VYBRANÉ PRÍKLADY Z INTERNETOVEJ MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

VIERA ŠTOUDKOVÁ RŮŽIČKOVÁ

Abstrakt. V článku sú riešené vybrané príklady súvisiace s Internetovou matematickou olympiádou pre študentov stredných škôl. Prvý príklad je o výpočte objemu telesa, v druhom sa hľadajú rastúce funkcie s daným rozdielom, v treťom sa pracuje s množinou komplexných čísiel a vo štvrtom sa hľadá dvojica funkcií spĺňajúca daný vzťah, pričom jedna z nich je funkciou dvoch premenných.

Ústav matematiky na FSI VUT v Brne každoročne organizuje Internetovú matematickú olympiádu pre študentov stredných škôl ČR a SR. V roku 2019 prebehol už jej dvanásty ročník. Na príprave príkladov a ich vyhodnotení sa nemalou mierou podieľajú študenti oboru Matematické inženýrství a oboru Aplikovaná matematika. Na stránkach `matholymp.fme.vutbr.cz` je možné nájsť zadania aj riešenia príkladov zo všetkých ročníkov.

Tento príspevok je tretí v poradí na túto tému. Vybrala som štyri príklady, ktoré riešim nie len s cieľom nájsť nejaké riešenie ale usilujem o to, aby toto riešenie spĺňalo rôzne kritériá. Niektoré príklady je možné riešiť aj s využitím limít, derivácií a integrálov, ktoré nie všetci stredoškoláci poznajú, preto na súťaži tieto postupy riešení neuvádzame. V tomto článku je priestor aj na takéto riešenia.

1. Príklad substrát

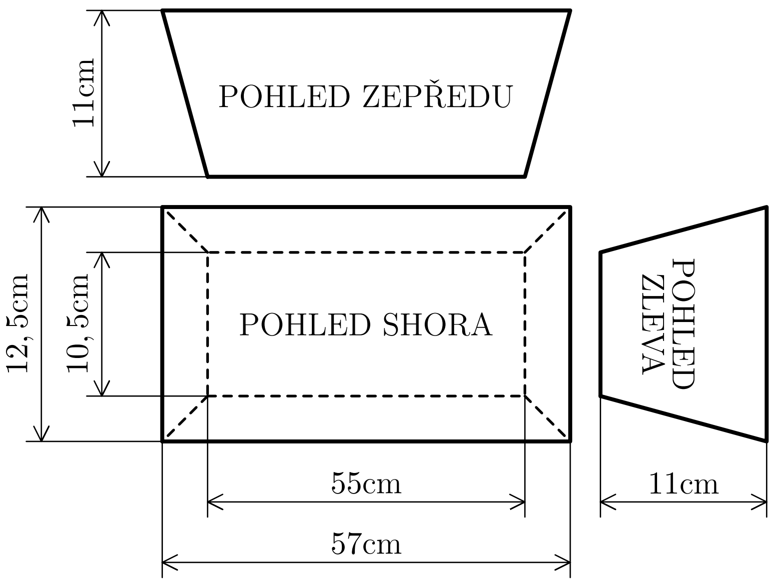
Príklad nazvaný pracovne Substrát je jedným z tých, ktoré vznikli podľa reálnej situácie. Riešitelia nemali problém pochopiť, o čo ide, v zadaní sa nevyskytujú žiadne zložité či menej známe matematické pojmy. Preto riešenia tohto príkladu poslali skoro všetky zúčastnené tímy, aj keď nie vždy správne. Príklad bol použitý v roku 2019 a mal číslo 1.

Príklad 1 (autorka Jana Hoderová)**.** *Potřebujeme nachystat 8 truhlíků pro vysazení balkónových květin. Tvar a rozměry truhlíku jsou uvedeny na obrázku 1. Truhlíky chceme naplnit substrátem právě 2* cm *pod horní okraj.*

a) *Kolik substrátu v* cm^3 *zaokrouhlených na celá čísla budeme potřebovat?*
b) *Jaký je nejmenší počet 20litrových balení substrátu, který k tomu budeme potřebovat?*

2010 *MSC.* Primární 00A09; Sekundární 00A35.
Klíčová slova. Matematická olympiáda.

c) *Bude finančně výhodnější koupit odpovídající počet 20litrových substrátů á 77 Kč, nebo odpovídající počet 40litrových substrátů á 112 Kč?*



Obrázok 1

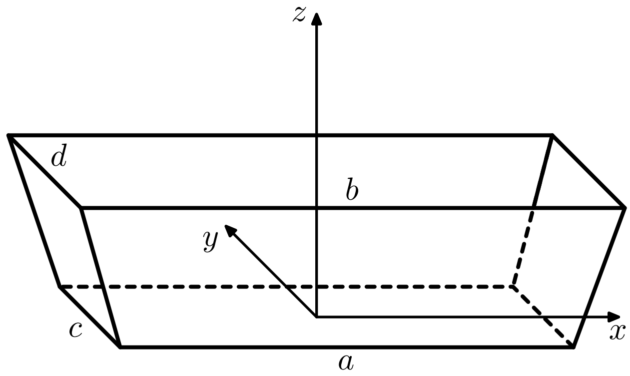
Možných postupov riešenia je niekoľko. Dá sa postupovať podobne, ako je to ukázané vo vzorovom riešení na stránkach olympiády, teda rozdeliť teleso na niekoľko častí – kváder, hranoly a ihlany, ktorých objemy vieme spočítať podľa známych vzorcov.

