# SOUTĚŽ V MATEMATICKÉM MODELOVÁNÍ SCUDEM IV 2019

ZDENĚK OPLUŠTIL

Abstrakt. Článek popisuje čtvrtý ročník mezinárodní soutěže v modelování pomocí diferenciálních rovnic SCUDEM IV 2019, kterého se účastnili studenti oboru Matematického inženýrství FSI VUT v Brně.

## 1. Úvod

Na podzim minulého roku proběhl už čtvrtý ročník mezinárodní soutěže *Student Competition Using Differential Equation Modeling* (SCUDEM), kterou zajišťuje organizace „Systemic Initiative for Modeling Investigations & Opportunities with Differential Equations"(SIMIODE). Tato organizace sdružuje učitele a studenty z celého světa a jedním z jejích hlavních cílů je podpora výuky matematického modelování a řešení praktických problémů pomocí diferenciálních rovnic.

Aktuálně posledního ročníku soutěže SCUDEM IV 2019 se poprvé zúčastnili také naši studenti oboru Matematické inženýrství. V kategorii studentů bakalářského studia soutěžili Anna Glozigová, Martin Buriánek a Petr Kamarýt s koučem docentem Zdeňkem Opluštilem a v kategorii studentů magisterského studia Daniel Kiša, Adam Kyjovský a Daniel Kunz, jejich kouč byl profesor Jan Franců.

Systém soutěže byl následující: Jednotlivé týmy si při registraci vybraly hostitelskou univerzitu, v našem případě to byla Masarykova univerzita v Brně - přesněji Ústav matematiky a statistiky Přírodovědecké fakulty. Všechny týmy obdržely ve stejný čas zadání, které obsahovalo následující tři témata: Problem A: Group Affinity and Fashion Sense, Problem B: Movement Of An Object In Microgravity Environments, Problem C: Chemical Espionage (přesné znění zadání je uvedeno níže). Studenti si jedno z nich vybrali a měli týden na jeho zpracování, resp. vytvoření matematického modelu popsaného pomocí diferenciálních rovnic.

Hlavní část soutěže pak probíhala v Brně na Přírodovědecké fakultě před porotou složenou z koučů jednotlivých týmů a dále z vysokoškolských pedagogů zabývajících se problematikou diferenciálních rovnic. Hodnocení poroty bylo rozděleno na dvě části. Nejprve byla anonymně hodnocena odevzdaná řešení jednotlivých týmů a dále pak samotná prezentace studentů. Přičemž do ní museli soutěžící

2010 *MSC.* Primární 00A09; Sekundární 00A35, 34-XX, 92-XX.
*Klíčová slova.* Soutěž SCUDEM, matematické modelování, diferenciální rovnice.

ještě zahrnout i odpovědi na doplňující otázky položené přímo na místě. Pro odlehčení soutěžního napětí hlavní organizátoři akce připravili i doprovodný program, který spočíval např. v modelování vývoje populace nebo matematickém kvízu.

Mimo týmy z našeho oboru Matematické inženýrství se brněnské části soutěže zúčastnili ještě jeden tým z Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity a tři týmy z Matematicko - fyzikální fakulty Univerzity Karlovy. Celkově pak SCUDEM IV 2019 proběhl na více než 60 univerzitách po celém světě (v Evropě to byla ještě univerzita v maďarském Szegedu).

Podle hodnocení poroty soutěžící úspěšně zvládli zpracovat vybraná témata. Velmi zajímavé bylo, jak rozdílným způsobem jednotlivé týmy přistupovaly k řešení stejných problémů - často to korespondovalo s jejich zaměřením studia (nejednalo se totiž jen o studenty čistě matematických oborů). Samotní učastníci soutěže podle svých slov ocenili možnost vyzkoušet si prezentaci svých výsledků před porotou, což pro většinu byla nová a ne úplně příjemná zkušenost. Na druhou stranu se to dalo brát jako příprava např. na obhajobu závěrečné práce. Dalším přínosem soutěže určitě bylo vyzkoušet si týmové řešení zadaného problému v daném časovém intervalu, tj. navrhnout řešení a obhájit si ho před porotou, tak jak to běžně v praxi chodí.

