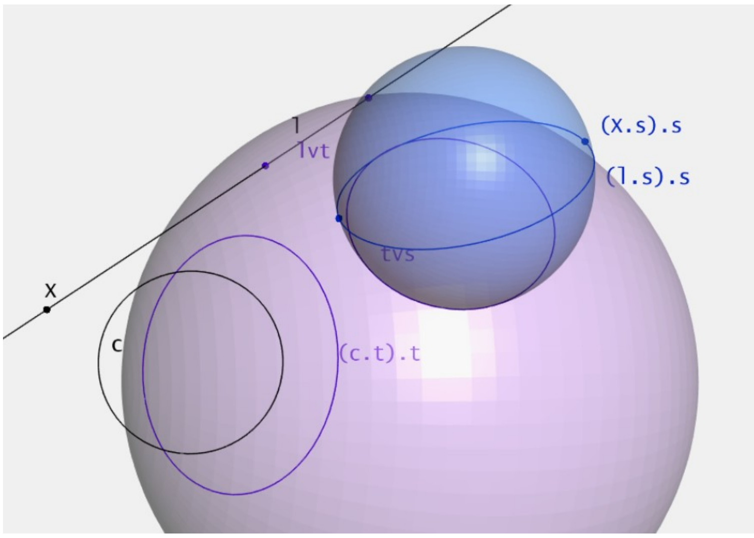
[3] A. Cap, J. Slovák: *Parabolic Geometries: Background and general theory*, Mathematical surveys and monographs, vol. 154, American Math. Soc., 2009.

[4] L. Dorst, D. Fontijne, S. Mann: *Geometric Algebra for Computer Science: An Object-Oriented Approach to Geometry*, Morgan Kaufmann Publishers Inc., Burlington, 2007.

[5] C. G. Gunn: *Geometric Algebras for Euclidean Geometry*, Adv. Appl. Clifford Algebras (2017) 27:185, on-line: `https://doi.org/10.1007/s00006-016-0647-0`.

[6] C. G. Gunn, S. De Keninck: *3D PGA Cheat Sheet, An extensive reference with 3D PGA formulas*, online: `bivector.net`.

[7] S. De Keninck: ganja.js, 2020, online: `https://zenodo.org/record/3635774`.



Obrázek 2. Ukázka počítání v konformní geometrické algebře – screenshot z vizualizace vytvořené programem ganja.js – Geometric Algebra code generator for javascript, [7].

[8] D. Hildenbrand: *Introduction to Geometric Algebra Computing*, Boca Raton, USA: Chapman and Hall/CRC, 2018.
[9] P. Lounesto: *Clifford Algebra and Spinors*, 2nd edn. CUP, Cambridge, 2006.
[10] Ch. Perwass: *Geometric Algebra with Applications in Engineering*, Springer Verlag, 2009.

Aleš Návrat, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: `navrat.a@fme.vutbr.cz`