Existuje aj priamy vzorec na výpočet objemu daného telesa? Dané teleso vyzerá na prvý pohľad ako zrezaný ihlan, ale nie je ním. Šikmé hrany by sa totiž po predĺžení nepretli v jednom bode ale v dvoch bodoch. Preto nemôžeme použiť vzorec na objem zrezaného ihlana, v takom prípade by sme síce dostali správne výsledky častí b) a c) ale len približný výsledok časti a). Aj pre naše teleso existuje vzorec na výpočet jeho objemu. Dá sa nájsť v tabuľkách, niektorí riešitelia ho našli a použili. Že taký vzorec existuje, nie je až tak prekvapivé – pokiaľ vo výpočte objemu nahradíme dané údaje parametrami, dostaneme výraz, ktorý bude hľadaným vzorcom. A že bude tento výraz pomerne jednoduchý, sa tiež dá dopredu odhadnúť z toho, že ide o symetrické teleso, ktorého povrch je tvorený časťami šiestich rovín, pričom dve z nich sú rovnobežné.

Toto všetko je zaujímavé, ale príklad som sem vybrala pre niečo iné. Chcela by som tu ukázať, ako sa dá riešiť tento príklad postupom, ktorý učíme našich študentov na vysokej škole, a to je pomocou integrálov.

Najskôr odvodím vzorec pre objem celého truhlíka. Označím rozmery dna truhlíka ako a, c a rozmery horných okrajov truhlíka ako b, d tak, že rovnobežné sú dvojice hrán s dĺžkami a, b a taktiež c, d. Výšku truhlíka označím ako v.

Umiestnim si truhlík do súradnicovej sústavy. Je mi jasné, že najvhodnejšie bude čo najsymetrickejšie umiestnenie. Dno truhlíka preto položím na rovinu xy tak, aby os z prechádzala stredom truhlíka a hrany dna boli rovnobežné s osami x, y. Na obrázku 2 je znázornený umiestnený truhlík.



Obrázok 2

A teraz sa zamyslím, ako je to najlepšie integrovať, čiže ako by sa to dalo pekne nakrájať na „nekonečne veľa“ plátkov s „nulovou hrúbkou“. Vidím, že najjednoduchšie je to vtedy, keď režem truhlík rovnobežne s rovinou xy. Vtedy totiž v reze dostanem vždy obdĺžnik. Jeho rozmery závisia lineárne od výšky z, v akej režem, a teda sú rovné $A+Bz$ a $C+Dz$, kde A, B, C, D sú konštanty a dajú sa jednoducho vypočítať. Pre $z=0$ sú rozmery tohto obdĺžnika rovné rozmerom dna truhlíka, to je a, c. Z toho hneď mám, že $a=A$, $c=C$. Ďalej, pre $z=v$ sú rozmery tohto obdĺžnika rovné rozmerom horných okrajov truhlíka, to je b, d. Z toho môžem vyjadriť B, D a dostávam, že $B=\frac{b-a}{v}$, $D=\frac{d-c}{v}$. Rozmery obdĺžnikového rezu truhlíka vo výške z sú teda

$$a+\frac{b-a}{v}\cdot z, \quad c+\frac{d-c}{v}\cdot z.$$

Objem truhlíka teda môžem vypočítať tak, že budem integrovať obsahy obdĺžnikov pre z od 0 po v. Dostávam

$$V=\int_0^v\left(a+\frac{b-a}{v}\cdot z\right)\cdot\left(c+\frac{d-c}{v}\cdot z\right)\mathrm{d}z.$$

Funkcia, ktorú integrujem, je polynóm. Výraz roznásobím a dostávam

$$V=\int_0^v\left(\frac{(b-a)(d-c)}{v^2}\cdot z^2+\frac{c(b-a)+a(d-c)}{v}\cdot z+ac\right)\mathrm{d}z$$

$$= \left[\frac{(b-a)(d-c)}{v^2}\cdot\frac{z^3}{3}+\frac{c(b-a)+a(d-c)}{v}\cdot\frac{z^2}{2}+ac\cdot z\right]_0^v$$
$$= \frac{(b-a)(d-c)}{3}\cdot v+\frac{c(b-a)+a(d-c)}{2}\cdot v+ac\cdot v$$
$$= \frac{v}{6}\left[2(b-a)(d-c)+3c(b-a)+3a(d-c)+6ac\right]$$
$$= \frac{v}{6}\left[2ac+ad+bc+2bd\right]=\frac{v}{6}\left[a(2c+d)+b(c+2d)\right],$$

čo je už výsledný vzorec pre objem truhlíka s rozmermi a, b, c, d, v popísanými vyššie.

