Milé čtenářky, milí čtenáři,

máte v rukou časopis Kvaternion s vročením 2020. Tedy roku, který nezačínal nijak výjimečně, ale nakonec těch změn, které přinesl, bylo až příliš mnoho. Když se nakonec lámal na rok následující, opustily nás tři skutečné vědecké osobnosti. Tři profesoři, matematici, narození ve stejném roce a ve stejném městě: Brně. Pánové prof. RNDr. Ivan Kolář, DrSc. (22. 5. 1936 – 15. 12. 2020) a prof. RNDr. Oldřich Kowalski, DrSc. (19. 6. 1936 – 2. 1. 2021) byli mezinárodně uznávanými odborníky v diferenciální geometrii. Pan prof. RNDr. Alexander Ženíšek, DrSc. (29. 1. 1936 – 30. 12. 2020) byl významným odborníkem v numerické matematice a funkcionální analýze. Dlouhá léta působil jako ředitel Ústavu matematiky FSI VUT v Brně, pak i poté, co svou ředitelskou dráhu skončil, se jako emeritní profesor VUT upřímně zajímal o aktivity pracoviště, mimo jiné i o náš časopis Kvaternion, jemuž nabídl několik zajímavých a podnětných článků. Zacelit odborně i lidsky mezeru, kterou tito zesnulí kolegové po sobě zanechali, nebude pro další generace vůbec snadné.

Pokud jde o nové výsledky na poli matematiky v roce 2020, vůbec nešlo o špatný rok. Jen jeden příklad: mladá americká matematička Lisa Piccirillová vyřešila půlstoletí starý problém z teorie uzlů, disciplíny studující topologii uzavřených křivek v prostoru, která se využívá i pro popis struktury vláken nukleových kyselin RNA a DNA. Docela aktuální matematika v časech, kdy se pozornost světa upíná k mikrobiologii.

Naše redakce také věří, že na vás, s matematikou se přátelící čtenářky a čtenáři, lákavě zapůsobí i pestrá nabídka témat tohoto čísla Kvaternionu; a zda poté nezklame ani obsah, jistě zhodnotíte sami. Jako první článek nabízíme práci trojice autorů J. Benedikta, P. Girga a L. Kotrly ze ZČU v Plzni o užití mocninného zákona k odvození rovnice proudění podzemní vody. Následuje geometrický příspěvek A. Návrata o reprezentaci eukleidovských transformací pomocí prvků Cliffordovy algebry. V dalším článku se věnuje M. Pekař aplikaci metod lineární algebry v popisu chemických reakcí. Čtivým textem rozšiřující kurz diferenciálních rovnic je přehledný popis trajektorií soustav dvou lineárních obyčejných diferenciálních rovnic od J. Franců. Od matematického kyvadla k integrálním rovnicím nás doprovází D. Čaputa a užití Bayesových odhadů a částicové filtrace pro multistatické měření radarovým systémem představují M. Benko s P. Kulmonem. Závěr časopisu je věnován soutěžím. O čtvrtém ročníku mezinárodní soutěže v modelování pomocí diferenciálních rovnic SCUDEM referuje Z. Opluštil a zajímavými příklady internetové matematické olympiády nás provádí V. Štoudková Růžičková.

Dobrou mysl, zábavu a poučení Vám jménem redakčního kolektivu přeje

Miroslav Kureš

NELINEÁRNÍ MATEMATICKÉ MODELY PROUDĚNÍ PODZEMNÍ VODY

JIŘÍ BENEDIKT, PETR GIRG a LUKÁŠ KOTRLA

Abstrakt. Matematické modely proudění podzemní vody stojí na dvou základních vztazích, zákonu zachování a konstitutivním vztahu. Protože proudění v porézním prostředí je velmi komplexní jev, jsme ve většině případů odkázáni na získání konstitutivního vztahu z experimentálních dat. Stejná data lze však proložit různými funkcemi, a tedy nemůže existovat univerzální konstitutivní vztah.

V našem článku se zaměříme na mocninný zákon, který je dostatečně obecný, aby podchytil zákonitosti proudění v různých reálných situacích a zároveň je dostatečně jednoduchý, aby se s ním dalo snadno matematicky pracovat. Tento zákon použijeme k odvození rovnice proudění podzemní vody. Pomocí ní popíšeme vývoj hladiny podzemní vody v závislosti na čase proudící porézním prostředím mezi dvěma rovnoběžnými kanály.

1. Úvod

Zásobování vodou je jednou z hlavních výzev, které lidstavo v průběhu své existence opakovaně čelí. Za průkopnická inženýrská díla spojená s vodou lze považovat např. mezopotámské přehrady a zavlažovací kanály na Eufratu a Tigridu, staroegyptské zavlažovací kanály na Nilu, rozsáhlý systém studní a rozvodu vody v Mohendžodáru ve starověké Indii, vodovodní systémy starověkého Řecka od mínojské kultury až po Athény, Ezechiášův tunel v Jeruzalémě, monumentální římské akvadukty nacházející se v celém středomoří. O tom, jak dávní stavitelé navrhovali tyto úžasné stavby, mnoho nevíme. Doložitelně systematicky a na moderní vědecké bázi[1] se problematikou zásobování obyvatelstva pitnou vodou začali zabývat inženýři na přelomu 18. a 19. stol. a sice v souvislosti s rychlým růstem měst. V této době se začínají objevovat první matematické modely proudění vody v potrubí a kanálech. To bylo v dobách, kdy ještě nebyly objeveny základní rovnice proudění reálných (vazkých) tekutin dnes známé jako Navierovy-Stokesovy rovnice (Navier 1827 a nezávisle Stokes 1845) a rovněž nebyly k dispozici počítače pro jejich numerické řešení.[2] Proto se v případě proudění vody inženýři zaměřili na

2010 *MSC.* Primární 35K59, 35K92, 76S05.

Klíčová slova. Proudění vody, podzemní voda, porézní prostředí, Reynoldsovo číslo, nelineární Darcyho zákon, p-laplacián, dvojitě nelineární rovnice, princip maximu, srovnávací princip.

[1] Pro podrobný historický přehled viz např. Rouse [30].

[2] V té době již byla známa rovnice kontinuity, kterou pro nestlačitelnou tekutinu odvodil Leonardo da Vinci (1452–1519), Bernoulliho rovnice, k jejímuž objevení přispěl Daniel Bernoulli

tzv. fenomenologický přístup k řešení problému založený na empiricky nalezených zákonitostech. V roce 1732 vynalezl francouzský inženýr Henri de Pitot (1695–1771) měřicí trubici (dnes známou jako Pitotova trubice) umožňující měřit rychlost proudění tekutiny v daném místě, což umožnilo provádět různá pozorování a experimenty s reálnými tekutinami. V souvislosti s přípravou stavby kanálu, který měl přivádět vodu do Paříže z řeky Yvette, francouzský inženýr Antoine de Chézy (1718–1798) studoval empirické vztahy mezi spádem kanálů a rychlostí proudění. Na základě pozorování a měření prováděných mezi lety 1769 až 1775 na již vybudovaném kanálu Courpalet stanovil tento vztah:

$$v = C\sqrt{R\frac{\triangle h}{\triangle L}}\,,$$

kde v je střední průtoková rychlost v kanále, R je hydraulický poloměr kanálu, $\triangle h$ je výškový rozdíl hladiny ve dvou bodech kanálu jejichž spojnice je rovnoběžná s proudem v kanálu, $\triangle L$ je jejich vzdálenost a $C > 0$ je rychlostní součinitel zjištěný z naměřených dat. V souvislosti s distribucí vody ve městech byly studovány též empirické vztahy mezi sklonem potrubí a rychlostí proudění v něm. Touto problematikou se zabýval francouzský inženýr Gaspard de Prony (1755–1839), který ve své práci [11] publikované v roce 1804 odvodil semiempirický vztah[3]

$$\frac{\triangle h}{\triangle L} = \frac{1}{D}\left(av + bv^2\right)\,,$$

kde v je střední průtoková rychlost v potrubí, D je vnitřní průměr potrubí, $\triangle h$ je výškový rozdíl hladiny mezi dvěma body na ose potrubí, $\triangle L$ je vzdálenost těchto bodů a $a, b > 0$ jsou konstanty, které je třeba zjistit z naměřených dat pro potrubí vyrobené z daného materiálu s danou drsností povrchu apod.

Další rychlý nárůst počtu obyvatel v evropských městech v průběhu devatenáctého století a s ním spojená ještě vyšší potřeba pitné vody podnítily zájem soudobých inženýrů mimo jiné o proudění vody v porézním prostředí. Jednou z možností, jak získat pitnou vodu je filtrace vody říční užitím pískových filtrů. Tímto postupem se zabýval francouzský inženýr H. Darcy (1803–1858), který v roce 1856 v knize [10] zveřejnil vztah, dnes známý jako *Darcyho zákon*, pro proudění (filtraci) vody jemným pískem vyplňujícím válec o konstantním průřezu A, délce $\triangle L$ a s osou rovnoběžnou se směrem proudění,

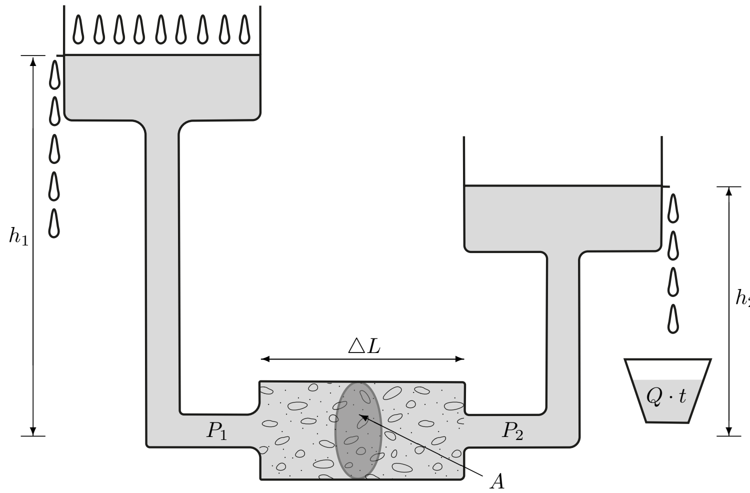
$$Q = c\frac{\triangle P}{\triangle L} = c\varrho g\frac{\triangle h}{\triangle L}\,. \tag{1}$$

Průtok Q udává objem vody proteklé řezem kolmým na osu válce za jednotku času a $\triangle P \stackrel{\mathrm{def}}{=} P_1 - P_2 = \varrho g(h_1 - h_2) = \varrho g\triangle h$ značí rozdíl tlaků na vstupu do a výstupu z válce, ϱ je hustota vody a g je tíhové zrychlení. Konstanta $c > 0$ je zjištěná z

(1700–1782) a v její dnes používané podobě odvodil Leonhard Euler (1707–1783) pomocí Eulerovy rovnice proudění ideální tekutiny, viz [30].

[3]Semiempirický vztah je takový vztah, jehož tvar je odvozený ze základních fyzikálních zákonů, ale některé konstanty je třeba zjistit z experimentálních dat.

naměřených dat pro daný typ jemného písku. Schématické znázornění zařízení[4], na kterém lze zákonitosti filtrace vody studovat, je na obrázku 1. Podstatnou



Obrázek 1. Ilustrace zařízení pro empirické studium filtrace. Do horní nádržky přitéká voda. Konstantní výšky hladin v nádržkách (a tím i hodnoty hydrostatických tlaků P_1 a P_2) jsou udržovány přepady nádržek.

vlastností tohoto vztahu je přímá úměrnost mezi objemovým průtokem a rozdílem tlaků. Jedná se tedy o zákon lineární.

Další možností, jak zásobit obyvatelstvo pitnou vodou, je odběrem vody ze studní. K maximálnímu využití tohoto zdroje je třeba pochopit zákonitosti proudění vody v horninách v podzemí. Touto problematikou se experimentálně zabýval německý inženýr A. Thiem [35], který ve městě Strassburg nechal v okolí pokusných studní vybudovat systém pozorovacích studní[5], v nichž sledoval pokles hladin v souvislosti s odběrem vody z pokusných studní. Tímto způsobem získal cenná data o závislosti poklesu hladiny podzemní vody na vzdálennosti od pokusné studny. Podobně postupoval i další německý inženýr D. Endres ve městě Augsburg. Experimentálně naměřené výsledky A. Thiema a D. Endrese matematicky zpracoval rakouský inženýr O. Smreker ve své průkopnické práci [33] a došel z naměřených dat k několika empirickým vztahům mezi poklesem hladiny a průtokem daným úsekem horniny (porézního prostředí). Nejznámější je pro svoji snadnou aplikovatelnost jeho mocninný zákon

$$Q = C \left(\frac{\triangle h}{\triangle L} \right)^{2/3} ,$$

[4]Původní Darcyho zařízení mělo trochu jinou konfiguraci, viz [10]. Dnes se pro studium filtrace používají zařízení s konfigurací jako na obr. 1.

[5]Z pozorovacích studní se voda nečerpá, jen se měří výška hladiny.

kde Q je průtok vody, $\triangle h$ si můžeme zatím představit jako pokles hladiny podzemní vody mezi dvěma pozorovacími studnami a $\triangle L$ jako jejich vzdálenost ve vodorovném směru (veličiny vystupující v tomto zákonu budou rigorózně definovány v druhé části článku). Konstanta $C > 0$ je určena z experimentálních dat pro dané horniny v podzemí. Tento zákon je na rozdíl od Darcyho zákona nelineární. Protože voda proudí porézním prostředím systémem kanálků, lze očekávat jistou analogii s prouděním v potrubí. Tato úvaha vedla rakouského inženýra Ph. Forchheimera [16] k polynomiálnímu vztahu

$$\frac{\triangle h}{\triangle L} = \left(aQ + bQ^2\right) , \tag{2}$$

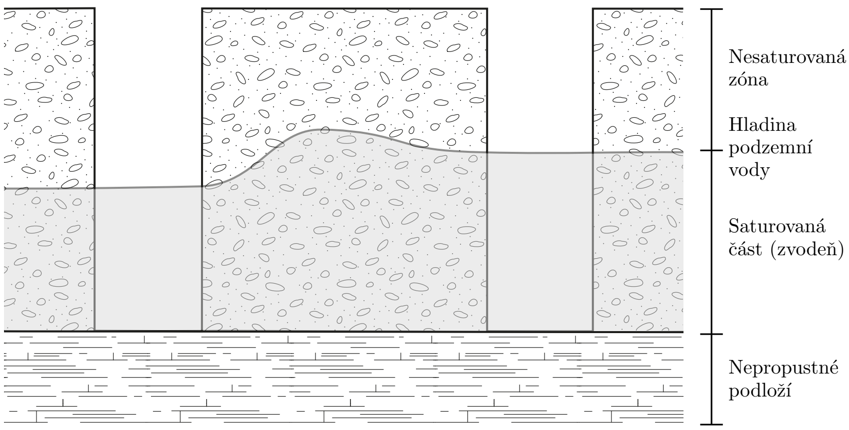
kde opět $\triangle h$ vyjadřuje pokles hladiny mezi dvěma místy se spojnicí rovnoběžnou se směrem proudění, $\triangle L$ jejich vzdálenost, Q je průtok vody a $a, b > 0$ jsou konstanty, které je třeba zjistit z experimentů s daným prostředím. Stejně tak jako Smreker i Forchheimer používal převzatá naměřená data. V jeho případě se jednalo o data od celé řady experimentátorů, kde se každý zaměřil na jiný typ materiálu (různé druhy písků a štěrkopísků lišících se zrnitostí, tvarem zrn a chemickým složením). Forchheimerův polynomiální vztah se ukázal jako velice obecný a schopný zachytit zákonitosti proudění pomocí dvou parametrů a a b. Navíc úvaha o analogii mezi prouděním vody v porézním prostředí a potrubí napovídá, že je přirozené očekávat spíše nelineární vztahy než vztahy lineární. Přestože Forchheimerův zákon při vhodných konstantách a a b velmi dobře aproximuje reálná data, má jednu velkou nevýhodu: v matematických modelech potřebujeme často pracovat se vztahem, který vyjadřuje funkční závislost Q na $\triangle h/\triangle L$. Tento vztah bychom dostali z Forchheimerova zákona jako kladné řešení kvadratické rovnice pro Q. Tento vztah je však pro praktické využití komplikovaný. Jako vhodná alternativa k Forchheimerovu zákonu se pak jeví obecnější mocninné zákony tvaru

$$Q = c\left(\frac{\triangle h}{\triangle L}\right)^r , \tag{3}$$

s koeficientem $c > 0$ a exponentem $r > 0$, které je třeba určit z experimentálních dat. Díky dvěma parametrům lze těmito zákony popsat proudění vody v různých typech porézních prostředí. Nutno podotknout, že v této obecné variantě navrhl mocninný zákon již O. Smreker [33] a zabýval se jím ve svém článku i Forchheimer [16]. Velkou popularitu získaly mocninné zákony od třicátých let dvacátého století, kdy bylo intenzivně laboratorně studováno proudění porézním prostředím na experimentálních zařízeních jako na obrázcích 1 a 4, viz např. Izbaš [20] a Missbach [24, 25, 26, 27]. Na jejich počest se mocninnému zákonu někdy též říká Smrekerův-Izbašův-Missbachův zákon. Podrobněji se lze s historickým vývojem zkoumání mocninného zákona seznámit v Benedikt, Girg, Kotrla a Takáč [7].

Povšimněme si, že ve vzorci (2) lze pro malé hodnoty Q kvadratický člen Q^2 zanedbat, a tudíž můžeme pro malé hodnoty Q Forchheimerův zákon velmi dobře aproximovat lineárním Darcyho zákonem. Tedy Forchheimerův zákon není v rozporu s Darcyho zákonem. Pro mocninný zákon (3) s $r \neq 1$ toto však neplatí. Pro malé hodnoty Q Darcyho zákon (1) není dobrou aproximací mocninného zákona (3). Ukazuje se na základě analogie proudění v porézním prostředí a v trubici, že rozhodujícím faktorem pro platnost mocninného nebo Darcyho zákona pro dané Q je poměr setrvačných a třecích sil v kapalině nebo přesněji zanedbatelnost setrvačných sil vzhledem k silám třecím. Tento poměr je charakterizovaný tzv. *Reynoldsovým číslem* (viz např. Aravin a Numerov [1, § 11, str 30–36]), jehož variantami pro proudění v porézním prostředí se budeme zabývat níže. Pro malé hodnoty Reynoldsova čísla je platný Darcyho zákon a pro velké hodnoty Reynoldsova čísla je nutné uvažovat zákon nelineární, např. mocninný. Podrobněji se tím budeme zabývat v oddíle 2.5.

Cílem tohoto příspěvku je seznámit čtenáře s mocninným zákonem a jeho možným použitím v modelování proudění podzemní vody. Pro jednoduchost se zaměříme na model popisující vývoj hladiny podzemní vody mezi dvěma rovnoběžnými kanály, ve kterých teče voda v pevně dané výšce (viz obrázek 2). Mezi kanály dojde ke zvýšení hladiny podzemní vody (např. vlivem deště nebo zavlažování) a naším úkolem je popsat vývoj hladiny podzemní vody v čase. Naší snahou je text přizpůsobit studentům nižších ročníků vysoké školy. Jedním z příkladů je nestandardní odvození modelu v části 3, které je podle našeho názoru vhodnější pro studenty, kteří neabsolvovali základní kurz parciálních diferenciálních rovnic. Klasické odvození za slabších předpokladů na hledané řešení lze nalézt v [5].



Obrázek 2. Proudění podzemní vody mezi rovnoběžnými kanály.

V druhé části se budeme zabývat základními pojmy z hydrologie, které v další části využijeme při odvození matematického popisu problému. Čtvrtá část obsahuje krátké seznámení s důležitými pojmy z oblasti parciálních diferenciálních rovnic, principem maxima a srovnávacím principem. Poslední část je věnovaná vlastnostem řešení modelu představeného ve třetí části. Podrobněji jsme použití mocninného zákona v hydrologii studovali v [5] a [7].

2. Základní pojmy v hydrologii

V této části uvedeme krátký souhrn termínů a veličin používaných v hydrologii. Tyto informace lze nalézt ve většině knih zabývajících se tímto tématem. Pro další studium odkazujeme čtenáře například do skript Jandora, Stara a Starý [21] nebo Valentová [36]. Ještě podrobněji se lze s danou problematikou seznámit v monografiích Aravin a Numerov [1], Bear [4] a Harr [18].

2.1. Porézní prostředí

Precizní definice porézního prostředí je komplikovaná a přesahuje rámec tohoto textu. My si vystačíme s intuitivní definicí. Pro přesnější definici odkazujeme čtenáře na skripta [36, §1.4, str. 8–9].

Začneme definicí pojmu *pór*, kterým rozumíme volný prostor v hornině obvykle (ale ne nutně) velmi malého objemu. V našich modelech uvažujeme jen takové póry, které jsou navzájem spojené úzkými kanály umožňujícími proudění tekutiny (např. vody, zemního plynu, nafty). Tento volný prostor v hornině nazveme *pórový prostor*. Síť kanálů je velmi hustá, a proto mají stěny pórů a kanálů (kde se tekutina dotýká horniny) velký souhrnný povrch. Horninu obsahující takovouto síť pórů a kanálů nazveme *porézním prostředím* (nebo porézním médiem). Pro jednoduchost předpokládáme, že porézní prostředí je homogenní a izotropní vzhledem ke koeficientu propustnosti (viz níže).

Struktura porézního prostředí je velmi komplikovaná a je prakticky nemožné v něm přesně popsat rozložení pevné fáze a pórového prostoru. Proto se proudění v porézním prostředí nepopisuje na mikroskopické úrovni (jako proudění vody v jednotlivých kanálech). Místo toho se uvažuje makroskopický popis, kdy se struktura porézního média odráží v obvykle experimentálně zjišťovaných fyzikálních charakteristikách.

Poměr pórového prostoru v porézním médiu popisuje (efektivní) *pórovitost* porézního prostředí n. Pro homogenní porézní médium platí

$$n = \frac{V_p}{V} \,,$$

kde V_p je objem pórového prostoru a V je celkový objem porézního média.

Další charakteristikou je *koeficient propustnosti* k, který udává propustnost porézního prostředí v závislosti na jeho geometrických vlastnostech. Je definován pomocí Darcyho zákona (1) vzorcem

$$k = \frac{c\mu}{A} \,.$$

s tím, že přijímáme hypotézu, že průtok Q je přímo úměrný ploše A (viz obr. 1) a nepřímo úměrný *dynamické viskozitě* μ, která vyjadřuje vnitřní třecí síly v tekutině. Pro konkrétní porézní prostředí tato hodnota odpovídá objemovému průtoku za 1 s tekutiny o dynamické viskozitě 1 Pa $\cdot$ s válcem s výškou 1 m a plochou podstavy 1 m^2, který je vyvolaný poklesem tlaku o 1 Pa. V literatuře lze nalézt množství vztahů pro jeho výpočet z velikosti zrn[6] (viz např. Říha a kol. [29]). Uveďme například empiricky získaný vztah

$$k = Cd^2,$$

kde konstanta $C > 0$ závisí na tvaru zrn a pórovitosti n, a kde d je *reprezentativní velikost zrna*. Lze například zvolit $d = d_{10}$, což je takový průměr zrn, kterého nedosáhne 10 % všech zrn (podle váhy) v materiálu (viz [4, §5.5, str. 132–134]). Všimněme si, že koeficient propustnosti je nezávislý na proudící tekutině. Později v oddílu 2.4 zavedeme koeficient filtrace K, který bere v úvahu i vlastnosti tekutiny.

2.2. Podzemní voda a zvodeň

Podpovrchovou vodu lze rozdělit do několika kategorií podle způsobu, jakým je v půdě vázána. V tomto článku se budeme zabývat tzv. podzemní vodou, které k proudění v porézním prostředí stačí působení tíhových sil. Přesněji se souvislá část porézního prostředí (horniny), která umožňuje pohyb a akumulaci podzemní vody, nazývá *hydrogeologický kolektor* (více viz [36, §1.3, str. 5–7]). Navíc se omezíme na podzemní vodu, která se vyskytuje v tzv. *saturované zóně*, kde je pórový prostor zcela vyplněn vodou. Pro úplnost jen dodejme, že pokud sledovaná část porézního prostředí není vodou zcela vyplněná, nalezneme nad saturovanou zónou zónu *nesaturovanou*, kde jsou póry vyplněny zčásti vodou a zčásti plynem (převážně vodními parami a vzduchem).

Vodní těleso v kolektoru nazveme *zvodeň*. Rozlišujeme *zvodeň s napjatou hladinou*, kde voda vyplňuje kolektor uzavřený mezi dvěma nepropustnými vrstvami (hydrogeologickými *izolátory*) a *zvodeň s volnou hladinou*, jejíž dolní hranici tvoří izolátor a horní hranici volná hladina podzemní vody (např. zvodeň na obrázku 2). *Volnou hladinu* definujeme jako množinu bodů, kde se absolutní tlak vody rovná atmosférickému tlaku (relativní tlak vody je nulový). Poznamenejme, že pro účely tohoto textu volná hladina podzemní vody odděluje saturovanou a nesaturovanou zónu, přestože, zcela přesně řečeno, saturovaná zóna obsahuje i tenkou vrstvu nad touto hladinou, kde jsou póry vyplněny vodou vlivem kapilárních jevů.

2.3. Střední rychlost proudění, hustota toku a průtok

Jelikož se při popisu proudění v porézním médiu uplatňuje makroskopický přístup, není rychlost proudění vody v konkrétním bodě pórového prostoru relevantní informace. Místo ní se používá střední rychlost proudění (průměrná pórová rychlost).

V úvodu jsme předpokládali, že směr proudění je rovnoběžný se směrem osy x. Zaměřme se nyní na obecné trojrozměrné proudění v kartézském souřadnicovém systému xyz s osou z směřující vzhůru. Označme A_x (A_y, A_z) plochu průřezu kolmého na osu x (y, z) a Q_x (Q_y, Q_z) průtok touto plochou za jednotku času. V případě, že směr toku souhlasí se směrem souřadnicové osy, je průtok kladný. V

[6] Pro zrnitá prostředí (speciální typ porézního prostředí) jako jsou např. písky, štěrkopísky nebo umělá zrnitá prostředí používaná ve stavebnictví a různých technologických procesech.

opačném případě považujeme průtok za záporný. Potom

$$q_x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Q_x}{A_x}, \qquad q_y \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Q_y}{A_y} \qquad \text{a} \quad q_z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Q_z}{A_z}$$

značí *hustotu toku (filtrační rychlost, Darcyho rychlost)* ve směru osy x (y, z). Hustotu toku tedy definujeme jako vektor $\vec{q} \stackrel{\text{def}}{=} (q_x, q_y, q_z)$, jehož velikost je $q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}$. Jelikož voda neprotéká celými průřezy, ale jen pórovým prostorem v daném řezu, raději pro $\vec{q}$ používáme pojem tok než pojem rychlost. Rychlost proudění v kanálech, respektive její průměrnou hodnotu, popisuje *střední rychlost proudění*

$$\vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{q}}{n}\,.$$

Dále označíme $v \stackrel{\text{def}}{=} |\vec{v}| = q/n$.

2.4. Piezometrická výška

Ideální kapalina při ustáleném proudění v trubici splňuje zákon zachování energie, který je vyjádřený Bernoulliho rovnicí

$$\frac{1}{2}\varrho v^2 + P + \varrho g z = \text{konst.} \tag{4}$$

Zde ϱ je hustota proudící kapaliny, v je velikost střední rychlosti proudění, P je relativní tlak v kapalině ($P = 0$ odpovídá atmosférickému tlaku) a z je výška hladiny od předem určené referenční výšky. Vydělením rovnice (4) konstantou ϱg dostaneme

$$\frac{1}{2}\frac{v^2}{g} + \frac{P}{\varrho g} + z = E\,,$$

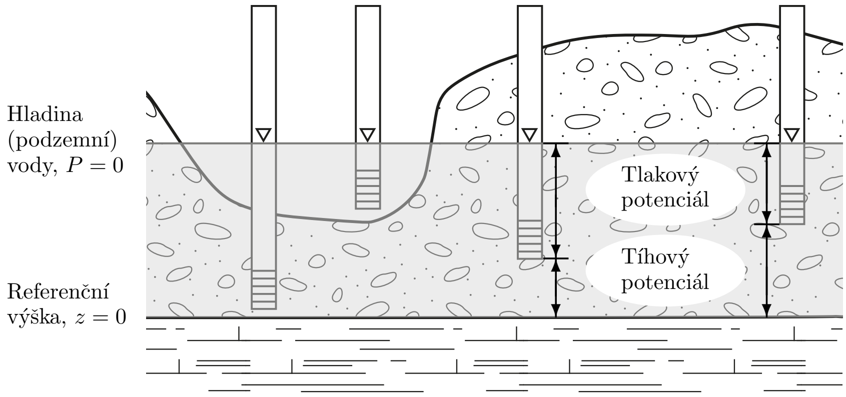
kde E se nazývá energetická výška. Nyní se zaměřme na proudění vody porézním prostředím. To lze považovat za síť *úzkých* kanálů, a proto je ztráta energie vlivem tření kapaliny se stěnami kanálů významná. Energetická výška E tedy není konstantní, jako tomu je v případě proudění ideální tekutiny v trubici.

Při proudění podzemní vody je navíc střední rychlost proudění velmi malá (viz např. Harr [18, §1–4, str. 5]). Člen $\frac{1}{2}\frac{v^2}{g}$ lze tedy zanedbat a definujeme tzv. *piezometrickou (hydraulickou) výšku*

$$h \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P}{\varrho g} + z\,.$$

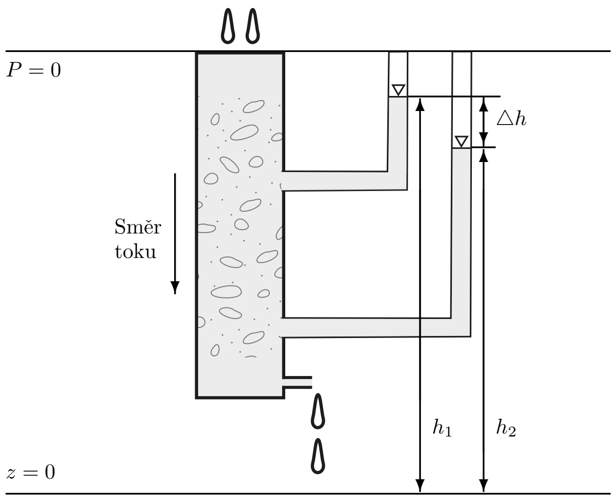
Pro lepší ilustraci pojmu piezometrická výška uveďme dva příklady. Prvně se zaměříme na případ bez proudění ať v nádrži nebo ve zvodni s volnou hladinou. Protože je voda v klidu, nedochází ke ztrátě energie vlivem tření a piezometrická výška zůstává konstantní (viz obrázek 3). Tlak v kapalině je hydrostatický tlak závislý na výšce vodního sloupce nad sledovaným místem, a tedy opravdu platí

$$\frac{P}{\varrho g} + z = \text{konst.}$$



Obrázek 3. Piezometrická výška při absenci proudění.

Proudění vody je vyvoláno rozdílnými hodnotami v piezometrické výšce (viz obrázek 4). Dochází k němu ve směru jejího poklesu neboli ve směru poklesu energie,



Obrázek 4. Piezometrická výška při pohybu tekutiny.

který je způsoben právě třecími silami (přeměnou mechanické energie na tepelnou).

Všimněme si, že za předpokladu vodorovného proudění popsaného v úvodu, kdy je výška z konstantní, platí

$$\triangle h = \frac{\triangle P}{\varrho g}\,.$$

Darcyho zákon lze tedy přeformulovat do tvaru

$$Q = \frac{k\varrho g A}{\mu}\frac{\triangle h}{\triangle L} = K\frac{A}{\triangle L}\triangle h\,,$$

kde $K = k\varrho g/\mu$ nazýváme *koeficient filtrace*.

2.5. Reynoldsovo číslo

V úvodu jsme zmínili, že lineární Darcyho zákon je platný pouze při určitých hodnotách *Reynoldsova čísla*, které vyjadřuje poměr setrvačných a třecích sil. Pro proudění v trubici je toto číslo definované jako

$$\mathrm{Re} = \frac{\varrho D v}{\mu},$$

kde ϱ je hustota kapaliny, v je rychlost proudění, μ je dynamická viskozita kapaliny a D je vnitřní průměr trubice. Pro proudění v trubici nastává turbulence pro hodnoty Reynoldsova čísla vyšší než cca 2100. Při přechodu k turbulenci dochází k výraznému navýšení třecích sil mezi kapalinou a trubicí. V analogii s tímto případem navrhl Pavlovskij [28] v případě proudění porézním prostředím použití Reynoldsova čísla v lehce pozměněné podobě pro posouzení platnosti Darcyho zákona. Při pokusech s prouděním tekutiny zrnitým porézním prostředím se zrny podobné velikosti navrhl následující definici

$$\mathrm{Re} = \frac{6{,}5}{0{,}75n + 0{,}23}\frac{\varrho d q}{\mu},$$

kde n je pórovitost, q je hustota toku a d je reprezentativní velikost zrna. Pro takto definované Reynoldsovo číslo je mezní hodnota platnosti Darcyho zákona 50–60. Pro různé velikosti zrn se v literatuře častěji objevuje definice

$$\mathrm{Re} = \frac{\varrho d q}{\mu}$$

s různě definovanou reprezentativní velikostí zrna d (viz [4, §5.3.1, str. 125–127]) a v závislosti na její volbě je mezní hodnota pro platnost Darcyho zákona mezi 1 a 10. I v tomto případě je častou volbou $d = d_{10}$.

2.6. Dupuitovy-Forchheimerovy předpoklady

Řešení úlohy proudění podzemní vody s volnou hranicí je matematicky komplikovaný problém, protože hranice sledované oblasti není předem známá a je součástí hledaného řešení. Dupuit [15] pozoroval, že maximální sklon hladiny podzemní vody je velmi malý, $0{,}001 < \triangle h/\triangle L < 0{,}01$. Na základě tohoto pozorování formuloval v roce 1863 následující zjednodušující předpoklady:

(DF1) podzemní voda proudí horizontálně (piezometrická výška je ve svislém směru konstantní),

(DF2) tok podzemní vody je přímo úměrný gradientu piezometrické výšky.

Pro úlohu s volnou hranicí platí, že hladina podzemní vody je charakterizována tlakem $P = 0$, a proto pro hladinu podzemní vody dostaneme vztah $h(x, y, z, t) = z$.

Z předpokladu (DF1) potom plyne, že k nalezení obou neznámých hodnot (piezometrické výšky a výšky hladiny podzemní vody) stačí řešit úlohu pouze pro piezometrickou výšku v kolmém průmětu sledované oblasti do roviny xy. Tím se problém značně zjednodušil, protože průmět sledované oblasti je předem známý. Neřešíme tak již úlohu s volnou hranicí. Podrobnější přechod od úlohy s volnou hranicí ve třech prostorových proměnných k úloze ve dvou prostorových proměnných bez volné hranice lze nalézt v [5, §2.6].

Předpoklad (DF2) odpovídá použití Darcyho zákona při modelování proudění podzemní vody. Jak jsme již zmínili výše, tento zákon nelze použít, pokud je Reynoldsovo číslo příliš vysoké. Znovu uveďme práci Forchheimer [16, str. 1782 a „Anhang“, str. 1787–1788] z roku 1901, kde autor na základě experimentů a terénního pozorování ukázal, že například pro písčité porézní prostředí není Darcyho zákon dostatečně přesný již pro hodnoty $\triangle h/\triangle L > 0{,}0005$, kdy lze stále použít předpoklad (DF1). Předpoklad (DF2) je ale nutné nahradit nelineárním zákonem.

2.7. Konstitutivní vztahy

Konstitutivní vztahy jsou často experimentálně nalezené vztahy mezi stavovou a tokovou veličinou (viz např. [14, §1.2, str. 7]). V našem případě je tokovou veličinou hustota toku $\vec{q}$ a stavovou veličinou piezometrická výška h. V případě homogenního a izotropního prostředí můžeme konstitutivní vztah zapsat pomocí velikosti toku q a neklesající spojité funkce φ splňující $\varphi(0) = 0$ jako rovnost

$$q = \varphi\left(\frac{\triangle h}{\triangle L}\right).$$

Různou volbou funkce φ poté dostaneme různé konstitutivní vztahy. Pokud zvolíme lineární funkci, tj. $\varphi(r) = cr$, dostaneme již výše zmíněný Darcyho zákon.