Celkový dojem ze soutěže byl velmi pozitivní a doufáme, že studenti Matematického inženýrství se budou soutěže pravidelně účastnit i v příštích ročnících. Byla by to pro ně určitě zajímavá a užitečná zkušenost.

Ještě poznamenejme, že podrobnější informace o organizaci SIMIODE a o samotné soutěži SCUDEM lze nalézt na webovských stránkách
`https://www.simiode.org/` resp. `https://www.simiode.org/scudem`.

Na závěr uvedeme přesná zadání jednotlivých témat a dále pak řešení, které sestavili studenti našeho oboru.

### Problem A: Group Affinity and Fashion Sense

People tend to congregate into groups in different ways. People can create strong links in small cliques or identify loosely as part of a larger trend. One example of the latter phenomena is hipsters. An amusing example of how someone identified and adapted their appearance to conform to the look of a stereotypical hipster is a person who complained that his image was used in an article about people conforming to a stereotypical look [1]. It later turned out the image in the article [2] was someone else who happened to look like the person complaining that image was appropriated. This raises a number of questions about how people choose which groups to associate with as well as how they decideto adjust to the expectations of the other people within their group. We focus on the latter question, and you are asked to examine the propensity for a person to alter their appearance and conform to particular expectations. You should develop a model that describes how different people within an established group interact and decide to change some particular part of their appearance. How long does it take for people in the group to change their appearance? How many people will change, and how much alike will they eventually appear? You should provide an analysis about which parts of your model impact how different subgroups change and how quickly the change occurs. Your description of the model should include the following:

- Clearly describe the aspect that is being changed.
- Describe how information about it is exchanged between people in the group.
- Describe the way people interact and how the model mimics those interactions.
- Describe the range of values of the parameters and the meaning associated with higher versus lower values of these parameters.

Note, the work that sparked this exchange included a mathematical model of how people decide whether or not to conform and change their appearance [3]. The model and analysis in the paper is advanced, and it is not a good starting point for the beginning development of a model. The model in the paper only included two different groups: conformists and nonconformists. It also included a delay to approximate the interactions between the two groups. (A delay can be difficult to approximate and analyze and should probably be avoided for a first effort in a short term project.)

References:

[1] Garcia-Navarro, Lulu and Feingold, Lindsey, "Man Inadvertently Proves That Hipsters Look Alike By Mistaking Photo As Himself,"March 10, 2019, https://www.npr.org/2019/03/10/702063209/man-inadvertently-proves-that-hipsters-look-alike-by-mistaking-photo-as-himself. Accessed June 2019.
[2] "The hipster effect: Why anti-conformists always end up looking the same," MIT Technology Review, Feb 28, 2019, https://www.technologyreview.com/s/613034/the-hipster-effect-why-anti-conformists-always-end-up-looking-the-same/. Accessed June 2019.
[3] Touboul, Jonathon, "The Hipster Effect: When Anticonformists All Look The Same," https://arxiv.org/abs/1410.8001. Accessed June 2019.

**Problem B: Movement Of An Object In Microgravity Environments**

In February 2019 a Japanese probe made contact with a small asteroid, Ryugu [1]. The team overseeing the program had to overcome a number of technical challenges. For this question we focus on the issues associated with a low gravity environment. The team had to land a probe gently enough so that it does not bounce and move too far away from a designated landing position. The next problem is moving the probe to a new position using a minimal amount of energy and also minimizing how far the probe bounces on the surface of the asteroid.

You have been asked to provide guidance in helping find a new asteroid on which to land a probe. The goal is to determine the range of dimensions for the smallest possible asteroids which can be used to land a probe. (Keep in mind that asteroids can have high aspect ratios and are generally not round.)Your team should develop a method to land a small probeon the asteroidand the final position of the probe after coming to rest should be as close as possible to a predetermined landing point. At the same time the amount of bouncing should be as small as possible to avoid damaging the probe.You should also develop a way to move the probe to a predetermined position using a spring that will allow the probe to hop in a given direction without using a device that generates thrust. The analysis you provide should include a detailed description of the mathematical models you develop to describe the movement of the probe in these different conditions.