V zadaní sa od nás v skutočnosti nechce vypočítať objem truhlíka, ale objem substrátu v ňom, ktorý dosahuje do menšej výšky, než je výška truhlíka. To ale nie je žiaden problém, objem substrátu môžem vypočítať pomocou toho istého integrálu, s tým rozdielom, že namiesto od nuly po v budem integrovať len po výšku substrátu. Označím si ju v_s. Integrál už som vypočítala vyššie, po dosadení dostanem

$$V_s = \left[\frac{(b-a)(d-c)}{v^2}\cdot\frac{z^3}{3}+\frac{c(b-a)+a(d-c)}{v}\cdot\frac{z^2}{2}+ac\cdot z\right]_0^{v_s}$$
$$= \frac{(b-a)(d-c)}{v^2}\cdot\frac{v_s^3}{3}+\frac{c(b-a)+a(d-c)}{v}\cdot\frac{v_s^2}{2}+ac\cdot v_s.$$

Vidím teda, že objem substrátu nie je priamo úmerný jeho výške, táto závislosť nie je lineárna, ale vyskytuje sa tam aj druhá a tretia mocnina výšky.

Po dosadení hodnôt $a = 55$, $b = 57$, $c = 10,5$, $d = 12,5$, $v = 11$ a $v_s = 9$ do vzorca a vynásobení počtom truhlíkov dostanem výslednú hodnotu, na ktorú sa nás pýtajú v zadaní, v časti a), teda

$$V_s = \frac{4}{11^2}\cdot\frac{9^3}{3}+\frac{21+110}{11}\cdot\frac{9^2}{2}+55\cdot 10,5\cdot 9=\frac{688230}{121},$$
$$8V_s = \frac{5505840}{121} = 45\,503-\frac{23}{121}.$$

Zvyčajne sa snažím o to, aby postup riešenia neobsahoval zbytočne zložitejšiu, „vyššiu“ matematiku, než je nutné. V tomto prípade ale postup pomocou integrálov sa mi zdá byť elegantnejší - nemusím deliť teleso na menšie časti ale počítam všetko v jednom. A dokonca sa ukazuje, že ani nie je nutné použiť trojný integrál. Napriek tomu, že ide o trojrozmerný útvar a počíta sa objem, dá sa vystačiť aj s jednoduchým integrálom.

2. Príklad s rastúcimi funkciami

Tento príklad mal na súťaži v roku 2012 číslo 2 a umiestnil sa medzi tými najťažšími pre riešiteľov. Pracuje sa tu s pojmom „rastúca funkcia“.

Príklad 2 (autor Zdeněk Opluštil). *Najděte rostoucí funkce f, g takové, že $f(x) - g(x) = \sin x$ pro všechna reálná x.*

Mám teda vzťah $f(x) = g(x) + \sin x$. Prvé, čo ma napadlo, je, že ak k rastúcej funkcii g pripočítam funkciu $\sin x$, výsledná funkcia f bude ešte viac rastúca na tých intervaloch, kde $\sin x$ rastie, a bude menej rastúca, prípadne klesajúca tam, kde $\sin x$ klesá. Tie pojmy „viac rastúca“ a „menej rastúca“ sa dajú presne definovať pomocou hodnoty derivácie. Pretože derivácia $(\sin x)' = \cos x \geq -1$ pre všetky reálne x a rovnosť nastáva len v izolovaných bodoch, stačí, aby derivácia $g'(x) \geq 1$ pre všetky reálne x. Potom pre deriváciu ich súčtu platí

$$f'(x) = \cos x + g'(x) \geq -1 + 1 = 0$$

pre všetky reálne x a rovnosť môže nastať len pre také x, kde je $\cos x = -1$, a teda len v izolovaných bodoch. Jednoduchá rastúca funkcia s touto vlastnosťou je $g(x) = x$, ktorá má všade deriváciu rovnú 1.

Tento postup vyzerá pekne jednoducho, ale vyžaduje znalosť derivácií. Ktorú nie všetci stredoškoláci majú. Zaujímalo by ma, či sa to dá ukázať bez nich, s použitím čo najzákladnejších pojmov a vzťahov.

Mám teda funkciu $f(x) = x + \sin x$ a chcem ukázať, že je rastúca pre všetky reálne x. To znamená, že pre každú dvojicu reálnych čísel $x > y$ platí $f(x) > f(y)$. Dosadením a úpravou z toho dostávam ekvivalentný vzťah

$$\begin{aligned} x + \sin x &> y + \sin y, \\ x - y &> \sin y - \sin x. \end{aligned}$$

Na pravej strane je rozdiel dvoch sínusov. Môžem ho napísať ako súčin sínusu a kosínusu pomocou známeho vzorca $\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$. Dostávam vzťah

$$\begin{aligned} x - y &> -2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right), \\ \frac{x-y}{2} &> -\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right), \\ 1 &> -\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\frac{x-y}{2}}. \end{aligned}$$

Tá posledná z úprav asi vyzerá dosť „umelo“, ale má logiku: všimla som si, že výraz naľavo bol rovnaký ako je argument sínusu napravo, a viem, že často pomáha dávať rovnaké výrazy k sebe, tak som to urobila. Vychádzam z predpokladu, že $x > y$, takže znamienko nerovnosti sa nezmenilo. Zatiaľ som stále robila ekvivalentné úpravy, takže táto posledná nerovnosť platí práve vtedy, keď $f(x) > f(y)$.