Z možných nelineárních zobecnění uvedeme dva základní příklady studované již na přelomu 19. a 20. století. Smrekerův-Izbašův-Missbachův (mocninný) zákon[7]

$$\varphi(r) = c|r|^{p-2}r\,, \qquad p \in \left(\frac{3}{2}, 2\right) \tag{5}$$

je hlavním objektem zájmu v tomto článku, a to hlavně pro značnou probádanost vlastností parciální diferenciální rovnice založené na tomto konstitutivním vztahu. Forchheimerův zákon

$$\varphi(r) = \frac{2r}{\sqrt{a^2 + 4br} + a}\,, \qquad a > 0 \quad \text{a} \quad b > 0,$$

je základem pro další zákony uvažující například i tvar zrn v porézním médiu. Velmi obsáhlý výčet nelineárních zákonů lze nalézt např. v Bear [4, §5.11.3, str. 182–184]. V praxi se ukazuje, že tok v závislosti na poklesu piezometrické výšky roste pro velké hodnoty pomaleji než lineární funkce, například jako mocninná funkce s exponentem mezi 0 a 1. Tento růst nelze zachytit polynomiální

[7]Pokud bychom v rovnici (5) uvažovali $p = 2$, dostali bychom Darcyho zákon. Pro $2{,}1 < p < 4{,}8$ bychom dostali zákon pro velmi pomalé proudění v jemnozrnných materiálech, viz [22, 34].

funkcí, která je výhodná pro interpolaci dat. Proto se konstitutivní vztahy často získávají z experimentálních dat ve tvaru

$$\frac{\triangle h}{\triangle L} = \varphi^{-1}(q) \ ,$$

kdy např. Forchheimerův zákon hledáme ve tvaru

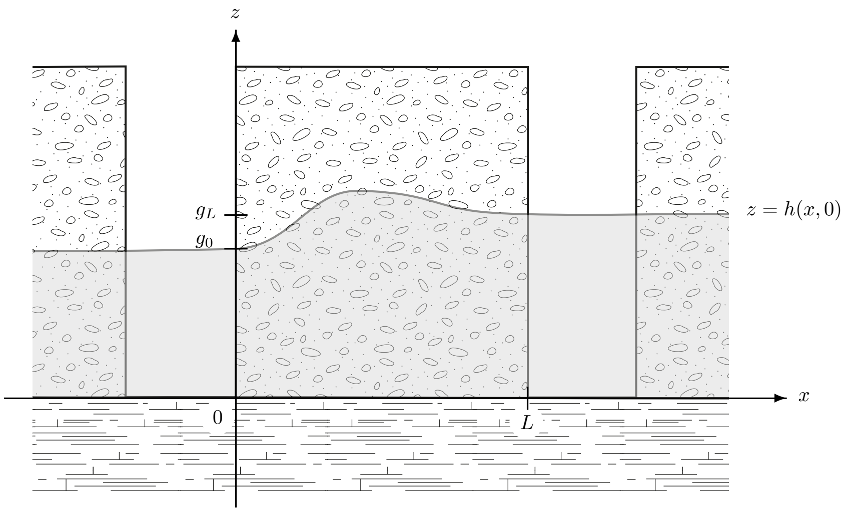
$$\frac{\triangle h}{\triangle L} = aq + bq^2 \,.$$

3. Model proudění vody mezi rovnoběžnými kanály

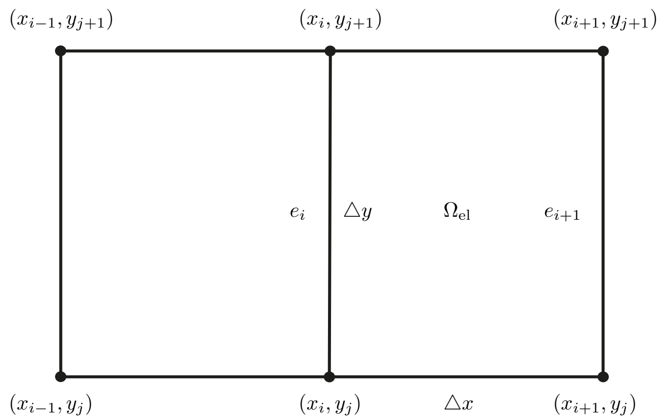
V této části odvodíme matematický model proudění vody mezi dvěma rovnoběžnými kanály. Tato konfigurace se často vyskytuje jak při zavlažování v zemědělství, tak naopak při odvodňování (např. pozemků). Vzhledem ke své zásadní důležitosti pro běžný život obyvatelstva především v semiaridních a monzunových oblastech (např. Indie) byla tato problematika často studována [3, 23, 31, 32]. Tyto průkopnické práce se však zabývají pouze případem laminárního proudění za použití lineárního Darcyho zákona, který umožňuje získat řešení v uzavřeném tvaru. Dnes po třiceti letech došlo k výraznému posunu jak v kvalitativní teorii nelineárních parciálních diferenciálních rovnic, tak v oblasti numerické matematiky a výkonosti výpočetní techniky. Díky tomu je možné studovat modely i s použitím nelineárního konstitutivního vztahu, který lépe aproximuje chování reálných tekutin v porézním prostředí (včetně turbulence). Odvození našeho modelu provedeme pomocí dvou základních vztahů, zákona zachování a konstitutivního vztahu popisovaného v předchozí části.

Uvažujme úlohu proudění podzemní vody mezi dvěma rovnoběžnými odvodňovacími kanály, které mají vzdálenost přilehlých břehů L. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že porézní prostředí mezi kanály je homogenní, izotropní a spočívá na vodorovné nepropustné vrstvě. Dna obou kanálů dosahují až k nepropustné vrstvě. V časovém intervalu $[0,T]$, $T>0$, zkoumáme vývoj hladiny podzemní vody $h(x,y,t)$ po jejím náhlém zvýšení (v čase $t=0$) například vlivem deště. Předpokládáme, že kanály jsou ve směru osy y nekonečně dlouhé, všechna data jsou translačně invariantní vůči ose y, a tedy můžeme předpokládat, že voda proudí pouze ve směru osy x. Proto $h(x,y,t)\equiv h(x,t)$. Hladinu levého kanálu udržujeme ve výšce g_0, tj. $h(0,t)=g_0$ a hladinu pravého kanálu ve výšce g_L, tj. $h(L,t)=g_L$. Počáteční stav hladiny podzemní vody je $h(x,0)=h_0(x)$. Celá situace je pro čas $t=0$ znázorněná na obrázku 5.

Pro větší názornost provedeme odvození modelu na elementárním objemu a poté dostaneme diferenciální rovnici limitním přechodem. Označme Ω_{xy} obdélník vzniklý průmětem porézního média mezi kanály do roviny xy. V tomto průmětu vytvoříme rovnoměrnou síť bodů (x_i,y_j), $i,j\in\mathbb{N}$. Vzdálenosti bodů x_i a y_i označíme $\triangle x$ a $\triangle y$. Časovou diskretizaci označíme t_k, $k\in\mathbb{N}$, s krokem $\triangle t$. Elementární plochou Ω_{el} rozumíme čtverec $(x_i,y_j),(x_{i+1},y_j)$, (x_{i+1},y_{j+1}), (x_i,y_{j+1}) (viz obrázek 6).



Obrázek 5. Ilustrace úlohy – řez rovinou $y = 0$ v čase $t = 0$.



Obrázek 6. Síť a elementární plocha Ω_{el}.

V případě proudění nestlačitelné kapaliny platí zákon zachování jejího objemu. V libovolné části sledované oblasti musí změna objemu vody odpovídat rozdílu objemu vody přiteklé a odteklé. Celková bilance může být ještě ovlivněná případnými zdroji.

Nejdříve vypočteme objem vody nad elementární plochou Ω_{el} v čase t_k. Upřesněme, že rovnice odvozujeme pro vnitřní body sítě, tj. $0 < x_i < L$ a pro časy $0 < t_k < T$. Jelikož je v případě proudění podzemní vody sklon hladiny malý (viz Dupuitovy-Forchheimerovy předpoklady, oddíl 2.6), můžeme pro dostatečně malé elementární plochy Ω_{el} předpokládat, že výška hladiny nad touto plochou je

$$\frac{h(x_i,t_k)+h(x_{i+1},t_k)}{2}\,.$$

Objem vody nad Ω_{el} v čase t_k tedy je

$$V_{\mathrm{voda}} = n \ \triangle x \ \triangle y \ \frac{h(x_i,t_k)+h(x_{i+1},t_k)}{2}$$

a změna tohoto objemu za čas $\triangle t$ je

$$\triangle V_{\mathrm{voda}} = n \ \triangle x \ \triangle y \ \frac{h(x_i,t_{k+1})+h(x_{i+1},t_{k+1})-h(x_i,t_k)-h(x_{i+1},t_k)}{2}\,.$$

Dále vyjádříme tok nad hranicí $\partial\Omega_{\mathrm{el}}$ elementární plochy Ω_{el} za čas $\triangle t$. Připomeňme, že k toku dochází pouze ve směru osy x. Objem vody proteklé za čas $\triangle t$ stěnou nad hranou e_i spojující body (x_i, y_j) a (x_i, y_{j+1}) označme Q_{x_i} a nad hranou e_{i+1} spojující body (x_{i+1}, y_j) a (x_{i+1}, y_{j+1}) označme $Q_{x_{i+1}}$. Nyní označme symbolem $\triangle Q$ změnu objemu vody za čas $\triangle t$ nad elementární plochou Ω_{el}, potom $\triangle Q = Q_{x_i} - Q_{x_{i+1}}$. Zákon zachování lze tedy zapsat ve tvaru

$$\triangle V_{\mathrm{voda}} = \triangle Q + \frac{f(x_i,t_k)+f(x_i,t_{k+1})+f(x_{i+1},t_k)+f(x_{i+1},t_{k+1})}{4}\,, \qquad (6)$$

kde funkce f popisuje zdroje.

V čase t_k je obsah plochy nad hranou e_i

$$\triangle y \ h(x_i,t_k)\,,$$

a proto je průtok danou plochou vztažený na jednotku času roven

$$\triangle y \ h(x_i,t_k) q_x(x_i,t_k)\,,$$

kde $q_x(x_i,t_k)$ je hustota toku v čase t_k v místě x_i (tok vztažený na jednotku plochy a jednotku času). Vztah mezi hustotou toku a výškou hladiny podzemní vody je dán konstitutivním vztahem, který jsme popisovali v oddíle 2.7. Obdobně v čase t_{k+1} máme

$$\triangle y \ h(x_i,t_{k+1}) q_x(x_i,t_{k+1})\,.$$

Celkový objem vody proteklé nad hranou e_i za čas $\triangle t$ aproximujeme průměrem

$$Q_{x_i} = \triangle t \ \triangle y \ \frac{1}{2}\big(h(x_i,t_k)q_x(x_i,t_k) + h(x_i,t_{k+1})q_x(x_i,t_{k+1})\big)\,. \qquad (7)$$

Obdobně dostaneme objem vody proteklé nad hranou e_{i+1}, tj.

$$Q_{x_{i+1}} = \triangle t \ \triangle y \ \frac{1}{2}\big(h(x_{i+1},t_k)q_x(x_{i+1},t_k) + h(x_{i+1},t_{k+1})q_x(x_{i+1},t_{k+1})\big)\,. \qquad (8)$$

Po dosazení vztahů (7) a (8) do zákona zachování (6) dostaneme

$$n \ \triangle x \ \triangle y \ \frac{h(x_i,t_{k+1})+h(x_{i+1},t_{k+1})-h(x_i,t_k)-h(x_{i+1},t_k)}{2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \triangle t \; \triangle y \; \frac{1}{2}\big(h(x_i,t_j)q_x(x_i,t_k) + h(x_i,t_{k+1})q_x(x_i,t_{k+1})\big)\\
&\quad - \triangle t \; \triangle y \; \frac{1}{2}\big(h(x_{i+1},t_k)q_x(x_{i+1},t_k) + h(x_{i+1},t_{k+1})q_x(x_{i+1},t_{k+1})\big)\\
&\quad + \triangle t \; \triangle x \; \triangle y \; \frac{f(x_i,t_k) + f(x_i,t_{k+1}) + f(x_{i+1},t_k) + f(x_{i+1},t_{k+1})}{4}\,.
\end{aligned}
$$

Rovnici vydělíme $\triangle t \; \triangle x \; \triangle y$ a po přeuspořádání členů dostaneme

$$
\begin{aligned}
n \; &\frac{h(x_i,t_{k+1}) + h(x_{i+1},t_{k+1}) - h(x_i,t_k) - h(x_{i+1},t_k)}{2\triangle t}\\
&= \frac{1}{2\triangle x}\big[h(x_i,t_k)q_x(x_i,t_k) - h(x_{i+1},t_k)q_x(x_{i+1},t_k)\\
&\qquad + h(x_i,t_{k+1})q_x(x_i,t_{k+1}) - h(x_{i+1},t_{k+1})q_x(x_{i+1},t_{k+1})\big]\\
&\quad + \frac{f(x_i,t_k) + f(x_i,t_{k+1}) + f(x_{i+1},t_k) + f(x_{i+1},t_{k+1})}{4}\,.
\end{aligned}
$$

Dosadíme konstitutivní vztah (s přihlédnutím k tomu, že tok q_x má směr spádu h)

$$
q_x(x_i,t_k) = -n\varphi\left(\frac{h(x_i,t_k) - h(x_{i-1},t_k)}{\triangle x}\right),
$$

čímž po vydělení pórovitostí n získáme

$$
\begin{aligned}
&\frac{h(x_i,t_{k+1}) + h(x_{i+1},t_{k+1}) - h(x_i,t_k) - h(x_{i+1},t_k)}{2\triangle t}\\
&= -\frac{1}{2\triangle x}\left[h(x_i,t_k)\varphi\left(\frac{h(x_i,t_k) - h(x_{i-1},t_k)}{\triangle x}\right)\right.\\
&\qquad - h(x_{i+1},t_k)\varphi\left(\frac{h(x_{i+1},t_k) - h(x_i,t_k)}{\triangle x}\right)\\
&\qquad + h(x_i,t_{k+1})\varphi\left(\frac{h(x_i,t_{k+1}) - h(x_{i-1},t_{k+1})}{\triangle x}\right)\\
&\qquad \left. - h(x_{i+1},t_{k+1})\varphi\left(\frac{h(x_{i+1},t_{k+1}) - h(x_i,t_{k+1})}{\triangle x}\right)\right]\\
&\quad + \frac{f(x_i,t_k) + f(x_i,t_{k+1}) + f(x_{i+1},t_k) + f(x_{i+1},t_{k+1})}{4n}\,.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Nyní si vysvětlíme přechod od diferenční rovnice (9) k diferenciální rovnici. Pro jednoduchost budeme předpokládat stacionární případ, což znamená, že uvažované funkce h a f se nemění v čase a tudíž můžeme psát $h(x)$ a $f(x)$ místo $h(x,t)$ a $f(x,t)$. Navíc budeme uvažovat Darcyho zákon $\varphi(s) = s$. Tím se rovnice (9) zjednoduší na

$$
\begin{aligned}
0 = -\frac{1}{\triangle x}&\left(h(x_i)\frac{h(x_i) - h(x_{i-1})}{\triangle x} - h(x_{i+1})\frac{h(x_{i+1}) - h(x_i)}{\triangle x}\right)\\
&+ \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2n}\,.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Za předpokladu, že existuje druhá derivace funkce h, platí podle Taylorovy věty pro hodnoty funkce h v bodech $x_{i-1} = x_i - \triangle x$, $x_{i+1} = x_i + \triangle x$ vzorce

$$h(x_i \pm \triangle x) = h(x_i) \pm h'(x_i)\triangle x + \frac{1}{2}h''(\xi_\pm)(\triangle x)^2\,, \tag{11}$$

kde $\xi_- \in (x_{i-1}, x_i)$ a $\xi_+ \in (x_i, x_{i+1})$ jsou neznámá čísla ležící v daných intervalech. Odtud dosazením

$$\begin{aligned}
-&\frac{1}{\triangle x}\left(h(x_i)\frac{h(x_i)-h(x_{i-1})}{\triangle x} - h(x_{i+1})\frac{h(x_{i+1})-h(x_i)}{\triangle x}\right)\\
&= -\frac{1}{\triangle x}\Bigg(h(x_i)\left(h'(x_i) - \frac{1}{2}h''(\xi_-)\triangle x\right)\\
&\quad - \left(h(x_i) + h'(x_i)\triangle x + \frac{1}{2}h''(\xi_+)(\triangle x)^2\right)\left(h'(x_i) + \frac{1}{2}h''(\xi_+)\triangle x\right)\Bigg)\\
&= \frac{1}{2}h(x_i)\left(h''(\xi_-) + h''(\xi_+)\right) + \left(h'(x_i)\right)^2\\
&\quad + h''(\xi_+)\left(h'(x_i) - \frac{1}{4}h''(\xi_+)\triangle x\right)\triangle x
\end{aligned} \tag{12}$$

Pro jednoduchost dále uvažujeme $L = 1$. Zvolíme libovolné $x \in (0,1)$. Nyní zjemňujeme síť bodů, tj. $\triangle x \to 0$, a v každém kroku zjemňování vybíráme uzel sítě x_i tak, aby $x_i \to x$, a tedy i $\xi_\pm \to x$. Předpokládejme, že h'' a f jsou v $(0,1)$ spojité funkce (píšeme $h \in C^2(0,1)$ a $f \in C(0,1)$). Potom limita výrazu v (12) pro $\triangle x \to 0$ existuje a rovná se

$$h(x)h''(x) + (h'(x))^2 = \left(\frac{1}{2}h^2\right)''(x)$$

a obdobně

$$\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2n} \to \frac{f(x)}{n},$$

přičemž dále budeme psát pouze $f(x)$ místo $f(x)/n$.

Z diferenční rovnice (10) tedy limitním zjemňováním sítě dostaneme okrajovou úlohu

$$\begin{cases} -\left(\dfrac{1}{2}h^2\right)''(x) = f(x) & \text{v } (0,1)\,,\\ \qquad h(0) = h(1) = 0\,, \end{cases}$$

kde jsme zvolili co nejjednodušší okrajové podmínky, kvůli nimž navíc předpokládáme $h \in C[0,1]$.

Po substituci $u(x) = h^2(x)/2$ dostaneme rovnici

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & \text{v } (0,1)\,,\\ \quad u(0) = u(1) = 0\,, \end{cases} \tag{13}$$

se kterou budeme později pracovat.

Nyní se vrátíme k obecnější situaci (9). Předpokládejme, že funkce f a h jsou dostatečně hladké, např. $f \in C([0,L]\times[0,T])$, $h \in C^1((0,L)\times(0,T)) \cap C([0,L]\times$

$[0, T]$) a současně $h(\cdot, t) \in C^3(0, L)$ pro všechna $t \in [0, T]$. Navíc předpokládejme, že ve všech bodech $(x, t) \in (0, L) \times (0, T)$, kde $\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = 0$, platí buď $h(x, t) = 0$ nebo $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) = 0$. Potom můžeme provést limitní přechody $\triangle t \to 0$ a $\triangle x \to 0$. Tím dostaneme diferenciální rovnici

$$\frac{\partial}{\partial t} h(x, t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(h(x, t)\, \varphi\left(\frac{\partial}{\partial x} h(x, t)\right)\right) + f(x, t)\,.$$

Použijeme-li mocninný konstitutivní vztah (5) a vezmeme-li v úvahu i počáteční situaci a pevnou výšku hladiny v kanálech, získáme následující model

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} h(x, t) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(h(x, t)\left|\dfrac{\partial}{\partial x} h(x, t)\right|^{p-2} \dfrac{\partial}{\partial x} h(x, t)\right) + f(x, t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{v } (0, L) \times (0, T)\,, \\ h(0, t) = g_0, \quad h(L, t) = g_L \quad \text{pro všechna } t \in (0, T)\,, \\ h(x, 0) = h_0(x) \quad \text{pro všechna } x \in (0, L)\,. \end{cases} \tag{14}$$

Pro úlohu (14) je hledání klasického řešení splňujícího rovnici v každém bodě komplikované, protože je rovnice pro $\frac{\partial h}{\partial x} \to 0$ buď singulární (pro $1 < p < 2$), tj. difuzní koeficient jde do nekonečna, nebo degenerovaná (pro $p > 2$), tj. difuzní koeficient jde k nule. Zásadní otázkou pro nově definované řešení je jeho existence, jednoznačnost (v dané množině – prostoru – funkcí) a regularita (dostatečná spojitost).

Poznámka (slabé řešení). Koncept slabého řešení si přiblížíme na stacionární (eliptické) úloze (13). Hledáme-li klasické řešení, tj. má-li být rovnice (13) splněna v každém bodě intervalu $(0, 1)$, je nutné, aby druhá derivace hledaného řešení v každém bodě existovala. Kvůli výše popsanému limitnímu přechodu navíc požadujeme její spojitost.

Ukazuje se, že pro praktické aplikace je takový požadavek příliš silný. Fyzikálně přirozeným přístupem je nejprve definovat celkovou potenciální energii soustavy a hledat funkci u, pro kterou je tato energie minimální (tzv. *princip minimální energie*). Uvažujeme-li pravou stranu f v (13) takovou, aby měla potenciální energie matematicky smysl (nemusí být spojitá), a množinu (prostor) funkcí, ve kterém je existence a jednoznačnost řešení u zaručena tzv. *funkcionální analýzou* (konkrétně Laxovou–Milgramovou větou), dojdeme k tzv. *Sobolevovu prostoru* $W_0^{1,2}(0, 1)$. Takové řešení pak nazýváme *slabým řešením.* Funkce z tohoto prostoru např. nemusí mít spojitou druhou a dokonce ani první derivaci, takže slabé řešení nemusí být klasické řešení, ale lze dokázat, že každé klasické řešení je zároveň slabé řešení (tzv. *regularita*).

V případě úlohy (14) hledáme slabé řešení stacionární úlohy (nezávislé na čase) v Sobolevově prostoru $W^{1,p}(0, L)$. Vynechání indexu nula značí, že nevyžadujeme nulovou funkční hodnotu řešení v krajních bodech intervalu. Slabá řešení nestacionárních (parabolických) úloh hledáme v tzv. *Bochnerových prostorech*, např. pro úlohu (14) v prostoru $L^p\big([0, T] \to W^{1,p}(0, L)\big)$.

4. Principy maxima a srovnávací principy

Pro singulární a/nebo degenerované parabolické rovnice nelze nalézt explicitní řešení s výjimkou velmi speciálních případů. Jejich studium je tedy založené na kvalitativních metodách v kombinaci s numerickými výpočty. Zásadní roli mezi kvalitativními metodami hrají *principy maxima a srovnávací principy.* Ty si nejprve vysvětlíme na klasické *eliptické* Dirichletově okrajové úloze pro Poissonovu rovnici s lineárním Laplaceovým operátorem (Laplaciánem)

$$\Delta u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2} = \operatorname{div}(\nabla u),$$

kde $(x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$,

$$\nabla u \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right), \ \operatorname{div}(w_1, w_2, \ldots, w_N) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial w_N}{\partial x_N}.$$

Alespoň pro nejjednodušší případ rovnice[8] $\Delta u = f$ v omezené oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ uveďme, že jejím *slabým řešením* nazýváme funkci $u \in W^{1,2}(\Omega)$ splňující

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega u\varphi \, \mathrm{d}x$$

pro všechny tzv. *testovací funkce.*

Nechť $u_i \in W^{1,2}(\Omega)$, $i = 1, 2$, jsou (slabá) řešení rovnic

$$-\Delta u_i = f_i(x) \quad \text{v } \Omega\,,$$

kde $f_i \in L^\infty(\Omega)$ jsou dvě (obecně různé) pravé strany. Tzv. *slabý* srovnávací princip říká, že je-li $f_1 \leq f_2$ v oblasti Ω a $u_1 \leq u_2$ na hranici $\partial\Omega$ (ve smyslu tzv. *stop*[9] stop), pak platí $u_1 \leq u_2$ v celé oblasti Ω. Tzv. *silný* srovnávací princip dále říká, že je-li navíc $f_1 \not\equiv f_2$ v Ω nebo $u_1 \not\equiv u_2$ na $\partial\Omega$, potom platí dokonce ostrá nerovnost $u_1 < u_2$ v celé oblasti Ω. To například znamená, že pokud $f_1 < f_2$ platí alespoň na nějaké části oblasti Ω, která má kladnou míru, ale může být velmi malá, a na zbytku oblasti je $f_1 \equiv f_2$, potom platí $u_1 < u_2$ všude v Ω.

Obdobná tvrzení lze dokázat i pro *parabolickou* Cauchyho-Dirichletovu úlohu s laplaciánem. Nechť $u_i \in L^2\big([0,T] \to W^{1,2}(\Omega)\big)$, $i = 1, 2$, jsou (slabá) řešení rovnic

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \Delta u_i = f_i(x,t) \quad \text{v } Q_T \stackrel{\text{def}}{=} \Omega \times (0,T]\,,$$

kde $f_i \in L^\infty(Q_T)$. Pak lze dokázat, že pokud $f_1 \leq f_2$ v Q_T a $u_1 \leq u_2$ na $\Gamma_T \stackrel{\text{def}}{=} (\partial\Omega \times [0,T]) \cup (\Omega \times \{0\})$ (ve smyslu stop), pak $u_1 \leq u_2$ v Q_T (slabý srovnávací princip, viz Friedman [17]). Platí-li navíc alespoň jedna z následujících tří podmínek:

- $f_1 \not\equiv f_2$ v $\Omega \times (0, t_0)$ pro libovolné $0 < t_0 \leq T$,
- $u_1 \not\equiv u_2$ na $\Omega \times \{0\}$ (ve smyslu stop),
- $u_1 \not\equiv u_2$ na $\partial\Omega \times (0, t_0)$ (ve smyslu stop) pro libovolné $0 < t_0 \leq T$,

[8] Speciálně pro $N = 1$ a $\Omega = (0, 1)$ je $\Delta u = u''$, a jedná se tedy o rovnici v (13).

[9] Funkce v prostoru $W^{1,2}(\Omega)$ jsou příliš obecné, aby mělo smysl mluvit přímo o jejich hodnotách na $\partial\Omega$. Místo toho se uvažuje, jaké na $\partial\Omega$ zanechají „stopy“.

potom $u_1 < u_2$ v Q_T (silný srovnávací princip).

Pro lineární úlohy se obvykle nejprve dokazuje princip *maxima*, protože srovnávací princip pak snadno dostaneme jako jeho důsledek. Nechť $u \in L^2\big([0,T] \to W^{1,2}(\Omega)\big)$ je (slabé) řešení rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x,t) \quad \text{v } Q_T\,,$$

kde $f \in L^\infty(\Omega)$. *Slabý* princip maxima říká, že je-li $f \geq 0$ v Q_T, potom $u \geq M \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname*{ess\,inf}_{\Gamma_T} u$ (ve smyslu stop) v Q_T. Zjednodušeně řečeno, spojité řešení u nabývá své minimální hodnoty přes Q_T v nějakém bodě množiny Γ_T, neboli v žádném bodě uvnitř Q_T nemá menší hodnotu, než je minimum přes Γ_T. Poznamenejme, že i když by se zdálo logičtější nazývat toto tvrzení principem *minima* a *principem maxima* nazývat tvrzení, že z $f \leq 0$ plyne $u \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\Gamma_T} u$, tato dvě tvrzení jsou ekvivalentní (jedno z druhého plyne nahrazením u za $-u$), a tedy používáme pouze tradiční pojem princip *maxima*. *Silný* princip maxima říká, že jestliže je navíc splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

- $f \not\equiv 0$ v $\Omega \times (0, t_0)$ pro libovolné $0 < t_0 \leq T$,
- $u \not\equiv M$ na $\Omega \times \{0\}$ (ve smyslu stop),
- $u \not\equiv M$ na $\partial\Omega \times (0, t_0)$ (ve smyslu stop) pro libovolné $0 < t_0 \leq T$,

potom $u > M$ v Q_T.

Jakmile máme dokázán princip maxima (slabý, resp. silný), srovnávací princip (slabý, resp. silný) snadno obdržíme volbou $u = u_2 - u_1$ (tudíž $M \geq 0$) a $f = f_2 - f_1$. Všimněme si, že jsme využili linearitu levé strany rovnice. Naopak, máme-li dokázán srovnávací princip, příslušný princip maxima lze odvodit volbou $u_1 \equiv M$, $f_1 \equiv 0$, $u_2 = u$ a $f_2 = f$ (zde žádná linearita využita nebyla).

Uvažujme nyní místo Laplaciánu obecnější[10] operátor p-laplacián

$$\Delta_p u \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)\,,$$

$p > 1$. Podobně jako v lineárním případě $p = 2$ výše, ze srovnávacího principu plyne příslušný princip maxima. Ale protože je p-laplacián nelineární operátor (pro $p \neq 2$), z principu maxima neplyne srovnávací princip. Jinými slovy, princip maxima je slabší tvrzení, protože je to vlastně srovnání pouze s konstantním řešením. Navíc platí, že jednoznačnost (slabého) řešení je snadným důsledkem slabého srovnávacího principu, ale ne důsledkem principu maxima.

Pokud jde o (slabé) řešení $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *eliptické* Dirichletovy okrajové úlohy pro rovnici s p-laplaciánem

$$-\Delta_p u = f(x) \quad \text{v } \Omega\,,$$

jak *slabý* princip maxima, tak *slabý* srovnávací princip lze dokázat standardními metodami zvolením vhodné testovací funkce v definici slabého řešení. *Slabý* srovnávací princip v podstatě říká, že p-laplacián je tzv. monotónní operátor. *Silný* princip maxima byl dokázán v roce 1984 (Vázquez, [37]). *Silný* srovnávací princip

[10] Platí $\Delta_2 \equiv \Delta$.

(tj. silnější tvrzení) pak byl dokázán v roce 1998 (Cuesta, Takáč [9]) alespoň v případě, že $0 \le f_1 \le f_2$, $f_1 \not\equiv f_2$ a $u \equiv 0$ na $\partial\Omega$ (autoři se zaměřili pouze na vliv pravé strany rovnice a ne na vliv okrajové podmínky).

Zatímco *slabý* princip maxima a dokonce i *slabý* srovnávací princip pro (slabé) řešení $u \in L^p\big([0,T] \to W^{1,p}(\Omega)\big)$ *parabolické* Cauchyho-Dirichletovy úlohy s p-laplaciánem

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_p u = f(x,t) \quad \text{v } Q_T \tag{15}$$

lze stále dokázat standardními metodami (viz Ivanov [19]), důkaz *silného* principu maxima a *silného* srovnávacího principu je pro $p \ne 2$ mnohem komplikovanější. Ukážeme si, že z Barenblattova článku [2] plyne, že silný princip maxima nelze očekávat v tzv. *degenerovaném* případě $p > 2$ (pomalá difuze) ani pro malé $T > 0$. Vezmeme-li slavné Barenblattovo explicitní řešení $\varrho(r,t)$, $r,t > 0$, rovnice [2, (1.3)]

$$c\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \frac{1}{r^{N-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^{N-1}\left(\frac{\partial}{\partial r}\varrho^k\right)\left|\frac{\partial}{\partial r}\varrho^k\right|^{m-1}\right], \tag{16}$$

kde $m = p-1$, $k = 1$ a $c > 0$ je konstanta, potom jeho „rotací“ dostaneme radiálně (sféricky) symetrickou funkci (tj. takovou, která je konstantní na libovolné sféře v $\mathbb{R}^N$ se středem v počátku) $u(x,t) \equiv \varrho(|x|,t) = \varrho(r,t)$, $r = |x|$, která je řešením rovnice (15), kde $f \equiv 0$. Degenerovaný případ $p > 2$ odpovídá případu $k > 1/m$ v [2]. Množina bodů $\mathbb{R}^N$, ve kterých je v tomto případě řešení u nenulové (viz [2, Fig. 1]), je v libovolné časovém okamžiku omezená koule s poloměrem, který začíná od 0 v čase $t = 0$ (počáteční podmínka je Diracova distribuce v počátku, tj. veškerá hmota je soustředěna do jednoho bodu) a roste v čase s konečnou rychlostí. Za oblast Ω tedy zvolíme nějakou (libovolnou) kouli v $\mathbb{R}^N$ se středem v počátku a počáteční čas nastavíme tak, aby poloměr koule, ve které je (rotované) Barenblattovo řešení nenulové, byl menší, než poloměr Ω (v [2] nahradíme t za $t+\varepsilon$ s nějakým dostatečně malým $\varepsilon > 0$). Platí tedy $u \not\equiv M = 0$ na $\Omega \times \{0\}$ a $u \not> 0$ v Q_T, protože $u = 0$ v části Ω (mezi $\partial\Omega$ a nějakou menší sférou) pro t od 0 až dokud menší sféra nenarazí na $\partial\Omega$. Jiný protipříklad na silný srovnávací princip v jedné prostorové dimenzi, ve kterém $u_1 \equiv u_2$ na Γ_T, $f_1 \le f_2$, $f_1 \not\equiv f_2$, ale $u_1 \not< u_2$, je uveden v [8]. Na druhou stranu jsou v [8] uvedeny jisté (silnější) podmínky na oddělení pravých stran f_1 a f_2, za kterých už silný srovnávací princip platí.

Ani v tzv. singulárním případě $1 < p < 2$ (silná difuze) nemůže silný princip maxima platit pro libovolně velké T. V [13, Chapter VII, §2]) je dokázáno, že pokud $u > 0$ na $\Omega \times \{0\}$, $u \equiv 0$ na $\partial\Omega \times (0,T)$ a $f \equiv 0$ in Q_T, pak existuje dostatečně velké t, od kterého je už $u(\cdot,t)$ nulové v Ω, neplatí tedy $u > M = 0$ pro libovolně dlouhý čas. Silný princip maxima alespoň pro dostatečně krátký čas je dokázán v [6, Theorem 1.1], a to dokonce pro ještě obecnější, tzv. dvojitě nelineární rovnici

$$\frac{\partial}{\partial t}b(u(x,t)) - \Delta_p u = f(x,t) \quad \text{v } Q_T\,, \tag{17}$$

kde $b\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ je spojitá funkce, $b(0) = 0$, $b \in C^1(0, +\infty)$ a $b' > 0$ na $(0, +\infty)$. Ve speciálním případě $b(s) \equiv s$ přejde rovnice (17) na (15). Nechť $1 < p < 2$ a

$$\lim_{s\to 0+} \frac{s^{2-p}\, b'(s)}{|\log s|^{p-1}} = 0\,. \tag{18}$$

Předpokládejme, že $u\colon \overline{\Omega} \times [0, T) \to \mathbb{R}_+$ je spojité nezáporné slabé řešení (17). Potom pro libovolné pevné $t_0 \in (0, T)$ platí, že řešení $u(\cdot, t_0)$ je buď kladné všude v Ω, nebo nulové všude v Ω. Z toho plyne, že jestliže $u(\xi, 0) > 0$ v nějakém bodě $\xi \in \Omega$, potom existuje $\tau \in (0, T]$ takové, že $u(x, t) > 0$ pro všechna $(x, t) \in \Omega \times (0, \tau)$, tj. silný princip maxima platí na $\Omega \times (0, \tau)$. Hodnotu $\tau \in (0, T)$ lze zdola odhadnout:

$$\tau = \sup\{T' \in (0, T]\colon u(\xi, t) > 0 \text{ pro všechna } t \in [0, T')\} > 0\,.$$

Poznamenejme, že $u(x, t) \equiv \varrho^k(|x|, t)$, kde ϱ je Barenblattovo řešení (16), je řešení (17), kde $b(s) = s^{1/k}$, $p = m + 1$ a $f \equiv 0$. Pokud $k \le 1/m$, tj. $k \le 1/(p - 1)$, potom (rotované) Barenblattovo řešení je kladné všude v $\mathbb{R}^N$ pro libovolný kladný čas. Jinými slovy, rychlost šíření je nekonečná, a je tedy v tomto případě rozumné očekávat platnost silného srovnávacího principu alespoň pro malé $T > 0$. A skutečně, pro $b(s) = s^{1/k}$ je podmínka (18), tj.

$$\lim_{s\to 0+} \frac{s^{1-p+1/k}}{k|\log s|^{p-1}} = 0\,,$$

splněna právě tehdy, je-li $1 - p + 1/k \ge 0$, tj. $k \le 1/(p - 1)$. Podmínka (18) je tedy přirozená a přesně odpovídá Barenblattovu výsledku.

5. Analýza modelu proudění vody mezi rovnoběžnými kanály

Nyní aplikujeme teoretické poznatky z předchozí části na matematický model odvozený v části 3, tj.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} h(x, t) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(h(x, t) \left| \dfrac{\partial}{\partial x} h(x, t)\right|^{p-2} \dfrac{\partial}{\partial x} h(x, t)\right) + f(x, t) \\ \hfill \text{v } (0, L) \times (0, T)\,, \\ h(0, t) = g_0, \quad h(L, t) = g_L \quad \text{pro všechna } t \in (0, T)\,, \\ h(x, 0) = h_0(x) \quad \text{pro všechna } x \in (0, L)\,. \end{cases}$$

V dalším textu předpokládáme, že výška hladiny v obou kanálech je stejná, tj. $g_0 = g_L = H \ge 0$. Případ $g_0 \ne g_L$ nebo ještě obecnější (a reálnější) závislost okrajových podmínek na čase jsou stále otevřené problémy, čekající na své vyřešení. My zde popíšeme dvě zajímavé a překvapivě rozdílné situace, vyschlé kanály $H = 0$ a zavodněné kanály $H > 0$.

Prvně budeme předpokládat, že jsou kanály vyschlé ($H = 0$) a ani mezi kanály není žádná voda. Poté v čase $t = 0$ dojde k náhlému zvýšení hladiny mezi příkopy o $\triangle h_0 \ge 0$, což se modeluje počáteční podmínkou $h_0 = H + \triangle h_0 = \triangle h_0$ pro čas $t = 0$. Lze ukázat, že pro rozumnou volbu nárůstu $\triangle h_0$ (představme si např. spojitě diferencovatelnou funkci[11] na uzavřeném intervalu $[0, L]$ s $\triangle h_0(0) = \triangle h_0(L) = 0$) má (14) jednoznačné řešení (viz [19]). Pokud navíc $f = 0$ na $(0, L) \times (0, T)$, $\triangle h_0(x_0) > 0$ pro nějaké $x_0 \in (0, L)$ a existuje hodnota $0 < \delta < \min\{x_0, L - x_0\}$ taková, že funkce $\triangle h_0$ je nulová vně intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, lze pomocí slabého srovnávacího principu popsaného v předchozí části ukázat, že $h(\cdot, t) = 0$ vně intervalu $(\delta - w_{max}t, L - \delta + w_{max}t)$ pro všechna $0 < t < \min\{\delta/w_{max}, (L - \delta)/w_{max}\}$, kde $w_{max} > 0$. Tuto vlastnost dostaneme, stejně jako v předchozí části, srovnáním s řešením inspirovaným Barenblattem (viz Díaz [12, str. 328–329]). Jako horní řešení (řešení rovnice (14) s jistou $f(x, t) \geq 0$ - srovnejte s formulací srovnávacího principu) vezmeme

$$U(x,t) = \max\left\{ \frac{1}{(t+\tau)^{\lambda}} \left[C - k \frac{|x - x_0|^{p'}}{(t+\tau)^{\frac{p'}{2p-1}}} \right]^{p'}, 0 \right\}$$

s

$$p' = \frac{p}{p-1}\,, \quad \lambda = \frac{p}{2p^2 - 3p + 1}\,, \quad k = \left(\frac{p-1}{p}\right)^2 \left(\frac{1}{2p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\,,$$

kde $\tau > 0$ a $C > 0$ budou vhodně zvoleny níže. Poznamenejme, že funkce $U(\cdot, t)$ je nulová vně intervalu

$$\left(x_0 - \left(\frac{C}{k}\right)^{\frac{1}{p'}} (t+\tau)^{\frac{1}{2p-1}}, x_0 + \left(\frac{C}{k}\right)^{\frac{1}{p'}} (t+\tau)^{\frac{1}{2p-1}} \right).$$

pro každé $t > 0$. Nyní zvolíme konstanty $\tau > 0$ a $C > 0$ tak, aby $h_0(x) \leq U(x, 0)$ a

$$[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq \left(x_0 - \left(\frac{C}{k}\right)^{\frac{1}{p'}} \tau^{\frac{1}{2p-1}}, x_0 + \left(\frac{C}{k}\right)^{\frac{1}{p'}} \tau^{\frac{1}{2p-1}} \right) \subsetneq (0, L)\,,$$

viz obr. 7, kde značíme $\eta_{\pm} = \left(\frac{C}{k}\right)^{\frac{1}{p'}} \tau^{\frac{1}{2p-1}}$.