The surface of the asteroid is assumed to be quite rugged, and the probe may have to jump into a ravine or along the side of a steep cliff. You should provide guidance concerning the limits of moving theprobe using a minimal number of jumps under a wide variety of situations. Your analysis should include a description of the possible limits to what area can be exploredand the description should include guidance on choosing an asteroid with respect to the possible dimensions.

References:
[1] Wall, Mike, "Japanese Spacecraft Successfully Snags Sample of Asteroid Ryugu," space.com, 22 February 2019, https://www.space.com/japanese-asteroid-probe-lands-ryugu.html. Accessed June 2019.

**Problem C: Chemical Espionage**

It can be difficult for some insects to find mates. One common way for a female to attract a male is to use chemical signals. One problem with this approach is that this signaling can attract many males, and in response the males often use chemical signals, called anti-aphrodisiacs, that are used to either mask or dissuade other males. An example of this can be found in the large cabbage white butterfly Pieris brassicae. Unfortunately for the butterflies,the chemical signals can be exploited by parasitic wasps. Two species of wasps have been identified that can detect the anti-aphrodisiacs, and when a female butterfly has the chemical signal thewaspsare more likely to follow the butterfly and lay their own eggs in the butterflies' eggs. These interactions introduce two competing pressures on the butterfly population. For the male butterflies the anti-aphrodisiacs make it more likely for them tofertilize eggs. For the female butterflies the anti-aphrodisiacs make it less likely to be bothered by more males, and the females can focus on placing their eggs in the most advantageous place. On the other hand the anti-aphrodisiacs make it more likely these eggs will be eaten by the wasp larvae. One question that arises is to determine the trade-offs and balance between the two competing interests. To do so develop a mathematical model for the interactions of the male and female P. brassicaeas well as the parasitic wasps. What is the best balance for this system and what is likely to happen in the long run?

References:
[1] "Chemical espionage on species-specific butterfly anti-aphrodisiacs by hitchhiking Trichogramma wasps, " Martinus E. Huigens, Jozef B. Woelke, Foteini G. Pashalidou, T. Bukovinszky, Hans M. Smid, and Nina E. Fatouros.Behavioral Ecology. Volume 21, Issue 3, May-June 2010, Pages 470–478, 11 February 2010. https://doi.org/10.1093/beheco/arq007.

www.simiode.org
SIMIODE A SYSTEMIC INITIATIVE FOR MODELING INVESTIGATIONS & OPPORTUNITIES WITH DIFFERENTIAL EQUATIONS

# Problem C: Chemical Espionage

Anna Glozigová, Martin Buriánek, Petr Kamarýt
coach: doc. Mgr. Zdeněk Opluštil, Ph.D.

SCUDEM IV, November 2019

Pro modelování řešení tohoto problému jsme využili klasický *Lotkův-Volterrův* model dravce a kořisti. Avšak narazili jsme na problém, že v tomto modelu vymřela jedna z populací, nebo přežili pouze motýli, jejichž populace rostla nade všechny meze. Proto jsme zvolili tzv. model *s vnitrodruhovou konkurencí.*

Nechť tedy $x$ je *populace motýlů* a $y$ *populace vos.* Daný problém je popsán následující soustavou

$$\begin{cases} x' = (\epsilon_1 - \alpha x - \gamma_1 y)x \\ y' = (-\epsilon_2 + \gamma_2 x)y \end{cases} \tag{1}$$

kde
$\epsilon_1 \ldots$ *míra růstu populace kořisti,*
$\epsilon_2 \ldots$ *míra růstu populace dravce izolovaného od kořisti,* $\epsilon_2 > 0$,
$\alpha \ldots$ *míra vnitrodruhové konkurence kořisti,* $\alpha > 0$,
$\gamma_1 \ldots$ *míra ničení populace kořisti dravcem,*
$\gamma_2 \ldots \kappa\gamma_1$, *kde* $\kappa > 0$ ,
$\kappa \ldots$ *efektivnost přeměny zničené kořisti na populaci dravce,*

dále $\gamma_1$, $\epsilon_1$ jsou funkce závislé na $c$, kde $c \ldots$ *koncentrace feromonů od populace motýlů,* $c > 0$. Zvolili jsme $\epsilon_1 = ec$ a $\gamma_1 = gc$, kde $e,g > 0$. Dostáváme tedy tvar

$$\begin{cases} x' = (ec - \alpha x - gcy)x \\ y' = (-\epsilon_2 + \kappa \mathrm{gcx})\mathrm{y} \end{cases} \tag{2}$$