Teraz si myslím, že by sa malo dať ukázať, že za predpokladu $x > y$ sú oba činitele v súčine na pravej strane menšie alebo rovné 1. V prvom prípade je to zrejmé, platí

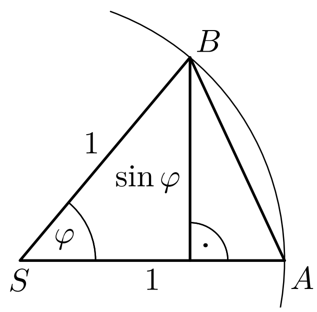
$$-\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq 1.$$

V druhom prípade si zjednoduším výraz zavedením novej premennej $\varphi = \frac{x-y}{2} > 0$. Chcem teda ukázať, že

$$\frac{\sin\varphi}{\varphi} < 1, \text{ teda}$$
$$\sin\varphi < \varphi$$

pre každé $\varphi > 0$. To je predsa už jasné z obrázka. Graf funkcie $\sin x$ leží pod grafom funkcie x. Skutočne? A odkiaľ viem, že sínus nerastie na začiatku strmšie než 45°? Predsa z derivácie. Lenže pojmu derivácie som sa chcela v tomto dôkaze vyhnúť. Takže znova. Ako inak sa dá zdôvodniť, že $\sin\varphi < \varphi$ pre každé $\varphi > 0$? Skúsim si pomôcť iným obrázkom, s jednotkovou kružnicou. Predtým ale si ešte uvedomím, že stačí uvažovať $\varphi \le 1$, lebo ak by $\varphi > 1$, mám hneď $\sin\varphi \le 1 < \varphi$.

Nakreslím si teraz kružnicu s polomerom 1 a na nej vyznačím dva body A, B, ktoré spolu s jej stredom S tvoria rovnoramenný trojuholník, s veľkosťou uhla φ (v radiánoch, nie stupňoch) pri vrchole S, viď obrázok 3. Obsah kruhového výseku



Obrázok 3

medzi bodmi A, B je rovný $\frac{\varphi}{2}$. A kde mám hodnotu $\sin\varphi$? Je to dĺžka výšky trojuholníka ABS a jeho obsah je teda $\frac{\sin\varphi}{2}$. A pretože je (tentoraz už každému) z obrázka jasné, že obsah trojuholníka ABS je menší než obsah kruhového výseku, platí, že $\frac{\sin\varphi}{2} < \frac{\varphi}{2}$.

A to už je všetko. Ale ... niečo sa mi na tom nezdá. Ja som ukázala, že ak $x > y$, potom $-\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \le 1$ a $\frac{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\frac{x-y}{2}} < 1$. Ale to ešte neznamená, že aj ich súčin bude menší než 1. Mohli by totiž obidve hodnoty byť záporné. Mala som tam dať absolútne hodnoty. Potom už to stačí. Takže znova.

V prvom prípade je to zrejmé, platí

$$\left|\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| \le 1.$$

V druhom prípade musím ukázať, že

$$\left|\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right| < 1 \quad \text{pre každé } \varphi > 0, \text{ teda}$$
$$|\sin\varphi| < \varphi \quad \text{pre každé } \varphi > 0.$$

Zase stačí uvažovať $\varphi \leq 1$, lebo ak by $\varphi > 1$, mám hneď $|\sin\varphi| \leq 1 < \varphi$. No a pre $0 < \varphi \leq 1$ je $\sin\varphi > 0$ a teda $|\sin\varphi| = \sin\varphi$ a viem, že $\sin\varphi < \varphi$, to už mám dokázané vyššie.

Ešte poznámka na záver: podobným „obrázkovým" postupom sa robí výpočet derivácie funkcie $\sin x$ z definície.

3. Príklad s komplexnými číslami

Príklad, kde sa pracuje s komplexnými číslami, sa vyskytol na súťaži v roku 2017 pod číslom 6 a patril k tým najťažším.

Príklad 3 (autor Luděk Nechvátal). *Uvažujme funkci danou vztahem* $f(z) = z\sqrt{1-\frac{1}{z}}$. *Určete množinu, na kterou tato funkce zobrazí množinu* $M = \{z \in \mathbb{C} : z = t + 0\cdot \mathrm{i}$, *kde* $0 < t < 1\}$.

Poznámka: Komplexní číslo $z = a+b\,\mathrm{i}$, *kde* $a, b, \in \mathbb{R}$ *lze pomocí Eulerovy formule* $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$ *zapsat ve tvaru* $z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$, *kde číslo* $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ *se nazývá modul a* φ *se nazývá argument (nebo také úhel) komplexního čísla* z. *Reálná mocnina komplexního čísla* z *je definována jako* $z^r = \mathrm{e}^{r(\ln|z|+\mathrm{i}\,\varphi)}$, *kde* $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $r \in \mathbb{R}$, $\varphi \in (-\pi, \pi\rangle$.

Ukážem dva postupy riešenia. Prvý bude čo najjednoduchší, druhý čo najvšeobecnejší.