Potom $h(\,\cdot\,, t)$ je nulová vně

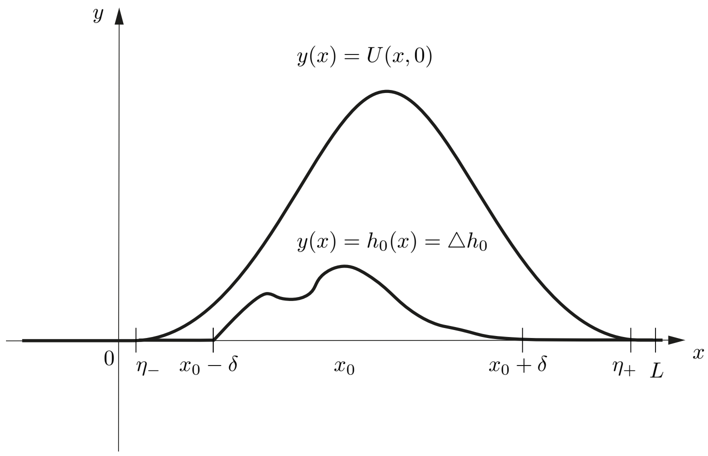
$$\left(x_0 - \left(\frac{C}{k}\right)^{\frac{1}{p'}} (t+\tau)^{\frac{1}{2p-1}}, x_0 + \left(\frac{C}{k}\right)^{\frac{1}{p'}} (t+\tau)^{\frac{1}{2p-1}} \right).$$

To znamená, že voda z lokalizovaného náhlého navýšení hladiny podzemní vody h_0 nedosáhne okamžitě břehů kanálů a

$$w_{max} = \left(\frac{C}{k}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Nyní se podíváme na situaci, kdy jsou kanály zavodněné ($H > 0$) a ve stejné výši je i původní hladina podzemní vody. Poté v čase $t = 0$ dojde k náhlému zvýšení hladiny mezi příkopy o $\triangle h_0$, což se modeluje počáteční podmínkou $h_0 = H + \triangle h_0$ pro čas $t = 0$. Stejné okamžité zvýšení hladiny podzemní vody o $\triangle h_0$ jako v předchozím případě ihned způsobí zvýšení hladiny podzemní vody v celém

[11] Přesněji postačuje lipschitzovsky spojitá funkce.



Obrázek 7. Srovnání počáteční podmínky a horního řešení v čase $t = 0$.

intervalu $(0, L)$. Uvažujeme $\triangle h_0 \geq 0$, které splňuje stejné předpoklady jako v předchozím odstavci. Pomocí substituce $v(x,t) = h(x,t) - H$ dostaneme úlohu

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(|v+H|\left|\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|^{p-2}\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) = f(x,t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{pro } (x,t) \in (0,L) \times (0,T)\,, \\ v\,(0,t) = v(L) = 0 \quad \text{pro } t \in (0,T)\,, \\ v(x,0) = h_0(x) - H = \triangle h_0(x) \quad \text{pro } x \in (0,L)\,, \end{cases} \tag{19}$$

u které lze dokázat existenci a jednoznačnost spojitého[12] řešení (viz [5]). Chceme ukázat, že pro tento problém platí silný princip maxima popsaný v předchozí kapitole pro dvojitě nelineární rovnici (17). Pomocí další substituce dále rovnici v (19) přepíšeme do tvaru (17). Protože

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial (v+H)}{\partial x} \qquad \text{a} \qquad (v+H)^{\frac{1}{p-1}}\frac{\partial (v+H)}{\partial x} = \frac{p-1}{p}\frac{\partial (v+H)^{\frac{p}{p-1}}}{\partial x}$$

dostaneme

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial (v+H)^{\frac{p}{p-1}}}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial (v+H)^{\frac{p}{p-1}}}{\partial x}\right) = f(x,t)\,.$$

Substitucí $u = (v+H)^{p/(p-1)} - H^{p/(p-1)}$ získáme

$$\frac{\partial\left(\left(u + H^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} - H\right)}{\partial t} - \left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = f(x,t)\,,$$

[12]Dokonce hölderovsky spojitého.

což je požadovaná rovnice (17) s $b(s) = \left(s + H^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} - H$. Funkce b je spojitá, $b(0) = 0$, $b \in C^1(0, +\infty)$ s $b' > 0$ v $(0, +\infty)$ a podmínka (18) je splněná. Potom ze silného principu maxima dostaneme, že řešení $u(\cdot, t_0)$ je pro každé pevné $t_0 \in (0, T)$ buď kladné všude v $(0, L)$, nebo nulové všude v $(0, L)$. Ze spojitosti řešení a podmínky $h_0 > 0$ dostaneme existenci $\tau \in (0, T)$ takového, že $u(x, t) > 0$ pro všechny $(x, t) \in (0, L) \times (0, \tau)$, a proto z výše uvedených transformaci je $h(t, x) > H$ pro všechny $(x, t) \in (0, L) \times (0, \tau)$.

Závěr. Pokud jsou příkopy vyschlé ($H = 0$), voda z náhlého lokálního navýšení hladiny podzemní vody dosáhne břehů odvodňovacích příkopů až po určitém čase. Naopak v případě částečně zatopených kanálů způsobí náhlé lokální navýšení hladiny podzemní vody okamžité zvýšení hladiny podzemní vody v celém prostoru mezi kanály. V reálných situacích se tekutina pohybuje vždy konečnou rychlostí. Výše zmíněné výsledky je tedy nutné interpretovat tak, že pro $H > 0$ je pohyb rozhraní mezi suchou a zavodněnou částí mnohem rychlejší než v případě vyschlého prostředí.

Poděkování

Tato práce je založena na společném výzkumu, který byl iniciován Peterem Takáčem a publikován v sérii článků [6, 7, 8]. Výzkum Jiřího Benedikta, Petra Girga a Lukáše Kotrly byl částečně podpořen Grantovou agenturou ČR (GAČR) v rámci projektu č. 18-03253S. Lukáš Kotrla byl také částečně podpořen Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy (MŠMT, ČR) v rámci projektu NPU I, projekt č. LO1506 (PU-NTIS).

Reference

[1] V. I. Aravin, S. N. Numerov: *Teoriya dvizheniya zhidkostei i gazov v nedeformiruemoi poristoi srede* Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit., Moskva, 1953. *Anglický překlad:* A. Moscona: *Theory of Fluid Flow in Undeformable Porous Media*, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1965.

[2] G. I. Barenblatt: *On some unsteady motions of a liquid and gas in a porous medium*, Akad. Nauk SSSR, Prikl. Mat. Meh. **16** (1952), 67–78, rusky.

[3] P. Basak: *An analytical solution for the transient ditch drainage problem*, Journal of Hydrology **41** (1979), No. 3, 377–382.

[4] J. Bear: *Dynamics of Fluids in Porous Media*, Enviromental science series, American Elsevier Publishing Company, Inc., New York, 1972.

[5] J. Benedikt, P. Girg, L. Kotrla: *Nonlinear models of the fluid flow in porous media and their methods of study*, v recenzním řízení.

[6] J. Benedikt, P. Girg, L. Kotrla, P. Takáč: *The strong maximum principle in parabolic problems with the p-Laplacian in a domain*, Appl. Math. Lett. **63** (2017), 95–101.

[7] J. Benedikt, P. Girg, L. Kotrla, P. Takáč: *Origin of the p-Laplacian and A. Missbach*, Electron. J. Differential Equations (2018), Paper No. 16.

[8] J. Benedikt, P. Girg, L. Kotrla, P. Takáč: *The strong comparison principle in parabolic problems with the p-Laplacian in a domain*, Appl. Math. Lett. **98** (2019), 365–373.

[9] M. Cuesta, P. Takáč: *A strong comparison principle for the Dirichlet p-Laplacian*, In Reaction diffusion systems (Trieste, 1995), Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **194**, Dekker, New York, 1998, 79–87.

[10] H. Darcy: *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*, Victor Dalmont, Paris, 1856.
[11] G. R. de Prony: *Recherches physico-mathématiques sur la théorie des eaux courantes*. Imprimerie impériale, Paris, 1804.
[12] J. I. Díaz: *Qualitative study of nonlinear parabolic equations: an introduction*, Extracta Math. **16** (2001), No. 3 , 303–341.
[13] E. DiBenedetto: *Degenerate parabolic equations*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1993.
[14] P. Drábek, G. Holubová: *Parciální diferenciální rovnice: úvod do klasické teorie*, Západočeská univerzita, Plzeň, 2001.
[15] J. Dupuit: *Études théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux dans les canaux découverts et à travers les terrains perméables*, Dunod, Paris, 1863.
[16] P. Forchheimer: *Wasserbewegung durch boden*, Zeit. Ver. Deutsch. Ing. **45** (1901), 1736–1741 a 1781–1788.
[17] A. Friedman: *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1964.
[18] M. Harr: *Groundwater and Seepage* Dover Civil and Mechanical Engineering Series, Dover, 1991.
[19] A. V. Ivanov: *Regularity for doubly nonlinear parabolic equations*, Zap. Nauchn. Sem., S.-Peterburg, Otdel. Mat. Inst. Steklov (POMI) **209**, Voprosy Kvant. Teor. Polya i Statist. Fiz. **12** (1994), 37–59, 261. Přetištěno v J. Math. Sci. **83** (1997), No. 1, 22–37.
[20] S. V. Izbash: *O filtracii v krupnozernistom materiale*, Izv. Nauchno-Issled. Inst. Gidro-Tekh. (N.I.LG.), Leningrad 1, 1931, rusky.
[21] J. Jandora, V. Stará, M. Starý: *Hydraulika a hydrologie*, 2. vydání, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno, 2011.
[22] F. King: *Principles and conditions of the movements of ground water*, In Nineteenth Annual Report of the United States Geological Survey to the Secretary of the Interior 1897 - 1898, pt. 2 (1899), 59–294.
[23] M. Marino: *Rise and decline of the water table induced by vertical recharge*, Journal of Hydrology **23** (1974), No. 3–4, 289–298.
[24] A. A. Missbach: *Filtrovatelnost čeřených a saturovaných šťáv. IV. Přezkoušení vzorce van Gilse, van Ginnekena a Watermana se šťávou I. saturace*, Listy cukrov. **54** (1936), No. 39, 361–368.
[25] A. A. Missbach: *Filtrovatelnost čeřených a saturovaných šťáv. V. Vliv tlaku*, Listy cukrov. **55** (1937), No. 18, 169–172.
[26] A. A. Missbach: *Filtrovatelnost čeřených a saturovaných šťáv. VI. Určování propustnosti hotového koláče kalového*, Listy cukrov. **55** (1937), No. 33, 176–180.
[27] A. A. Missbach: *Filtrovatelnost čeřených a saturovaných šťáv. VII. Průtok vrstvou kuliček*, Listy cukrov. **55** (1937), No. 33, 293–299.
[28] N. N. Pavlovskii: *The theory of movement of ground water under hydraulic structures and its main applications*, Scientific Amelioration Institute, St. Petersburg, Lecture notes, 1922, rusky.
[29] J. Říha, L. Petrula, M. Hala, Z. Alhasan: *Assessment of empirical formulae for determining the hydraulic conductivity of glass beads*, Journal of Hydrology and Hydromechanics **66** (2018), No. 3, 337–347.
[30] H. Rouse: *Highlights in the history of hydraulics*, Books at Iowa **38** (1983), 3–17.
[31] R. Singh, S. Rai: *On subsurface drainage of transient recharge*, Journal of Hydrology **48** (1980), No. 3–4, 303–311.
[32] R. Singh, S. Rai: *A solution of the nonlinear Bboussinesq equation for phreatic flow using an integral balance approach*, Journal of Hydrology **109** (1989), No. 3–4, 319–323.
[33] O. Smreker: *Entwicklung eines Gesetzes für den Widerstand bei der Bewegung des Grundwassers*, Zeitschr. des Vereines deutscher Ing. **22** (1878), No. 4, No. 5, 117–128, 193–204.
[34] J. P. Soni, N. Islam, P. Basak: *An experimental evaluation of non-Darcian flow in porous media*, J. Hydrol. **38** (1978), 231–241.

[35] A. Thiem: *Resultate des Versuchsbrunnens für die Wasserversorgung der Stadt Strassburg*, Journ. Für Gasbeleuchtung und Wasserversorgung **19** (1876), 1736–1741, 1781–1788.
[36] J. Valentová: *Hydraulika podzemní vody*, 4. přepracované vydání, České vysoké učení technické v Praze, Praha, 2018.
[37] J. L. Vázquez: *A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations*, Appl. Math. Optim. **12** (1984), No. 3, 191–202.

Jiří Benedikt, Katedra matematiky a NTIS, Fakulta aplikovaných věd, Západočeská univerzita v Plzni, Univerzitní 8, 30100 Plzeň,
e-mail: `benedikt@kma.zcu.cz`

Petr Girg, Katedra matematiky a NTIS, Fakulta aplikovaných věd, Západočeská univerzita v Plzni, Univerzitní 8, 30100 Plzeň,
e-mail: `pgirg@kma.zcu.cz`

Lukáš Kotrla, Katedra matematiky a NTIS, Fakulta aplikovaných věd, Západočeská univerzita v Plzni, Univerzitní 8, 30100 Plzeň,
e-mail: `kotrla@ntis.zcu.cz`

GEOMETRICKÉ ALGEBRY PRO EUKLEIDOVSKOU GEOMETRII

ALEŠ NÁVRAT

ABSTRAKT. Na eukleidovskou geometrii se lze dívat jako na Kleinovu geometrii určenou Lieovou grupou eukleidovských transformací, a tu lze vidět jako podgrupu ortogonální grupy. Tento pohled pak umožňuje reprezentovat eukleidovské transformace, a tím i body Eukleidova prostoru, pomocí prvků příslušné Cliffordovy algebry. Díky grassmannovské struktuře Cliffordovy algebry v ní lze navíc reprezentovat geometrické objekty odpovídající podprostorům generujícího vektorového prostoru. Další výhodou této reprezentace oproti klasické maticové reprezentaci je snadné vyjádření ortogonálních projekcí.

1. Úvod

Geometrickou algebrou se v tom nejobecnějším smyslu rozumí algebraická reprezentace geometrických konceptů. Jedním z nejstarších příkladů jsou Grassmannova algebra a Hamiltonova algebra kvaternionů, které byly později Cliffordem sjednoceny do jedné geometrické algebry. V dnešní době se geometrickou algebrou většinou rozumí právě nějaká Cliffordova algebra. Její vztah ke geometrii je nejlépe vidět na dobře známých příkladech z nízkých dimenzí, konkrétně na tělesech komplexních čísel $\mathbb{C}$ a kvaternionů $\mathbb{H}$, která lze obě považovat za podalgebry Cliffordovy algebry. Pokud ztotožníme rovinu $\mathbb{R}^2$ s komplexní rovinou $\mathbb{C}$, pak jsou rotace v rovině dány násobením jednotkovým komplexním číslem. Rotace v prostoru $\mathbb{R}^3$ lze reprezentovat následujícím způsobem pomocí jednotkového kvaternionu. Každému vektoru $v = (v^1, v^2, v^3) \in \mathbb{R}^3$ nejprve přiřadíme ryze imaginární kvaternion

$$\mathbf{v} = v^1\mathbf{i} + v^2\mathbf{j} + v^3\mathbf{k}. \tag{1.1}$$

Připomeňme, že $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$ jsou tři komplexní jednotky, které navíc splňují $\mathbf{k} = \mathbf{ij} = -\mathbf{ji}$. Rotace v prostoru o úhel φ podle osy určené jednotkovým vektorem n reprezentovaným kvaternionem $\mathbf{n}$ ve smyslu (1.1) je pak dána předpisem

$$\mathbf{v} \mapsto \mathbf{R}\mathbf{v}\mathbf{R}^{-1},$$

kde $\mathbf{R}$ je jednotkový kvaternion

$$\mathbf{R} = \cos\frac{\varphi}{2} + \mathbf{n}\sin\frac{\varphi}{2}. \tag{1.2}$$

2010 *MSC.* Primární 15A66; Sekundární 51N25.
Klíčová slova. Cliffordova algebra, geometrická algebra, euleidovská geometrie.
Autor byl podpořen grantem č. FSI-S-20-6187.

Skládání rotací odpovídá násobení příslušných kvaternionů, což je mnohem jednodušší oproti známější reprezentaci rotací pomocí Eulerových úhlů. Další výhody jsou například eliminace efektu známého jako gimbal lock nebo jednodušší a efektivnější softwarová implementace vedoucí ke snížení časové složitosti algoritmů.

V tomto článku je popsáno, jak lze kvaternionovou reprezentaci rotací v prostoru zobecnit na reprezentaci všech eukleidovských transformací v obecné dimenzi, tj. rotací, translací a reflexí. Navíc dostaneme i reprezentaci ortogonálních projekcí a některých geometrických objektů. Přehled těchto reprezentací v geometrických algebrách používaných pro popis eukleidovské geometrie je v kapitole 6. Pro každou geometrickou algebru jsou hlavní výsledky shrnuty, viz věty 6.1, 6.5, 6.8, a demonstrovány vždy na příkladu třírozměrného prostoru. Zkušenému čtenáři je doporučeno začít rovnou touto kapitolou. Předchozí kapitoly shrnují vše potřebné pro dobré pochopení kapitoly 6. Algebraická příprava probíhá v kapitolách 2–4, kde jsou představeny bilineární formy a ortogonální grupa, Grassmannova algebra a Plückerovo vložení, Cliffordova algebra a reprezentace ortogonální grupy na Cliffordově algebře. Zde je čerpáno především z [1] a částečně také z [9, 8, 10]. V kapitole 5 je krátce popsána eukleidovská a konformní geometrie z Kleinova pohledu. Pro detailní popis Kleinových geometrií a jejich „zakřivených“ analogií viz [2, 3].

2. Grupa ortogonálních transformací

2.1. Symetrická bilineární forma

Připomeňme, že *symetrická bilineární forma* na konečně dimenzionálním vektorovém prostoru V je zobrazení $B : V \times V \to \mathbb{R}$, které je v obou argumentech lineární a které je symetrické, tj. $B(u, v) = B(v, u)$ pro všechna $u, v \in V$. Podprostor tvořený vektory $v \in V$, pro které je $B(v, w) = 0$ pro všechny $w \in V$ se nazývá *jádro* B. Bilineární forma B se nazývá *nedegenerovaná*, pokud je její jádro triviální. Právě v takovém případě definuje B izomorfismus

$$V \to V^*,\ v \mapsto B(v, \cdot), \tag{2.1}$$

kde V^* je prostor lineárních forem na V. Podle Sylvesterova zákonu o setrvačnosti lze každá symetrická forma diagonalizovat. Konkrétně v každém reálném vektorovém prostoru s nedegenerovanou bilineární formou dimenze n nalezneme tzv. *kanonickou bázi* $e_1, \dots, e_n$, pro kterou platí $B(e_i, e_i) = 1$ pro prvních p bázových vektorů a $B(e_i, e_i) = -1$ pro zbylých q bázových vektorů. Dvojice (p, q) se nazývá *signatura* bilineární formy B. Vektorový prostor $\mathbb{R}^{p+q}$ spolu s bilineární formou signatury (p, q) budeme značit $\mathbb{R}^{p,q}$. Pokud budeme uvažovat i degenerované symetrické bilineární formy, pak kanonickou bázi rozšíříme o nějakou bázi jádra a signaturou pak budeme rozumět trojici (p, q, r), kde r je dimenze jádra, a vektorový prostor s touto formou budeme značit $\mathbb{R}^{p,q,r}$.

Vektor $v \in V$ se nazývá *izotropní*, pokud $B(v, v) = 0$, a v opačném případě se nazývá *neizotropní*. *Anizotropní podprostor* je maximální podprostor V, který neobsahuje žádný izotropní vektor. Vektorový prostor obsahující naopak samé izotropní vektory se nazývá *izotropní podprostor.* Maximální izotropní podprostor pro $\mathbb{R}^{p,q}$ má dimenzi rovnu $d = \min(p,q)$. Navíc v něm existuje význačná báze, která je tvořena vektory $e_1, \dots, e_d, f_1, \dots, f_d$, které splňují $B(e_i, f_j) = \delta_{ij}$ a $B(e_i, e_j) = B(f_i, f_j) = 0$, a která se nazývá *Wittova báze.* Pokud tuto bázi rozšíříme kanonickou bází anizotropního prostoru na celé $\mathbb{R}^{p,q}$, bude v ní mít bilineární forma matici

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_d \\ 0 & 1_{|p-q|} & 0 \\ 1_d & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

2.2. Ortogonální grupa a algebra

Invertibilní transformace prostoru (V, B), které zachovávají danou symetrickou bilineární formu se nazývají *ortogonální transformace.* Tyto transformace tvoří *ortogonální grupu*, kterou značíme $O(V)$, tj.

$$O(V) = \{A \in \mathrm{GL}(V) |\ B(Au, Av) = B(u, v) \text{ pro všechny } u, v \in V\}. \tag{2.3}$$

Grupa ortogonálních transformací je Lieova grupa, tj. je to zároveň hladká varieta a grupové násobení je hladké zobrazení. Lokální struktura grupy $O(V)$ je tedy dána strukturou příslušné Lieovy algebry, tj. strukturou tečného prostoru v identitě. Derivací (2.3) dostáváme *ortogonální Lieovu algebru*

$$\mathfrak{o}(V) = \{A \in \mathrm{End}(V) |\ B(Au, v) + B(u, Av) = 0 \text{ pro všechny } u, v \in V\},$$

kde závorka je dána komutátorem. Připomeňme, že lokálně je Lieova algebra difeomorfní Lieově grupě a difeomorfismus je dán exponenciálním zobrazením. To lze definovat různými způsoby, například pomocí křivky v $O(V)$, která je řešením počátečního problému

$$\dot{g} = A \circ g,\ g(0) = \mathrm{id}, \tag{2.4}$$

kde $g(t) \in O(V)$. *Exponenciální zobrazení* $\exp : \mathfrak{o}(V) \to O(V)$ je pak řešením v čase 1, tj. $\exp(A) = g(1)$. Pokud bereme v úvahu i čas, pak píšeme $g(t) = \exp(At)$. Postupným integrováním rovnice (2.4) pak dostaneme známou řadu pro exponenciální zobrazení

$$\exp(At) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k.$$

Grupa ortogonálních transformací prostoru $\mathbb{R}^{p,q}$ se značí zjednodušeně $O(p,q)$ a její podgrupa daná maticemi s jednotkovým determinantem, tj. zachovávající orientaci, se značí $SO(p,q)$. Příslušná Lieova algebra se značí $\mathfrak{so}(p,q)$.

3. Grassmannova algebra

Připomeňme, že Grassmannova algebra je definována *vnějším součinem* $\wedge$, který je lineární vůči násobení skalárem, je distributivní vzhledem ke sčítání vektorů, je asociativní a splňuje

$$v \wedge v = 0. \tag{3.1}$$

Dosazením $u + v$ za v do této rovnice vidíme, že (3.1) je ekvivalentní rovnici $u \wedge v + v \wedge u = 0$, tj. vnější součin je antikomutativní. Vlastnost (3.1) můžeme zobecnit na vnější součin k vektorů. Platí $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = 0$ právě tehdy, když vektory $v_1, \ldots, v_k$ jsou lineárně závislé. Pro lineárně nezávislé vektory se prvky $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ nazývají *k–blady*. Jejich lineární kombinace tvoří vektorový prostor $\Lambda^k V$ Grassmannových prvků *stupně k*. Tyto prvky se nazývají *k–vektory*. Pokud za 0–blady budeme považovat skaláry, pak lineární kombinace k–bladů, kde $k \in \mathbb{Z}$, tvoří asociativní algebru s jednotkou 1, která se nazývá *Grassmannova algebra* ΛV (nebo také *vnější algebra*) a její prvky se nazývají *multivektory*. Prvek nejvyššího stupně, tj. jedno dimenzionálního prostoru $\Lambda^n V$, se nazývá *pseudoskalár*.

3.1. Dualita v Grassmannově algebře

Pomocí duálního prostoru V^* lze na Grassmannově algebře definovat součin, který na rozdíl od vnějšího součinu snižuje stupeň k–vektorů. Pro $\alpha \in V^*$ je *levá kontrakce* lineární zobrazení, které je na bázových k–bladech definováno předpisem

$$\alpha \lrcorner (v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \alpha(v_i)\, v_1 \wedge \cdots \hat{v}_i \cdots \wedge v_k. \tag{3.2}$$

Pomocí rekurzivního vztahu $(\alpha \wedge \beta)\lrcorner = \alpha \lrcorner \circ \beta \lrcorner$ pak dostáváme kontrakci libovolným prvkem Grassmannovy algebry $\boldsymbol{\alpha} \in \Lambda(V^*) \cong (\Lambda V)^*$. Zejména při zafixování nějakého pseudoskaláru $\mathbf{I} \in \Lambda^n V$ definuje jeho kontrakce prvkem $\boldsymbol{\alpha} \in \Lambda^k V^*$ dualitu

$$\Lambda^k V^* \to \Lambda^{n-k} V,\ \boldsymbol{\alpha} \mapsto \boldsymbol{\alpha}^* = \boldsymbol{\alpha} \lrcorner \mathbf{I} \tag{3.3}$$

mezi Grassmannovými algebrami generovanými vektorovým prostorem V a jeho duálním prostorem V^*. Pokud vyměníme roli prostorů V a V^*, dostaneme analogicky levou kontrakci formy vektorem $\mathbf{v} \lrcorner \boldsymbol{\alpha}$ a dualitu $\mathbf{v}^* = \mathbf{v} \lrcorner \mathbf{I}^*$, kde $\mathbf{I}^*$ je pseudoskalár na ΛV^*. Z definice levé kontrakce přitom lze jednoduše odvodit rovnici $\mathbf{v} \wedge (\mathbf{v}^* \lrcorner \mathbf{I}) = 0$, a proto je $\mathbf{v}^{**}$ rovno $\mathbf{v}$ až na násobek nenulovým skalárem, který závisí na volbě pseudoskalárů $\mathbf{I}$ a $\mathbf{I}^*$. Z definice levé kontrakce lze také přímo odvodit rovnici pro duální prvek k vnějšímu součinu dvou multivektorů

$$(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})^* = \mathbf{u} \lrcorner \mathbf{v}^*. \tag{3.4}$$

V případě, že máme k dispozici nedegenerovanou bilineární formu B, pak je vektorový prostor V identifikovaný s jeho duálem V^* pomocí (2.1) a tím pádem můžeme kontrakci považovat za nový součin na Grassmannově algebře. Konkrétně předpis pro kontrakci vektorem $u \in V$ dostaneme z předpisu (3.2) tak, že výraz $\alpha(v_i)$ nahradíme výrazem $B(u, v_i)$ a kontrakci vektorem opět rozšíříme na kontrakci bladem rekurzivně pomocí $(u \wedge v)\lrcorner = u \lrcorner \circ v \lrcorner$. Dualita (3.3) je pak unární operace na Grassmannově algebře $\Lambda^k V \to \Lambda^{n-k} V$.

3.2. Reprezentace podprostorů

Podprostory vektorového prostoru V jsou v Grassmannově algebře reprezentovány pomocí *Plückerova vložení* následujícím způsobem. Pro podprostor W dimenze k vyberme jeho bázi $w_1, \ldots, w_k$ a zformujme vnější součin $\mathbf{w} = w_1 \wedge \cdots \wedge w_k$. Pokud vybereme jinou bázi dostaneme stejný k–blade až na násobek determinantem matice přechodu mezi těmito bázemi, a proto je projektivní třída $[\mathbf{w}] = [w_1 \wedge \cdots \wedge w_k]$

na volbě báze nezávislá. Přiřazení $W \mapsto [\mathbf{w}]$ tak definuje zobrazení $\iota : W \to \mathbb{P}(\Lambda^k V)$, které se nazývá Plückerovo vložení. Injektivita tohoto zobrazení plyne z toho, že pro $v \in V$ platí

$$v \wedge \mathbf{w} = 0 \text{ právě tehdy, když } v \in W. \tag{3.5}$$

V tomto smyslu můžeme podprostor W jednoznačně reprezentovat projektivní třídou k–bladů $\mathbf{w} \in \Lambda^k V$. Z vlastností vnějšího součinu dále plyne, že pokud $[\mathbf{w}_1], [\mathbf{w}_2]$ reprezentují disjunktní podprostory W_1 a W_2, pak $[\mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{w}_2]$ v tomto smyslu reprezentuje přímý součet podprostorů $W_1 \oplus W_2$. Navíc platí, že tyto podprostory mají neprázdný průnik právě tehdy, když $\mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{w}_2 = 0$. Pomocí vnějšího součinu tedy takto konstruujeme součty podprostorů.

3.3. Duální reprezentace

Vektorový podprostor $W \subset V$ můžeme také reprezentovat jeho anihilátorem $W^\perp \subset V^*$. Ten je z definice prostorem forem, které se nulují na W a má dimenzi $n-k$. Zejména je podprostorem v duálním prostoru V^*, a proto lze pomocí Plückerova vložení reprezentovat ve smyslu (3.5) projektivní třídou bladu stupně $n-k$ duální Grassmannovy algebry ΛV^*. Není těžké z vlastností vnějšího součinu a levé kontrakce dokázat, že tato třída je $[\mathbf{w}^*] = [\mathbf{w} \lrcorner \mathbf{I}^*]$, to znamená, že je duální k třídě reprezentující W ve smyslu (3.3). Podprostor $W \subset V$ má tedy kromě reprezentace $\mathbf{w}$ ve smyslu (3.5) i duální reprezentaci $\mathbf{w}^*$ na duální Grassmannově algebře. Protože z (3.4) plyne $v \wedge \mathbf{w} = 0$ právě tehdy, když $v \lrcorner \mathbf{w}^* = 0$, tak duální reprezentaci lze popsat takto:

$$v \lrcorner \mathbf{w}^* = 0 \text{ právě tehdy, když } v \in W. \tag{3.6}$$

Vnější součin na duální algebře reprezentuje přímý součet anihilátorů. Konkrétně, pokud je blade $\mathbf{w}_1^* \wedge \mathbf{w}_2^*$ nenulový, pak reprezentuje podprostor $W_1^\perp \oplus W_2^\perp = (W_1 \cap W_2)^\perp$. Nulový je právě tehdy, když platí $W_1^\perp \cap W_2^\perp = (W_1 + W_2)^\perp = \emptyset$, a to nastane právě, když $W_1 + W_2 \neq V$. Pokud ale budeme brát anihilátor jen vůči sjednocení podprostorů $W_1 \cup W_2$ a ne celému V, tak toto nenastane a projektivní třída $[\mathbf{w}_1^* \wedge \mathbf{w}_2^*]$ reprezentuje vždy průnik podprostorů W_1 a W_2 ve smyslu duální reprezentace (3.6). Na duální Grassmannovu algebru lze nahlížet i tak, že její vnější součin definuje na Grassmannově algebře pomocí duality (3.3) nový součin, kterým počítáme průniky podprostorů

$$\mathbf{w}_1 \vee \mathbf{w}_2 := (\mathbf{w}_1^* \wedge \mathbf{w}_2^*)^*.$$

V případě existence negenerované bilineární formy lze pomocí (2.1) ztotožnit vektorové prostory V a V^* i příslušné Grassmannovy algebry. V tomto ztotožnění je anihilátor $W^\perp$ roven ortogonálnímu komplementu podprostoru W a duální reprezentace $\mathbf{w}^*$ lze považovat za prvek stejné Grassmannovy algebry jako $\mathbf{w}$.

4. Cliffordova algebra

Na rozdíl od Grassmannovy algebry, která je určena pouze vektorovým prostorem V, nyní od začátku vezmeme v úvahu i bilineární formu B a zkonstruujeme pomocí ní nový součin na ΛV, který nebudeme značit žádným symbolem, jen zřetězením.

Stejně jako u vnějšího součinu budeme požadovat distributivitu a asociativitu, ale místo (3.1) budeme požadovat

$$v^2 = B(v, v). \tag{4.1}$$

Tento součin se nazývá *geometrický součin*, nebo také *Cliffordův součin.* Na rozdíl od vnějšího součinu není obecně antikomutativní, ale dosazením $u + v$ za v do předchozí rovnice dostaneme $uv+vu = 2B(u, v)$. Množina všech lineárních kombinací geometrických součinů k vektorů, kde $k \in \mathbb{N}$, spolu s geometrickým součinem pak definují *Cliffordovu algebru* $\mathrm{Cl}(V)$. Pro počítání je dobré si uvést i definici pomocí báze. Pokud (p, q) je signatura nedegenerované bilineární formy B a $e_1, \dots, e_n$ je kanonická báze vektorového prostoru $V = \mathbb{R}^{p,q}$, pak se Cliffordova algebra značí $\mathrm{Cl}(p, q)$ a lze ekvivalentně definovat jako asociativní algebra, ve které platí

$$e_i^2 = 1,\ 1 \le i \le p, \quad e_i^2 = -1,\ p < i \le n, \quad e_ie_j = -e_je_i,\ i \ne j.$$

Pokud má bilineární forma B netriviální jádro dimenze r, pak přibude ještě r vektorů, které jsou izotropní, $e_i^2 = 0$, a Cliffordova algebra se v tomto případě značí $\mathrm{Cl}(p, q, r)$. Analogicky k terminologii v 2.1 budeme nazývat prvek $\mathbf{v} \in \mathrm{Cl}(V)$ *izotropní,* jestliže $\mathbf{v}^2 = 0$, a *neizotropní* v opačném případě.

4.1. Grassmannova algebra v Cliffordově algebře

Vnější součin vektorů $u, v \in V$ je v Cliffordově algebře dán pomocí komutátoru $u \wedge v = \frac{1}{2}(uv - vu)$. Můžeme tedy naopak vyjádřit geometrický součin pomocí vnějšího součinu a bilineární formy vztahem $uv = u\wedge v + B(u, v)$. Podobně je dán geometrický součin vektoru u a bladu $\mathbf{v}$ pomocí vnějšího součinu a levé kontrakce

$$u\mathbf{v} = u \wedge \mathbf{v} + u \lrcorner \mathbf{v}. \tag{4.2}$$

Geometrický součin libovolného počtu k vektorů lze opakovaným použitím rovnice (4.2) převést na lineární kombinaci bladů stupně $\le k$, přesněji řečeno se v této lineární kombinaci mohou vyskytovat jen blady stupně $k, k-2$, atd. Tím dostáváme zobrazení z Cliffordovy do Grassmannovy algebry o kterém se jednoduše ukáže, že je to izomorfismus filtrovaných vektorových prostorů, [1]. Inverzní zobrazení se pak nazývá *kvantové zobrazení* a pomocí něj můžeme vidět strukturu Grassmannovy algebry v Cliffordově algebře. Zejména vnějším součin lze vidět jako část geometrického součinu nejvyššího stupně a levou kontrakci jako část nejnižšího stupně, tj. pro blady $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ stupně k, ℓ platí

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \langle \mathbf{uv} \rangle_{k+\ell},\ \mathbf{u} \lrcorner \mathbf{v} = \langle \mathbf{uv} \rangle_{\ell-k}, \tag{4.3}$$

kde $\langle\rangle_k$ je projekce na blade stupně k. V aplikacích se pak většinou místo levé kontrakce používá její symetrická verze, která je na bladech definovaná

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \langle \mathbf{uv} \rangle_{|\ell-k|}.$$

Díky kvantovému zobrazení také vidíme, že Cliffordova algebra má dimenzi 2^n a jako její bázi můžeme zvolit bázi Grassmannovy algebry. Dualitu na Grassmannově algebře (3.3) pak lze v případě nedegenerované bilineární formy považovat za unární operaci na Cliffordově algebře. Vzhledem k tomu, že pseudoskalár má nejvyšší možný stupeň, je duální prvek k multivektoru $\mathbf{u}$ podle (4.3) roven

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u} \lrcorner \mathbf{I} = \mathbf{uI}. \tag{4.4}$$

4.2. Reprezentace ortogonálních transformací

Invertibilní prvky Cliffordovy algebry tvoří spolu s geometrickým součinem grupu, která se nazývá *Cliffordova grupa.* Těmito prvky chceme reprezentovat transformace vektorového prostoru $V \subset \mathrm{Cl}(V)$ a to můžeme až na násobek udělat jediným způsobem, [1], a to

$$v \mapsto \mathbf{g}v\mathbf{g}^{-1} \in V, \tag{4.5}$$

kde $\mathbf{g} \in \mathrm{Cl}(V)$ je invertibilní a $v \in V$. Pomocí základních vlastností geometrického součinu se jednoduše odvodí, že tato transformace je ortogonální. Naopak podle Cartan-Dieudonného věty je každý prvek ortogonální grupy dán složením jednoduchých reflexí a pro reflexi vektoru u podle vektoru v snadno spočítáme

$$R_v(u) = u - 2\frac{B(u,v)}{B(v,v)}v = u - \frac{uv^2 + vuv}{v^2} = -\frac{vuv}{v^2} = -vuv^{-1}. \tag{4.6}$$

Zde jsme využili rovnici (4.1), z ní plynoucí $B(u,v) = \frac{1}{2}(uv+vu)$ a $v^{-1} = v/B(v,v)$ a fakt, že geometrický součin vektoru a skaláru je obvyklé násobení skalárem. Složení dvou reflexí $R_{v_1} \circ R_{v_2}$ zřejmě odpovídá zobrazení (4.5), kde $\mathbf{g} = v_1v_2$. Obecně pak můžeme říci, že každý prvek ortogonální grupy $\mathrm{SO}(V)$ je v Cliffordově algebře reprezentovaný zobrazením (4.5), kde invertibilní prvek $\mathbf{g}$, tzv. *versor*, je daný sudým počtem neizotropních vektorů. Prvky grupy $\mathrm{O}(V)$, které nejsou v $\mathrm{SO}(V)$, například reflexe, jsou reprezentovány součinem lichého počtu neizotropních vektorů a jejich akce je dána předpisem (4.5) se znaménkem mínus.