## 1. ANALÝZA MODELU A SINGULÁRNÍCH BODŮ

Obě rovnice položíme rovny nule a obdržíme následující singulární body

$$[0,0],\ [\tfrac{ec}{\alpha},0],\ [\tfrac{\epsilon_2}{\kappa gc},\tfrac{\kappa egc^2 - \alpha\epsilon_2}{\kappa g^2 c^2}]$$

www.simiode.org
SIMIODE A SYSTEMIC INITIATIVE FOR MODELING INVESTIGATIONS & OPPORTUNITIES WITH DIFFERENTIAL EQUATIONS

Jacobiho matice pro danou soustavu je

$$\text{J(x,y)}=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ec-2\alpha x-gcy & -gcx \\ \kappa gcy & -\epsilon_2+\kappa gcx \end{pmatrix}$$

Jacobiho matice v prvním singulárním bodě

$$\text{J(0,0)}=\begin{pmatrix} ec & e \\ 0 & -\epsilon_2 \end{pmatrix},$$

jejíž vlastní čísla jsou $\lambda_1$= -ec, $\lambda_2$= $\epsilon_2$, za předpokladu e,c > 0. Jelikož dostáváme kombinaci *kladné a záporné vlastní číslo*, jedná se o typ singulárního bodu tzv. *sedlo* (nezávisí na c).

Jacobiho matice v druhém singulárním bodě

$$\text{J}(\tfrac{ec}{\alpha},0)=\begin{pmatrix} -ec & \frac{-gc^2e}{\alpha} \\ 0 & -\epsilon_2+\frac{\kappa gc^2e}{\alpha} \end{pmatrix},$$

jejíž vlastní čísla jsou $\lambda_1$= ec, $\lambda_2$= $\frac{\kappa gc^2e-\epsilon_2\alpha}{\alpha}$, kde podle $\kappa$gc$^2e-\epsilon_2\alpha$ máme dva typy singulárních bodů.

$$\kappa \text{gc}^2e<\epsilon_2\alpha \ldots \text{c} \in (0;\sqrt{\tfrac{\epsilon_2\alpha}{\kappa ge}})$$

$$\kappa \text{gc}^2e>\epsilon_2\alpha \ldots \text{c} \in (\sqrt{\tfrac{\epsilon_2\alpha}{\kappa ge}}\ ;\infty)$$

V prvním případě se jedná o *stabilní uzel*, v druhém o *sedlo*, přičemž uvažujeme $[\frac{\epsilon_2}{\kappa gc},\frac{\kappa egc^2-\alpha\epsilon_2}{\kappa g^2c^2}]$ pro $\kappa$gc$^2e>\epsilon_2\alpha$, neboť opak nemá smysl.
Třetí a nejzajímavější singulární bod má Jacobiho matici

$$\text{J}(\tfrac{\epsilon_2}{\kappa gc},\tfrac{\kappa egc^2-\alpha\epsilon_2}{\kappa g^2c^2})=\begin{pmatrix} \frac{-\alpha\epsilon_2}{\kappa gc} & \frac{-\epsilon_2}{\kappa} \\ \frac{\kappa egc^2-\alpha\epsilon_2}{gc} & 0 \end{pmatrix},$$

vlastní čísla zjistíme z následujícího výrazu $\lambda^2+\frac{\epsilon_2\alpha}{\kappa gc}\lambda+\frac{\epsilon_2(\kappa egc^2-\alpha\epsilon_2)}{\kappa gc}=0$.
Diskriminant této rovnice je D = $\alpha^2\epsilon_2^2-4\kappa gc\epsilon_2(\kappa egc^2-\alpha\epsilon_2)$
D>0 ... jelikož $\alpha\epsilon_2>\sqrt{D}$ obě reálná vlastní čísla jsou záporná, dostáváme tedy *uzel.*
D<0 ... komplexně sdružená vlastní čísla se zápornými reálnými částmi, dostáváme *stabilní ohnisko.*
D=0 ... řešíme rovnici vzhledem k $\alpha$ jejíž kořeny jsou $\alpha^*=2\kappa$gc($\pm\sqrt{1+\frac{ce}{\epsilon_2^2}}$-1),
kde smysl má pouze uvažovat kladný kořen.
Pro $\alpha<\alpha^*$ dostáváme *ohnisko* a pro $\alpha>\alpha^*$ *uzel.*