V prvom prípade sa budem čo najviac vyhýbať práci s komplexnými číslami. Takže si hneď všimnem, že všetky čísla $z \in M$ dosadzované do funkcie f sú reálne a kladné. Pre takéto čísla z môžem písať

$$f(z) = z\sqrt{1-\frac{1}{z}} = \sqrt{z^2-z}.$$

Teraz vyhodnotím výraz pod odmocninou. Pretože číslo $z \in M$ je z intervalu $(0,1)$, výraz

$$z^2 - z = z(z-1) = z(1-z)\cdot(-1)$$

je záporný. Mám teda

$$f(z) = \sqrt{z(1-z)\cdot(-1)} = \sqrt{z(1-z)}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{z(1-z)}\cdot \mathrm{i},$$

kde pod odmocninou je už kladné reálne číslo $z(1-z)$. Číslo $z \in M$ je z intervalu $(0,1)$, a preto číslo $z(1-z)$ je z intervalu $\left(0, \frac{1}{4}\right)$. To vyplýva napríklad z toho, že ide o kvadratickú funkciu, ktorá nadobúda nulové hodnoty v bodoch 0 a 1 a teda extrém má uprostred, v bode $\frac{1}{2}$. Jeho dosadením dostanem $\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$, čo je hodnota maxima.

Hodnota $\sqrt{z(1-z)}$ teda leží v intervale $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ a funkcia f zobrazí množinu M na množinu $\{z \in \mathbb{C} : z = 0 + t\cdot \mathrm{i}$, kde $0 < t < \frac{1}{2}\}$.

Teraz ukážem, ako by som to počítala všeobecne. Teda, keby som na začiatku namiesto reálneho čísla z uvažovala ľubovoľné komplexné číslo $z = a + b\,\mathrm{i}$, kde

$a, b \in \mathbb{R}$. Možno z toho vyjde nejaký zaujímavý vzťah. Dosadením takéhoto výrazu do funkcie f dostanem

$$f(z) = (a + b\,\mathrm{i})\sqrt{1 - \frac{1}{a + b\,\mathrm{i}}}\,.$$

Pretože neviem nič o čísle $z = a + b\,\mathrm{i}$, nemôžem ho presunúť pod odmocninu ako v predchádzajúcom prípade. Môžem ale upravovať výraz pod odmocninou tak, aby som tam dostala číslo v tvare $c + d\,\mathrm{i}$, kde $c, d, \in \mathbb{R}$, teda

$$\sqrt{1 - \frac{1}{a + b\,\mathrm{i}}} = \sqrt{\frac{a - 1 + b\,\mathrm{i}}{a + b\,\mathrm{i}}} = \sqrt{\frac{a - 1 + b\,\mathrm{i}}{a + b\,\mathrm{i}} \cdot \frac{a - b\,\mathrm{i}}{a - b\,\mathrm{i}}} = \sqrt{\frac{a^2 - a + b^2 + b\,\mathrm{i}}{a^2 + b^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{a^2 - a + b^2}{a^2 + b^2} + \frac{b}{a^2 + b^2}\,\mathrm{i}} = \sqrt{c + d\,\mathrm{i}}\,.$$

Aby som toto mohla ďalej upravovať, potrebujem odmocninu z komplexného čísla napísať v tvare súčtu reálneho a imaginárneho čísla. To znamená, že musím použiť Eulerovu formulu, uvedenú v poznámke k zadaniu. Pokiaľ $c + d\,\mathrm{i} \neq 0$, výraz pod odmocninou si môžem napísať ako

$$\begin{aligned} c + d\,\mathrm{i} &= \sqrt{c^2 + d^2}\left(\frac{c}{\sqrt{c^2 + d^2}} + \frac{d}{\sqrt{c^2 + d^2}}\,\mathrm{i}\right) = \sqrt{c^2 + d^2}\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \\ &= \sqrt{c^2 + d^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}, \end{aligned}$$

kde φ je jednoznačne určené vzťahmi

$$\cos\varphi = \frac{c}{\sqrt{c^2 + d^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{d}{\sqrt{c^2 + d^2}}, \quad \varphi \in (-\pi, \pi\rangle. \tag{1}$$

Teraz to odmocním a dostávam

$$\sqrt{c + d\,\mathrm{i}} = \sqrt{\sqrt{c^2 + d^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\varphi}{2}}} = \sqrt[4]{c^2 + d^2}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}\right). \tag{2}$$

Hodnoty $\cos\frac{\varphi}{2}$ a $\sin\frac{\varphi}{2}$ vyjadrím pomocou $\cos\varphi$, využijem vzťahy

$$\cos^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1 + \cos\varphi}{2}, \quad \sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1 - \cos\varphi}{2}, \tag{3}$$

ktoré odmocním. Pre $\varphi \in (-\pi, \pi\rangle$ je $\cos\frac{\varphi}{2} \geq 0$, takže

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{c}{2\sqrt{c^2 + d^2}}}\,.$$