4.3. Lieova algebra bivektorů

Reprezentace grupy $\mathrm{SO}(V)$ v Cliffordově algebře definuje i reprezentaci příslušné Lieovy algebry $\mathfrak{so}(V)$, která je z definice generována prvky $\dot{g}(0)$, kde $g = g(t)$ je křivka vedoucí z identity v grupě $\mathrm{SO}(V)$. Tato křivka odpovídá v Cliffordově algebře křivce versorů $\mathbf{g}(t)$, které splňují $\mathbf{g}(0) = 1$, a které na vektorovém prostoru V působí pomocí (4.5). Zderivováním tohoto předpisu a s využitím linearity geometrického součinu zjistíme, že antisymetrické zobrazení $A = \dot{g}(0) \in \mathfrak{so}(V)$ je na $v \in V$ dáno jednoduše komutátorem v Cliffordově algebře

$$v \mapsto \mathbf{A}v - v\mathbf{A}, \tag{4.7}$$

kde $\mathbf{A} = \dot{\mathbf{g}}(0) \in \Lambda^2 V$ má vždy stupeň dva, tj. je to tak zvaný *bivektor,* viz [1]. Toto tvrzení není na první poled vidět, ale jednoduše se dokáže pomocí základních vlastností geometrického součinu. Skutečně, bivektory mají tu vlastnost, že jejich komutátor vzhledem ke geometrickému součinu je opět bivektor. Bivektory tak tvoří Lieovu algebru $\Lambda^2 V$ a předpis (4.7) definuje surjektivní homomorfismus Lieových algeber $\Lambda^2 V \to \mathfrak{so}(V)$. Pokud je bilineární forma B nedegenerovaná, tak dimenze těchto prostorů jsou stejné a tento homomorfismus je dokonce izomorfismus Lieových algeber

$$\Lambda^2 V \cong \mathfrak{so}(V). \tag{4.8}$$

V případě degenerované bilineární formy je algebra bivektorů větší než $\mathfrak{so}(V)$. Je dobré cvičení si promyslet, jak přesně vypadá algebra bivektorů pro obecnou signaturu (p, q, r).

4.4. Exponenciální zobrazení

Každý bivektor $\mathbf{A}$ zadává v Cliffordově algebře počáteční problém $\dot{\mathbf{g}} = \mathbf{A}\mathbf{g}$, $\mathbf{g}(0) = 1$, a tím určuje i křivku versorů $\mathbf{g}(t)$, která je jeho řešením. Dostáváme tak Cliffordovské exponenciální zobrazení, které zobrazuje Lieovu algebru bivektorů na souvislou Lieovu grupu versorů. Postupným integrováním dostaneme pro toto zobrazení klasický výraz pomocí nekonečné řady, kde jsou ovšem mocniny počítány geometrickým součinem

$$\exp(\mathbf{A}t) := \mathbf{g}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbf{A}^k. \tag{4.9}$$

V případě nedegenerované bilineární formy je výsledná grupa podle (4.8) izomorfní grupě $\mathrm{SO}(V)$. Připomeňme, že grupa versorů působí na vektorovém prostoru V transformacemi (4.5). Ty mají v případě versoru generovaného bivektorem $\mathbf{A}$ tvar

$$v \to \exp(\mathbf{A}t) v \exp(-\mathbf{A}t). \tag{4.10}$$

4.5. Ortogonální projekce

Klasický výraz pro ortogonální projekci vektoru $u \in V$ na jednorozměrný podprostor daný vektorem $v \in V$ lze v Cliffordově algebře generované bilineární formou B vyjádřit následovně

$$P_v(u) = \frac{B(u, v)}{B(v, v)} v = B(u, v^{-1}) v. \tag{4.11}$$

Opravdu, toto zobrazení je lineární, idempotentní, tj. $P_v \circ P_v = P_v$, a je ortogonální vůči bilineární formě B, tj. splňuje $B(P_v(u), w) = B(u, P_v(w))$. Předchozí výraz umožňuje jednoduché zobecnění na prvky Grassmannovy algebry. Konkrétně projekcí bladu $\mathbf{u}$ na blade $\mathbf{v}$ budeme nazývat zobrazení

$$P_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = (\mathbf{u} \,\lrcorner\, \mathbf{v}^{-1}) \,\lrcorner\, \mathbf{v}. \tag{4.12}$$

Toto zobrazení skutečně splňuje podmínku idempotence a je ortogonální vůči rozšíření bilineární formy B na blady, viz [4]. Protože každý blade splňuje $\mathbf{v}^2 \in \mathbb{R}$, tak inverze bladu $\mathbf{v}^{-1}$ existuje právě tehdy, pokud je daný blade neizotropní, a navíc se pak od něj liší jen nenulovým násobkem. Projektivní třída projekce (4.12) je tedy stejná jako projektivní třída bladu $(\mathbf{u} \,\lrcorner\, \mathbf{v}) \,\lrcorner\, \mathbf{v}$. Pokud předpokládáme, že $\mathbf{u}$ má menší stupeň než $\mathbf{v}$, pak levou kontrakci můžeme nahradit její symetrickou verzí a projektivní třída projekce (4.12) splňuje

$$[P_{\mathbf{v}}(\mathbf{u})] = [(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}] = [(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}^*) \vee \mathbf{v}], \tag{4.13}$$

kde poslední rovnost plyne z duality mezi levou kontrakcí a vnějším součinem dané rovnicí (3.4). Z posledního výrazu je okamžitě vidět, že projekce (4.12) reprezentuje ve smyslu (3.5) ortogonální projekci podprostorů. Skutečně, $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}^*$ reprezentuje podprostor obsahující podprostor $\mathbf{u}$ a kolmý k podprostoru $\mathbf{v}$. Ortogonální projekce je pak právě průnik $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}^*$ a $\mathbf{v}$.

5. Kleinova geometrie

Kleinova geometrie je dvojice (G, H), kde G je Lieova grupa a H je její uzavřená podgrupa taková, že prostor levých tříd G/H je souvislý. Grupa G se nazývá hlavní grupou geometrie, rozklad G/H se nazývá homogenním prostorem Kleinovy geometrie, nebo jednoduše Kleinovou geometrií, a varieta $M \cong G/H$ se nazývá jejím *modelem*. Kromě eukleidovské a konformní geometrie, viz níže, jsou příkladem Kleinových geometrií například: sférická geometrie $S^n = \mathrm{O}(n+1)/\mathrm{O}(n)$, hyperbolická geometrie $\mathrm{O}(n+1)/\mathrm{O}(n)$, projektivní geometrie $\mathbb{R}P^n = SL(n+1)/P$, kde P je stabilizátor nějaké přímky v $\mathbb{R}^{n+1}$ procházející počátkem.

5.1. Eukleidovská geometrie

Místo pěti Eukleidových axiomů se lze dívat na eukleidovskou geometrii jako na Kleinovu geometrii $E^n = \mathrm{E}(n)/\mathrm{O}(n)$. Hlavní grupa $G = \mathrm{E}(n)$ je grupa eukleidovských transformací v n–dimenzionálním prostoru. Ta je dána polopřímým součinem ortogonální grupy $\mathrm{O}(n)$ a vektorové grupy $\mathbb{R}^n$, tj. každý prvek grupy je dán složením nějaké rotace s translací. Eukleidovskou geometrii lze také vidět jako $E^n = \mathrm{SE}(n)/\mathrm{SO}(n)$, pokud budeme uvažovat pouze transformace zachovávající orientaci. Standardní prezentaci Eukleidovy grupy dostaneme, pokud E^n chápeme jako afinní nadrovinu $\{x_1 = 1\}$ v prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$. Pak lze grupu $\mathrm{E}(n)$ vidět jako grupu všech lineárních automorfismů $\mathbb{R}^{n+1}$, které zachovávají tuto nadrovinu, a které v ní indukují izomerie. Maticová reprezentace této grupy je

$$\mathrm{E}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & A \end{pmatrix} : A \in \mathrm{O}(n),\ x \in \mathbb{R}^n \right\}. \tag{5.1}$$

Stabilizátor $H = \mathrm{O}(n)$ prvního vektoru ve standardní bázi $\mathbb{R}^{n+1}$ je pak reprezentován prvky (5.1), pro které je $x = 0$. Bod $x \in E^n$ je tedy v maticovém popisu reprezentován třídou matic (5.1) určenou vektorem $x \in \mathbb{R}^n$ a v modelu odpovídá vektoru $(1, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Ekvivalentně lze E^n modelovat v projektivním prostoru $\mathbb{RP}^n$, ve kterém bod $x \in E^n$ odpovídá projektivnímu bodu s homogenními souřadnicemi $[1 : x]$. Tato chápání eukleidovského bodu budeme střídat podle potřeby a budeme psát prostě $x \in E^n$. Lokální struktura Eukleidovy geometrie je dána Lieovou algebrou grupy eukleidovských transformací, která je v tomto popisu zřejmě tvořena maticemi tvaru

$$\mathfrak{se}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & A \end{pmatrix} : A \in \mathfrak{so}(n), x \in \mathbb{R}^n \right\} = \mathfrak{so}(n) \oplus \mathbb{R}^n.$$

5.2. Konformní geometrie

Konformní geometrii na n–rozměrné sféře lze vidět v Kleinově smyslu následovně. Uvažujeme sféru S^n jako jednotkovou sféru v $\mathbb{R}^{n+1}$, kterou vložíme do prostoru $\mathbb{R}^{n+1,1}$ s bilineární formou B signatury $(n+1,1)$ pomocí zobrazení $x \mapsto (x,1)$. Množina všech izotropních vektorů je n–rozměrný kužel a velmi jednoduše se ukáže, že body na sféře odpovídají právě izotropním přímkám na tomto kuželu. Je známé, že ortogonální grupa i speciální ortogonální grupa působí na izotropním podprostoru tranzitivně, a proto dostáváme na sféře konformní geometrii $S^n = \mathrm{SO}(n+1,1)/P$, kde P je stabilizátor nějaké izotropní přímky. Podgrupa P je tzv. parabolická podgrupa a lze ji popsat jako polopřímý součin konformní grupy $\mathrm{CO}(n)$ a vektorové grupy $\mathbb{R}^n$. Lze ji také popsat pomocí její Lieovy algebry $\mathfrak{p}$ následujícím způsobem. Ve Wittově bázi (2.2) prostoru $\mathbb{R}^{n+1,1}$ je maticová reprezentace Lieovy algebry grupy $\mathrm{SO}(n+1,1)$ dána výrazem

$$\mathfrak{so}(n+1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & z & 0 \\ x & A & -z^T \\ 0 & -x^T & -a \end{pmatrix} : A \in \mathfrak{so}(n), z \in \mathbb{R}^{n*}, x \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R} \right\} \tag{5.2}$$

a stabilizátor izotropní přímky e_1 je dán maticemi s $x = 0$, tj. jeho Lieova algebra je $\mathfrak{p} = \mathfrak{so}(n) \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{n*}$.

5.3. Eukleidovská geometrie v konformní geometrii

Z předchozího popisu konformní geometrie a příslušné Lieovy algebry (5.2) pomocí Wittovy báze je mimo jiné vidět, že existuje injektivní homomorfismus Lieových algeber $\mathfrak{se}(n) \to \mathfrak{so}(n+1,1)$, ve kterém se podalgebra $\mathfrak{so}(n)$ zobrazí do $\mathfrak{p}$. Složení tohoto homomorfismu s exponenciálním zobrazením pak definuje injektivní homomorfismus mezi souvislými komponentami identity příslušných Lieových grup, který se faktorizuje na injektivní zobrazení

$$E^n = \mathrm{SE}(n)/\,\mathrm{SO}(n) \to \mathrm{SO}(n+1,1)/P = S^n, \tag{5.3}$$

které přenáší eukleidovskou strukturu z E^n na konformní sféru $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1,1}$. Toto zobrazení je dobře známé, jedná se o inverzi ke stereografické projekci. V tomto smyslu můžeme vidět eukleidovskou geometrii jako tzv. redukci konformní geometrie k podgrupě $\mathrm{SE}(n)$. Přitom ve výše uvedeném popisu pomocí Wittovy báze je počátek reprezentovaný prvním bázovým vektorem a translace jsou na sféře dány násobením matic

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & -x^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1_n & 0 \\ \frac{1}{2}x^T x & -x^T & 1 \end{pmatrix}.$$

Protože bod $x \in E^n$ v Kleinově popisu geometrie ztotožňujeme právě s translací počátku do tohoto bodu, má zobrazení (5.3) v námi zvolené bázi předpis

$$x \mapsto \Big(1, x, \frac{1}{2}x^T x\Big). \tag{5.4}$$

6. Geometrické algebry pro eukleidovskou geometrii

Geometrickou algebrou se nazývá Cliffordova algebra, ve které se navíc uvažuje i její Grassmannova struktura s operacemi $\wedge, \lrcorner, \cdot, *, \vee$, viz 4.1. Ta umožňuje pomocí Plückerova vložení reprezentovat objekty, které odpovídají podprostorům generujícího vektorového prostoru, viz 3.2 a 3.3. Naopak struktura Cliffordovy algebry umožňuje reprezentovat transformace pomocí versorů, které odpovídají ortogonálním transformacím tohoto vektorového prostoru, viz 4.2, a také reprezentovat ortogonální projekce, viz 4.5. Chápání geometrie v Kleinově smyslu, viz 5, pak umožňuje jednoduše definovat geometrickou algebru pro konkrétní geometrii – Kleinova geometrie G/H je modelovaná v geometrické algebře $\mathrm{Cl}(V)$, pokud existuje model $G/H \cong M \subset \mathrm{Cl}(V)$, kde hlavní grupa G působí na M ortogonálními transformacemi reprezentovanými versory. Konkrétně eukleidovská geometrie je modelovaná v takové $\mathrm{Cl}(V)$, ve které existuje podvarieta, na které působí speciální Eukleidova grupa $\mathrm{SE}(n)$ pomocí versorů tranzitivně se stabilizátorem izomorfním $\mathrm{SO}(n)$. Rozebereme nyní podrobněji, jak je popsána eukleidovská geometrie v geometrických algebrách generovaných vektorovým prostorem s bilineární formou $V = \mathbb{R}^{n,0}$, $V = \mathbb{R}^{n,0,1}$, a $V = \mathbb{R}^{n+1,1}$. Detailní popis těchto geometrických algeber lze nalézt v [10, 4, 9, 5, 6, 8].

6.1. Geometrická algebra $\mathrm{Cl}(n)$

První geometrickou algebrou, která se nabízí pro popis eukleidovského prostoru, je geometrická algebra $\mathrm{Cl}(n)$. Ta je totiž definovaná eukleidovskou bilineární formou B signatury $(n, 0)$, která definuje na $\mathbb{R}^n$ standardní skalární součin respektive eukleidovskou vzdálenost. Nejedná se ovšem o geometrickou algebru pro eukleidovskou geometrii, protože algebra bivektorů je podle (4.8) izomorfní $\mathfrak{so}(n)$, a proto je grupa versorů v $\mathrm{Cl}(n)$ izomorfní pouze ortogonální grupě $\mathrm{SO}(n)$. Také objekty, které můžeme reprezentovat jsou pouze vektorové podprostory $\mathbb{R}^n$. Nicméně tuto algebru lze využít na popis příslušné vektorové algebry a na popis Eukleidova prostoru v počátku. Konkrétně bivektor $u \wedge v$ reprezentuje ve smyslu (3.5) rovinu procházející počátkem se směrovými vektory $u, v \in \mathbb{R}^n$ a zobrazení (4.10), kde $\mathbf{A} = u \wedge v$, reprezentuje rotaci v této rovině. Skutečně, z definice exponenciálního zobrazení (2.4) plyne, že versor $\exp(\mathbf{A}t)$ komutuje se svým generátorem $\mathbf{A}$, a proto rotace tímto versorem nechává $\mathbf{A} = u \wedge v$ invariantní. Pokud chceme vyjádřit rotaci o konkrétní úhel, pak je potřeba následujícím způsobem normovat bivektor, který rotaci generuje.

Věta 6.1. *Rotace v rovině určené vektory $u, v \in \mathbb{R}^n \subset \mathrm{Cl}(n)$ o úhel φ je v geometrické algebře $\mathrm{Cl}(n)$ dána versorem*

$$\mathbf{R} = \exp\left(\frac{1}{2}\varphi\frac{u \wedge v}{\sqrt{-(u \wedge v)^2}}\right) = \cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\frac{u \wedge v}{\sqrt{-(u \wedge v)^2}}. \tag{6.1}$$

Důkaz. Bivektor v exponentu je zřejmě normovaný tak, aby jeho kvadrát byl roven -1, a proto rovnost v (6.1) plyne přímo z definice exponenciálního zobrazení (2.4). Abychom dokázali, že jde skutečně o danou rotaci, vyberme vektory

$\bar{u}, \bar{v}$ reprezentující rovinu tak, že jsou jednotkové a svírají úhel $\varphi/2$. Potom rotaci o dvojnásobný úhel v této rovině můžeme vyjádřit jako složení reflexí (4.6) ve vektoru $\bar{u}$ a ve vektoru $\bar{v}$, takže je reprezentována versorem

$$\mathbf{R} = \bar{v}\bar{u} = \bar{v} \cdot \bar{u} + \bar{v} \wedge \bar{u} = \cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\frac{\bar{u} \wedge \bar{v}}{\sqrt{-(\bar{u} \wedge \bar{v})^2}},$$

protože v algebře $\mathrm{Cl}(n)$ je $B(u, v)$ standardní skalární součin a pro druhou mocninu bivektoru platí $(\bar{u} \wedge \bar{v})^2 = (\bar{u} \cdot \bar{v})^2 - \bar{u}^2\bar{v}^2 = -\sin^2\frac{\varphi}{2}$. Normovaný bivektor přitom zřejmě nezávisí na volbě reprezentantů u, v v rovině $u \wedge v$, takže předchozí výraz je totožný s (6.1). $\square$

Versor reprezentující rotaci se nazývá *rotor.* Z důkazu je navíc vidět, že rotor splňuje $\mathbf{R}\tilde{\mathbf{R}} = 1$, kde $\sim$ je tzv. *reverzní zobrazení,* které na versoru působí tak, že obrací pořadí neizotropních vektorů, jejichž je součinem. V obecném předpisu pro akci prvků ortogonální grupy na vektorech (4.5) tedy v případě rotoru můžeme nahradit jeho inverzi reverzí. Tato akce navíc zřejmě zachovává vnější násobení, a proto se rozšiřuje na blady libovolného stupně. Dostáváme tedy předpis pro rotaci libovolného podprostoru reprezentovaného bladem $\mathbf{w}$ v geometrické algebře $\mathrm{Cl}(n)$ ve tvaru

$$\mathbf{w} \mapsto \mathbf{R}\mathbf{w}\tilde{\mathbf{R}}. \tag{6.2}$$

Kromě rotací v $\mathbb{R}^n$ lze pomocí geometrické algebry $\mathrm{Cl}(n)$ šikovně reprezentovat zrcadlení v nadrovinách a ortogonální projekce na podprostory. Zrcadlení vektoru v nadrovině reprezentované $(n-1)$–bladem $\boldsymbol{\pi}$ je totiž až na znaménko dáno reflexí R_v, kde v je vektor kolmý na nadrovinu, a reflexe je podle (4.6) v geometrické algebře dána výrazem $R_v(u) = -vuv$. Vektor v je zároveň duální reprezentací této roviny, $v = \boldsymbol{\pi}^* = \boldsymbol{\pi}\mathbf{I}$, protože dualita (4.4) reprezentuje v $\mathrm{Cl}(n)$ eukleidovský ortogonální doplněk. Reflexe (4.6) navíc také zachovává vnější násobení, a proto dostáváme předpis pro zrcadlení podprostoru reprezentovaného bladem $\mathbf{w}$ v nadrovině $\boldsymbol{\pi}$:

$$\mathbf{w} \mapsto \boldsymbol{\pi}\mathbf{w}\boldsymbol{\pi}.$$

Ortogonální projekce na vektorové podprostory jsou dány přímo rovnicí (4.13), protože bilineární forma v $\mathrm{Cl}(n)$ definuje standardní eukleidovský skalární součin.

Příklad 6.2. V geometrické algebře $\mathrm{Cl}(3)$ reprezentují rotory $\mathbf{R}$ ve smyslu (6.2) grupu $\mathrm{SO}(3)$, tj. rotace v prostoru. Tato dimenze je speciální tím, že bivektor určující rovinu rotace je duální k vektoru reprezentující osu rotace. Pokud pseudoskalár splňuje $\mathbf{I}^2 = -1$, což je případ obvyklé volby $\mathbf{I} = e_1e_2e_3$, kde e_1, e_2, e_3 je ortonormální báze $\mathbb{R}^3$, a pokud n je jednotkový vektor ve směru osy rotace, tak n^* je bivektor určující rovinu rotace, který je normovaný $(n^*)^2 = -1$. Rotor (6.1), který určuje rotaci kolem osy s jednotkovým vektorem n o úhel φ, má tedy v tomto případě tvar

$$\mathbf{R} = \exp\left(\frac{1}{2}\varphi n^*\right) = \cos\frac{\varphi}{2} + n^* \sin\frac{\varphi}{2}.$$

Tento způsob reprezentace rotací je totožný s rotováním pomocí kvaternionů (1.2), protože podalgebra prvků Cl(3) sudého stupně je právě s tělesem kvaternionů izomorfní. V ortonormální bázi e_1, e_2, e_3 je tento izomorfismus realizovaný zobrazením $i \mapsto -e_2e_3, j \mapsto -e_3e_1, k \mapsto -e_1e_2$. Navíc oproti kvaternionům lze v algebře Cl(3) reprezentovat vektory a všechny běžné vektorové operace. Skalární součin je $u \cdot v$, vektorový součin $u \times v = (u \wedge v)^*$, smíšený součin $[uvw] = (u \wedge v \wedge w)^*$. V tomto smyslu lze Cl(3) chápat jako zúplnění vektorové algebry.

6.2. Projektivní geometrická algebra

Abychom získali skutečně geometrickou algebru pro eukleidovskou geometrii, tak potřebujeme, aby v ní bylo možné pomocí versorů reprezentovat nejen rotace, ale i translace. Minimální taková algebra je právě projektivní geometrická algebra, která vychází přímo z modelu eukleidovské geometrie popsaného v 5.1, kde je E^n ztotožněno s nadrovinou ve $\mathbb{R}^{n+1}$, respektive podprostorem v projektivním prostoru $\mathbb{RP}^n$. Aby byla algebra bivektorů izomorfní Lieově algebře Eukleidovy grupy, je potřeba na $\mathbb{R}^{n+1}$ uvažovat degenerovanou bilineární formu signatury $(n, 0, 1)$. Příslušná geometrická algebra $\mathrm{Cl}(n, 0, 1)$ se nazývá *projektivní geometrická algebra.*

Generující vektorový prostor $\mathbb{R}^{n,0,1}$ přímým součtem anizotropní části $\mathbb{R}^{n,0}$ a jedno-dimenzionálního jádra $\operatorname{Ker} B$, a pro algebru bivektorů se pak lehce spočítá

$$\Lambda^2\mathbb{R}^{n,0,1} = \Lambda^2\mathbb{R}^{n,0} \oplus \big(\mathbb{R}^{n,0} \wedge \operatorname{Ker} B\big) \cong \mathfrak{so}(n) \oplus \mathbb{R}^n = \mathfrak{se}(n). \tag{6.3}$$

Bivektory z $\Lambda^2\mathbb{R}^{n,0}$ generují rotace a bivektory z $\mathbb{R}^{n,0} \wedge \operatorname{Ker} B$ generují translace. Vzhledem k používaným konvencím je dobré volit generátor translace vektorem $x \in \mathbb{R}^n$ ve tvaru $-1/2x \wedge e_\infty$, kde $e_\infty \in \operatorname{Ker} B$. Kvadrát tohoto bivektoru v $\mathrm{Cl}(n, 0, 1)$ je nulový, a proto má příslušný versor pro translaci, tzv. *translátor*, tvar

$$\mathbf{T} = \exp\left(-\frac{1}{2}x \wedge e_\infty\right) = 1 - \frac{1}{2}x \wedge e_\infty. \tag{6.4}$$

Abychom získali model eukleidovské geometrie v $\mathrm{Cl}(n, 0, 1)$, potřebujeme v této algebře najít množinu reprezentující body Eukleidova prostoru, na které translátory působí jednoduše tranzitivně, tj. tranzitivně s triviálním stabilizátorem. Na rozdíl od geometrické algebry $\mathrm{Cl}(n)$ nelze reprezentovat body projektivními třídami vektorů, tj. jejich homogenními souřadnicemi, protože translátory působí na $\mathbb{R}^{n,0,1}$ triviálně, viz poznámka 6.4, a proto potřebujeme body reprezentovat „duálně“.

Věta 6.3. *Projektivní třídy neizotropních multivektorů stupně n modelují v projektivní geometrické algebře $\mathrm{Cl}(n, 0, 1)$ eukleidovskou geometrii dimenze n.*

Důkaz. Nejdříve podrobněji popíšeme projektivní třídy neizotropních multivektorů v $\Lambda^n\mathbb{R}^{n,0,1} \subset \mathrm{Cl}(n, 0, 1)$. Vzhledem k rozkladu vektorového prostoru $\mathbb{R}^{n,0,1}$ na jeho anizotropní část $\mathbb{R}^{n,0}$ a jádro $\operatorname{Ker} B$ je

$$\Lambda^n\mathbb{R}^{n,0,1} = \Lambda^n\mathbb{R}^{n,0} \oplus \operatorname{Ker} B \wedge \Lambda^{n-1}\mathbb{R}^{n,0}.$$

Druhá mocnina prvků z jedno-dimenzionálního prostoru $\Lambda^n\mathbb{R}^{n,0} \subset \mathrm{Cl}(n, 0, 1)$ je nenulová, protože zúžení bilineární formy B na $\mathbb{R}^{n,0}$ je nedegenerované. Naopak prvky $\mathbf{u} \in \operatorname{Ker} B \wedge \Lambda^{n-1}\mathbb{R}^{n,0}$ obsahují vektor z jádra, a proto $\mathbf{u}^2 = 0$ a také jejich součin s prvky $\Lambda^n\mathbb{R}^{n,0}$ je nulový. Projektivní třída libovolného neizotropního multivektoru v $\Lambda^n\mathbb{R}^{n,0,1}$ je tedy tvaru $[\mathbf{I}_n+\mathbf{u}]$, kde $\mathbf{I}_n \in \Lambda^n\mathbb{R}^{n,0}$ značí pseudoskalár anizotropního podprostoru $\mathbb{R}^{n,0} \subset \mathbb{R}^{n,0,1}$. Přímým výpočtem lze ověřit, že versory (6.4) působí na těchto třídách tranzitivně. Opravdu, jejich infinitezimální akce je

$$[x \wedge e_\infty, \mathbf{I}_n + \mathbf{u}] = -2e_\infty \wedge (x \lrcorner \mathbf{I}_n),$$

a vhodnou volbou vektoru $x \in \mathbb{R}^n$ tedy dostaneme libovolné posunutí $\operatorname{Ker} B \wedge \Lambda^{n-1}\mathbb{R}^{n,0}$. Navíc stabilizátor pseudoskaláru $\mathbf{I}_n$ je dán versory generovanými bivektory $u \wedge v \in \Lambda^2\mathbb{R}^{n,0} \cong \mathfrak{so}(n)$, a proto akce versorů na těchto neizotropních n–vektorech definuje model eukleidovské geometrie, viz 5.1. □

Poznámka 6.4. Eukleidův prostor nelze reprezentovat v projektivní geometrické algebře vektory, protože generátory translací působí na $\mathbb{R}^{n,0,1} \subset \mathrm{Cl}(n,0,1)$ triviálně. Skutečně, z definice geometrického a vnějšího součinu je infinitezimální akce bivektoru $u \wedge e_\infty \in \mathbb{R}^{n,0} \wedge \operatorname{Ker} B$ na vektoru $v \in \mathbb{R}^{n,0,1}$ rovna

$$[u \wedge e_\infty, v] = B(u,v)e_\infty - B(e_\infty, v)u - B(v,u)e_\infty + B(u,e_\infty)v = 0.$$

Díky izomorfismu $\Lambda^k\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{(n+1)*}$, viz (3.3), lze reprezentanty bodů Eukleidova prostoru také vidět jako prvky v projektivním prostoru $\mathbb{PR}^{(n+1)*}$, tj. jako projektivní třídy lineárních forem na $\mathbb{R}^{n+1}$. Duální reprezentace ve smyslu 3.3 pak umožňuje reprezentovat libovolný podprostor $W \subset \mathbb{R}^{n+1}$ pomocí prvků duální Grassmannovy algebry. Průnik podprostoru W s nadrovinou $\{x_{n+1} = 1\}$, která modeluje Eukleidův prostor, pak určuje jednoznačně afinní podprostor v E^n. Afinní prostory jsou tedy právě ty objekty, které v projektivní geometrické algebře lze reprezentovat. Oproti $\mathrm{Cl}(n)$ je tato reprezentace duální v tom smyslu, že vnější součin počítá průniky afinních prostorů a součin $\vee$ generuje afinní prostory. Konkrétně pokud $\mathbf{X} \in \Lambda^n\mathbb{R}^{n,0,1} \subset \mathrm{Cl}(n,0,1)$ je reprezentant bodu $x \in E^n$, pak multivektor $\mathbf{w}$ reprezentuje afinní prostor ve smyslu

$$\mathbf{X} \vee \mathbf{w} = 0 \text{ právě tehdy, když } x \in W \cap \{x_{n+1} = 1\}. \tag{6.5}$$

Vzhledem k degenerovanosti bilineární formy v projektivní geometrické algebře nelze dualitu (3.3) chápat jako zobrazení na $\mathrm{Cl}(n,0,1)$, a proto k (6.5) neexistuje duální reprezentace. Zobrazení (4.4), které je dané předpisem $\mathbf{w} \mapsto \mathbf{w}^* = \mathbf{w}\mathbf{I}$, kde $\mathbf{I}$ je pseudoskalár v $\mathrm{Cl}(n,0,1)$, neurčuje afinní prostor, ale reprezentuje ortogonální doplněk k vektorovému prostoru určujícímu zaměření afinního prostoru $\mathbf{w}$.

Kromě afinních prostorů a jejich translací lze v projektivní geometrické algebře reprezentovat jejich obecné rotace, translace, zrcadlení a ortogonální projekce. Nejdůležitější rovnice lze shrnout do následující věty.

Věta 6.5. (*a*) *Geometrické objekty v projektivní geometrické algebře. Bod $x \in E^n$ je v $\mathrm{Cl}(n,0,1)$ reprezentován projektivní třídou multivektoru*

$$\mathbf{X} = \mathbf{I}_n + e_\infty \wedge (x \lrcorner \mathbf{I}_n), \tag{6.6}$$

kde $\mathbf{I}_n \in \Lambda^n\mathbb{R}^{n,0}$ *a* $e_\infty \in \operatorname{Ker} B$. *Afinní podprostor dimenze* k *definovaný body* $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{k+1}$ *je reprezentovaný prvkem*

$$\mathbf{w} = \mathbf{X}_1 \vee \cdots \vee \mathbf{X}_{k+1} \in \mathbb{P}(\Lambda^{n-k}\mathbb{R}^{n+1}). \tag{6.7}$$

a průnik afinních prostorů $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ *je reprezentovaný prvkem* $\mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{w}_2$.

(*b*) *Transformace v projektivní geometrické algebře. Rotace v obecném bodě* x *je dána versorem*

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{T}\mathbf{R}\tilde{\mathbf{T}}, \tag{6.8}$$

kde $\mathbf{T}$ *je versor pro translaci* (6.4), $\tilde{\mathbf{T}}$ *jeho reverze a* $\mathbf{R}$ *je versor pro rotaci* (6.1). *Zrcadlení afinního prostoru* $\mathbf{w}$ *v nadrovině reprezentované vektorem* $\pi \in \mathbb{R}^{n+1}$ *je*

$$\mathbf{w} \mapsto \pi\mathbf{w}\pi, \tag{6.9}$$

a ortogonální projekce afinního prostoru $\mathbf{w}$ *na afinní prostor* $\mathbf{v}$ *je*

$$\mathbf{w} \mapsto (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}. \tag{6.10}$$

Důkaz. (a) V Kleinově smyslu je bod v Eukleidově prostoru dán translací z počátku do tohoto bodu. Multivektor (6.6) reprezentující bod $x \in E^n$ tedy dostaneme působením translátoru (6.4) na pseudoskalár $\mathbf{I}_n$ reprezentující v našem modelu počátek

$$\mathbf{X} = \mathbf{T}\mathbf{I}_n\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{I}_n + e_\infty \wedge (x \,\lrcorner\, \mathbf{I}_n).$$

Reprezentace afinních prostorů (6.7) a jejich průniků plyne přímo z (6.5) a popisu reprezentace vektorových podprostorů v 3.2.

(b) Z popisu bivektorů (6.3) vidíme, že rotace jsou generované prvky $\Lambda^2\mathbb{R}^{n,0}$, a proto mají rotory v projektivní geometrické algebře stejný tvar jako rotory v $\mathrm{Cl}(n)$, viz (6.1). Skutečně, protože akce versoru zachovává součiny v geometrické algebře, a protože je vektor e_∞ kolmý na $\mathbb{R}^{n,0}$, je rotace bodu $\mathbf{X}$ daného předpisem (6.6) dána výrazem

$$\mathbf{R}\mathbf{X}\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{I}_n + e_\infty \wedge (\mathbf{R}x\tilde{\mathbf{R}} \,\lrcorner\, \mathbf{I}_n) = \mathbf{X}_{\mathbf{R}x\tilde{\mathbf{R}}},$$

který podle (6.1) reprezentuje rotovaný bod. Je potřeba zdůraznit, že $\mathbf{R}$ reprezentuje stále pouze rotace v počátku. Rotaci v bodě x můžeme vyjádřit jako složení translace $\tilde{\mathbf{T}}$ z bodu x do počátku, rotace v počátku $\mathbf{R}$ a translace $\mathbf{T}$ zpět z počátku do bodu x. Složení zobrazení odpovídá geometrickému součinu příslušných versorů, a proto je rotace v bodě x dána versorem (6.8). Podobně pomocí posunutí situace do počátku a použití duální reprezentace v geometrické algebře $\mathrm{Cl}(n)$ lze jednoduše odvodit rovnice pro zrcadlení a ortogonální projekci. Konkrétně translátor $\tilde{\mathbf{T}}$, který posune afinní nadrovinu $\pi \in \mathbb{R}^{n,0,1}$ do počátku, splňuje $\tilde{\mathbf{T}}\pi\mathbf{T} = \pi'$, kde $\pi' \in \mathbb{R}^{n,0}$. Zrcadlení v nadrovině π' je v $\mathrm{Cl}(n)$ dáno reflexí $R_{\pi'}$, viz (4.6), a proto je zrcadlení afinního prostoru $\mathbf{w}$ v nadrovině π dáno předpisem

$$\mathbf{w} \mapsto \mathbf{T}R_{\pi'}(\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{w}\mathbf{T})\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T}\pi'\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{w}\mathbf{T}\pi'\tilde{\mathbf{T}} = \pi\mathbf{w}\pi,$$

což je (6.9). Rovnice (6.10) zřejmě reprezentuje průnik afinního prostoru $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$ s afinním prostorem $\mathbf{v}$. K důkazu, že se jedná o ortogonální projekci afinního prostoru $\mathbf{w}$ na afinní prostor $\mathbf{v}$ pak tedy stačí ukázat, že $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$ reprezentuje afinní podprostor obsahující $\mathbf{w}$ a kolmý k $\mathbf{v}$. Proto je dobré si uvědomit, že každý reprezentant $\mathbf{w}$ afinního prostoru lze psát ve tvaru $\mathbf{w} = \mathbf{w}' + \mathbf{w}_\infty$, kde $\mathbf{w}'$ je součet bladů neobsahujících vektor z jádra B a reprezentuje zaměření afinního prostoru, a každý blade v $\mathbf{w}_\infty$ naopak obsahuje prvek z jádra a tato část reprezentuje vzdálenost afinního prostoru od počátku. Tento rozklad je charakteristický tím, že $\mathbf{w}'$ je invariantní vzhledem k translacím a každá kontrakce prvkem $\mathbf{w}_\infty$ je triviální. Pro afinní prostory $\mathbf{w}, \mathbf{v}$ proto platí

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \lrcorner \mathbf{w} = \mathbf{T}(\mathbf{v}' \lrcorner \mathbf{w}')\tilde{\mathbf{T}},$$

kde translátor $\tilde{\mathbf{T}}$ posouvá afinní prostor $\mathbf{w}$ do počátku, tj. platí $\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{w}\mathbf{T} = \mathbf{w}'$. Prvek $\mathbf{v}' \lrcorner \mathbf{w}'$ je opravdu v $\mathrm{Cl}(n)$ duální reprezentace vektorového prostoru obsahujícího $\mathbf{w}'$ a kolmého k $\mathbf{v}'$. □

Příklad 6.6. Uvažujme Eukleidův prostor dimenze tři s kartézským souřadným systém s jednotkovými směrovými vektory e_1, e_2, e_3 a zvolme bilineární formu B tak, že tyto vektory tvoří ortonormální bázi $\mathbb{R}^{3,0} \subset \mathbb{R}^{3,0,1}$. Pokud pro jednoduchost označíme vnější součin zřetězením indexů $\mathbf{e}_{ij} = e_i \wedge e_j$, pak podle (6.6) je v této bázi bod o souřadnicích (x, y, z) reprezentovaný projektivní třídou multivektoru

$$\mathbf{X} = \mathbf{e}_{123} + x\mathbf{e}_{\infty 23} - y\mathbf{e}_{\infty 13} + z\mathbf{e}_{\infty 12}.$$

Bod lze také zadat jako průnik tří rovin $\mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{p}_2 \wedge \mathbf{p}_3$ nebo jako průnik roviny a přímky $\mathbf{p} \wedge \boldsymbol{\ell}$. Rovina s rovnicí $ax + by + cz + d = 0$ je reprezentována projektivní třídou vektoru

$$\mathbf{p} = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_\infty \tag{6.11}$$

a může být také dána přímkou a bodem $\boldsymbol{\ell} \vee \mathbf{X}$. Přímku reprezentuje projektivní třída multivektoru stupně dva, jehož koeficienty jsou její Plückerovy souřadnice

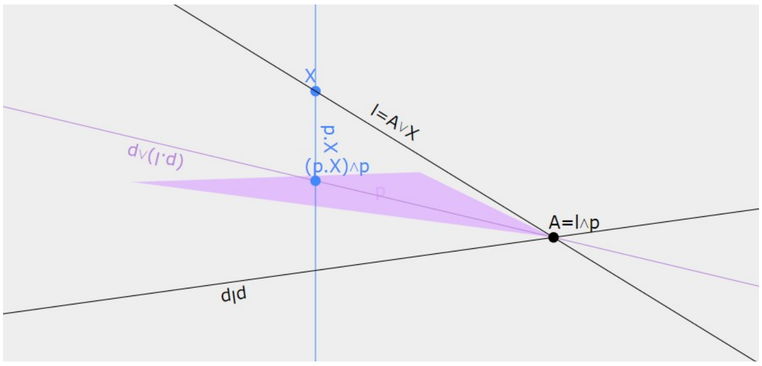
$$\boldsymbol{\ell} = p_1\mathbf{e}_{23} + p_2\mathbf{e}_{31} + p_3\mathbf{e}_{12} + d_1\mathbf{e}_{1\infty} + d_2\mathbf{e}_{2\infty} + d_3\mathbf{e}_{3\infty}, \tag{6.12}$$

kde (p_1, p_2, p_3) je jednotkový směrový vektor přímky a (d_1, d_2, d_3) je vzdálenost přímky od počátku. Přímku lze také zadat dvěma body $\mathbf{X}_1 \vee \mathbf{X}_2$ nebo jako průnik dvou rovin $\mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{p}_2$.