**2.ZÁVĚR**

Námětem k další analýze by mohl být rozbor vzhledem k c u třetího singulárního bodu, to však vede k *rovnici třetího stupně* analyticky obtížně řešitelné. Jinou modifikací by mohlo být rozšíření modelu do třetí dimenze (např. pro motýly a dva druhy vos). Řešení komplikovanějších modelů by však vyžadovalo více času.

**DODATEČNÉ ÚKOLY**

**ÚKOL 1**

Naši soustavu jsme rozšířili o další rovnici, model tedy nabývá podoby

$$\begin{cases} x' = (\epsilon_1 - \alpha x - \gamma_1 y - \delta_1 z)x \\ y' = (-\epsilon_2 + \gamma_2 x - \delta_2 z)y \\ z' = (-\epsilon_3 + \sigma_3 x + \tau_3 y)z \end{cases} \tag{3}$$

kde
$\epsilon_3$... *míra růstu populace dravce izolovaného od obou druhů kořisti,* $\epsilon_3 > 0$,
$\sigma_3$... *míra ničení prvního druhu populace kořisti dravcem, kde* $\sigma_3 = A\delta_1, A > 0$,
$\tau_3$... *míra míra ničení druhého druhu populace kořisti dravcem, kde* $\tau_3 = B\delta_2, B > 0$,
*A,B... efektivnost přeměny jednotlivého druhu zničené kořisti na populaci dravce,*

Dostáváme tedy matici 3x3, kde určování typu singulárních bodů by přinášelo jisté komplikace.

**ÚKOL 2**

Naši soustavu jsme modifikovali následovně

$$\begin{cases} x' = \alpha_1 xy - \beta_1 xz \\ y' = \alpha_2 xy - \beta_2 yz \\ z' = -\alpha_3 + \delta_1 xz + \delta_2 yz \end{cases} \tag{4}$$

kde
$x$... *populace samců,*
$y$... *populace samic,*
$z$... *populace dravců,*
$\alpha_1 = \alpha_2$... *předpoklad, že se stejnou pravděpodobností narodí samec/samice,*
$\beta_1 = \beta_2$... *předpoklad, že dravec bude se stejnou pravěpodobností ničit samce i samice,*

Odpověď na otázku vede k řešení optimalizační úlohy. Samec nepoužívající feromony má malou šanci, že ho samička vyhledá. Samec používající naopak příliš moc feromonů riskuje sežrání jeho mláďat. Je tedy třeba nalézt optimální hodnotu feromoů.

**ÚKOL 3**

Naši původní soustavu jsme modifikovali následujícím způsobem

$$\begin{cases} x' = (\epsilon_1 - \alpha x - \gamma_1 y)x \\ y' = (-\epsilon_2 + \gamma_2 x)y \end{cases} \tag{5}$$

kde
z původní závislosti $\epsilon_1 = \epsilon_1(c)$ dostáváme závislost na času $\epsilon_1 = \epsilon_1(c, t)$ a z $\gamma_1 = \gamma_1(c)$ dostáváme závislost na času $\gamma_1 = \gamma_1(c, t)$.

Modifikovaná soustava by však potom nebyl autonomní systém.