Odmocňovanie sínusu bude zložitejšie, pretože výraz $\sin\frac{\varphi}{2}$ má rovnaké znamienko ako φ pre $\varphi \in (-\pi, \pi\rangle$, a teda niekedy je kladný a inokedy záporný. Potrebujem jeho znamienko vyjadriť pomocou c, d. Zo vzťahu (1) vidím, že

$$\operatorname{sgn}(\varphi) = \begin{cases} 1, \text{ ak je } d > 0, \\ -1, \text{ ak je } d < 0, \\ 0, \text{ ak je } d = 0,\ c > 0, \\ 1, \text{ ak je } d = 0,\ c < 0, \end{cases}$$

kde $\varphi \in (-\pi, \pi\rangle$. Stále predpokladám, že $[c, d] \in \mathbb{R}^2 \setminus \{[0, 0]\}$. Môžem to celé zapísať aj na jeden riadok pomocou znamienkovej funkcie signum a dostanem

$$\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right) = \operatorname{sgn}(\varphi) = \operatorname{sgn}(d) + (1 - |\operatorname{sgn}(d)|)\,\frac{1-\operatorname{sgn}(c)}{2} := \kappa.$$

Pretože tento výraz je taký dlhý, jeho hodnotu som označila ako κ. Odmocnením druhej rovnice v (3) dostenem teda

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \operatorname{sgn}(\varphi)\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}} = \kappa\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{c}{2\sqrt{c^2+d^2}}}\,.$$

Toto dosadím do výpočtu (2) odmocniny $\sqrt{c + d\,\mathrm{i}}$ a mám

$$\begin{aligned}\sqrt{c+d\,\mathrm{i}} &= \sqrt[4]{c^2+d^2}\left(\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{c}{2\sqrt{c^2+d^2}}} + \kappa\,\mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{c}{2\sqrt{c^2+d^2}}}\right)\\ &= \sqrt{\frac{\sqrt{c^2+d^2}+c}{2}} + \kappa\,\mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{c^2+d^2}-c}{2}}\,.\end{aligned}$$

Vidím, že to platí aj pre $c = d = 0$. Teraz sa vrátim k funkcii f a dosadím to tam. Hodnota funkcie bude

$$\begin{aligned}f(a+b\,\mathrm{i}) &= (a+b\,\mathrm{i})\sqrt{c+d\,\mathrm{i}}\\ &= (a+b\,\mathrm{i})\left(\sqrt{\frac{\sqrt{c^2+d^2}+c}{2}} + \kappa\,\mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{c^2+d^2}-c}{2}}\right)\\ &= a\sqrt{\frac{\sqrt{c^2+d^2}+c}{2}} - \kappa b\sqrt{\frac{\sqrt{c^2+d^2}-c}{2}}\\ &\quad + \mathrm{i}\left(b\sqrt{\frac{\sqrt{c^2+d^2}+c}{2}} + \kappa a\sqrt{\frac{\sqrt{c^2+d^2}-c}{2}}\right),\end{aligned} \tag{4}$$

kde c, d sú

$$c = \frac{a^2-a+b^2}{a^2+b^2}, \quad d = \frac{b}{a^2+b^2}\,.$$

Po dosadení týchto výrazov za c, d do (4) by vznikol ešte zložitejší výraz a nevyzerá to, že by mohol byť niečím zaujímavý ☹.

Na tomto mieste teda ukončím počítanie so všeobecným $z = a + b\,\mathrm{i}$ a obmedzím sa na to, ktoré je v zadaní. Čiže budem predpokladať, že $b = 0$ a $0 < a < 1$. Potom dostávam

$$c = \frac{a^2-a}{a^2} < 0, \quad d = 0, \quad \kappa = 1$$

a ďalej

$$\sqrt{c^2+d^2} = \sqrt{c^2} = -c = \frac{a-a^2}{a^2},$$

takže hodnota funkcie bude

$$f(a+b\,\mathrm{i}) = a\sqrt{\frac{-c+c}{2}} + \mathrm{i}\,a\sqrt{\frac{-c-c}{2}} = \mathrm{i}\,a\sqrt{\frac{a-a^2}{a^2}} = \mathrm{i}\,\sqrt{a-a^2},$$

čím som sa dostala znova ku reálnej funkcii násobenej komplexným číslom i, rovnakej, ako pri prvom postupe riešenia.

Moje výpočty boli v tomto prípade zbytočne zdĺhavé. Mohla by som ich ale teraz využiť na nejaký zložitejší prípad. Napríklad, čo ak by to bolo opačne, $a=0$ a $0<b<1$. Potom dostávam

$$c=1, \quad d=\frac{1}{b}, \quad \kappa=1.$$

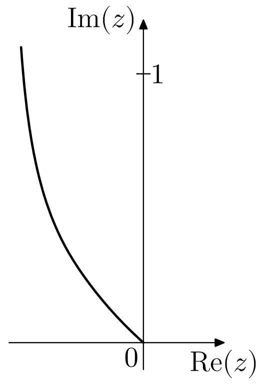
Hodnota

$$\begin{aligned} f(a+b\,\mathrm{i}) &= -b\sqrt{\frac{\sqrt{1+\frac{1}{b^2}}-1}{2}} + \mathrm{i}\,b\sqrt{\frac{\sqrt{1+\frac{1}{b^2}}+1}{2}} \\ &= -\sqrt{\frac{b\sqrt{b^2+1}-b^2}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{b\sqrt{b^2+1}+b^2}{2}}\,. \end{aligned}$$