Obecné rotace (6.8) lze v třírozměrném prostoru jednoduše vyjádřit pomocí osy rotace. Pokud $\boldsymbol{\ell}$ je normovaný reprezentant osy rotace ve smyslu $\boldsymbol{\ell}^2 = -1$, tj. $\boldsymbol{\ell}$ je tvaru (6.12), pak rotace podle této osy o úhel φ je dána versorem

$$\mathbf{R}_\ell = \exp(\frac{1}{2}\varphi\boldsymbol{\ell}) = \cos\frac{\varphi}{2} + \boldsymbol{\ell}\sin\frac{\varphi}{2}. \tag{6.13}$$

Podle věty 6.5 lze jednoduše vyjádřit i zrcadlení v rovině a ortogonální projekce, viz obrázek 1. Zrcadlení přímky $\boldsymbol{\ell}$ v rovině $\mathbf{p}$ je reprezentované projektivní třídou multivektoru $\mathbf{p}\boldsymbol{\ell}\mathbf{p}$. Blade $\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{p}$ reprezentuje rovinu obsahující přímku $\boldsymbol{\ell}$, která je kolmá na rovinu $\mathbf{p}$ a blade $(\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{p}) \wedge \mathbf{p}$ reprezentuje kolmou projekci přímky $\boldsymbol{\ell}$ na rovinu $\mathbf{p}$. Podobně $\mathbf{X} \cdot \mathbf{p}$ je kolmice z bodu $\mathbf{X}$ na rovinu $\mathbf{p}$ a $(\mathbf{X} \cdot \mathbf{p}) \wedge \mathbf{p}$ je jeho kolmý průmět do této roviny.



Obrázek 1. Ukázka počítání v projektivní geometrické algebře – screenshot z vizualizace vytvořené programem ganja.js – Geometric Algebra code generator for javascript, [7].

6.3. Konformní geometrická algebra

Pokud chceme zavést geometrickou algebru pro eukleidovskou geometrii s nedegenerovanou bilineární formou B, pak je potřeba k izotropnímu vektoru e_∞ z projektivní geometrické algebry přidat jeho partnera do Wittova páru, který označíme e_0. Potom dostaneme dokonce dva izotropní vektory $e_\infty^2 = e_0^2 = 0$, ale protože $B(e_0, e_\infty) = -1$, je jádro B triviální. Izotropní prostor má indefinitní signaturu, a proto touto konstrukcí získáme nedegenerovanou bilineární formu na $V = \mathbb{R}^{n+2}$ se signaturou $(n+1, 1)$. Příslušná geometrická algebra $\mathrm{Cl}(n+1, 1)$ se nazývá *konformní geometrická algebra.*

Podle rovnice (4.8) splňuje algebra bivektorů konformní geometrické algebry $\Lambda^2\mathbb{R}^{n+1,1} \cong \mathfrak{so}(n+1, 1)$. Akce bivektorů na $\mathbb{R}^{n+1,1}$ dána rovnicí (4.7) v tomto izomorfismu odpovídá standardní maticové reprezentaci ortogonální Lieovy algebry popsané v 5.2. Tato akce je tranzitivní na projektivizaci kuželu izotropních vektorů, a její stabilizátor je parabolická podalgebra $\mathfrak{p}$ popsaná rovnicí (5.2). Skutečně, bivektory, které působí triviálně na izotropním vektoru e_0, jsou právě ty, které tento vektor neobsahují, a k tomu bivektor $e_0 \wedge e_\infty$, tj. podalgebra

$$\{u \wedge v, u \wedge e_\infty, e_0 \wedge e_\infty\} \cong \mathfrak{so}(n) \oplus \mathbb{R}^{n*} \oplus \mathbb{R} = \mathfrak{p},$$

kde $u, v \in \mathbb{R}^{n,0}$. Akce versorů na izotropních vektorech tedy modeluje v $\mathrm{Cl}(n+1, 1)$ konformní geometrii a tím pádem i eukleidovskou geometrii, viz 5.3.

Věta 6.7. *Množina obsahující všechny projektivní třídy izotropních vektorů až na jednu modeluje v konformní geometrické algebře eukleidovskou geometrii.*

Důkaz. Množinu tříd označme M, chybějící třídu $[e_\infty]$ a položme $e_{n+1} = e_\infty$. Předpis (5.4) pro inverzní stereografickou projekci (5.3) pak definuje bijektivní zobrazení $E^n \to M$. Vektor e_∞ je Wittův pár k izotropnímu vektoru e_0, který reprezentuje počátek, a lze ho chápat jako reprezentanta nekonečna. $\square$

Průnik vektorového podprostoru $W \subset \mathbb{R}^{n+1,1}$ dimenze $k + 2$ s kuželem izotropních vektorů je opět kužel ve W, a přímky na tomto kuželu lze opět ztotožnit se sférou, tentokrát dimenze k. Pokud tento kužel obsahuje přímku e_∞, tj. bod na této sféře, ze kterého je stereografickou projekcí promítáno, pak W reprezentuje afinní prostor dimenze k v E^n. V opačném případě reprezentuje W sféru dimenze $k-1$ v E^n. Geometrické objekty, které v konformní geometrické algebře lze reprezentovat ve smyslu (3.5) jsou tedy právě zobecněné sféry, tj. sféry a afinní prostory, které chápeme jako sféry procházející nekonečnem. Zejména bod není přirozený objekt a je ho potřeba chápat buď jako limitní sféru s poloměrem nula, anebo jako tzv. „plochý bod“ $\mathbf{X} \wedge e_\infty$, což je vlastně sféra dimenze nula procházející nekonečnem. Díky existenci nedegenerované bilineární formy máme v konformní geometrické algebře k dispozici dualitu (4.4) a tím pádem pro každou zobecněnou sféru dvě reprezentace, které jsou vzájemně duální. Reprezentace (3.5) se hodí na konstrukci sfér z bodů nebo sfér nižší dimenze. Naopak z duální reprezentace (3.6) sféry můžeme jednoduše odečíst její poloměr a střed.

V konformní geometrické algebře existuje stejně jako v projektivní geometrické algebře versor pro translaci a rotaci a navíc existuje versor pro škálování. Kromě zrcadlení v nadrovinách a ortogonálních projekcí na afinní prostory zde lze reprezentovat podobně i reflexi ve sférách a ortogonální projekce na sféry. Hlavní výsledky opět shrneme do následující věty, kterou ale necháme tentokrát bez důkazu. S využitím výše uvedených informací je důkaz snadný a je ponechán jako cvičení pro čtenáře.

Věta 6.8. (*a*) *Geometrické objekty v konformní geometrické algebře. Bod* $x \in E^n$ *je v* $\mathrm{Cl}(n+1,1)$ *reprezentován projektivní třídou vektoru*

$$\mathbf{X} = e_0 + x + \frac{1}{2}x^2 e_\infty, \tag{6.14}$$

kde e_0, e_∞ *je Wittova dvojice izotropních vektorů. Zejména pro normované reprezentanty bodů* $\mathbf{X}^2 = \mathbf{Y}^2 = 1$ *platí*

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = -\frac{1}{2}\|x-y\|^2,$$

kde $\|x-y\|$ *je eukleidovská norma v* $\mathbb{R}^n$. *Afinní podprostor dimenze k určený body* $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{k+1}$ *je reprezentován bladem stupně* $k+2$

$$\mathbf{w} = \mathbf{X}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{X}_{k+1} \wedge e_\infty$$

a jeho duální reprezentace $\mathbf{w}^*$ *je totožná s jeho reprezentací v projektivní geometrické algebře. Sféra dimenze k definovaná body* $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{k+2}$ *je reprezentována bladem stupně* $k+2$

$$\mathbf{s} = \mathbf{X}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{X}_{k+2}$$

a průnik sfér $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$ *je reprezentován prvkem* $\mathbf{s}_1 \vee \mathbf{s}_2$. *Pokud* $\mathbf{s}$ *je sféra maximální dimenze* $n-1$, *pak její duální reprezentace je dána vektorem*

$$\mathbf{s}^* = \mathbf{S} + \frac{1}{2}\rho^2 e_\infty,$$

kde $\mathbf{S}$ *je normovaný reprezentant středu této sféry a* ρ *je její poloměr.*

(b) Transformace v konformní geometrické algebře. Rotace a translace jsou reprezentovány stejnými versory jako v projektivní geometrické algebře. Škálování faktorem r^2 je dáno versorem

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \frac{r^2+1}{2r} + \frac{r^2-1}{2r} e_0 \wedge e_\infty$$

Zrcadlení zobecněné sféry $\mathbf{s}$ *v nadrovině* $\boldsymbol{\pi} \in \Lambda^{n+1}\mathbb{R}^{n+1,1}$ *je dáno podobně jako v projektivní algebře výrazem* $\mathbf{s} \mapsto \boldsymbol{\pi}\mathbf{s}\boldsymbol{\pi}$. *Pokud* $\boldsymbol{\pi}$ *reprezentuje sféru maximální dimenze, definuje tento předpis sférickou inverzi v této sféře. Ortogonální projekce afinního prostoru* $\mathbf{w}$ *na zobecněnou sféru* $\mathbf{s}$ *je* $\mathbf{w} \mapsto (\mathbf{w} \cdot \mathbf{s}) \cdot \mathbf{s}$.

Příklad 6.9. Bod Eukleidova prostoru E^3 daný v kartézských souřadnicích s jednotkovými směrovými vektory $e_1, e_3, e_3 \in \mathbb{R}^3$ vekorem (x, y, z) je podle (6.14) reprezentován v konformní geometrické algebře vektorem

$$\mathbf{X} = e_0 + xe_1 + ye_2 + ze_3 + \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)e_\infty.$$

Reprezentant roviny dané třemi body je $\mathbf{p} = \mathbf{X}_1 \wedge \mathbf{X}_2 \wedge \mathbf{X}_3 \wedge e_\infty$ a její duální reprezentace $\mathbf{p}^*$ je totožná s její reprezentací v projektivní geometrické algebře (6.11). Podobně přímka je $\boldsymbol{\ell} = \mathbf{X}_1 \wedge \mathbf{X}_2 \wedge e_\infty$ a její duál je totožný s (6.12). Sféra generovaná čtyřmi body má v konformní geometrické algebře reprezentaci $\mathbf{s} = \mathbf{X}_1 \wedge \mathbf{X}_2 \wedge \mathbf{X}_3 \wedge \mathbf{X}_4$ a její duál je $\mathbf{s}^* = \mathbf{S} + \frac{1}{2}\rho^2 e_\infty$. Podobně lze vyjádřit kružnici buď pomocí třech generujících bodů $\mathbf{c} = \mathbf{X}_1 \wedge \mathbf{X}_2 \wedge \mathbf{X}_3$ nebo duálně $\mathbf{c}^* = (\mathbf{S} + \frac{1}{2}\rho^2 e_\infty) \wedge \boldsymbol{\pi}^*$, jako průnik sféry a roviny, ve které kružnice leží.

Rotace v E^3 podle osy $\boldsymbol{\ell}$ je stejně jako v projektivní geometrické algebře dána rotorem (6.13). Stejné reprezentace má i zrcadlení v rovině a ortogonální projekce na přímku nebo rovinu. Navíc lze v konformní geometrické algebře stejným způsobem reprezentovat i sférickou inverzi a ortogonální projekci na sféru.

Uvažujme příklad dvou sfér $\mathbf{s}, \mathbf{t}$, kružnici $\mathbf{c}$, přímku $\boldsymbol{\ell}$ a bod $\mathbf{X}$, viz obrázek 2. Průnik sfér je kružnice $\mathbf{s} \vee \mathbf{t}$, průnik přímky a sféry $\mathbf{t}$ je dvojbod $\boldsymbol{\ell} \vee \mathbf{t}$. Ortogonální projekce přímky na sféru $\mathbf{s}$ je kružnice $(\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{s}) \cdot \mathbf{s}$, ortogonální projekce bodu $\mathbf{X}$ na sféru $\mathbf{s}$ je dvojbod $(\mathbf{X} \cdot \mathbf{s}) \cdot \mathbf{s}$, kde ale $\mathbf{X}$ je potřeba chápat jako plochý bod $\mathbf{X} \wedge e_\infty$. Výraz $(\mathbf{c} \cdot \mathbf{t}) \cdot \mathbf{t}$ je kružnice na sféře $\mathbf{t}$ ležící zároveň na sféře, která obsahuje kružnici $\mathbf{c}$ a je kolmá na sféru $\mathbf{t}$.

Reference

[1] E. Meinrenken: *Clifford Algebras and Lie Theory*, A Series of Modern Surveys in Mathematics 58, Springer, 2013.

[2] R. W. Sharpe: *Differential geometry*, Graduate Texts in Mathematics 166, Springer, 1997.

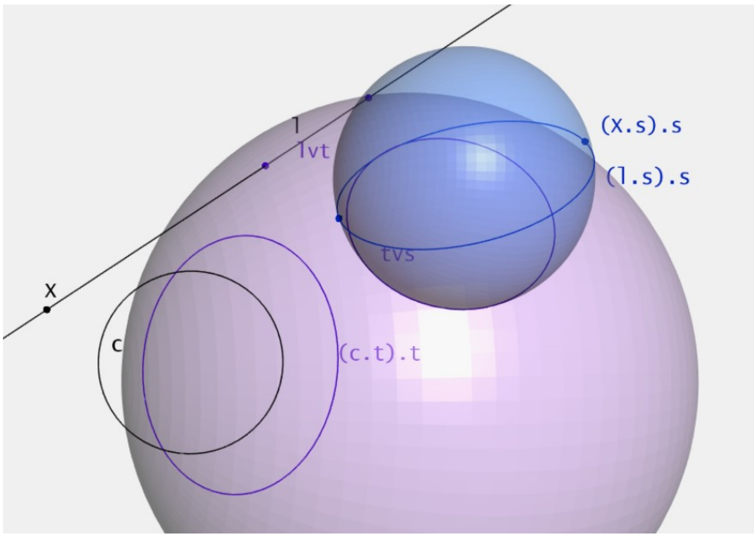
[3] A. Cap, J. Slovák: *Parabolic Geometries: Background and general theory*, Mathematical surveys and monographs, vol. 154, American Math. Soc., 2009.

[4] L. Dorst, D. Fontijne, S. Mann: *Geometric Algebra for Computer Science: An Object-Oriented Approach to Geometry*, Morgan Kaufmann Publishers Inc., Burlington, 2007.

[5] C. G. Gunn: *Geometric Algebras for Euclidean Geometry*, Adv. Appl. Clifford Algebras (2017) 27:185, on-line: `https://doi.org/10.1007/s00006-016-0647-0`.

[6] C. G. Gunn, S. De Keninck: *3D PGA Cheat Sheet, An extensive reference with 3D PGA formulas*, online: `bivector.net`.

[7] S. De Keninck: ganja.js, 2020, online: `https://zenodo.org/record/3635774`.



Obrázek 2. Ukázka počítání v konformní geometrické algebře – screenshot z vizualizace vytvořené programem ganja.js – Geometric Algebra code generator for javascript, [7].

[8] D. Hildenbrand: *Introduction to Geometric Algebra Computing*, Boca Raton, USA: Chapman and Hall/CRC, 2018.
[9] P. Lounesto: *Clifford Algebra and Spinors*, 2nd edn. CUP, Cambridge, 2006.
[10] Ch. Perwass: *Geometric Algebra with Applications in Engineering*, Springer Verlag, 2009.

Aleš Návrat, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: `navrat.a@fme.vutbr.cz`

CHEMICKÉ REAKCE JAKO MATEMATICKÝ DŮSLEDEK

MILOSLAV PEKAŘ

ABSTRAKT. V chemii je rychlost chemických reakcí charakterizována dvěma základními způsoby. Přímo s experimentálními daty jsou spojeny rychlosti reagování jednotlivých složek reagující směsi. Chemickým vhledem jsou složkové rychlosti přetlumočeny do rychlostí jednotlivých reakcí, které v dané směsi zřejmě probíhají. Příspěvek ukazuje, že vcelku jednoduchým lineárně-algebraickým rozborem zachování atomů při chemických reakcích můžeme dospět fakticky k matematickému důkazu existence rychlostí chemických reakcí. Navrhování schémat chemických reakcí tak nemusí být čistě chemickou záležitostí, ale mělo by brát v úvahu i matematickou stránku.

1. Úvod

Matematika nachází samozřejmě aplikace i v chemii, a to nejen třeba při vyhodnocování, prokládání či modelování dat, ale i přímo v srdci chemie, jak se bude tento příspěvek snažit ukázat. Hlavní a specifickou doménou chemie jsou jistě chemické reakce, přeměna jedněch sloučenin v jiné (jaderné reakce, tedy přeměnu chemických prvků v jiné, tu ponecháváme stranou).

Kromě vlastního chemismu reakcí zajímá chemiky i jejich rychlost. Rychlost chemické reakce znamená něco jiného než rychlost ve fyzice a jde vlastně o počítání molekul. Přemění-li se za daných podmínek reakcí větší počet molekul (v určeném prostoru za jednotku času) než za podmínek jiných, má reakce za daných podmínek vyšší rychlost. Rychlost reakce je vztahována na jednotku času a jednotku prostorovou (obvykle objemu) proto, že počet molekul závisí na tom, v jak velkém objemu a jak dlouho je počítáme. Právě matematický pohled na rychlosti chemických reakcí a jistá specifika reakcí vedou až k tomu, co naznačuje název tohoto příspěvku.

Než začneme tento pohled rozvíjet, povězme si velmi stručně, jak chemici přistupují ke zkoumání reakcí a jejich rychlostí. Snad vždy je základem zjišťování, jaké složky (molekuly, sloučeniny) se v reagující směsi vyskytují, jak rychle se jejich množství mění, které složky reakcí zanikají (jsou nazývány výchozími látkami nebo reaktanty), které naopak vznikají (produkty). Chemik pak běžně sleduje množství jednotlivých složek v reagující směsi a jeho změny v čase, přesněji sleduje koncentrace složek. Množství chemici nejčastěji sledují právě přes počty molekul, jichž je však obrovský počet, a tak se práci s obrovskými čísly vyhnuli zavedením

2010 *MSC.* Primární 92E99; Sekundární 97M60.
Klíčová slova. Chemické reakce, aplikace lineární algebry.

pojmu látkové množství a jeho jednotky mol. Jeden mol představuje ca 6×10^{23} (přesně $6,022\,140\,76 \times 10^{23}$) počítaných jedinců, obvykle tedy molekul. Molární koncentrace se pak běžně vyjadřuje v molech na litr.

Sledováním (změn) koncentrace jednotlivých složek reagující směsi získají chemici představu o tzv. (reakční) rychlosti složek, tedy o tom, jak rychle se která složka (její koncentrace) díky reakcím mění – jak rychle zaniká nebo vzniká. Rychlosti složek pak vstupují do hmotnostní (popř. látkové) bilance vyjadřující zachování hmotnosti reagující směsi. Vlastní chemismus ale chemici vyjadřují pomocí reakcí, které v dané směsi (patrně) probíhají, a jejich rychlostmi. Soustava předpokládaných reakcí pak tvoří reakční schéma, které buď může reprezentovat děje skutečně probíhající na úrovni molekul, nebo jen jejich zjednodušený popis postačující pro charakterizaci reagující směsi. V prvém případě mluvíme o reakčním mechanismu, ve druhém o soustavě reakcí, popř. reakční soustavě. Jednotlivé reakce, které vidíme v soustavě reakcí, nemusejí reprezentovat skutečné reakce na molekulární úrovni, ale jakási jejich zjednodušení, „součet“, která jsou postačující pro vyhodnocení dat i k chemickému náhledu. Každá reakce ze soustavy reakcí tak ve skutečnosti může představovat souhrn nějakého reálného reakčního mechanismu, který třeba dosud nemohl být odhalen.

Jak chemici provedou převod z rychlostí složek, které vlastně (byť nepřímo) měří, na rychlosti reakcí? Chemickou intuicí, ovšemže podloženou právě rozborem složení reagující směsi, z něhož na základě chemických znalostí odvozují možná propojení jednotlivých složek chemickými reakcemi, navrhují reakční schéma, které je v souladu s poznatky chemie. Často bývá možných schémat více a volba toho „pravého“ je otázkou dalšího experimentování nebo třeba modelových kvantově-chemických výpočtů. Ale právě k tomuto převodu může své říci i matematika, což je obsahem tohoto příspěvku. Vychází především z Bowenovy práce [1, 2], která ani po desítkách let k chemikům moc nedolehla; její názorné přetlumočení pro chemiky vyšlo nedávno [3].

2. Základní pojmy

Každá chemická sloučenina je složena z atomů. Při chemických reakcích dochází k přeskupování atomů ve sloučeninách, čímž některé sloučeniny zanikají a jiné vznikají. Atomy a jejich počet se však nemění, a právě to je východiskem matematického, přesněji lineárně-algebraického rozboru chemických reakcí.

V každé chemické reakci se zachovává hmotnost[1]. To lze vyjádřit pomocí reakčních rychlostí jednotlivých složek vyjadřujících produkci hmotnosti složky na jednotku času a jednotku objemu jednoduše takto:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} r_\alpha = 0, \tag{1}$$

kde α je index složky. Reakční rychlost složky r_α je kladná, pokud složka v reagující směsi vzniká, záporná, pokud zaniká.

[1] Přísně vzato ne, ale změny hmotnosti související s výměnou energie jsou běžně neměřitelné a nejsou v chemii brány v úvahu.

Hmotnost sloučeniny je dána hmotností atomů, které ji tvoří. Počet atomů jistého druhu v každé sloučenině můžeme charakterizovat maticí složení $\|T_{\sigma\alpha}\|$, která má rozměr $z \times n$. Zde je z počet atomů a n počet složek (sloučenin) v dané reakční směsi. Prvek $T_{\sigma\alpha}$ této matice, kde $\sigma = 1, \ldots, z$ a $\alpha = 1, \ldots, n$, tak udává počet atomu σ ve složce α. Hmotnosti atomů i molekul jsou velice malé, i proto se v chemii pracuje s molárními hmotnostmi, tedy s hmotností jednoho molu dané entity. Molární hmotnost složky α (značená M_α) souvisí s atomovými hmotnostmi takto:

$$M_\alpha = \sum_{\sigma=1}^{z} A^\sigma T_{\sigma\alpha}, \quad \alpha = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Zde A^σ je atomová hmotnost (hmotnost molu atomů) příslušného atomu. Pomocí molárních hmotností převedeme hmotnostně-produkční rychlosti složek na látkově-produkční rychlosti, které jsou v chemii mnohem běžnější:

$$J^\alpha = r_\alpha / M_\alpha.$$

J^α značí počet molů (látkové množství) složky směsi α vzniklé nebo zaniklé za jednotku času v jednotce objemu. Bilance hmotnosti (1) pak zní

$$\sum_{\alpha=1}^{n} J^\alpha M_\alpha = 0. \tag{3}$$

3. Lineární algebra a zachování atomů

Rovnice (3) připomíná složkové vyjádření skalárního součinu dvou vektorů, které jsou navíc na sebe kolmé. A tady přichází ke slovu avizovaný Bowenův lineárně-algebraický rozbor [1]. Představme si (formální) n-rozměrný lineární vektorový prostor složek (označený $\mathcal{U}$) s bází $\mathbf{e}_\alpha$ a reciprokou bází $\mathbf{e}^\alpha$.[2] V tomto prostoru definujme vektor (molárních) reakčních rychlostí $\mathbf{J}$ pomocí reakčních rychlostí složek a vektor molárních hmotností $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{J} = \sum_{\alpha=1}^{n} J^\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad \mathbf{M} = \sum_{\alpha=1}^{n} M_\alpha \mathbf{e}^\alpha. \tag{4}$$

Tyto vektory jsou na sebe vzhledem k (3) kolmé. Tuto rovnici můžeme ještě upravit uvážením hmotností atomů, jež se zachovávají, což nám dále umožní zracionalizovat vyjádření vektoru molárních hmotností.

Dosaďme rovnici (2) do levé strany rovnice (3):

$$\sum_{\alpha=1}^{n} J^\alpha M_\alpha = \sum_{\sigma=1}^{z} A^\sigma \sum_{\alpha=1}^{n} T_{\sigma\alpha} J^\alpha. \tag{5}$$

Každý atom se zachovává, takže každý atomární sčítanec na pravé straně je nulový:

$$A^\sigma \sum_{\alpha=1}^{n} T_{\sigma\alpha} J^\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{\alpha=1}^{n} T_{\sigma\alpha} J^\alpha = 0, \quad \sigma = 1, \ldots, z. \tag{6}$$

[2] Pro náš výklad postačí ortonormální případ, ale z důvodů konzistence s původní literaturou budeme udržovat naznačenou symboliku.

Výsledek (6) představuje homogenní soustavu lineárních algebraických rovnic pro rychlosti složek s maticí $\|T_{\sigma\alpha}\|$. Tyto rychlosti jsou nenulové pouze v případě, kdy je hodnost této matice (h) menší než počet složek n. Chemické reakce jsou tedy možné, pokud $n - h > 0$. Hodnost h dále udává maximální možný počet lineárně nezávislých vztahů soustavy (6). Zachování atomů, které tato soustava vystihuje, pak můžeme přepsat na tvar

$$\sum_{\alpha=1}^{n} S_{\sigma\alpha} J^{\alpha} = 0, \quad \sigma = 1, \ldots, h, \tag{7}$$

kde matice $\|S_{\sigma\alpha}\|$ má rozměr $h \times n$ a hodnost h a byla vytvořena z matice $\|T_{\sigma\alpha}\|$ vypuštěním lineárně závislých řádků. Chemicky se to může projevit tak, že se objeví „pseudoatomové“ substance tvořené skupinou atomů, které postačují k vystižení zachování atomů. Molekulové hmotnosti pak můžeme zapsat s pomocí (molárních) hmotností pseudoatomových substancí E^{σ}:

$$M_{\alpha} = \sum_{\sigma=1}^{h} E^{\sigma} S_{\sigma\alpha}, \quad \alpha = 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Některé pseudoatomové substance mohou být totožné s původními atomy; příklady substancí budou uvedeny dále. Vektor molárních hmotnostní pak vypadá následovně:

$$\mathbf{M} = \sum_{\sigma=1}^{h} E^{\sigma} \sum_{\alpha=1}^{n} S_{\sigma\alpha} \mathbf{e}^{\alpha}. \tag{9}$$

Protože matice $\|S_{\sigma\alpha}\|$ má hodnost h, reprezentuje druhý součet v rovnici (9) lineárně nezávislé vektory

$$\mathbf{f}_{\sigma} = \sum_{\alpha=1}^{n} S_{\sigma\alpha} \mathbf{e}^{\alpha}, \quad \sigma = 1, \ldots, h. \tag{10}$$

Můžeme je tak zvolit za bázi h-rozměrného podprostoru, který označíme $\mathcal{W}$. Ten zároveň v prostoru složek určuje komplementární ortogonální $(n - h)$-rozměrný podprostor $\mathcal{V}$, který nazveme reakčním podprostorem. Je tedy $\mathcal{W} \perp \mathcal{V}$ a $\mathcal{U} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{V}$. Vyjádření vektoru molárních hmotností v bázi podprostoru $\mathcal{W}$ zní:

$$\mathbf{M} = \sum_{\sigma=1}^{h} E^{\sigma} \mathbf{f}_{\sigma}.$$

Protože podle (3) je $\mathbf{J}.\mathbf{M} = 0$, leží vektor reakčních rychlostí $\mathbf{J}$ v podprostoru $\mathcal{V}$; odtud jeho název. Otázka nyní zní, jaké jsou složky reakčního vektoru v reakčním podprostoru, neboli jaké je jeho vyjádření v bázi tohoto podprostoru.

O této bázi zatím nic bližšího nevíme, vyjádřeme si ji prostě a nejprve v bázi prostoru složek $\mathcal{U}$, tedy vyjádřeme $(n - h)$ lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{g}^{p}$ této báze takto:

$$\mathbf{g}^{p} = \sum_{\alpha=1}^{n} P^{p\alpha} \mathbf{e}_{\alpha}, \quad p = 1, \ldots n - h. \tag{11}$$

Zde $P^{p\alpha}$ jsou prvky vhodné matice $\|P^{p\alpha}\|$ rozměru $(n-h)\times n$ a hodnosti $n-h$, která splňuje podmínku ortogonality

$$\mathbf{f}_\sigma.\mathbf{g}^p = 0 \quad \text{neboli} \quad \|P^{p\alpha}\|\cdot\|S_{\sigma\alpha}\|^T = \|0\|. \tag{12}$$

Hledané souřadnice (složky) J_p reakčního vektoru v reakčním podprostoru jsou potom obecně dány takto:

$$\mathbf{J} = \sum_{p=1}^{n-h} J_p \mathbf{g}^p. \tag{13}$$

Význam těchto souřadnic vyplyne ze srovnání rovnice (13) a prvé rovnice (4):

$$\sum_{\alpha=1}^{n} J^\alpha \mathbf{e}_\alpha = \sum_{p=1}^{n-h} J_p \mathbf{g}^p = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{p=1}^{n-h} J_p P^{p\alpha}\mathbf{e}_\alpha. \tag{14}$$

Z rovnice (14) plyne

$$J^\alpha = \sum_{p=1}^{n-h} J_p P^{p\alpha}, \quad \alpha = 1,\ldots,n. \tag{15}$$

Rovnice (15) ukazuje, že reakční rychlosti složek J^α můžeme vyjádřit pomocí souřadnic J_p. Souřadnice J_p ale představují rychlosti $n-h$ (nezávislých) reakcí probíhajících v dané reagující směsi. To plyne z další podmínky ortogonality, kterou dostaneme kombinací rovnice (11) a druhé rovnice (4):

$$0 = \mathbf{g}^p.\mathbf{M} = \sum_{\alpha=1}^{n} P^{p\alpha} M_\alpha, \quad p = 1,\ldots,n-h. \tag{16}$$

Jestliže si v rovnici (16) představíme na místě molárních hmotností vzorce odpovídajících sloučenin a čísla $P^{p\alpha}$ chápeme jako tzv. stechiometrické koeficienty, dostaneme v chemii dobře známé stechiometrické rovnice příslušných reakcí. Matice $\|P^{p\alpha}\|$ se pak nazývá maticí stechiometrických koeficientů, krátce stechiometrickou maticí. Stechiometrická matice „určuje“ zastoupení složky α reagující směsi v p-té reakci. Reaktanty mají stechiometrické koeficienty záporné, produkty reakce kladné.

Lineárně-algebraickým rozborem zachování atomů při chemických reakcích jsme tak došli k formulaci reakčního schématu, které je dáno stechiometrickou maticí. Rychlosti jednotlivých reakcí (v chemii se často říká kroků) určují reakční rychlosti složek podle rovnice (15). Opačný převod je možný pomocí kovariantního metrického tenzoru se složkami g_{rp} [1, 2], který se získá inverzí kontravariantního metrického tenzoru se složkami $g^{rp} = \mathbf{g}^r.\mathbf{g}^p$ $(r,p = 1,\ldots,n-h)$:

$$J_p = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{r=1}^{n-h} J^\alpha P^{r\alpha} g_{rp}, \quad p = 1,\ldots,n-h.$$

4. Příklady

Ilustrujme si získané výsledky na příkladech konkrétních reakčních směsí.

První, velmi jednoduchý příklad vychází ze syntézy amoniaku (NH_3) z molekulárního dusíku (N_2) a vodíku (H_2). Počet složek směsi (n) je tedy 3, počet atomů (z) 2. Očíslujme složky takto: 1-molekulární dusík, 2-molekulární vodík, 3-amoniak a atomy takto: 1-dusík, 2-vodík. Matice složení pak vypadá takto:

$$\|T_{\sigma\alpha}\| = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

a její hodnost je zjevně 2, takže v tomto případě platí $\|S_{\sigma\alpha}\| \equiv \|T_{\sigma\alpha}\|$ a nemáme žádné zvláštní pseudoatomové substance. Souřadnice vektoru molárních hmotností můžeme vyjádřit podle druhé rovnice (2)

$$\mathbf{M} = (M_{\mathrm{N}_2}; M_{\mathrm{H}_2}; M_{\mathrm{NH}_3})$$

nebo podle rovnice (8)

$$\mathbf{M} = (2A^{\mathrm{N}}; 2A^{\mathrm{H}}; A^{\mathrm{N}} + 3A^{\mathrm{H}}).$$

Vektory báze podprostoru $\mathcal{W}$ jsou

$$\mathbf{f}_1 = 2\mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^3, \quad \mathbf{f}_2 = 2\mathbf{e}^2 + 3\mathbf{e}^3.$$

V nich pak vyjádříme vektor molárních hmotností podle rovnice (9) takto:

$$\mathbf{M} = A^{\mathrm{N}}\mathbf{f}_1 + A^{\mathrm{H}}\mathbf{f}_2.$$

Protože je zde $n - h = 1$, existuje tu jediná nezávislá reakce a její stechiometrickou matici můžeme při splnění (druhé) podmínky (12) volit takto:

$$\|P^{p\alpha}\| = \begin{bmatrix} -1 & -3 & +2 \end{bmatrix}.$$

To odpovídá tradičnímu zápisu syntézy amoniaku $N_2 + 3H_2 = 2NH_3$. Reakční rychlosti složek jsou pak jednoduše dány rychlostí oné nezávislé reakce (J):

$$J^{\mathrm{N}_2} = -J, \quad J^{\mathrm{H}_2} = -3J, \quad J^{\mathrm{NH}_3} = 2J.$$

Poznamenejme ještě, že reakční směs syntézy amoniaku je ve skutečnosti složitější. V (průmyslové) praxi se provádí za účasti tuhého katalyzátoru (zmíněné tři složky jsou plynné) a na jeho povrchu vznikají další chemické útvary [4]. Reakční směs se tak rozšiřuje např. o tyto složky: H(ads), N(ads), N_2(ads), NH(ads), NH_2(ads), NH_3(ads). Matice složení má pak rozměr 2×9, hodnost 2, takže je možných sedm nezávislých reakcí. Shodou okolností učebnice [4] uvádí zrovna sedmi-krokové reakční schéma navržené na základě chemických znalostí; lze snadno ověřit, že toto schéma představuje možný systém sedmi nezávislých reakcí.

Oblíbeným reakčním schématem v oblasti chemie, které je dostatečně složité, přitom stále jednoduché, je tzv. trojúhelníkové schéma [5]. Vyskytuje se v reakční směsi alespoň tří složek, z nichž každá se může reakcí přeměnit na obě zbývající. Reálným příkladem je směs tří izomerů butenu, které mají shodný sumární vzorec C_4H_8, ale liší se prostorově-strukturním uspořádáním atomů a jsou tak od sebe chemicky jednoznačně odlišitelné. Liší se názvy: 1,2-; cis-2,3- a trans-2,3-buten a v tomto pořadí je i očíslujeme. Matice složení (1-uhlík, 2-vodík) je

$$\|T_{\sigma\alpha}\| = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 8 & 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

Její hodnost je zjevně 1, takže jsou možné $n - h = 2$ nezávislé reakce; jak už bylo řečeno, v chemii se tato směs běžně popisuje tříkrokovým schématem.