**ZDROJE**

[1] bakalářská práce *LOTKŮV-VOLTERRŮV POPULAČNÍ MODEL A JEHO ZOBECNĚNÍ*; Kateřina Zubková; 2016; Brno; VUT FSI
[2] *Spojité modely v biologii*; Josef Kalas, Zdeněk Pospíšil; 2001; Brno; MU PřF
[3] skripta *Matematika III*; Jan Čermák, Luděk Nechvátal; 2016; Brno; VUT FSI
[4] diplomová práce *Modely dravec–kořist a jejich počítačové simulace*; Jitka Kühnová; 2007; Brno; MU PřF

www.simiode.org
SIMIODE A SYSTEMIC INITIATIVE FOR MODELING INVESTIGATIONS & OPPORTUNITIES WITH DIFFERENTIAL EQUATIONS

SCUDEM CHALLENGE 2019: PROBLEM C

**Team: Daniel Kiša, Daniel Kunz, Adam Kyjovský.**

**Coach: Jan Franců.**

**School: Brno University of Technology.**

**Zadání problému**

Modelovaná situace se týká populace běláska zelného a parazitických vosiček z rodu Trichogramma. Bělásci při rozmnožování používají chemické signály. Feromon samičky láká samečky, oproti tomu feromon jednoho samečka odpuzuje ostatní samečky. Zároveň však látka sameččího feromonu (benzylchlorid) láká dva druhy parazitických vosiček k místu páření. Vosičky kladou svoje vajíčka dovnitř vajíček běláska, těmi se následně vylíhnuté larvy krmí. Hladina sameččího feromonu tudíž vytváří dva protichůdné nátlaky na populaci bělásků. Pro samičky vysoká hladina benzylchloridu znamená, že může klást vajíčka v klidu bez obtěžování ostatních samců, to ale zároveň způsobí přílet více parazitických vosiček.
Úkolem je sestavit matematický model (pomocí diferenciálních rovnic) popisující tuto situaci, diskutovat rovnováhu systému a dlouhodobé dopady.

## 2. Zvolený model, jeho předpoklady a výsledky

Zvolený model zkoumá změnu populací běláska a vosiček v čase, přičemž interakce těchto dvou druhů je modelována pomocí třetí proměnné symbolizující počet běláskem nakladených vajec. Dostáváme tak systém tří diferenciálních rovnic.
Předpokládáme, že přírůstky populací běláska (resp. vosiček) jsou přímo úměrné počtu nenapadených vajec (resp. napadených vajec), a že jejich úbytek je přímo úměrný jejich populacím. Jelikož dotyčný druh je v rámci jednoho pářícího období monogamní, předpokládáme, že přírůstek vajec je úměrný počtu oplozených samiček.
Funkce afrodiziaka vylučovaného samičkami je v modelu zanedbána, funkce antiafrodiziaka vylučovaného samečky je modelována tak, že čím více samečků benzylchlorid při páření vypouští, tím více roste pravděpodobnost, že nakladená vejce budou napadena parazitickými vosičkami. Poměr mezi pohlavími běláska je uvažován konstantní a roven 2.23:1 samečků ku samičkám[2]. Nejsou uvažována jednotlivá vývojová stádia bělásků a vosiček, v modelu se z vajec líhnou už dospělí jedinci. Dále model zanedbává fakt, že bělásci se nerozmnožují po celý rok, ale pouze v určitých obdobích.
Model je ve tvaru

$$\dot{x} = c_1 \delta e^{-p(\alpha+\beta r)} y - d_1 x$$

$$\dot{y} = c_2(1 - e^{-\gamma x})(1 - \mu)x - \delta y$$
$$\dot{p} = c_3\delta(1 - e^{-p(\alpha+\beta r)})y - d_2 p,$$

kde $x$ vyjadřuje populaci běládků, $y$ počet vajec a $p$ populaci parazitických vosiček.

Parametry použité v modelu jsou zesumarizovány v následující tabulce. Většina hodnot byla zvolena pouze orientačně pro numerické řešení systému.

| Parametr | Popis | Hodnota |
|---|---|---|
| $c_1$ | podíl nenapadených vajec, která se zdárně vylíhnou v běláska | 0.9 |
| $c_2$ | počet vajec nakladených jednou oplozenou samičkou | 20 |
| $c_3$ | podíl napadených vajec, která se zdárně vylíhnou ve vosičku | 1 |
| $d_1$ | úmrtnost běládků | 1 |
| $d_2$ | úmrtnost vosiček | 1 |
| $r$ | podíl samečků používajících anti-afrodiziakum | |
| $\delta$ | rychlost líhnutí vajec | 1 |
| $\alpha$, $\beta$ | slouží k vyjádření schopnosti hledání vajec vosičkami | 0.1, 0.9 |
| $\gamma$ | slouží k vyjádření pravděpodobnosti, že si každá samička najde partnera | 1 |
| $\mu$ | poměr pohlaví mezi samečky a samičkami | 0.69 |