Množina $\{z\in\mathbb{C} : z = 0 + t\cdot \mathrm{i}, \text{ kde } 0<t<1\}$ sa teda zobrazí na množinu

$$\left\{ z\in\mathbb{C} : z = -\sqrt{\frac{t\sqrt{t^2+1}-t^2}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{t\sqrt{t^2+1}+t^2}{2}},\ \text{kde } 0<t<1 \right\}.$$

Kým v predchádzajúcom prípade sa úsečka zobrazí na úsečku, v tomto prípade sa úsečka zobrazí na zložitejšiu krivku, ležiacu v komplexnej rovine v jej druhom kvadrante. Je znázornená na obrázku 4.



Obrázok 4

4. Príklad s funkciou dvoch premenných

Na záver tu mám ešte jeden príklad, ktorý sa tiež vyskytol na olympiáde v roku 2019, mal číslo 5. Nepatril k tým úplne najťažším a nie je ani sám o sebe zvlášť zaujímavý. Uvediem tu ale k nemu jeden komentár, jedno doplnenie, ktoré sa do zadania pre stredoškolákov nedostalo a tiež zmienku o tom, ako vlastne vznikol. Najskôr sa pozrime na zadanie príkladu, ktoré sa objavilo na súťaži.

Príklad 4 (autorka Viera Štoudková Růžičková). *Uvažujme funkci f danou předpisem $f(x) = ax^2 + bx + c$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Zapište funkci g dvou proměnných, která splňuje vztah*

$$g(x \cdot y, y) = y^2 \cdot f(x).$$

(V tomto vztahu hodnotu $f(x)$ násobíme hodnotou y^2, do funkce g dosazujeme za první proměnnou součin $x \cdot y$ a za druhou proměnnou y.)

Riešením je napríklad funkcia $g(z, y) = az^2 + bzy + cy^2$, definovaná pre všetky dvojice reálnych čísiel, čo sa dá jednoducho odvodiť:

$$\begin{aligned} g(xy, y) &= y^2(ax^2 + bx + c), \\ g(xy, y) &= ax^2y^2 + bxy^2 + cy^2, \\ g(xy, y) &= a(xy)^2 + b(xy)y + cy^2. \end{aligned}$$

Možno niekoho zarazilo, prečo píšem „napríklad“, keď je to jediná možnosť. V skutočnosti nie je, možností je nekonečne veľa. Nie je totiž zadaný požadovaný definičný obor funkcie g a ani sa nevyžaduje jej spojitosť. Vďaka tomu môžeme za riešenie považovať napríklad aj každú funkciu danú predpisom

$$g(z, y) = \begin{cases} az^2 + bzy + cy^2 \text{ pre } y \neq 0 \\ 0 \text{ pre } y = 0,\ z = 0 \\ \text{čokoľvek pre } y = 0,\ z \neq 0. \end{cases}$$

Pôvodná verzia zadania mala ešte druhú časť, ktorú sme nakoniec nezaradili. Išlo v nej o to, že keby sme zobrali takú funkciu f, ktorá nie je kvadratická (ani lineárna ani konštantná), či by sme aj k takej našli funkciu g s danými vlastnosťami. A aby to nebolo tak jednoduché, naviac chceme, aby obe funkcie boli definované pre všetky reálne čísla a boli aj všade spojité.

Príklad 5. *Napište příklad reálných funkcí f a g, které jsou definovány a spojité pro všechna reálná čísla, pro které platí vztah*

$$g(x \cdot y, y) = y^2 \cdot f(x) \tag{5}$$

a současně f nemá tvar $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Z dôvodov, ktoré uvediem neskôr a súvisia s motiváciou príkladu, som predpokladala, že také funkcie musia existovať. Prvé, čo ma napadlo pri ich hľadaní, bolo skúšanie nejakých jednoduchších funkcií. Nemôže to byť polynóm druhého stupňa, tak skúsim tretieho. Vezmem $f(x) = x^3$ a podobne ako v predchádzajúcom prípade dosadím do vzťahu a upravím. Dostávam postupne

$$g(xy, y) = y^2 x^3,$$
$$g(xy, y) = \frac{(xy)^3}{y},$$

vyšla mi teda funkcia $g(z, y) = \frac{z^3}{y}$, ktorá nie je definovaná pre $y = 0$ a ani sa tam nedá spojito dodefinovať. Podobne to dopadne aj s polynómami vyšších stupňov. Nie som si ale istá, ako by to bolo pre neceločíselnú mocninu. Skúsim si to odvodiť všeobecne pre $f(x) = x^p$. Dostávam postupne

$$g(xy, y) = y^2 x^p,$$
$$g(xy, y) = (xy)^p y^{2-p},$$

vyšla mi teda funkcia $g(z, y) = z^p y^{2-p}$. Vidím z toho, že napríklad voľbou $p = \frac{1}{3}$ nič nepokazím, obidve funkcie budú definované a spojité všade. Riešením je teda napríklad dvojica funkcií $f(x) = \sqrt[3]{x}$ a $g(z, y) = \sqrt[3]{zy^5}$.