Matici $\|S_{\sigma\alpha}\|$ můžeme volit jako [4 4 4], což odpovídá pseudoatomové substanci CH_2 a $E^1 = A^{\mathrm{C}} + 2A^{\mathrm{H}}$. Jinou volbou je [1 1 1] a odpovídá pseudoatomové substanci C_4H_8 s molekulovou hmotností 56 g/mol. Vektor molekulových hmotností je pak vyjádřen v reciproké bázi

$$\mathbf{M} = 56\mathbf{e}^1 + 56\mathbf{e}^2 + 56\mathbf{e}^3$$

a vektor báze jednorozměrného podprostoru $\mathcal{W}$ v případě prvé volby matice $\|S_{\sigma\alpha}\|$

$$\mathbf{f}_1 = 4\mathbf{e}^1 + 4\mathbf{e}^2 + 4\mathbf{e}^3.$$

Stechiometrickou matici můžeme volit následovně:

$$\|P^{p\alpha}\| = \begin{bmatrix} -1 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 \end{bmatrix}.$$

Odpovídá dvěma nezávislým reakcím: 1) 1,2-buten = cis-2,3-buten; 2) cis-2,3-buten = trans-2,3-buten s rychlostmi J_1 a J_2. Reakční rychlosti složek dostaneme pomocí rovnice (15):

$$J^{1,2} = -J_1, \quad J^{\mathrm{cis}-2,3} = J_1 - J_2, \quad J^{\mathrm{trans}-2,3} = J_2.$$

Tou třetí reakcí obvykle v chemii používanou je přeměna trans-2,3-buten = 1,2-buten, která tak „uzavírá“ trojúhelníkové reakční schéma. Označme ji číslem 3. Rychlost této reakce již není nezávislá, resp. trojice rychlostí reakcí trojúhelníkového schématu není nezávislá. Označme je r_1, r_2, r_3 pro odlišení od rychlostí dvojice nezávislých reakcí. Reakční rychlosti složek musí být stále stejné, ať už je vyjádříme pomocí rychlostí dvou nezávislých reakcí, nebo pomocí tří rychlostí trojúhelníkového schématu. Z tohoto faktu obdržíme následující vztahy mezi různými reakčními rychlostmi:

$$J_1 = r_1 - r_3, \quad J_2 = r_2 - r_3.$$

Vidíme, že neplatí zejména $J_1 = r_1$ a $J_2 = r_2$. Znamená to, že z trojice závislých (rychlostí) reakcí neuděláme dvojici nezávislých prostě tak, že jednu vyškrtneme; tato informace je v chemii docela neznámá.

5. Závěr

Ukázali jsme si, jak může matematika přispět k odhalování schémat chemických reakcí. Neznamená to, že by chemici měli svůj pohled a přístup v této oblasti zavrhnout. Měli by ale kromě čistě chemických úvah zahrnout i uvedené podněty matematické, tím spíše, že matematiku k vyhodnocování kinetických dat běžně používají. Matematický pohled by jim mohl usnadnit práci omezením se na nezávislé reakce, které k vystižení chemických přeměn (matematicky) zcela postačují.

Pokud je z chemických důvodů nutno uvažovat i další, závislé reakce, matematický rozbor ukazuje, jak jsou jejich rychlosti spjaty s rychlostmi reakcí nezávislých.

Reference

[1] R. Bowen: *On the stoichiometry of chemically reacting materials*, Arch. Rational Mech. Anal. **29** (1968), 114–124.

[2] I. Samohýl: *Racionální termodynamika chemicky reagujících směsí*, část 28, Academia, Praha, 1982.

[3] M. Pekař: *Rates of reactions as a mathematical consequence of the permanence of atoms and the role of independent reactions in the description of reaction kinetics*, Front. Chem. **6** (2018), article 287.

[4] M. J. Pilling, P. W. Seakins: *Reaction Kinetics*, Oxford University Press, New York, 1996.

[5] R. A. Alberty: *Principle of Detailed Balance in Kinetics*, J. Chem. Education **81** (2004), No. 8, 1206–1209.

Miloslav Pekař, Ústav fyzikální a spotřební chemie, Fakulta chemická, Vysoké učení technické v Brně, Purkyňova 118, 612 00 Brno,

e-mail: `pekar@fch.vut.cz`

TRAJEKTORIE AUTONOMNÍCH ROVNIC V ROVINĚ I. LINEÁRNÍ SOUSTAVY A ROVNICE

JAN FRANCŮ

Abstrakt. Článek se zabývá trajektoriemi řešení autonomních soustav dvou lineárních obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu a jedné lineární rovnice druhého řádu. Za předpokladu existence a jednoznačnosti řešení jsou analyzovány všechny případy izolovaných i neizolovaných singulárních bodů ilustrovaná konkrétními příklady včetně fázových portrétů. Navíc je probrán implicitní popis trajektorií v kartézských i v polárních souřadnicích.

Úvod

Obyčejné diferenciální rovnice se využívají při modelování řady jevů ve fyzice, mechanice, biologii, ekonomii i dalších oblastech. Řešení ve tvaru předpisu funkce však neříká mnoho o chování veličiny, kterou jsme modelovali. Názornější informaci dává graf řešení, který však lze znázornit v rovině jen v případě jedné rovnice prvního řádu. Pokud rovnice splňuje podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení v nějaké oblasti, grafy řešení tvoří „rovnoběžné“ neprotínající se křivky.

Tato vlastnost už není u rovnice druhého řádu. Protože řešení je určeno dvěmi počátečními podmínkami, hodnotou a derivací, každým bodem prochází nekonečně mnoho grafů řešení s různými směrnicemi. Podobně grafem řešení soustavy dvou rovnic prvního řádu je křivka v prostoru $\mathbb{R}^3$, kterou také nelze znázornit v rovině.

Problém řeší trajektorie řešení. V případě soustavy dvou rovnic prvního řádu trajektorie je průmět grafu řešení do prostoru hodnot, kterým je rovina. Jestliže rovnice nebo soustava rovnic je autonomní, tj. nezávisí na proměnné x: „okolnosti“ jevu se v čase x nemění, závisí jenom na aktuálních hodnotách řešení. Řešení vycházející ze stejného bodu v různých časech mají sice různé grafy (posunuté v čase x) ale stejné trajektorie. Jsou to křivky nebo body v rovině. Trajektorie nekonstantních řešení jsou lokálně „rovnoběžné“ křivky, v okolí konstantního řešení – jeho trajektorií je tzv. singulární bod – se trajektorie chovají různě.

Příkladem reálné situace je pohyb hrotu pera po papíru (bez zvedání od papíru). Trajektorie tohoto pohybu je křivka, kterou pero na papíře zanechalo. Ke křivce přidáváme orientaci podle směru pohybu při rostoucím času.

2010 *MSC.* Primární 34A30.

Klíčová slova. autonomní diferenciální rovnice a systémy, trajektorie, typy singulárních bodů, implicitní popis trajektorií v kartézských a polárních souřadnicích.

V případě autonomní rovnice druhého řádu k hodnotě řešení $y(x)$ přidáme jako druhou souřadnici hodnotu derivace řešení $y'(x)$. Dostáváme tak body $(y(x), y'(x))$ v rovině, které tvoří křivku, tj. trajektorii v tzv. fázovém prostoru.

Trajektorie řešení tak dává názornou informaci o chování řešení. Zajímavé je zejména chování trajektorií v okolí trajektorie konstantního řešení, tzv. singulárního bodu. Z obrázku lze také zjistit typ a vlastnosti singulárního bodu.

Obecné řešení $\mathbf{y}(x) = c_1\mathbf{u}_1(x) + c_2\mathbf{u}_2(x)$ dvoudimenzionální soustavy lineárních diferenciálních rovnic je určeno dvěma konstantami c_1, c_2. Trajektorie je tak křivka zapsaná v parametrickém tvaru. Většinou není snadné určit tyto konstanty pro trajektorii procházející daným bodem $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$. Implicitní popis trajektorie ve tvaru $F(y_1, y_2) = k$ umožňuje určit konstantu k dosazením souřadnic bodu a tím určit hledanou trajektorii. Pro tento účel se v řadě případů hodí implicitní popis v kartézských souřadnicích, v řadě případů je však vhodnější popis v polárních souřadnicích.

Cílem článku je probrat všechny případy a možnosti trajektorií v okolí singulárních bodů lineární soustavy dvou rovnic a rovnice druhého řádu a jejich popis v implicitním tvaru v kartézských i polárních souřadnicích. V první sekci formulujeme autonomní soustavy a rovnice, trajektorie řešení a jejich vlastnosti. Druhá sekce se zabývá trajektoriemi v okolí singulárního bodu v rovině, třetí analyzuje singulární body lineárních rovnic. Čtvrtá sekce se zabývá implicitním popisem trajektorií a pátá přináší příklady všech typů singulárních bodů lineárních rovnic v rovině, jejich fázových portrétů a implicitních popisů trajektorii. V poslední sekci jsou výsledky implicitního popisu trajektorií zhodnoceny.

Implicitní popis trajektorií v kartézských souřadnicích jsem přidal z podnětu doc. M. Kureše. Doplnil jsem implicitní popis trajektorií v polárních souřadnicích. Oba, hlavně ten druhý, jsou asi výsledky nové.

1. Autonomní soustavy, rovnice a jejich trajektorie

Rovnici nebo soustavu rovnic nazveme *autonomní*, jestliže rovnice nebo soustava nezávisí na nezávislé proměnné. Rovnice prvního řádu $y'(x) = f(x, y)$ je tedy autonomní, pokud funkce $f(x, y)$ nezávisí na proměnné x, rovnici prvního řádu tak můžeme zapsat ve tvaru $y' = f(y)$. Autonomní lineární rovnice $y' + ay = b$ má koeficienty a, b konstantní.

Autonomní soustava rovnic

Soustavu n autonomních obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu pro neznámé funkce $y_1(x), \dots, y_n(x)$ lze obecně zapsat ve tvaru $y_i' = f_i(y_1, \dots, y_n)$, $i = 1, \dots, n$. Tato soustava je *autonomní*, protože funkce f_i nezávisejí na proměnné x. Označme $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))$ vektorovou funkci řešení a $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ vektorovou funkci pravých stran, kde funkce $f_i(y_1, \dots, y_n) \equiv f_i(\mathbf{y})$. Soustavu n autonomních diferenciálních rovnic prvního řádu lze tak zapsat ve tvaru

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(x)) \,. \tag{1.1}$$

Piccardova věta dává existenci a jednoznačnost řešení v případě, kdy pravé strany $f_i(y_1, \dots, y_n)$, jsou lokálně lipschitzovské v proměnných y_i.

Věta 1.1. *Nechť G je oblast (otevřená souvislá množina) v $\mathbb{R}^n$ a vektorová funkce $\mathbf{f}\colon G \to \mathbb{R}^n$ je lokálně lipschitzovká v oblasti G, tj. pro každou kompaktní (omezenou a uzavřenou) podmnožinu $K \subset G$ existuje kladná konstanta L (může záviset na množině K) taková, že*

$$|\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\overline{\mathbf{y}})| \le L\,|\mathbf{y} - \overline{\mathbf{y}}|\,, \qquad \forall\,\mathbf{y}, \overline{\mathbf{y}} \in K\,, \tag{1.2}$$

kde $|\mathbf{y} - \overline{\mathbf{y}}|$ je vzdálenost bodů v $\mathbb{R}^n$. Potom pro každý bod $\boldsymbol{\gamma} \in G$ a $x_0 \in \mathbb{R}$ má soustava (1.1) *právě jedno řešení $\mathbf{y}(x)$ splňující podmínku $\mathbf{y}(x_0) = \boldsymbol{\gamma}$.*

Pokud funkce $\mathbf{f}$ je jen spojitá, řešení existuje, ale nemusí být jediné.

Autonomní lineární soustavu n rovnic lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\,\mathbf{y} + \mathbf{b} \tag{1.3}$$

s maticí konstantních koeficientů $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a konstantním vektorem $\mathbf{b}$ na pravé straně. Pravá strana $\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}\,\mathbf{y} + \mathbf{b}$ je lipschitzovská v celém $\mathbb{R}^n$. Platí proto

Věta 1.2. *Nechť $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Potom pro každý bod $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^n$ a $x_0 \in \mathbb{R}$ soustava* (1.3) *má právě jedno řešení $\mathbf{y}(x)$ splňující podmínku $\mathbf{y}(x_0) = \boldsymbol{\gamma}$.*

Ve fyzikálních aplikacích obvykle nezávisle proměnnou x je čas. Pojem autonomní systém diferenciálních rovnic je proto přirozený – popisuje jevy, při kterých se s časem x nemění podmínky, které tvoří data úlohy.

Trajektorie, jejich vlastnosti a druhy

Trajektorie řešení je průmět grafu řešení v prostoru $I \times \mathbb{R}^n$ do prostoru hodnot, tzv. *fázového prostoru*, kterým je $\mathbb{R}^n$:

Definice 1.3. Trajektorie $\langle \mathbf{y} \rangle$ řešení $\mathbf{y}(x)$ na intervalu I je množina hodnot, kterých řešení nabývá

$$\langle \mathbf{y} \rangle := \{\mathbf{y}(x) \in \mathbb{R}^n \;\big|\; x \in I\}\,. \tag{1.4}$$

Pokud trajektorie je křivka, orientujeme ji podle rostoucího x. Trajektorie konstantního řešení je bod, zvaný *singulární trajektorie.*

Poznamenejme, že zatímco graf řešení je křivka v $\mathbb{R}^{n+1}$, trajektorie řešení $\mathbf{y}(x)$ je množina hodnot řešení, tj. křivka, případně bod v definičním oboru G funkce $\mathbf{f}(\mathbf{y})$, která je podmnožinou tzv. fázového prostoru $\mathbb{R}^n$. Šipka ukazuje orientaci „pohybu“ hodnoty řešení po trajektorii při rostoucím x.

Budeme se zabývat jen trajektoriemi úplných (také maximálních) řešení, tj. řešení na maximálním intervalu, které už nelze prodloužit na větší interval. Budeme předpokládat, že podmínky existence a jednoznačnosti řešení jsou splněny.

Věta 1.4. *Nechť $\mathbf{f}\colon G \to \mathbb{R}^n$ je spojitá funkce a $\mathbf{y}(x)$ úplné řešení rovnice* (1.1)*. Potom pro jeho trajektorii platí:*

(a) *Trajektorie $\langle \mathbf{y} \rangle$ řešení $\mathbf{y}$ je souvislá množina v oblasti $G \subset \mathbb{R}^n$.*

(b) *Je-li* $\mathbf{y}(x)$ *úplné řešení definované na intervalu* (a,b)*, potom pro každé* $c\in\mathbb{R}$ *funkce* $\mathbf{y}_c(x)=\mathbf{y}(x-c)$ *je také úplné řešení na posunutém intervalu* $(a+c,b+c)$ *a má stejnou trajektorii.*

(c) *Jestliže* $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ *je lokálně lipschitzovská, dvě úplná řešení mají buď disjunktní trajektorie nebo jejich trajektorie jsou totožné.*

(d) *Pokud* $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ *je lokálně lipschitzovská, existují jen tři druhy trajektorií:*
  (α) *singulární bod – trajektorie konstantního řešení,*
  (β) *uzavřená neprotínající se křivka – trajektorie periodického řešení,*
  (γ) *neprotínající se křivka bez koncových bodů – ostatní trajektorie.*

Náčrt důkazů. (a) Tvrzení je důsledkem vlastnosti spojitého zobrazení: *Spojité zobrazení souvislou množinu – interval – zobrazí na souvislou množinu.*

(b) Označme $\mathbf{y}_c(x) = \mathbf{y}(x-c)$. Tvrzení je důsledkem následující rovnosti $\mathbf{y}_c'(x)=\mathbf{y}'(x-c)=\mathbf{f}(\mathbf{y}(x-c))=\mathbf{f}(\mathbf{y}_c(x))$.

(c) Jestliže trajektorie dvou řešení $\mathbf{y}_1(x)$ a $\mathbf{y}_2(x)$ mají společný bod, díky jednoznačnosti obě řešení mají stejné pokračování a tím i stejnou trajektorii.

(d) Konstantní řešení dává singulární trajektorii – případ (α). Jestliže se trajektorie úplného nekonstantního řešení protíná, tj. řešení nabývá stejné hodnoty pro různá $x_1 < x_2$, potom z jednoznačnosti plyne, že řešení je periodické a jeho trajektorie je uzavřená neprotínající se křivka – případ (β). Jestliže se trajektorie neprotíná, řešení je prostá křivka, případ γ. □

V případě $n=2$ grafem řešení je křivka v $\mathbb{R}^3$. Trajektorie řešení je množina (křivka nebo bod) v rovině, které už lze načrtnout. Budeme se proto zabývat soustavou dvou rovnic, i když příslušná tvrzení platí i pro soustavu více rovnic.

Rovnice n-tého řádu

Rovnice n-tého řádu $y^{(n)}=f(x,y,y',y'',\dots,y^{(n-1)})$ je autonomní, pokud funkce f nezávisí na x. Autonomní rovnici lze proto zapsat ve tvaru

$$y^{(n)}=f(y,y',y'',\dots,y^{(n-1)})\,, \tag{1.5}$$

rovnici doplníme n počátečními podmínkami v určitém bodě x_0:

$$y(x_0)=\gamma_0\,,\quad y'(x_0)=\gamma_1\,,\quad y''(x_0)=\gamma_2\,,\quad \dots,\quad y^{(n-1)}(x_0)=\gamma_{n-1}\,. \tag{1.6}$$

Pro řešení rovnice n-tého řádu platí analogické tvrzení:

Věta 1.5. *Nechť* G *je oblast v* $\mathbb{R}^n$ *a* $f\colon G\to\mathbb{R}^n$ *funkce spojitá v* G, $x_0,\gamma_i\in\mathbb{R}$. *Potom existuje funkce* $y(x)$ *splňující rovnici* (1.5) *a počáteční podmínky* (1.6). *Pokud* f *je navíc lokálně lipschitzovská v* G*, viz Větu 1.1, potom řešení je jediné.*

Každou rovnici n-tého řádu (1.5) lze převést na soustavu n rovnic prvního řádu

$$y_1'=y_2\,,\quad y_2'=y_3\,,\quad y_3'=y_4\,,\quad \dots,\quad y_n'=f(y_1,y_2,\dots,y_{n-1})\,,$$

přičemž nové neznámé jsou

$$y_1=y\,,\quad y_2=y'\,,\quad y_3=y''\,,\quad \dots,\quad y_n=y^{(n-1)}\,.$$

Počáteční podmínky (1.6) přitom přejdou na

$$y_1(x_0)=\gamma_0\,,\quad y_2(x_0)=\gamma_1\,,\quad y_3(x_0)=\gamma_2\,,\dots,\quad y_n(x_0)=\gamma_{n-1}\,.$$

Trajektorie řešení rovnice n-tého řádu

Trajektorie rovnice n-tého řádu definujeme jako trajektorii vektorového řešení příslušné soustavy n rovnic prvního řádu, přičemž první složka y_1 odpovídá hodnotě řešení a další složky derivacím řešení. Trajektorie tedy bude křivka nebo bod ve fázovém prostoru $\mathbb{R}^n$, se souřadnicemi $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$:

Definice 1.6. Trajektorie řešení $y(x)$ rovnice (1.5) na intervalu I je množina

$$\langle \mathbf{y} \rangle := \{(y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) \in \mathbb{R}^n \mid x \in I\}.$$

Pokud $y(x)$ není konstantní, trajektorie je křivka, její orientaci vyznačíme šipkou.

Trajektorie řešení rovnice n-tého řádu mají stejné vlastnosti jako trajektorie řešení soustavy n rovnic formulované ve Větě 1.4.

V tomto článku se budeme zabývat jen rovnicemi druhého řádu $y'' = f(y, y')$. Trajektorie řešení jsou křivky případně body v rovině, na „vodorovnou" osu y vynášíme hodnoty $y(x)$, na „svislou" osu hodnoty derivace $y'(x)$. Kromě vlastností z Věty 1.4 navíc platí vlastnosti, které nám usnadní zjistit orientaci trajektorií.

Věta 1.7. *Trajektorie konstantních řešení leží na ose y, tj. $y' = 0$. Trajektorie s kladnou souřadnicí y' jsou orientovány v kladném směru, tj. vpravo, trajektorie se zápornou souřadnicí y' jsou orientovány v záporném směru, tj. vlevo.*

2. Trajektorie v okolí singulárních bodů

Vraťme se k soustavě dvou rovnic prvního řádu, kterou zapisujeme ve tvaru

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})\,, \qquad \text{tj.} \quad y_1' = f_1(y_1, y_2)\,, \qquad y_2' = f_2(y_1, y_2)\,. \tag{2.1}$$

Předpokládáme, že funkce $f_1(y_1, y_2)$, $f_2(y_1, y_2)$ jsou definované a lokálně lipschitzovské v oblasti $G \subset \mathbb{R}^2$. Podle Věty 1.1 každým bodem $\mathbf{y}$ množiny G prochází právě jedna trajektorie. Víme, že trajektorie jsou buď body, tzv. singulární body – trajektorie konstantních řešení, nebo regulární body trajektorií, které jsou neprotínající se uzavřené nebo otevřené křivky. Různé trajektorie jsou disjunktní, oblast G v rovině y_1, y_2 se tak rozpadne na body a neprotínající se křivky.

Souřadnice singulárního bodu $\mathbf{y}_0$ splňují soustavu $\mathbf{f}(\mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$. Uvažujme bod $\mathbf{y}^*$, kde $\mathbf{f}(\mathbf{y}^*) \neq \mathbf{0}$. Protože funkce $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ je spojitá, regulární bod $\mathbf{y}^*$, kde $\mathbf{f}(\mathbf{y}^*) \neq \mathbf{0}$, má okolí, kde $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ jsou také nenulové. Díky tomu každým bodem okolí prochází také regulární trajektorie. Tyto trajektorie v okolí $\mathbf{y}^*$ tvoří množinu navzájem disjunktních „rovnoběžných" a „souhlasně orientovaných" neprotínajících se křivek, které lze „spojitě převést" jednu na druhou se zachováním orientace.

V singulárním bodě – trajektorii konstantního řešení – je situace odlišná, trajektorie se mohou chovat různě, viz např. Příklady 5.2, 5.3, 5.4.

Typy izolovaného singulárního bodu

Budeme se zabývat *izolovanými* singulárními body, to jsou body $\mathbf{y}_0$, v jejichž ryzím okolí (tj. okolí bodu $\mathbf{y}_0$ bez bodu $\mathbf{y}_0$) je $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$. Situaci trajektorií v okolí neizolovaných singulárních bodů probereme později.

Definice 2.1. Uvažujme trajektorie řešení soustavy rovnic (2.1). Nechť $\mathbf{y}_0$ je izolovaný singulární bod soustavy rovnic (2.1), tj. izolované řešení soustavy rovnic $\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$. Bod $\mathbf{y}_0$ se nazývá:

střed – pokud existuje ryzí okolí U bodu $\mathbf{y}_0$, ve kterém každým bodem $\mathbf{y} \in U$ prochází uzavřená trajektorie obsahující ve svém vnitřku bod $\mathbf{y}_0$.

atraktivní uzel – pokud existuje ryzí okolí, ve kterém jsou jen trajektorie směřující do tohoto bodu, přičemž směrový vektor tečny trajektorie má limitu:

$$\lim_{x\to\infty} \mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_0 , \quad \text{a existuje limita} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\mathbf{y}'(x)}{\|\mathbf{y}'(x)\|} .$$

neatraktivní uzel – pokud existuje ryzí okolí, ve kterém jsou jen trajektorie z bodu $\mathbf{y}_0$ vycházející, přičemž směrový vektor tečny trajektorie má limitu:

$$\lim_{x\to-\infty} \mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_0 , \quad \text{a existuje limita} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{\mathbf{y}'(x)}{\|\mathbf{y}'(x)\|} .$$

atraktivní ohnisko – pokud existuje ryzí okolí, ve kterém jsou jen trajektorie blížící se k bodu $\mathbf{y}_0$, ale směrový vektor tečny trajektorie nemá limitu:

$$\lim_{x\to\infty} \mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_0 , \quad \text{a neexistuje limita} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\mathbf{y}'(x)}{\|\mathbf{y}'(x)\|} .$$

neatraktivní ohnisko – pokud existuje ryzí okolí, ve kterém jsou jen trajektorie vycházející z bodu $\mathbf{y}_0$ a směrový vektor tečny trajektorie nemá limitu:

$$\lim_{x\to-\infty} \mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_0 , \quad \text{a neexistuje limita} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{\mathbf{y}'(x)}{\|\mathbf{y}'(x)\|} .$$

sedlo – pokud existuje ryzí okolí, ve kterém existují jak trajektorie, které se k $\mathbf{y}_0$ blíží, tak trajektorie, které se od něj vzdalují, tj. existují řešení $\mathbf{y}_1(x)$ a $\mathbf{y}_2(x)$ taková, že

$$\lim_{x\to\infty} \mathbf{y}_1(x) = \mathbf{y}_0 , \qquad \lim_{x\to-\infty} \mathbf{y}_2(x) = \mathbf{y}_0 .$$

Poznámky 2.2.

(a) V literatuře lze najít také jiné názvy. Singulárnímu bodu *střed* se říká také *centrum*, *atraktivní* (uzel nebo ohnisko) se nazývá také *přitahující* a *neatraktivní* (uzel nebo ohnisko) se nazývá také *odpuzující*.

(b) Uzel a ohnisko se liší limitou tečného vektoru. V případě atraktivního uzlu se trajektorie při $x \to \infty$ blíží k singulárnímu bodu „přímo“, tj. limita orientovaného úhlu, který svírá tečný vektor s osou y je konečná.

V případě atraktivního ohniska se trajektorie blíží k singulárnímu bodu po spirále „obíhající“ singulární bod nekonečně mnoho krát, tj. orientovaný úhel tečny nemá konečnou limitu, ale jde do $\pm\infty$.

V případě neatraktivního uzlu nebo ohniska jde o limity pro $x \to -\infty$.

(c) Singulární body v rovině, tj. v případě soustavy dvou rovnic, mohou být pouze uvedených typů: střed, uzel, ohnisko a sedlo.

(d) Zatím jsme se zabývali izolovanými singulárními body. V případě, kdy singulární body v rovině tvoří křivku, mohou nastat tyto případy:

(α) Body křivky jsou atraktivní uzly, tj. ke každému bodu se blíží po jedné trajektorii z obou stran.
(β) Body křivky jsou neatraktivní uzly, tj. z každého bodu vycházejí po jedné trajektorii na obě strany.
(γ) Trajektorie v okolí křivky singulárních bodů vedou „rovnoběžně" podél křivky jako v případě střed.

(e) Singulární trajektorie mohou zaplnit plochu, například soustava $y_1' = 0$, $y_2' = 0$ má jen konstantní řešení a singulární body tvoří celou rovinu.
(f) Existují autonomní soustavy rovnic, které nemají žádný singulární bod, například $y_1' = 1$, $y_2' = 2$.
(g) Jestliže $\mathbf{y}_0 \neq \mathbf{0}$ splňuje $\mathbf{f}(\mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$, singulární bod $\mathbf{y}_0$ přesuneme do počátku vztahem $\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}^*(x) + \mathbf{y}_0$. Potom $\mathbf{0}$ bude singulárním bodem rovnice $(\mathbf{y}^*)' = \mathbf{f}^*(\mathbf{y}^*)$, kde $\mathbf{f}^*(\mathbf{y}^*) = \mathbf{f}(\mathbf{y}^* + \mathbf{y}_0)$. Trajektorie se jen posunou o vektor $\mathbf{y}_0$. Proto stačí studovat jen případ singulárního bodu v počátku.

3. Singulární body lineárních diferenciálních rovnic

Uvažujme autonomní soustavu lineárních rovnic $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\,\mathbf{y} + \mathbf{b}$, kde matice $\mathbf{A}$ a vektor $\mathbf{b}$ jsou konstantní. Singulárními body jsou trajektorie konstantních řešení, která jsou řešeními soustavy algebraických rovnic $\mathbf{A}\,\mathbf{y} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$. Podle Frobeniovy věty v závislosti na hodnosti $\mathrm{h}(\mathbf{A})$ matice soustavy $\mathbf{A}$ a hodnosti $\mathrm{h}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ rozšířené matice $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ mohou nastat tři případy:

(a) jestliže $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = \mathrm{h}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n$, soustava má pravě jedno řešení,
(b) jestliže $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = \mathrm{h}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) < n$, soustava má nekonečně mnoho řešení,
(c) jestliže $\mathrm{h}(\mathbf{A}) < \mathrm{h}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$, soustava nemá řešení.

V případě (a), kdy $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = \mathrm{h}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n$, soustava $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\,\mathbf{y} + \mathbf{b}$ má právě jeden singulární bod, který označíme $\mathbf{y}_0$. Substitucí $\mathbf{y} = \mathbf{y}^* + \mathbf{y}_0$ dostáváme soustavu diferenciálních rovnic bez pravé strany $(\mathbf{y}^*)' = \mathbf{A}\,\mathbf{y}^*$, která má triviální řešení $\mathbf{y}^*(x) = \mathbf{0}$. Je to jediný singulární bod. V dalším proto budeme zkoumat soustavu dvou rovnic bez pravé strany. Přidáním pravé strany $\mathbf{b}$ do soustavy se všechny trajektorie jen posunou o vektor $\mathbf{y}_0$. Případy (b) a (c) probereme později.

Soustava dvou lineárních rovnic

Uvažujme soustavu rovnic $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\,\mathbf{y}$, kde $\mathbf{A}$ je konstantní matice typu 2×2. Tato soustava má obecné řešení

$$\mathbf{y}(x) = c_1\,\mathbf{u}_1(x) + c_2\,\mathbf{u}_2(x)\,,$$

kde $\mathbf{u}_1(x)$, $\mathbf{u}_2(x)$ jsou nezávislá řešení rovnice $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\,\mathbf{y}$. Pro $c_1 = c_2 = 0$ dostáváme nulové řešení, které dává jediný singulární bod $\mathbf{0} \equiv (0,0)$. Trajektorie v jeho okolí jsou určeny pomocí řešení $\mathbf{u}_1(x)$ a $\mathbf{u}_2(x)$, která závisejí na kořenech λ_1, λ_2 charakteristického polynomu

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{Tr}(\mathbf{A})\,\lambda + \det(\mathbf{A})\,.$$

Je-li matice $\mathbf{A}$ je regulární, kořeny λ_1, λ_2 jsou nenulové. Jediným singulárním bodem je počátek $\mathbf{0}$, který je tím pádem izolovaný. Podle hodnoty diskriminantu $D = \mathrm{Tr}(\mathbf{A})^2 - 4\det(\mathbf{A})$ kvadratické rovnice $P(\lambda) = 0$ rozlišujeme tři případy:

(1) $D > 0$ – rovnice má dva různé reálné kořeny λ_1, λ_2 a existují dva nezávislé vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, které splňují rovnici $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Získali jsme tak dvě řešení $\mathbf{u}_i(x) = \mathbf{v}_i \mathrm{e}^{\lambda_i x}$. Je-li $\lambda_i > 0$, řešení $\mathbf{u}_i(x)$ se od počátku vzdaluje do nekonečna:

$$\lim_{x\to-\infty} \|\mathbf{u}_i(x)\| = 0\,, \qquad \lim_{x\to\infty} \|\mathbf{u}_i(x)\| = \infty\,.$$

V případě $\lambda_i < 0$ řešení $\mathbf{u}_i(x)$ je atraktivní, z nekonečna se blíží k počátku:

$$\lim_{x\to-\infty} \|\mathbf{u}_i(x)\| = \infty\,, \qquad \lim_{x\to\infty} \|\mathbf{u}_i(x)\| = 0\,.$$

Ve všech případech limita směrnice tečny trajektorie existuje a je konečná. Dostáváme tak tři případy kořenů λ_i a tím i singulárních bodů:

(1a) oba kořeny jsou kladné $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ – počátek je **neatraktivní uzel**,

(1b) jeden je záporný a druhý kladný: $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ – vychází **sedlo**,

(1c) oba kořeny jsou záporné: $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ dostáváme – **atraktivní uzel**.

(2) $D = 0$ – rovnice má dvojnásobný reálný kořen $\lambda_{1,2} = \lambda$. Rozlišíme dva případy podle hodnosti matice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$:

(2a) Pokud $\mathrm{h}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$, máme dva nezávislé vlastní vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ splňující $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{v}_i = 0$ a tím i dvě řešení $\mathbf{u}_i(x) = \mathbf{v}_i\, \mathrm{e}^{\lambda x}$, trajektorie jsou polopřímky.

(2b) Pokud $\mathrm{h}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 1$, existuje „dvojice“ nenulových vektorů $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ taková, že $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{w} = \mathbf{v}$. Vektory dávají řešení $\mathbf{u}_1(x) = \mathbf{v}\,\mathrm{e}^{\lambda x}$, $\mathbf{u}_2(x) = \mathbf{v}\,x\mathrm{e}^{\lambda x} + \mathbf{w}\,\mathrm{e}^{\lambda x}$. Jak pro $x \to \infty$, tak pro $x \to -\infty$ v součinu $x\mathrm{e}^x$ „převládne“ e^x nad x. Dostáváme tak stejný typ singulárního bodu, jen trajektorie řešení $\mathbf{u}_2(x)$ jsou zakřivené.

V obou případech:

(2aa),(2ab) $\lambda > 0$ trajektorie se vzdalují od počátku – **neatraktivní uzel**,

(2ba),(2bb) $\lambda < 0$ trajektorie se blíží k počátku – **atraktivní uzel**.

(3) $D < 0$ – rovnice má dvojici komplexně sdružených kořenů $\lambda_1 = \mu + \mathbf{i}\,\nu$, $\lambda_2 = \mu - \mathbf{i}\,\nu$. Obecné řešení je $\mathbf{y}(x) = (c_1\,\mathbf{v}_1\,\cos(\nu x) + c_2\,\mathbf{v}_2\,\sin(\nu x))\mathrm{e}^{\mu x}$, kde $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ jsou vhodné vektory. Reálná část μ určuje, zda se řešení blíží nebo vzdaluje od počátku. Imaginární část $\nu \neq 0$ dává „rychlost“ rotace okolo počátku. Rozlišíme opět tři případy:

(3a) reálná část μ kořenů λ je kladná – počátek je **neatraktivní ohnisko**,

(3b) reálná část μ kořenů je záporná – vychází **atraktivní ohnisko**,

(3c) reálná část μ kořenů je nulová – dostáváme **střed**.

Zbývá případ soustav dvou lineárních rovnic se singulární maticí $\mathbf{A}$. Pak:

(4) Nechť jeden kořen λ_1 je nulový a druhý λ_2 nenulový. Matice $\mathbf{A}$ je singulární, řešení rovnice $\mathbf{A}\mathbf{y} = 0$ tvoří přímku určenou vektorem $\mathbf{v}_1$, který splňuje rovnici $\mathbf{A}\mathbf{v} = 0$. Body přímky jsou trajektorie konstantních řešení $\mathbf{y}(x) = c_1\mathbf{v}_1$.

Pro jejich klasifikaci převezmeme názvy pro izolované singulární trajektorie. Druhý kořen λ_2 dává řešení $\mathbf{u}_2(x) = \mathbf{v}_2\, e^{\lambda_2 x}$. Podle znaménka λ_2 platí, že do (nebo z) každého singulárního bodu přímky vedou dvě trajektorie:

(4a) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$ – singulární body jsou **neatraktivní uzly**, trajektorie se rovnoběžně vzdalují od singulárních bodů,

(4b) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 < 0$ – singulární body jsou **atraktivní uzly**, trajektorie se rovnoběžně přibližují k singulárním bodům.

(5) Nula je dvojnásobný kořen. Podle hodnosti matice $\mathbf{A}$ máme dva případy:

(5a) $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = 1$ – singulární body tvoří přímku určenou vektorem $\mathbf{v}$, který je nenulovým řešením $\mathbf{A}\mathbf{v} = 0$. Trajektorie druhého řešení $\mathbf{u}_2(x) = \mathbf{v}\, x + \mathbf{w}$ jsou rovnoběžné s přímkou singulárních bodů – body nazveme **středy**,

(5b) $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = 0$, tedy $\mathbf{A} = \mathbf{0}$, singulární body tvoří celou rovinu.

(6) Zbývá ještě analyzovat případ (c) soustavy dvou diferenciálních rovnic s pravou stranou, kdy $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = 0 < 1 = \mathrm{h}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ a soustava $\mathbf{A}\,\mathbf{y} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$ nemá řešení. Potom soustava diferenciálních rovnic nemá singulární body a všechny trajektorie jsou „rovnoběžné“ stejně orientované otevřené křivky nebo přímky.

Rovnice druhého řádu

Autonomní rovnici druhého řádu lze zapsat ve tvaru $y'' = f(y, y')$. Transformací $(y(x), y'(x)) \mapsto (y_1(x), y_2(x))$ lze rovnici převést na soustavu dvou rovnic $y_1' = y_2$, $y_2' = f(y_1, y_2)$. Autonomní lineární rovnice druhého řádu zapsaná ve tvaru

$$L(y) \equiv y'' + a_1\, y' + a_0\, y = b$$

má konstantní koeficienty $a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ i pravou stranu $b \in \mathbb{R}$. Pokud $a_0 \neq 0$, potom rovnice má konstantní řešení $y(x) = b/a_0$, které představuje jediný singulární bod. Transformací $y(x) = y^*(x) + b/a_0$ přesuneme singulární bod do nuly, získáme tak lineární rovnici bez pravé strany $L(y) \equiv y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0$ s obecným řešením

$$y(x) = c_1\, u_1(x) + c_2\, u_2(x)\,, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,,$$

kde $u_1(x), u_2(x)$ jsou nezávislá řešení rovnice $L(y) = 0$, která lze snadno určit pomocí kořenů λ_1, λ_2 charakteristického polynomu $P(\lambda) = \lambda^2 + a_1\,\lambda + a_0$. Převodem $y_1(x) = y(x)$ a $y_2(x) = y'(x)$ získáme soustavu rovnic $y_1' = y_2$, $y_2' = -a_0\, y_1 - a_1\, y_2$ která dává stejný charakteristický polynom $P(\lambda) = \lambda^2 + a_1\,\lambda + a_0$ jako původní rovnice. Podle kořenů λ_1, λ_2 dostáváme stejné výsledky jako pro autonomní soustavu dvou rovnic studovanou v předchozích odstavcích.

Souhrn

Odvodili jsme následující tvrzení o typech singulárních bodů.

Věta 3.1. *Uvažujme soustavu dvou lineárních rovnic $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\,\mathbf{y}$ s regulární maticí $\mathbf{A}$ a odpovídající charakteristický polynom $P(\lambda)$ s nenulovými kořeny λ_1, λ_2 nebo rovnici druhého řádu $y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0$ a odpovídající charakteristický polynom $P(\lambda)$ s nenulovými kořeny λ_1, λ_2. Potom izolovaný singulární bod $\mathbf{0}$ je:*

neatraktivní uzel, *pokud oba kořeny jsou reálné a kladné, tj. $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$,*

atraktivní uzel, *pokud oba kořeny jsou reálné a záporné, tj. $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$,*

sedlo, *pokud jeden kořen je kladný a druhý záporný, tj.* $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$,

neatraktivní ohnisko, *pokud kořeny jsou komplexně sdružené s kladnou reálnou částí, tj.* $\lambda_{1,2} = \mu \pm \mathbf{i}\,\nu$, *(*$\mu > 0$, $\nu \neq 0$*)*,

atraktivní ohnisko, *pokud kořeny jsou komplexně sdružené se zápornou reálnou částí, tj.* $\lambda_{1,2} = \mu \pm \mathbf{i}\,\nu$, *(*$\mu < 0$, $\nu \neq 0$*)*,

střed, *pokud kořeny jsou komplexně sdružené a mají nulovou reálnou část, tj.* $\lambda_{1,2} = \pm\mathbf{i}\,\nu$, *(*$\nu \neq 0$*)*.