Pro vysvětlení významu jednotlivých členů začneme u členu vyjadřujícího přírůstek vajec. Z předpokladu monogamie samiček plyne, že za jedno páříci období může dojít k maximálně $(1-\mu)x$ oplození. $(1-e^{-\gamma x})$ je rostoucí funkce nabývající hodnot mezi 0 a 1 a vyjadřuje pravděpodobnost, že dojde k oplození všech samic. Po vynásobení konstantou $c_2$ dostáváme celkový počet nakladených vajec.
Úbytek vajec $-\delta y$ se pak dělí na tři části - přírůstek běládků v důsledku vylíhnutí, přírůstek vosiček v důsledku parazitace a případný úbytek vajec z externích důvodů. Funkce $e^{-p(\alpha+\beta r)}$ ve zmíněných přírůstcích vyjadřuje jakou část vajec vosička nenapadne. Pro velké hodnoty $p$ se funkce blíží nule, jinak řečeno, pokud je počet vosiček velký, podaří se jim napadnout téměř všechna vejce. Parazitismus vosiček je silně ovlivněn parametrem $r$, který vyjadřuje podíl samečků běláska v populaci využívajících anti-afrodiziakum pro zvýšení šance svého rozmnožení. Čím větší tento podíl je, tím lépe vosička na běláscích parazituje. Parametr $\alpha$ vyjadřuje minimální schopnost vosiček parazitovat, tedy i bez pomoci sameččího feromonu. $\alpha+\beta$ pak tu maximální, tedy v případě všech samečků vypouštějících benzylchlorid.
Úbytky $-d_1 x$ a $-d_2 p$ jsou v tomto tvaru kvůli předpokladu lineární závislosti rychlosti vymírání populace na její velikosti.

## 3. Interpretace a diskuse výsledků

Vzhledem k nelinearitě systému rovnic byla úloha řešena pouze numericky v prostředí MATLAB. Konstanty pro výpočet byly zvoleny dle tabulky výše. Zkoumán byl vliv podílu samečků používajících anti-afrodiziakum na řešení systému. Při malých hodnotách $r$ bylo řešení asymptoticky stabilní a po několika oscilacích se populace běláska a vosiček ustálily na nenulových hodnotách - oba druhy v systému žily v rovnováze. Při zvyšování parametru $r$ se nejprve zvětšovalo oscilování řešení a trvalo déle, než se populace ustálily. Okolo hodnoty $r = 0.3$ se řešení kvalitativně změnilo a ekvilibrium přestalo být asymptoticky stabilní, řešení okolo něj soustavně kmitalo. Pro hodnoty nad $r = 0.33$ se stacionární bod přesunul do počátku, v systému tedy došlo k vymření obou druhů.

Výsledky lze interpretovat tak, že pro celkovou populaci běláska je výhodnější menší míra využívání benzylchloridu pro odrazení ostatních samečků. Feromon sice zvýší šanci jedince na úspěšné rozmnožení, v přítomnosti vosiček ale jeho vylučování působí od jisté meze katastrofálně a vede k vyhynutí celé populace.

## Reference

[1] "Chemical espionage on species-specific butterfly anti-aphrodisiacs by hitchhiking Trichogramma wasps. "Martinus E. Huigens, Jozef B. Woelke, Foteini G. Pashalidou, T. Bukovinszky, Hans M. Smid and Nina E. Fatouros, Behavioral Ecology, Volume 21, Issue 3, May-June 2010, Pages 470–478, https://doi.org/10.1093/beheco/arq007

[2] "Biology of Pieris brassicae (Linnaeus) (Lepidoptera: Pieridae) under Laboratory Conditions,"Muhammad Aslam and Nazia Suleman, Pakistan Journal of Biological Sciences, 2: 199-200, 1999.

[3] "Spojité modely v biologii,"Josef Kalas, Zdeněk Pospíšil, 2001.

Zdeněk Opluštil, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, VUT v Brně,
*e-mail*: `oplustil@fme.vut.cz`