Na tomto postupe riešenia mi trochu vadí, že sa tam niečo na začiatku uhádlo. Že som náhodou skúšala práve polynómy. Zadanie som splnila, zistila som, že také funkcie existujú, ale neviem, či je to jediná možnosť. Pokúsim sa teraz nájsť všetky možné riešenia, to znamená všetky dvojice funkcií f, g s danými vlastnosťami.

Položím $xy = z$ a za predpokladu, že $y \neq 0$, zo vzťahu (5) dostávam

$$g(z, y) = y^2 f\left(\frac{z}{y}\right),$$

takže funkcia g je vyjadrená pomocou funkcie f. Problém ale je, ak $y = 0$. Potom do funkcie f nemôžem dosadiť $\frac{z}{y}$, lebo to nie je reálne číslo. V riešení nájdenom vyššie sa tie ypsilony vykrátili a nevadilo to. Vyzerá to teda, že skutočne iná funkcia f, než nejaká kombinácia mocninových funkcií, ani byť nemôže, lebo v iných prípadoch už sa ypsilony nevykrátia. Len vyzerá. Existuje totiž spôsob, ako do funkcie „dosadzovať nedosaditeľné“ – je to limita. Ak je $y = 0$, zo spojitosti funkcie g mám, že

$$g(z, 0) = \lim_{y\to 0} g(z, y) = \lim_{y\to 0} y^2 f\left(\frac{z}{y}\right). \tag{6}$$

Takže v skutočnosti jediná podmienka pre funkciu f je, že táto limita musí existovať a byť konečná pre každé reálne číslo z. Túto podmienku môžem ešte úpravou zjednodušiť. Urobím substitúciu tak, aby v argumente funkcie f bola jedna premenná. Položím $\frac{z}{y} = v$. Viem, že pre $z \neq 0$ platí

$$\lim_{y\to 0+} \frac{z}{y} = -\lim_{y\to 0-} \frac{z}{y} = \operatorname{sgn}(z) \cdot \infty,$$

takže zo vzťahu (6) dostávam

$$g(z, 0) = z^2 \lim_{v\to\infty} \frac{f(v)}{v^2} = z^2 \lim_{v\to-\infty} \frac{f(v)}{v^2}.$$

Stačí teda, aby tieto limity existovali, boli konečné a rovnali sa.

Ešte to na záver celé zhrniem: Ak reálna funkcia f, ktorá je definovaná pre všetky reálne čísla a je všade spojitá, je ľubovoľná taká, že

$$\lim_{v\to\infty} \frac{f(v)}{v^2} = \lim_{v\to-\infty} \frac{f(v)}{v^2} = l \in \mathbb{R},$$

potom k nej existuje funkcia g daná predpisom

$$g(z,y) = \begin{cases} y^2 f\left(\frac{z}{y}\right) \text{ pre } y \neq 0, \\ z^2 \lim\limits_{v\to\infty} \frac{f(v)}{v^2} \text{ pre } y = 0, \end{cases}$$

ktorá má požadované vlastnosti. To znamená, že je všade definovaná, spojitá, a platí vzťah (5).

Takých funkcií f je plno … Z tých najznámejších sú to okrem vhodných mocninových funkcií napríklad aj $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{arctg} x$, e^{-x^2} …

A teraz tá sľubovaná motivácia: pôvodné tvrdenie, ktoré ma inšpirovalo k vytvoreniu tohto príkladu, namiesto s reálnymi číslami pracuje s maticami a vektormi, pričom matice sú štvorcové symetrické s rozmerom $n \times n$ a vektory sú n-rozmerné. Funkcia f zobrazuje takéto matice na takéto matice a funkcia g zobrazuje dvojicu takýchto vektorov na reálne číslo. Vzťah, ktorý zodpovedá vzťahu (5), vyzerá nasledovne:

$$g(Xy, y) = y^T f(X) y, \tag{7}$$

kde X je štvorcová symetrická reálna matica s rozmerom $n \times n$ a y je n-rozmerný reálny vektor. A to spomínané tvrdenie hovorí, že pokiaľ $n \geq 2$, potom jediná spojitá, všade definovaná funkcia f taká, že k nej existuje funkcia g spĺňajúca vzťah (7) pre každú takú maticu a každý taký vektor, je funkcia tvaru

$$f(X) = XAX + BX + XB + C,$$

kde A, B, C sú štvorcové matice s rozmerom $n \times n$ a matice A, C sú aj symetrické. Funkcia g je potom tvaru

$$g(z,y) = z^T Az + z^T By + y^T Bz + y^T Cy.$$

Príklad 5 rozobraný vyššie vlastne mal za cieľ nájsť protipríklad na toto tvrdenie ak $n = 1$, čo sa aj podarilo. Toto tvrdenie aj s jeho (veľmi dlhým) dôkazom je možné nájsť v článku [1], kde je uvedené ako súčasť dôkazu hlavnej vety.

Reference

[1] A. N. Stokes: *A special property of the matrix Riccati equation*, Bull. Austral. Math. Soc. **10** (1974), 245–253.

Viera Štoudková Růžičková, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: `ruzickova@fme.vutbr.cz`