V případě jednoho nulového kořene singulární body nejsou izolované, ale tvoří přímku a v případě $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ *celou rovinu. Pokud* $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = 1$, *singulární body jsou:*

neatraktivní uzel, *pokud druhý nenulový kořen je kladný,*

atraktivní uzel, *pokud druhý nenulový kořen je záporný,*

střed, *pokud nula je dvojnásobný kořen, ale* $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = 1$.

4. Implicitní popis trajektorii

Vzorce pro obecné řešení $\mathbf{y}(x) = c_1\,\mathbf{v}_1\,\phi(x) + c_2\,\mathbf{v}_2\,\psi(x)$ určují trajektorie $\langle\mathbf{y}\rangle$ jednotlivých řešení $\mathbf{y}$ pro dané c_1, c_2 jako křivky v parametrickém tvaru. Přitom zobrazení, které řešení $\mathbf{y}(x)$ s parametry c_1, c_2 přiřadí jeho trajektorii $\langle\mathbf{y}\rangle$, kromě singulárních řešení, není prosté: řešení $\mathbf{y}(x)$ a $\mathbf{y}(x-c)$ mají stejnou trajektorii.

Obrácená úloha: *Najít trajektorii, která prochází daným bodem* $\mathbf{y}$ vede na soustavu dvou často nelineárních rovnic $\mathbf{y}(x) = c_1\,\mathbf{v}_1\,\phi(x) + c_2\,\mathbf{v}_2\,\psi(x)$ pro neznámé c_1, c_2, x, která většinou není snadno řešitelná. Implicitní popis trajektorie ve tvaru $\Psi(y_1, y_2) = k$ umožňuje snadno určit trajektorii, která prochází daným bodem $\mathbf{y}$. Stačí dosadit jeho souřadnice do rovnice a dostáváme konstantu k implicitního popisu $\Psi(x, y) = k$. Nevýhodou implicitního popisu křivky je, že nedává orientaci trajektorie, tu nutno určit jiným způsobem.

V Příkladech 5.2, 5.3, 5.4 lze trajektorie snadno popsat implicitně pomocí polynomů. Ve všech případech lineárních rovnic i soustav lze sice trajektorie popsat implicitně, často však funkce $\Psi(y_1, y_2)$ není polynom, popis trajektorie je jen lokální a křivka obsahuje i body, které trajektorii nepatří. Ukážeme, že v některých případech je vhodnější implicitní popis trajektorie v polárních souřadnicích.

Implicitní popis trajektorií v kartézských souřadnicích

Obecné řešení $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$ zapsané ve tvaru $\mathbf{y}(x) = c_1\mathbf{v}_1\phi(x) + c_2\mathbf{v}_2\psi(x)$ s nezávislými vektory $\mathbf{v}_1 = (v_1^1, v_2^1)^T$, $\mathbf{v}_2 = (v_1^2, v_2^2)^T$ a $c_1, c_2 \neq 0$ lze pomocí Cramerova pravidla upravit na tvar

$$\frac{|\mathbf{y},\mathbf{v}|}{c_1|\mathbf{u},\mathbf{v}_2|} = \phi(x)\,, \qquad \frac{|\mathbf{v}_1,\mathbf{y}|}{c_2|\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2|} = \psi(x)\,,$$

kde $|\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2|$ značí determinant $v_1^1\,v_2^2 - v_2^1\,v_1^2$. Pokud funkce $F(\xi, \eta)$ splňuje rovnici $F(\phi(x), \psi(x)) = 0$, potom pro $c_i \neq 0$ trajektorie jsou určeny implicitní rovnicí

$$F\left(\frac{|\mathbf{y},\mathbf{v}_2|}{c_1|\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2|}, \frac{|\mathbf{v}_1,\mathbf{y}|}{c_2|\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2|}\right) = 0\,. \tag{4.1}$$

V případě nenulových reálných kořenů $\lambda_1 \neq \lambda_2$ jsou $\phi(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}$, $\psi(x) = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$ je

$$F(\xi, \eta) = |\xi|^{\lambda_2} - |\eta|^{\lambda_1}\,.$$

Pokud poměr $\lambda_1 : \lambda_2$ je racionální číslo, umocněním dostaneme polynom. V případě dvojnásobného kořene, kdy $\phi(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$, $\psi(x) = x\,\mathrm{e}^{\lambda x}$, vyhovují například funkce

$$F(\xi, \eta) = \lambda\,\tfrac{\eta}{\xi} - \ln|\xi| \quad \text{nebo} \quad F(\xi, \eta) = \exp\left(\tfrac{\lambda\,\eta}{\xi}\right) - \xi\,.$$

V případě komplexně sdružených kořenů, kdy $\phi = \mathrm{e}^{\mu x}\cos(\nu x)$, $\psi = \mathrm{e}^{\mu x}\sin(\nu x)$, kde $\mu, \nu \neq 0$, podmínku splňuje například funkce

$$F(\xi, \eta) = 2\,\mu\;\mathrm{arctg}(\tfrac{\eta}{\xi}) - \nu\,\ln(\xi^2 + \eta^2)\,.$$

Pro $\mu = 0$, $\nu \neq 0$ vyhovuje funkce typu $F(\xi, \eta) = a\,\xi^2 + b\,\xi\eta + c\,\eta^2 = k$, což dává elipsu, případně kružnici. Výsledek můžeme ověřit v systému MAPLE, příkaz

$$\mathit{implicitplot}([F(x, y) = k_1, F(x, y) = k_2, F(x, y) = k_3], x = -3..3, y = -3..3)$$

vykreslí tři trajektorie ve čtverci $(-3, 3) \times (-3, 3)$.

Implicitní rovnice však někdy dává jen část trajektorie nebo obsahuje i body, které trajektorii nepatří. Postup ukážeme v další části na konkrétních příkladech.

Implicitní popis trajektorií v polárních souřadnicích

Polární souřadnice $y_1 = r\,\cos(\theta)$, $y_2 = r\,\sin(\theta)$ je zobrazení

$$(r, \theta) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\,,$$

které je prosté na pruhu pro θ z intervalu šířky 2π: $\theta \in \langle \theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi)$. Rovnice $r = k$ pro $k > 0$ dává kružnice, viz trajektorie Příkladu 5.2, rovnice $\theta = k$ polopřímky, viz trajektorie Příkladu 5.3.

V případě elipsy to už tak snadné není. Elipsu v základní poloze lze implicitně a parametricky popsat

$$\frac{y_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1\,, \qquad y_1 = a\,\cos x\,, \qquad y_2 = b\,\sin x\,. \tag{4.2}$$

Odvodíme její implicitní popis v polárních souřadnicích r, θ. Z (4.2) plyne

$$r^2 = y_1^2 + y_2^2 = (a^2 - b^2)\cos^2 x + b^2\,, \qquad \mathrm{tg}\;\theta = \frac{y_2}{y_1} = \frac{b\,\sin x}{a\,\cos x} = \frac{b}{a}\;\mathrm{tg}\;x\,.$$

Využitím vzorce $\cos^2 x = 1/(1 + \mathrm{tg}^2\,x)$ a vztahu $\mathrm{tg}\,x = \mathrm{tg}\;\theta \cdot a/b$ dostáváme

$$r^2 = (a^2 - b^2)\frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2\,x} + b^2 = (a^2 - b^2)\frac{1}{1 + \frac{a^2}{b^2}\,\mathrm{tg}^2\,\theta} + b^2 =$$

$$= (a^2 - b^2)\frac{b^2\cos^2\theta}{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta} + b^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}$$

Rovnice elipsy v základním tvaru a ve tvaru pootočeném o úhel θ_0 je proto

$$r = \frac{ab}{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^{1/2}}\,, \quad r = \frac{ab}{(a^2\sin^2(\theta - \theta_0) + b^2\cos^2(\theta - \theta_0))^{1/2}}\,.$$

Při převodu popisu trajektorie do polárních souřadnic (r, θ) vycházíme z rovnic

$$\operatorname{tg} \theta = y_2(x)/y_1(x)\,, \qquad r^2 = y_1^2(x) + y_2^2(x)\,.$$

Dosazením obecného řešení do první rovnice se snažíme získat vyjádření funkcí $\varphi(x)$ a $\psi(x)$ pomocí proměnné θ, které potom dosadíme do druhé rovnice.

Dostaneme tak závislost $r = f(\theta, k)$, kde k závisí na konstantách c_1, c_2. Výpočet můžeme ověřit v systému MAPLE, například příkaz

$$\mathit{polarplot}(\min(f(\text{theta}), 5), \text{theta} = 0..2 \cdot \text{Pi})$$

vykreslí jednu trajektorii v kruhu o poloměru 5.

Postup ukážeme v konkrétních příkladech v další části.

5. Příklady

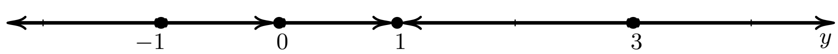
Přestože pojem trajektorie má význam především pro autonomní soustavu rovnic, nebo rovnice vyššího řádu, začneme jednorozměrným případem, kdy hodnoty řešení jsou reálná čísla a trajektorie jsou úsečky nebo body na přímce.

Rovnice prvního řádu

Autonomní rovnice prvního řádu je rovnice tvaru $y' = f(y)$. Nechť funkce $f(y)$ je definovaná, spojitá a lipschitzovská na množině $G \subset \mathbb{R}$. Body $y \in G$, kde $f(y) = 0$ jsou singulární body, trajektorie konstantních řešení. Otevřené úsečky, kde $f(y) > 0$, jsou trajektorie rostoucích řešení, jsou orientované vpravo. Otevřené úsečky, kde $f(y) < 0$, jsou trajektorie klesajících řešení, jsou orientované vlevo. Pro určení trajektorií řešení rovnice $y' = f(y)$ tak není nutné pracně počítat řešení.

Příklad 5.1. Určete trajektorie řešení rovnice $y' = (y+1)\,y^2\,(y-1)\,(y-3)$.

Řešení: Pravá strana rovnice je polynom $f(y) = (y+1)\,y^2\,(y-1)\,(y-3)$, který má kořeny $-1, 0, 1, 3$, přičemž kořen 0 je dvojnásobný. Rovnice proto má čtyři konstantní řešení, které dávají čtyři singulární trajektorie: body $y = -1$, $y = 0$, $y = 1$, $y = 3$. Otevřené úsečky mezi singulárními body jsou trajektorie nekonstantních řešení: pro $f(y) > 0$ orientované vpravo a pro $f(y) < 0$ orientované vlevo. Polynom $f(y)$ je pro $y > 3$ kladný, v jednoduchých kořenech mění znaménko, v dvojnásobném kořenu znaménko nemění. Trajektorie jsou na obr. 1.



Obrázek 1. Trajektorie řešení rovnice $y' = (y+1)\,y^2\,(y-1)\,(y-3)$.

Z obrázku je navíc vidět, že singulární řešení $y(x) = 1$ je stabilní a atraktivní, ostatní řešení $y(x) = -1$, $y(x) = 0$, $y(x) = 3$ jsou nestabilní a neatraktivní. $\square$

Soustavy dvou rovnic prvního řádu – izolované singulární body

V následujících příkladech určíme obecné řešení, fázový portrét řešení, typ singulárního bodu i příslušné implicitní rovnice pro trajektorie v kartézských nebo polárních souřadnicích. Ve všech příkladech nebudeme zmiňovat singulární trajektorii - počátek $(0,0)$. Začneme případy, kdy náčrt trajektorií je snadný.

Příklad 5.2. Určete trajektorie řešení soustavy rovnic $y_1' = -y_2$, $y_2' = y_1$.

Řešení: Do zderivované první rovnice $y_1'' = -y_2'$ dosadíme za neznámou y_2' z druhé rovnice. Dostáváme tak rovnici $y_1'' + y_1 = 0$, jejímž obecným řešením je funkce $y_1(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Z rovnice $y_2 = -y_1'$ dopočítáme $y_2(x)$. Je to případ (3c) střed. Získali jsme obecné řešení:

$$y_1(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x\,, \qquad y_2(x) = c_1 \sin x - c_2 \cos x\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Snadno lze ověřit, že pro každé $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ platí

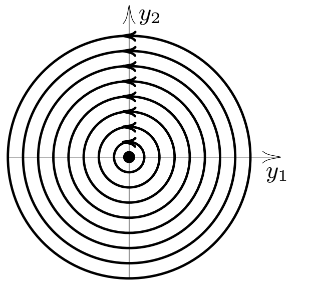
$$y_1^2(x) + y_2^2(x) = c_1^2 + c_2^2\,. \tag{5.1}$$

Trajektorie jsou kružnice se středem v počátku. Tečný vektor kružnice s $c_1 > 0$, $c_2 = 0$, v $x = \frac{\pi}{2}$ dává orientaci $(-\sin\frac{\pi}{2}, \cos\frac{\pi}{2}) = (-1, 0)$ kružnic v bodech $(0, c_1)$. Singulární trajektorie je *střed*, případ (3c).

Rovnice (5.1) dává také implicitní popis trajektorií v kartézských i polárních souřadnicích

$$\Phi(y_1, y_2) \equiv y_1^2 + y_2^2 = k > 0\,, \quad \Psi(r, \theta) \equiv r = k > 0\,.$$

Trajektorie jsou na obr. 2. □



Obrázek 2. Trajektorie řešení soustavy $y_1' = -y_2$, $y_2' = y_1$.

Příklad 5.3. Určete trajektorie řešení soustavy rovnic $y_1' = y_1$, $y_2' = y_2$.

Řešení: Rovnice $y_1' = y_1$ má řešení $y_1(x) = c_1\,\mathrm{e}^x$, rovnice $y_2' = y_2$ dává $y_2 = c_2\,\mathrm{e}^x$, obecné řešení je

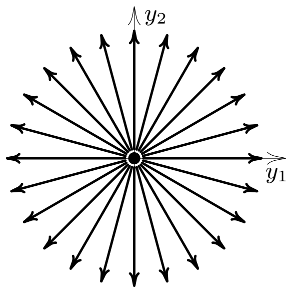
$$y_1(x) = c_1\,\mathrm{e}^x, \qquad y_2(x) = c_2\,\mathrm{e}^x.$$

Protože $y_2/y_1 = c_2/c_1$ je konstantní a e^x je rostoucí, trajektorie jsou otevřené polopřímky z počátku orientované „ven“, viz obr. 3. Singulární trajektorie je neatraktivní uzel, případ (2aa).

Z rovnice plyne také implicitní popis trajektorii v kartézských i polárních souřadnicích

$$\Phi(y_1, y_2) \equiv \frac{y_2}{y_1} = k\,, \qquad \Psi(r, \theta) \equiv \theta = k\,,$$

k prvnímu nutno doplnit polopřímky $y_1 = 0$. □

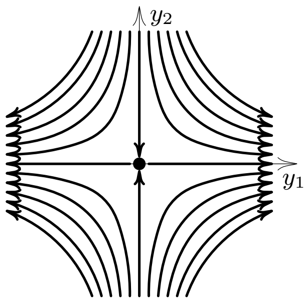


Obrázek 3. Trajektorie řešení soustavy $y_1' = y_1$, $y_2' = y_2$.

Příklad 5.4. Určete trajektorie řešení soustavy rovnic $y_1' = y_1$, $y_2' = -y_2$.

Řešení: Rovnice $y_1' = y_1$ má řešení $y_1(x) = c_1\,\mathrm{e}^x$, rovnice $y_2' = -y_2$ dává $y_2 = c_2\,\mathrm{e}^{-x}$. Obecné řešení je

$$y_1(x) = c_1\,\mathrm{e}^x, \qquad y_2(x) = c_2\,\mathrm{e}^{-x}. \tag{5.2}$$



Obrázek 4. Trajektorie řešení soustavy $y_1' = y_1$, $y_2' = -y_2$.

Trajektorie pro $c_1 = 0$ je pro $c_2 > 0$ kladná část a pro $c_2 < 0$ záporná část osy y_2 orientované k počátku. Pro $c_2 = 0$ dostáváme kladnou a zápornou část osy y_2, trajektorie jsou orientovány „ven“.

Ostatní trajektorie tvoří čtyři systémy větví hyperbol $y_2 = c_1\,c_2/y_1$, orientované „shora doprava“, „shora doleva“, „zdola doprava“ a „zdola doleva“, viz obr. 4. Singulární bod je *sedlo*, případ (1b). Implicitní popis trajektorií v kartézských souřadnicích

$$y_1y_2 = c_1c_2\,, \quad \Phi(y_1,y_2) \equiv y_1\,y_2 = k\,.$$

Z rovnic (5.2) plyne $\operatorname{tg}\,\theta = y_2/y_1 = \frac{c_2}{c_1}\,\mathrm{e}^{-2x}$, což dává $\mathrm{e}^{-2x} = \frac{c_1}{c_2}\,\operatorname{tg}\,\theta$. Proto platí

$$\begin{aligned} r^2 &= y_1^2 + y_2^2 = c_1^2\mathrm{e}^{2x} + c_2^2\mathrm{e}^{-2x} = c_1c_2\,(\operatorname{cotg}\,\theta + \operatorname{tg}\,\theta) \\ &= c_1c_2\left(\frac{\cos\,\theta}{\sin\,\theta} + \frac{\sin\,\theta}{\cos\,\theta}\right) = \frac{c_1c_2}{\sin\,\theta\cdot\cos\,\theta} = \frac{2c_1c_2}{\sin(2\theta)}\,, \end{aligned}$$

odkud plyne implicitní rovnice trajektorií v polárních souřadnicích:

$$r = \left(\frac{2\,c_1c_2}{\sin(2\,\theta)}\right)^{1/2}, \qquad \Psi(r,\theta) \equiv r^2\,\sin(2\theta) = k\,.$$

Trajektorie doplňují polopřímky $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \pi$, $\theta = \frac{3\pi}{2}$, viz obr. 4. □

Příklad 5.5. Určete trajektorie řešení soustavy $y_1' = 2\,y_1 + y_2$, $y_2' = y_1 + 2\,y_2$.

Řešení: Matice soustavy diferenciálních rovnic je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, příslušný charakteristický polynom je $\lambda^2 - 4\lambda + 3$ má dva různé kladné kořeny $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. Singulární bod $(0,0)$ je proto *neatraktivní uzel* – případ (1a).

Načrtněme trajektorie v okolí singulárního řešení, tzv. „fázový portrét“. Soustava rovnic $(\mathbf{A} - \lambda_i\,\mathbf{E})\mathbf{v}_i = 0$ dává vektory $\mathbf{v}_1 = (1,-1)$, $\mathbf{v}_2 = (1,1)$. Obecné řešení je $\mathbf{y}(x) = c_1\,\mathbf{u}_1(x) + c_2\,\mathbf{u}_2(x) = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\mathrm{e}^x + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

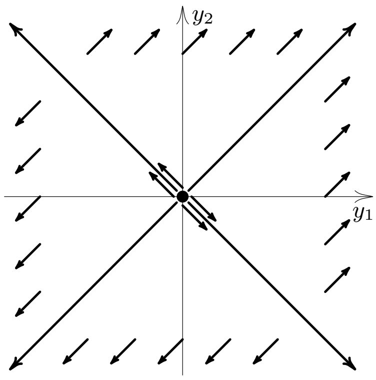
Případ $c_2 = 0$ dává dvě polopřímky $y_2 = -y_1$, $c_1 = 0$ další polopřímky $y_2 = y_1$, všechny orientované od počátku. Ostatní trajektorie pro $c_1c_2 \neq 0$ jsou „zakřivené“ křivky vycházejících z počátku. Určíme směrnice jejich tečen při $x \to -\infty$:

$$\frac{y_2'(x)}{y_1'(x)} = \frac{-c_1\,\mathrm{e}^x + 3\,c_2\,\mathrm{e}^{3x}}{c_1\,\mathrm{e}^x + 3\,c_2\,\mathrm{e}^{3x}} = \frac{-c_1 + 3\,c_2\,\mathrm{e}^{2x}}{c_1 + 3\,c_2\,\mathrm{e}^{2x}} \xrightarrow{x\to-\infty} \frac{-c_1}{c_1} = -1\,.$$

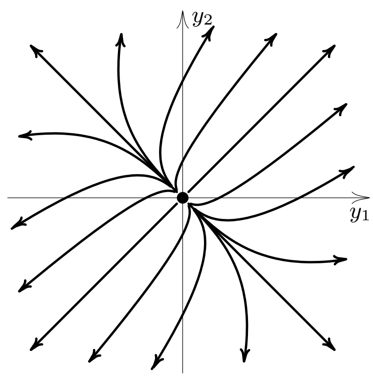
Podobně určíme tečny při $x \to \infty$, tj. trajektoriích jdoucích do nekonečna, tj. vzdalujících se od počátku:

$$\frac{y_2'(x)}{y_1'(x)} = \frac{-c_1\,\mathrm{e}^x + 3\,c_2\,\mathrm{e}^{3x}}{c_1\,\mathrm{e}^x + 3\,c_2\,\mathrm{e}^{3x}} = \frac{-c_1\,3\,\mathrm{e}^{-2x} + c_2}{c_1\,3\,\mathrm{e}^{-2x} + c_2} \xrightarrow{x\to\infty} \frac{c_2}{c_2} = 1\,.$$

Načrtneme tečny v okolí počátku a na okraji obrázku a spojíme je hladkými „neprotínajícími se“ křivkami bez inflexních bodů, tj. jsou „prohnuté“ stále na jednu stranu. Trajektorie nevycházejí z nuly, jen se při $x \to -\infty$ k ní „blíží“.



Obrázek 5. Tečné vektory trajektorií v 0 a ∞.



Obrázek 6. Skutečné trajektorie řešení.

Porovnáním náčrtu směru tečen v nekonečnu s tečnami skutečných trajektorií je vidět, že tečny skutečných trajektorií se liší od „tečen v nekonečnu“, načrtnutou tečnu dosáhnou až „v nekonečnu“, viz obr. 7 a obr. 8.

Jak vypadá implicitní rovnice pro trajektorie? Vztahu $F(\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{3x}) = 0$ vyhovuje funkce $F(\xi, \eta) = \xi^3 - \eta$, která po úpravě dává $c_2(y_1 - y_2)^3 - 4c_1^3(y_2 + y_1) = 0$. V kartézských souřadnicích lze trajektorie popsat implicitně

$$\Phi(y_1, y_2) \equiv \frac{(y_1 - y_2)^3}{y_1 + y_2} = k\,.$$

Pro určení implicitní rovnice trajektorie v polárních souřadnicích z rovnosti $\operatorname{tg}\theta = \frac{-c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{3x}}{c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{3x}}$ vyjádříme e^{2x} a e^{6x}

$$\mathrm{e}^{2x} = \frac{c_1}{c_2}\,\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta}\,, \qquad \mathrm{e}^{6x} = \frac{c_1^3}{c_2^3}\,\frac{(\cos\theta + \sin\theta)^3}{(\cos\theta - \sin\theta)^3}$$

a dosadíme do rovnosti $r^2 = y_1^2 + y_2^2 = 2(c_1^2\,\mathrm{e}^{2x} + c_2^2\,\mathrm{e}^{6x})$. Další úprava vede na

$$r^2 = 4\,\frac{c_1^3}{c_2}\,\frac{(\cos\theta + \sin\theta)}{(\cos\theta - \sin\theta)^3}\,,$$

odkud plyne implicitní vyjádření $\Psi(r, \theta) = k$ a vztah $r = f(\theta)$ pro příkaz *polarplot*

$$\Psi(r, \theta) = r^2\,\frac{(\cos\theta - \sin\theta)^3}{(\cos\theta + \sin\theta)} = k\,, \qquad r = \left(k\,\frac{\cos\theta + \sin\theta}{(\cos\theta - \sin\theta)^3}\right)^{1/2},$$

kde $k = 4c_1^3/c_2$. □

Příklad 5.6. Určete trajektorie řešení soustavy $y_1' = -y_1 - 3\,y_2$, $y_2' = y_1 - 5y_2$.

Řešení: Matice soustavy diferenciálních rovnic je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$, příslušný charakteristický polynom je $\lambda^2 + 6x + 8$ má dva různé záporné kořeny $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -4$. Singulární bod – počátek $(0, 0)$ je proto *atraktivní uzel* – případ (1c).

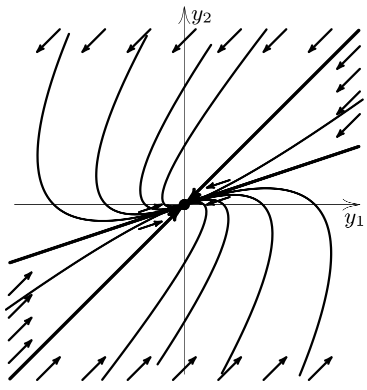
Pro fázový portrét singulárního bodu spočítejme nejprve fundamentální řešení U. Soustava rovnic $(\mathbf{A} - \lambda_i\,\mathbf{E})\mathbf{v}_i = 0$ dává pro $\lambda_1 = -2$ vektor $\mathbf{v}_1 = (3, 1)$ a pro $\lambda_2 = -4$ vektor $\mathbf{v}_2 = (1, 1)$. Obecné řešení proto je

$$\mathbf{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2x} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-4x} .$$

Nejprve načrtneme trajektorie řešení $\mathbf{u}_1(x)$, $\mathbf{u}_2(x)$. Jsou to dva páry polopřímek orientovaných do počátku se směrovými vektory $(3,1)$, $(1,1)$. Určeme tečné směry ostatních trajektorii v počátku, tj. pro $x \to \infty$, a v nekonečnu, tj. pro $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y_2'(x)}{y_1'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2c_1\mathrm{e}^{-2x} - 4c_2\mathrm{e}^{-4x}}{-6c_1\mathrm{e}^{-2x} - 4c_2\mathrm{e}^{-4x}} = \frac{1}{3} ,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{y_2'(x)}{y_1'(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2c_1\mathrm{e}^{-2x} - 4c_2\mathrm{e}^{-4x}}{-6c_1\mathrm{e}^{-2x} - 4c_2\mathrm{e}^{-4x}} = \frac{1}{1} .$$



Obrázek 7. Příklad 5.6 – trajektorie.

Určeme implicitní rovnice pro trajektorie. Vztahu $F(\varphi,\psi) = 0$ vyhovuje funkce $F(\xi,\eta) = \xi^2 - \eta$ a (4.1) po úpravě dává $c_2(y_1-y_2)^2 - 2\,c_1^2(3y_2-y_1) = 0$. Dostáváme tak rovnici v kartézských souřadnicích

$$\Phi(y_1,y_2) = \frac{(y_1-y_2)^2}{3y_2-y_1} = k ,$$

kde $k = 2c_1^2/c_2$. Určeme dále rovnici trajektorie v polárních souřadnicích. Ze vztahu $\operatorname{tg}\theta = \frac{c_1\mathrm{e}^{-2x}+c_2\mathrm{e}^{-4x}}{3c_1\mathrm{e}^{-2x}+c_2\mathrm{e}^{-4x}}$ vyjádříme e^{-2x}:

$$\mathrm{e}^{-2x} = \frac{c_1}{c_2}\,\frac{3\sin\theta - \cos\theta}{\cos\theta - \sin\theta}$$

a dosadíme do $r^2 = y_1^2 + y_2^2$. Po úpravách dostáváme

$$r = \frac{2c_1^2}{c_2}\,\frac{(3\sin\theta - \cos\theta)}{(\cos\theta - \sin\theta)^2} ,$$

odkud plyne rovnice $\Psi(r,\theta) = k^2$ a funkce $r = f(\theta)$ k vykreslení trajektorie v systému Maple příkazem *polarplot*$(f(\theta), \theta = 0..2\mathrm{Pi})$

$$\Psi(r,\theta) = \frac{r\,(\cos\theta - \sin\theta)^2}{(\cos\theta - 3\sin\theta)} = k^2 , \qquad r = f(\theta) = k\,\frac{(\cos\theta - 3\sin\theta)}{(\cos\theta - \sin\theta)^2} ,$$

kde $k = 2c_1^2/c_2$. □

Příklad 5.7. Určete trajektorie řešení soustavy $y_1' = y_1 - 3y_2$, $y_2' = 3y_1 - 5y_2$.

Řešení: Matice soustavy diferenciálních rovnic je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, příslušný charakteristický polynom je $\lambda^2 + 4x + 4$ má jeden dvojnásobný záporný kořen $\lambda = -2$. Singulární bod – počátek $(0,0)$ je proto *atraktivní uzel* – případ (3b).

Pro fázový portrét určeme řešení. Soustava rovnic $(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E})\mathbf{v} = 0$ pro $\lambda = -2$ dává jediný vektor $\mathbf{v} = (1,1)$ a tím jedno řešení $\mathbf{u}_1(x) = \mathbf{v}\,\mathrm{e}^{-2x}$. Druhé nezávislé řešení je $\mathbf{u}_2(x) = \mathbf{v}\,x\mathrm{e}^{-2x} + \mathbf{w}\,\mathrm{e}^{-2x}$, kde $\mathbf{w}$ splňuje soustavu rovnic $(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E})\mathbf{w} = \mathbf{v}$, což jsou dvě stejné rovnice $3w_1 - 3w_2 = 1$. Zvolíme-li $w_2 = 0$, dostáváme $w_1 = \frac{1}{3}$. Obecné řešení je tedy

$$\mathbf{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2x} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \mathrm{e}^{-2x} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2(x + \frac{1}{3}) \\ c_1 + c_2 x \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2x}. \tag{5.3}$$

Trajektorie řešení $\mathbf{u}_1(x)$ je opět dvojice polopřímek $y_2 = y_1$ směřujících do počátku, který je singulárním bodem. Tečné směry obecného řešení $\mathbf{y}(x)$ v počátku, tj. pro $x \to \infty$, i v nekonečnu, tj. $x \to -\infty$, mají také směrnici rovnu 1 nezávisle na c_i, neboť

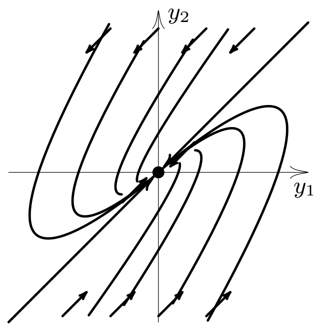
$$\frac{y_2'(x)}{y_1'(x)} = \frac{[c_2 - 2(c_1 + c_2 x)]\mathrm{e}^{-2x}}{[c_2 - 2(c_1 + c_2(x + \frac{1}{3}))]\mathrm{e}^{-2x}} \to \frac{-2c_2 x}{-2c_2 x} = 1\,, \qquad \text{pro} \quad x \to \pm\infty\,.$$

Jak vypadají trajektorie řešení pro $c_2 \neq 0$? Víme, že trajektorie jsou pod i nad přímkou $y_2 = y_1$,tj. trajektoriemi $\mathbf{u}_1(x)$, s kterými se nesmí protnout. Jdou zleva doprava a pak se otáčí do protisměru nebo obráceně? Pro $c_2 > 0$ ze vzorce plyne $y_2(x) < y_1(x)$, tj. trajektorie řešení leží pod přímkou $y_2 = y_1$.

Spočítejme derivaci konkrétního řešení. Zvolme $c_2 = 3c_1 > 0$. Potom

$$\mathbf{y}'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = -4c_1 \begin{pmatrix} x + \frac{1}{3} \\ x \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2x}\,.$$

Pro $x \to -\infty$ obě složky mají kladnou derivaci, od $x = -\frac{1}{3}$ se derivace $y_1(x)$ mění na zápornou a od $x = 0$ obě složky mají derivaci zápornou. Trajektorie leží pod přímkou $y_1 = y_2$ proto z JZ „nekonečna“ směřují k SV, pak se otáčejí k SZ a nakonec se otáčejí k počátku JZ směrem. Záporné c_2 dávají trajektorie středově symetrické podle počátku s trajektoriemi s $c_2 > 0$.



Obrázek 8. Příklad 5.7 – trajektorie.

Tedy pro řešení s $c_2 \neq 0$ trajektorie se směrnicí 1 v $-\infty$ se musejí otočit do „protisměru“, aby získaly směrnici 1.

S implicitní rovnicí pro trajektorie je to složitější. Vztahu $F(\mathrm{e}^{-2x}, x\mathrm{e}^{-2x}) = 0$ vyhovuje například funkce $F(\xi, \eta) = 2\eta/\xi + \ln(|\xi|)$. Z (5.3) určíme

$$\xi = \mathrm{e}^{-2x} = \frac{3(y_1 - y_2)}{c_2}\,, \qquad \eta = x\,\mathrm{e}^{-2x} = \frac{y_2}{c_2} - \frac{3c_1(y_1 - y_2)}{c_2^2}$$

a dosazením do $F(\xi, \eta) = 2\eta/\xi + \ln(|\xi|)$ dostáváme implicitní rovnici pro trajektorie s $c_2 \neq 0$. V případě $c_2 = 0$ je rovnice pro trajektorie jednoduchá $y_2 = y_1$.

Pro rovnici v polárních souřadnicích z $\mathrm{tg}(\theta) = y_2/y_1$ vyjádříme x

$$x = \frac{\sin\theta}{3(\cos\theta - \sin\theta)} - \frac{c_1}{c_2} \tag{5.4}$$

a dosadíme do $r^2 = y_1^2 + y_2^2$. Po úpravě dostáváme rovnici

$$r^2 = \left[2c_1^2 + 2c_1 c_2(x + \tfrac{1}{3}) + c_2^2(x^2 + (x + \tfrac{1}{3})^2)\right] \mathrm{e}^{-4x}$$

do které dosadíme x z (5.4). V obou případech jsme dostali implicitní rovnici, která ale nemá tvar $\Phi(y_1, y_2) = k$ ani $\Psi(r, \theta) = k$. $\square$

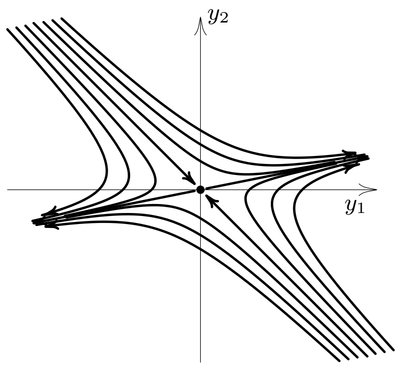
Příklad 5.8. Určete trajektorie řešení soustavy $y_1' = y_1 + 5y_2$, $y_2' = y_1 - 3y_2$.

Řešení: Matice soustavy diferenciálních rovnic je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, příslušný charakteristický polynom $\lambda^2 + 2x - 8$ má jeden kladný $\lambda_1 = 2$ a jeden záporný kořen $\lambda_2 = -4$. Singulární bod – počátek $(0,0)$ je proto *sedlo* – případ (1b).

Pro fázový portrét spočítejme obecné řešení: Soustava rovnic $(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E})\mathbf{v} = 0$ pro $\lambda_1 = 2$ dává vektor $\mathbf{v}_1 = (5,1)$ a pro $\lambda_2 = -4$ vektor $\mathbf{v}_2 = (1,-1)$. Získáme tím dvě nezávislá řešení: neatraktivní $\mathbf{u}_1(x) = \mathbf{v}_1\,\mathrm{e}^{2x}$ a atraktivní $\mathbf{u}_2(x) = \mathbf{v}_2\,\mathrm{e}^{-4x}$. Obecné řešení je tedy

$$\mathbf{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2x} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-4x}.$$

Trajektorie $\mathbf{u}_1(x)$ je dvojice polopřímek $y_2 = \frac{1}{5}y_1$ orientovaných od počátku, trajektorie $\mathbf{u}_2(x)$ je dvojice polopřímek $y_2 = -y_1$ orientovaných do počátku. Ostatní trajektorie přicházejí z nekonečna se směrnicí -1 a otáčejí se do nekonečna se směrnicí $\frac{1}{5}$.



Obrázek 9. Příklad 5.8 – trajektorie.

Implicitní rovnici pro trajektorie získáme snadno. Vztahu $F(\mathrm{e}^{2x}, \mathrm{e}^{-4x}) = 0$ vyhovuje funkce $F(\xi,\eta) = \xi^2\eta - 1$. Dostáváme tak rovnici s $k = 6^3\,c_1c_2$ ve tvaru

$$\Phi(y_1,y_2) \equiv (y_1 + y_2)^2(y_1 - 5y_2) = k\,.$$

Pro polární souřadnice z rovnosti $\operatorname{tg}\theta = y_2/y_1$ vyjádříme $\mathrm{e}^{6x} = \frac{c_2(\sin\theta + \cos\theta)}{c_1(\sin\theta - 5\cos\theta)}$ a dosazením obecného řešení do $r^2 = y_1^2 + y_2^2$ po úpravě dostáváme výraz

$$r^2 = 2c_1^{\frac{4}{3}}c_2^{\frac{2}{3}}\left[13\left(\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta - 5\cos\theta}\right)^{\frac{2}{3}} + 4\left(\frac{\sin\theta - 5\cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{\sin\theta - 5\cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta}\right)^{\frac{4}{3}}\right],$$

z které lze napsat implicitní rovnici v polárních souřadnicích $\Psi(r,\theta) = k$. $\square$

Příklad 5.9. Určete trajektorie řešení soustavy $y_1' = y_1 - 5y_2$, $y_2' = y_1 - y_2$.

Řešení: Matice soustavy diferenciálních rovnic je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, příslušný charakteristický polynom $\lambda^2 + 4$ má dva komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2} = \pm 2\mathbf{i}$. Singulární bod $(0,0)$ je *střed* – případ (2c), trajektorie budou soustředné elipsy se středem v počátku. Najděme obecné řešení. Matice $\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E}$ pro $\lambda = 2\mathbf{i}$ je

$$\mathbf{A} - 2\mathbf{i}\,\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 - 2\mathbf{i} & -5 \\ 1 & -1 - 2\mathbf{i} \end{pmatrix}.$$

Vynásobením druhého řádku číslem $(1 - 2\mathbf{i})$ dostáváme první řádek, rovnice v soustavě $(\mathbf{A} - 2\mathbf{i}\,\mathbf{E})\mathbf{v} = 0$ jsou proto závislé. Druhá rovnice dává $v_1 = (1 + 2\mathbf{i})v_2$, odkud plyne například $\mathbf{v} = (1 + 2\mathbf{i}, 1)$. Dostáváme tím komplexní řešení:

$$\mathbf{u}^*(x) = \begin{pmatrix} 1 + 2\mathbf{i} \\ 1 \end{pmatrix} (\cos(2x) + \mathbf{i}\,\sin(2x)).$$

Reálná a imaginární část $\mathbf{u}^*(x)$ dává dvojici reálných řešení $\mathbf{u}_1(x)$, $\mathbf{u}_2(x)$, obecné řešení proto je $\mathbf{y}(x) = c_1\mathbf{u}_1(x) + c_2\mathbf{u}_2(x)$, a tedy

$$\mathbf{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} \cos(2x) - 2\sin(2x) \\ \cos(2x) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin(2x) + 2\cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

Protože funkce $\cos(2x), \sin(2x)$ jsou periodické s periodou π, dostáváme uzavřené křivky, které obíhají počátek s periodou π. Jaká je orientace křivky? Pro $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ máme řešení $\mathbf{u}_1(x)$, tj. $y_1(x) = \cos(2x) - 2\sin(2x)$, $y_2(x) = \cos(2x)$. Vyčíslíme řešení $\mathbf{u}_1(x)$ a jeho derivaci pro $x = 0$: $\mathbf{y}(0) = (1, 1)$ a $\mathbf{y}'(0) = (-4, 0)$ a vyznačíme v grafu. Trajektorie bude orientovaná v kladném smyslu, tj. pro směru hodinových ručiček. Jinou možností je vykreslit body $\mathbf{y}(x)$ pro vhodná x: $0, \frac{\pi}{2}$, dostaneme tak postupně body $(1, 1)$, $(-2, 0)$, $(-1, -1)$.

Z (5.5) vyjádříme funkce $\cos(2x)$, $\sin(2x)$

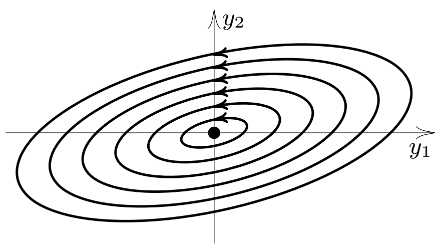
$$\cos(2x) = \frac{c_2y_1 + 2c_1y_2 - c_2y_2}{2(c_1^2 + c_2^2)}, \quad \sin(2x) = \frac{c_1y_2 + 2c_2y_2 - c_1y_1}{2(c_1^2 + c_2^2)}$$

a dosazením do rovnosti $\sin^2(2x) + \cos^2(2x) = 1$ po úpravě dostáváme rovnici

$$\Phi(y_1, y_2) = y_1^2 - 2y_1\, y_2 + 5y_2^2 = k\,, \quad \text{kde} \quad k = 4(c_1^2 + c_2^2)\,,$$

což jsou soustředné elipsy, obr. 10.

Protože velikost elipsy závisí jen na $c_1^2 + c_2^2$, pro odvození trajektorií v polárních souřadnicích stačí uvažovat případ $c_2 = 0$. Z rovnosti $y_2/y_1 = \operatorname{tg}\theta$ vyjádříme $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}(\sin\theta - \cos\theta)/\sin\theta$ a dosadíme do $r^2 = y_1^2 + y_2^2$. Využijeme přitom rovnost $\cos^2 x = 1/(1 + \operatorname{tg}^2 x)$. Po úpravách dostaneme



Obrázek 10. Příklad 5.9 – trajektorie.

$$r^2 = c_1^2 \cos^2\theta\, \big[(1 - 2\operatorname{tg}\theta)^2 + 1\big] = \frac{4c_1^2}{4\sin^2\theta + (\cos\theta - \sin\theta)^2}$$

odkud plyne implicitní rovnice i funkce $r = f(\theta)$ pro MAPLE příkaz *polarplot*

$$\Psi(r, \theta) \equiv r^2\big(4\sin^2\theta + (\cos\theta - \sin\theta)^2\big) = k\,, \quad r = \frac{\sqrt{k}}{4\sin^2\theta + (\cos\theta - \sin\theta)^2}\,,$$

kde $k = 4(c_1^2 + c_2^2)$. □

Příklad 5.10. Určete trajektorie řešení soustavy $y_1' = 3y_1 - 4y_2$, $y_2' = 2y_1 - y_2$.

Řešení: Matice soustavy diferenciálních rovnic je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, příslušný charakteristický polynom $\lambda^2 - 2\lambda + 5$ má dvojici komplexně sdružených kořenů $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2\mathbf{i}$ – případ (2a). Singulární bod $(0, 0)$ je proto *neatraktivní ohnisko*, trajektorie budou soustředné spirály vzdalující se od počátku.

Spočítejme obecné řešení. Matice $\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E}$ pro $\lambda = 1 - 2\mathbf{i}$ má řádky

$$\mathbf{A} - (1 - 2\mathbf{i}\,)\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2 + 2\mathbf{i} & -4 \\ 2 & -2 + 2\mathbf{i} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 + \mathbf{i} & 1 \\ 1 & -1 + \mathbf{i} \end{pmatrix}.$$

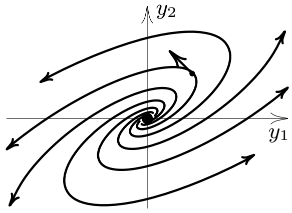
Vynásobením druhého řádku číslem $1+\mathbf{i}$ dostáváme první řádek, rovnice v soustavě $(\mathbf{A}-(1-2\mathbf{i})\mathbf{E})\mathbf{v}=0$ jsou proto závislé. Druhá rovnice dává $v_1=(1-\mathbf{i})v_2$, odkud plyne $\mathbf{v}=(1-\mathbf{i},1)$. Dostáváme tím komplexní řešení:

$$\mathbf{u}^*(x)=\begin{pmatrix}1-\mathbf{i}\\ 1\end{pmatrix}\mathrm{e}^x(\cos(2x)-\mathbf{i}\,\sin(2x)).$$

Reálná a imaginární část $\mathbf{u}^*(x)$ dává dvojici reálných řešení $\mathbf{u}_1(x)$, $\mathbf{u}_2(x)$, obecné řešení je proto po změně znaménka $\mathbf{u}_2$:

$$\mathbf{y}(x)=c_1\mathbf{u}_1(x)+c_2\mathbf{u}_2(x)=c_1\begin{pmatrix}\cos(2x)-\sin(2x)\\ \cos(2x)\end{pmatrix}\mathrm{e}^x+c_2\begin{pmatrix}\sin(2x)+\cos(2x)\\ \sin(2x)\end{pmatrix}\mathrm{e}^x.$$

Funkce $\cos(2x),\sin(2x)$ jsou periodické s periodou π, obstarávají pohyb okolo počátku, funkce e^x způsobuje vzdalování se od počátku, spirála se bude vzdalovat od počátku. Jaká je orientace spirály? Opět zvolme $c_1=1$, $c_2=0$. Dostáváme řešení $\mathbf{u}_1(x)$ se složkami $y_1(x)=(\cos(2x)-\sin(2x))\mathrm{e}^x$, $y_2(x)=\cos(2x)\mathrm{e}^x$. Vyčíslíme hodnoty řešení a jeho derivace pro $x=0$: $\mathbf{y}(0)=(1,1)$, $\mathbf{y}'(0)=(-1,1)$ a vyznačíme v grafu. Vidíme, že tečna vpravo od počátku má SZ směr, trajektorie bude orientovaná v kladném smyslu, tj. proti směru hodinových ručiček a bude se vzdalovat od počátku. Jinou možností je vyčíslit body $\mathbf{y}(x)$ pro zvětšující se x.



Obrázek 11. Příklad 5.10 – trajektorie.

Pomocí funkce $F(\xi,\eta)=\operatorname{arctg}(\eta/\xi)-\ln(\xi^2+\eta^2)$ odvodíme rovnici pro implicitní funkci trajektorie.

Z obecného řešení vyjádříme funkce $\mathrm{e}^x\cos(2x)$, $\mathrm{e}^x\sin(2x)$

$$\xi=\mathrm{e}^x\cos x=\frac{c_2(y_1-y_2)+c_1y_2}{c_1^2+c_2^2},\qquad \eta=\mathrm{e}^x\sin x=\frac{c_1(y_2-y_1)+c_2y_2}{c_1^2+c_2^2}$$

a použitím funkce $\operatorname{arctg}(\eta/\xi)=\ln(\xi^2+\eta^2)$ dostáváme implicitní rovnici

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{c_1(y_2-y_1)+c_2y_2}{c_2(y_1-y_2)+c_1y_2}\right)=\ln\left[\frac{(c_2(y_1-y_2)+c_1y_2)^2+(c_1(y_2-y_1)+c_2y_2)^2}{(c_1^2+c_2^2)^2}\right].$$

Rovnice však dává trajektorie jen v úhlu šířky π a MAPLE přidává navíc „radiální spojnice“ konců trajektorií.

Pro polární souřadnice z rovnosti $y_2/y_1=\operatorname{tg}\theta$ stačí vyjádřit funkce $\operatorname{tg}x$, x:

$$\operatorname{tg}x=\frac{(c_1+c_2)\sin\theta-c_1\cos\theta}{c_2\cos\theta+(c_1-c_2)\sin\theta},\qquad x=\operatorname{arctg}\left(\frac{(c_1+c_2)\sin\theta-c_1\cos\theta}{c_2\cos\theta+(c_1-c_2)\sin\theta}\right)$$

a dosadit do $r^2=y_1^2+y_2^2$. Opět položme $c_2=0$. Potom $\operatorname{tg}x=(\sin\theta-\cos\theta)/\sin\theta$. Pomocí $\cos^2\theta=1/(1+\operatorname{tg}^2\theta)$ a $x=\operatorname{arctg}((\sin\theta-\cos\theta)/\sin\theta)$ dostáváme

$$r^2=c_1^2\,\frac{(1-\operatorname{tg}x)^2+1}{1+\operatorname{tg}^2x}\mathrm{e}^{2x}=\frac{c_1^2}{1+\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta}\exp\left(2\,\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta}\right)\right).$$

Opět vzorec dává trajektorii jen v úhlu šířky π. □

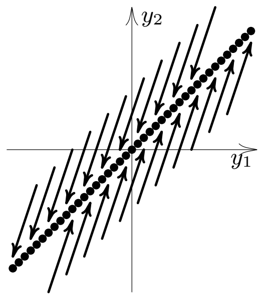
Ostatní případy singulárních bodů

Příklad 5.11. Určete trajektorie řešení soustavy $y_1' = y_1 - y_2$, $y_2' = 3y_1 - 3y_2$.

Řešení: Matice soustavy $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ je singulární, rovnice $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ má nekonečně mnoho řešení, jsou to násobky $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$. Singulární body proto tvoří přímku $y_2 = y_1$.

Charakteristický polynom $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda$ má vedle nulového kořene λ_1 záporný kořen $\lambda_2 = -2$. Spočítejme obecné řešení. Soustava $(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E})\mathbf{v} = 0$ pro $\lambda_1 = 0$ dává vektor $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$, pro $\lambda_2 = -2$ vektor $\mathbf{v}_2 = (1, 3)$. Obecné řešení proto je:

$$\mathbf{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2x}.$$



Obrázek 12. Příklad 5.11 – trajektorie.

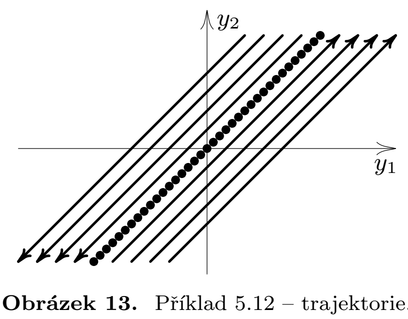
Singulární trajektorie pro $c_1 \in \mathbb{R}$ a $c_2 = 0$, tvoří přímku $y_2 = y_1$. Pro $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$ dostáváme dvě polopřímky $y_2 = 3y_1$ orientované do počátku. Ostatní trajektorie jsou rovnoběžné polopřímky jdoucí se směrnicí 3 do singulárních bodů na přímce $y_2 = y_1$. Je to případ (4b). □

Příklad 5.12. Určete trajektorie řešení soustavy $y_1' = y_1 - y_2$, $y_2' = y_1 - y_2$.

Řešení: Matice soustavy diferenciálních rovnic $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ je opět singulární, rovnice $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ má nekonečně mnoho řešení, jsou to násobky vektoru $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$. Singulární body proto tvoří přímku $y_2 = y_1$. Příslušný charakteristický polynom $P(\lambda) = \lambda^2$ má jeden dvojnásobný kořen $\lambda_{1,2} = 0$. Pro fázový portrét spočítejme obecné řešení. Soustava rovnic $(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E})\mathbf{v} = 0$ pro $\lambda_{1,2} = 0$ dává jen jeden vektor $\mathbf{v} = (1, 1)$ a tím i konstantní řešení $u_1(x) = (1, 1)$. Druhé řešení je ve tvaru $\mathbf{u}_2(x) = \mathbf{v}x + \mathbf{w}$, kde vektor $\mathbf{w}$ je řešením $(\mathbf{A} - 0\,\mathbf{E})\mathbf{w} = \mathbf{v}$, tj. $w_1 - w_2 = 1$. Tato rovnice má opět nekonečně mnoho řešení, zvolme $\mathbf{w} = (1, 0)$. Dostáváme tak obecné řešení

$$\mathbf{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x + 1 \\ x \end{pmatrix}.$$

Získali jsme nekonečně mnoho singulárních trajektorií pro $c_1 \in \mathbb{R}$ a $c_2 = 0$, jsou to body přímky $y_2 = y_1$. Pro $c_1 \in \mathbb{R}$, $c_2 \neq 0$ dostáváme přímky $y_2 = y_1 - c_2$. Jsou to přímky rovnoběžné s přímkou $y_2 = y_1$ orientované v SV směru pod ní pro $c_2 > 0$ a v JZ směru nad ní pro $c_2 < 0$. Je to případ (5a). □



Obrázek 13. Příklad 5.12 – trajektorie.

Uveďme ještě příklady trajektorií rovnic, které nemají singulární body – případ (6). V případě soustavy dvou lineárních autonomních rovnic jsou to rovnoběžné přímky

Příklad 5.13. Určete trajektorie řešení soustavy $y_1' = 2$, $y_2' = 1$.

Řešení: Obecné řešení soustavy je $y_1(x) = 2x + c_1$, $y_2(x) = x + c_2$. Protože $y_1 = 2y_2 - 2c_2 + c_1$, trajektorie jsou rovnoběžné přímky se směrovým vektorem $(2, 1)$ orientované SV směrem. Obrázek není zapotřebí. □

Příklad 5.14. Určete trajektorie rovnice $y'' = 2$.

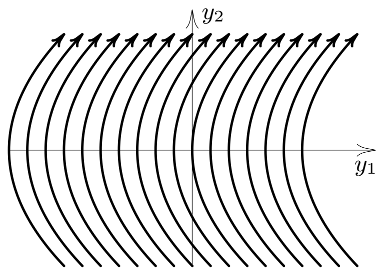
Řešení: Dvojí integrací získáme obecné řešení a jeho derivaci:

$$y(x) = x^2 + c_1x + c_2\,, \quad y'(x) = 2x + c_1.$$

Výpočtem lze snadno lze ověřit, že platí

$$4y_1 - y_2^2 - (4c_2 - c_1^2) = 0\,,$$

kde $y_1 = y$ a $y_2 = y'$, což je implicitní popis trajektorií. Jsou to „rovnoběžné“ paraboly s vrcholy na ose y_1 otevřené vpravo, viz obr. 14. □



Obrázek 14. Příklad 5.14 – trajektorie.

6. Závěr

V článku jsme analyzovali všechny možnosti trajektorií lineárních autonomních soustav dvou rovnic a rovnic druhého řádu a předvedli je na konkrétních příkladech. Ukázali jsme, jak příslušné trajektorie přibližně načrtnout a určit jejich orientaci.

Ukázali jsme, jak lze trajektorie implicitně popsat v kartézských i polárních souřadnicích. V případech, kdy charakteristický polynom má různé reálné kořeny λ_1, λ_2 v poměru malých celých čísel a v případě $\lambda_{1,2} = \pm\nu\mathbf{i}$ je splněna inverzní úloha, která dovede určit trajektorii procházející daným bodem, v případě $\lambda_{1,2} = \mu \pm \nu\mathbf{i}$ je trajektorie určena jen lokálně.

V případě soustavy $y_1' = y_1 - y_2$, $y_2' = y_1 + y_2$ lze trajektorie řešení ve tvaru spirály popsat v polárních souřadnicích globálně $r = ke^{\theta}$. Otázkou je, jak tento globální popis rozšířit na obecnou soustavu s kořeny $\lambda_{1,2} = \mu \pm \nu\mathbf{i}$.

V pokračování tohoto článku uvedeme pár zajímavých autonomních nelineárních soustav a rovnic, které popisují reálné jevy. Vyšetříme trajektorie jejich řešení a interpretujeme jejich význam.

Reference

[1] J. Kalas, M. Ráb: *Obyčejné diferenciální rovnice*, Masarykova univerzita, Brno, 1995.
[2] J. Čermák, A. Ženíšek: *Matematika III*, skripta FSI VUT, Akad. nakl. CERM, Brno 2001.

Jan Franců, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: `francu@fme.vutbr.cz`

MATEMATICKÉ KYVADLO A FUNKCIONÁLNA ANALÝZA

DANIEL ČAPUTA

Abstrakt. Tento článok sa zaoberá existenciou (a prípadnou jednoznačnosťou) periodických riešení nelineárneho modelu matematického kyvadla so spojitou, nepárnou a periodickou pravou stranou. V článku je naznačené odvodenie diferenciálnej rovnice výchylky kyvadla a prevedenie príslušného okrajového problému na ekvivalentnú integrálnu rovnicu. Jej zovšeobecnením je integrálna rovnica tzv. Hammersteinovho typu. Na túto rovnicu sú aplikované vety o pevnom bode, ktorých dôsledkom je existencia, resp. jednoznačnosť jej riešenia. Tieto výsledky sú potom aplikované na model matematického kyvadla a je hlbšie diskutovaná podmienka pre jednoznačnosť riešenia.

1. Úvod

Matematické kyvadlo je jedným z najjednoduchších modelov nelineárneho oscilátora, napriek tomu ale môže jeho analýza viesť k netriviálnym problémom. Jedným z nich je otázka existencie (a jednoznačnosti) periodických riešení nelineárneho modelu s pravou stranou.

Štruktúra článku je nasledovná. V ďaľšej sekcii naznačíme odvodenie pohybovej rovnice matematického kyvadla, priblížime vybrané úseky z histórie problematiky a popíšeme možnú linearizáciu rovnice a problémy, ktoré prináša. V sekcii 3 sa budeme zaoberať naším problémom – dokázať existenciu (a prípadne jednoznačnosť) nepárneho, periodického riešenia nelinárnej diferenciálnej rovnice matematického kyvadla. Túto úlohu vieme previesť na okrajový problém, ktorý prepíšeme na ekvivalentnú integrálnu rovnicu. Tú zovšeobecníme na integrálnu rovnicu tzv. Hammersteinovho typu a na túto rovnicu budeme aplikovať Schauderovu (resp. Banachovu) vetu o pevnom bode. Posledná časť tejto sekcie je venovaná podmienke pre jednoznačnosť riešenia v priestore L^p, kde sú odvodené nové výsledky.

2. Matematické kyvadlo

Uvažujme hmotný bod o hmotnosti m zavesený na konci rovného, tenkého lana dĺžky l, ktorého druhý koniec je pevne ukotvený. Počas pohybu si lano zachováva

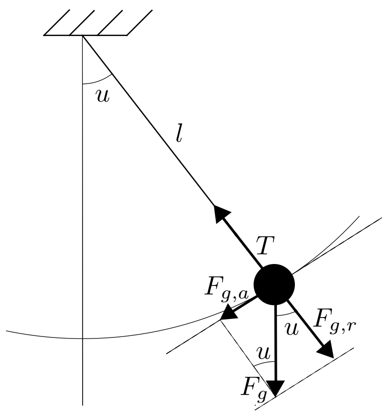
---

2010 *MSC.* Primární 34B15.

Klíčová slova. matematické kyvadlo, Banachova veta o pevnom bode, Schauderova veta o pevnom bode, Hammersteinova integrálna rovnica.

Vedúcim bakalárskej práce autora bol Pavel Řehák z Ústavu matematiky FSI VUT v Brně.

tvar – nedeformuje sa a jeho vlastnú hmotnosť zanedbávame. Hmotný bod sa nachádza v homogénnom gravitačnom poli s gravitačným zrýchlením g, odporové sily prostredia a trenie neuvažujeme.



Po vychýlení z rovnovážnej polohy pôsobia na hmotný bod dve sily. Ťahová sila od lana T pôsobí vždy v radiálnom smere, na pohybe sa nepodieľa. Sila spôsobená gravitačným zrýchlením $F_g = mg$ sa rozdelí na radiálnu a axiálnu zložku. Radiálna zložka $F_{g,r}$ je v rovnováhe s ťahovou silou od lana, axiálna zložka $F_{g,a} = -mg \sin u$, kde u je uhol medzi kyvadlom a vertikálou, sa snaží vrátiť hmotný bod do rovnovážnej polohy. Za týchto predpokladov vieme odvodiť pohybovú rovnicu hmotného bodu

$$u'' + \alpha^2 \sin u = 0,$$

kde u je uhol medzi hmotným bodom a vertikálou a $\alpha = \sqrt{g/l}$; číslo α sa vetšinou nazýva vlastná frekvencia kyvadla. Ak na hmotný bod pôsobí aj externá sila $f(x)$, pohybová rovnica vyzerá nasledovne

$$u'' + \alpha^2 \sin u = f(x). \tag{1}$$

Napriek veľmi jednoduchým predpokladom sme dospeli k nelineárnej diferenciálnej rovnici druhého rádu, ktorú prakticky nevieme analyticky riešiť.

2.1. História

V tejto časti priblížime vybrané úseky histórie problematiky súvisiace s naším problémom, viac informácii sa dá nájsť napríklad v [3]. Jednou z najdôležitejších prác týkajúcou sa rovnicami nútených kmitov kyvadla, bol článok nemeckého matematika Hamela publikovaný v časopise *Mathematische Annalen* v roku 1922. Hamel v tomto článku nadviazal na Duffingovu monografiu z roku 1918, ktorá sa zaoberala približným určením periodických riešení rovnice (tzv. Duffingovej rovnice)

$$u'' + au - cu^3 = b \sin x,$$

kde sa využili prvé dva členy Taylorovho rozvoja $\sin u$. Hamel vo svojom článku ako prvý dokázal existenciu 2π-periodického riešenia rovnice

$$u'' + a \sin u = b \sin x \tag{2}$$

pomocou variačného počtu. Jeho dôkaz založený na variačnom princípe sa dá rozšíriť na všeobecnejšiu pravú stranu, kde $b \sin x$ je nahradená ľubovoľnou spojitou, 2π-periodickou funkciou so strednou hodnotou nula. Hamel sa ďalej zaoberal existenciou nepárnych riešení rovnice (2), kde s využitím nepárneho a periodického charakteru úlohy prevedie okrajový problém, pozostávajúci z (2) a $u(0) = u(\pi) = 0$, na ekvivalentnú nelineárnu integrálnu rovnicu a pomocou metódy postupných aproximácií dokáže jednoznačnosť riešenia za predpokladu $a < 1$.

Článok Birkhoffa a Kellogga o pevných bodoch publikovaný v tom istom roku obsahuje aplikáciu, ktorá by implikovala existenciu riešenia pre každé a. Touto časťou článku inšpiruje Hammersteina k jeho výskumu nelineárnych integrálnych rovníc. Hamel v tomto článku použil viaceré zo základných metód nelineárnej analýzy, pričom niektoré z nich sám vymyslel, čím ďalej rozvinul záujem o túto disciplínu.

Po Hamelovi sa problematike periodických riešení rovnice (2) venovali viacerí matematici. Záujem o rovnicu nútených kmitov kyvadla znovu vzbudil Fučík v roku 1970, keď skúmal periodické riešenia rovnice

$$-u'' + \sin u = f(x),$$

a napriek tomu, že dosiahol len čiastočné výsledky, jeho práca motivovala Castra, Dancera a Willema, ktorí využili pri analýze nútených kmitov variačný počet, a po viac ako šesťdesiatich rokoch po Hamelovom prvom periodickom riešení bolo dokázané druhé periodické riešenie. Poznamenajme ešte, že na začiatku deväťdesiatych rokov sa stala rovnica nútených kmitov (dvojitého) kyvadla jedným zo symbolov pre teóriu chaosu.

2.2. Linearizácia

Nakoľko $\lim_{u\to 0} \sin u/u = 1$, pre malé výchylky u vieme približne aproximovať sinus jeho argumentom. Použitím tohto odhadu v rovnici (1) dostaneme lineárnu diferenciálnu rovnicu v tvare

$$u'' + \alpha^2 u = f(x), \tag{3}$$

ktorú vieme analyticky vyriešiť. Ak je budiaca sila $f(x)$ periodická, s uhlovou frekvenciou ω, tak má táto rovnica periodické riešenie s rovnakou uhlovou frekvenciou pre každé ω, také že vlastná frekvencia kyvadla nie je ich prirodzeným násobkom. Z fyzikálneho pohľadu to znamená, že ak na kyvadlo pôsobí oscilačná sila, tak pri istých počiatočných podmienkach kyvadlo začne kmitať v súlade s touto silou. Problém nastáva najmä, ak má vonkajšia sila rovnakú uhlovú frekvenciu ako je vlastná frekvencia kyvadla. V tomto prípade neexistuje periodické riešenie rovnice (3) a všetky riešenia sú neobmedzené, hovoríme o rezonancii.

Jednou z možností, ako mať lineárny model nevykazujúci tento jav, je nezanedbanie trecích a odporových síl. Pohybová rovnica takéhoto systému môže vyzerať nasledovne

$$u'' + cu' + \alpha^2 u = f(x), \tag{4}$$

kde tlmiaci člen má podobu výrazu s prvou deriváciou a c je konštanta. Ak v rovnici zahrnieme tieto sily, tak rezonancia nenastane a rovnica (4) má vždy periodické riešenie. Z fyzikálneho hľadiska to môžeme vysvetliť tak, že konečná sila nemôže vyprodukovať nekonečnú odozvu, pri prítomnosti trecích síl je amplitúda pohybu obmedzená. Tento fakt naznačuje, že pre periodickú vonkajšiu silu bude vždy existovať periodická odozva, rezonancia nenastane.

Prirodzená otázka je, či nelinearita v našom modeli dokáže rovnako, ako trecie sily, zamedziť rezonancii, a teda, či má rovnica (1) *vždy periodické riešenie, čo intuitívne očakávame.*

3. Analýza rovnice matematického kyvadla

Predpokladajme, že funkcia $f(x)$ – sila pôsobiaca na kyvadlo, je spojitá, nepárna a periodická funkcia s uhlovou frekvenciou ω a zaujíma nás, či má za týchto predpokladov rovnica (1) periodické riešenie. Zjednodušme problém preškálovaním času tak, aby vonkajšia sila mala periódu 2. Zavedením substitúcie $t = \omega x/\pi$ nadobudne rovnica (1) tvar

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\alpha^2\pi^2}{\omega^2}\sin u = f(t)\frac{\pi^2}{\omega^2}.$$

Označme

$$\beta = \frac{\alpha\pi}{\omega} \quad \text{a} \quad F(t) = f(t)\frac{\pi^2}{\omega^2}. \tag{5}$$

Rovnica potom vyzerá nasledovne

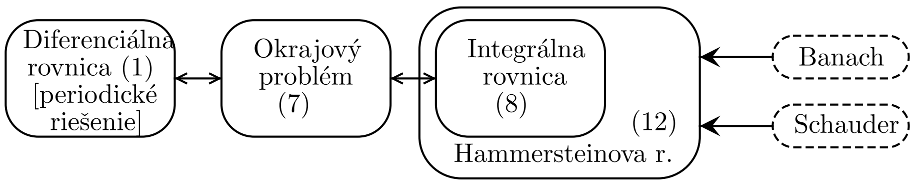
$$u'' + \beta^2 \sin u = F(t), \tag{6}$$

kde $u'' = \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}$. Budeme redukovať problém nájdenia periodického riešenia (6) na problém nájdenia riešenia dvojbodovej okrajovej úlohy na $[0,1]$. Predpokladajme, že vieme nájsť funkciu $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ tak, že $u(0) = u(1) = 0$ a $u(t)$ je riešením rovnice (6) (v zmysle, že u je spojitá funkcia so spojitými deriváciami prvého a druhého rádu a u spĺňa rovnicu (6) pre všetky $t \in [0,1]$). Potom, vzhľadom na nepárny a periodický charakter úlohy vieme túto funkciu rozšíriť najprv na interval $[-1,1]$, kde položíme $u(t) = -u(-t)$ pre $t \in [-1,0]$ a potom periodicky na celú reálnu osu. Takto obdržaná funkcia u je 2-periodickým riešením rovnice na $\mathbb{R}$ a je nepárna.

Riešime okrajový problém

$$\begin{aligned} u'' + \beta^2 \sin u &= F(t), \\ u(0) = u(1) &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

na $[0,1]$. Prehľadový obrázok načrtáva, ako budeme postupovať. Využitím periodického a nepárneho charakteru úlohy a preškálovania času sme dokázali prepísať diferenciálnu rovnicu (1) na okrajový problém (7), ktorý vieme previesť na ekvivalentnú integrálnu rovnicu (8), viď nasledujúca sekcia. Túto rovnicu zovšeobecníme na Hammersteinovu integrálnu rovnicu (12), pre ktorú pomocou Schauderovej vety o pevnom bode dokážeme existenciu riešenia a pomocou Banachovej vety o pevnom bode odvodíme podmienku, za ktorej bude existovať jej jednoznačné riešenie. Tieto poznatky potom aplikujeme na našu konkrétnu rovnicu.



3.1. Prevedenie okrajovej úlohy na integrálnu rovnicu

Teraz ukážeme, že vieme okrajový problém (7) prepísať do ekvivalentnej integrálnej rovnice

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)h(s,u(s))\,\mathrm{d}s, \tag{8}$$

v priestore $C[0,1]$, kde

$$G(t,s) = \begin{cases} t(s-1) & \text{pre } 0 \le t \le s \le 1, \\ (t-1)s & \text{pre } 0 \le s < t \le 1 \end{cases} \quad \text{a} \quad h(s,t) = F(s) - \beta^2 \sin t.$$

Veta 3.1. *Funkcia $u(t)$ je riešením okrajového problému* (7) *práve vtedy, ak je spojitým riešením integrálnej rovnice* (8).

Dôkaz. Dokážme najprv smer „$\Leftarrow$“. Napíšme integrálnu rovnicu (8) v tvare

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^t (t-1)sh(s,u(s))\,\mathrm{d}s + \int_t^1 t(s-1)h(s,u(s))\,\mathrm{d}s \\ &= (t-1)\int_0^t sh(s,u(s))\,\mathrm{d}s + t\int_t^1 (s-1)h(s,u(s))\,\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{9}$$

pre $t \in [0,1]$. Dosadením do tohto vyjadrenia integrálnej rovnice ľahko overíme okrajové podmienky. Toto vyjadrenie dvakrát zderivujeme podľa premennej t (kde integrály derivujeme ako funkciu hornej resp. dolnej medze) a postupne dostávame

$$\begin{aligned} u'(t) &= \int_0^1 sh(s,u(s))\,\mathrm{d}s - \int_t^1 h(s,u(s))\,\mathrm{d}s, \\ u''(t) &= h(t) \end{aligned}$$

pre $t \in [0,1]$, čím sme dokázali smer „$\Leftarrow$“.

Ukážme, že platí aj implikácia „$\Rightarrow$“. Výjdeme z rovnice

$$u''(t) = h(t,u(t)) \tag{10}$$

pre $t \in [0,1]$. Túto rovnicu dvakrát zintegrujeme od 0 do t a využitím okrajových podmienok, Fubiniovej vety a úpravou postupne získame

$$u(t) = \int_0^t (t-1)sh(s,u(s))\,\mathrm{d}s + \int_t^1 t(s-1)h(s,u(s))\,\mathrm{d}s, \tag{11}$$

a teda

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)h(s,u(s))\,\mathrm{d}s[1]$$

pre $t \in [0,1]$. □

Poznamenajme, že na dôkaz tohto tvrdenia nám stačili len základné výsledky z diferenciálneho a integrálneho počtu.

Ak chceme dokázať iba existenciu riešenia nášho okrajového problému (7) pomocou integrálnej rovnice (8), stačí nám iba smer „$\Leftarrow$“, avšak pre dôkaz jednoznačnosti pomocou jednoznačné riešiteľnosti integrálnej rovnice potrebujeme aj

[1]Funkcia $G(t,s)$ je tzv. Greenova funkcia príslušného problému.

smer „$\Rightarrow$“. Ak by platila len implikácia „$\Leftarrow$“, tak všeobecne nevieme vylúčiť existenciu riešenia u^* okrajového problému takého, že u^* nespĺňa integrálnu rovnicu.

3.2. Aplikácia Schauderovej vety

Uvažujme nelineárnu integrálnu rovnicu (tzv. Hammersteinovu rovnicu) v tvare

$$u(x) = \int_a^b K(x,y) f(y, u(y))\, \mathrm{d}y, \tag{12}$$

kde K, f sú dané funkcie a u je neznáma funkcia. Riešením rovnice (12) máme na mysli spojitú funkciu, ktorá spĺňa túto rovnicu pre každé $x \in [a,b]$. Ak dosadíme $K(x,y) = G(x,y)$ a $f(x,u(x)) = h(x,u(x)) = F(x) - \beta^2 \sin u(x)$, tak vidíme, že rovnica (8) je špeciálnym prípadom rovnice (12). Ukážeme, že rovnica (12) spĺňa za určitých predpokladov podmienky Schauderovej vety o pevnom bode, čím dokážeme existenciu riešenia tejto rovnice.

Veta 3.2. *Predpokladajme, že*

- $K(x,y)$ *je spojitá funkcia pre* $a \le x, y \le b$,
- $f(y,z)$ *je spojitá a ohraničená funkcia pre* $a \le y \le b$ *a pre všetky* $z \in \mathbb{R}$.

Potom má rovnica (12) *spojité riešenie.*

Dôkaz. Pracujme v Banachovom priestore $(C\,[a,b]\,, \|\cdot\|_C)$. Definujme množinu

$$S = \left\{u \in C\,[a,b]\,; \|u\|_C \le D\right\},$$

kde hodnotu konštanty D určíme neskôr. Ďalej definujme operátor $F : S \to C\,[a,b]$ predpisom

$$(Fu)(x) = \int_a^b K(x,y) f(y,u(y))\, \mathrm{d}y.$$

Z predpokladu vety je funkcia K spojitá na kompaktnom intervale $[a,b] \times [a,b]$, z čoho vyplýva, že je ohraničená, tj. $|K(x,y)| \le A$ pre nejaké A a všetky $x, y \in [a,b] \times [a,b]$. Podobne, funkcia f je podľa predpokladu ohraničená, a teda existuje B také, že $|f(y,z)| \le B$ pre všetky $y, z \in [a,b] \times \mathbb{R}$. Hodnotu konštanty D definujeme ako

$$D = AB(b-a).$$

Chceme aplikovať Schauderovu vetu na operátor F. Potrebujeme overiť, že množina S je neprázdná, ohraničená, uzavrená a konvexná a operátor F je spojitý a zobrazuje S do seba ($F(S) \subseteq S$) tak, že $F(S)$ je relatívne kompaktná množina.

Relatívnu kompaktnosť $F(S)$ vieme dokázať pomocou Arzeláovej-Ascoliho vety, kde sa pri dôkaze rovnomocnej spojitosti funkcií z $F(S)$ využije fakt, že spojitá funkcia na kompaktnom intervale je rovnomerne spojitá. Tento fakt využijeme aj pri dôkaze spojitosti operátoru F, alternatívne ju môžeme dokázať pomocou Lebesgueovej vety o dominantnej konvergencii.

Všetky predpoklady Schauderovej vety o pevnom bode sú splnené, a teda F má pevný bod v S, ktorý je zrejme riešením integrálnej rovnice (12). $\square$

Vráťme sa k integrálnej rovnici (8).

Veta 3.3. *Integrálna rovnica* (8) *má spojité riešenie.*

Dôkaz. Plynie z predchádzajúcej vety a úvahy zo začiatku sekcie 3.2. □

Kombináciou úvahy zo začiatku tretej kapitoly, vety 3.1 a vety 3.3 dostávame nasledujúci výsledok.

Veta 3.4. *Nech je sila f pôsobiaca na kyvadlo spojitá, nepárna a periodická. Potom má rovnica výchylky matematického kyvadla* (1) *spojité, nepárne a periodické riešenie s rovnakou periódou ako f.*

3.3. Aplikácia Banachovej vety

Opäť uvažujme nelineárnu integrálnu rovnicu (12) (Hammersteinovu rovnicu). V predchádzajúcej časti sme ukázali existenciu riešenia tejto rovnice za pomerne všeobecných podmienok. Teraz nás bude zaujímať, za akých podmienok môžeme aplikovať Banachovu vetu, a teda zaručiť jednoznačnosť riešenia.

Veta 3.5. *Nech platia predpoklady vety 3.2 a nech existuje spojitá funkcia $N(x, y)$ taká, že*

$$|K(x,y)\,[f(y,z_1) - f(y,z_2)]| \le N(x,y)\,|z_1 - z_2|$$

pre $x, y \in [a, b]$ a $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ a $\max_{x\in[a,b]} \int_a^b |N(x,y)|\,\mathrm{d}y = M$, kde $M < 1$. Potom má rovnica (12) *jediné spojité riešenie.*

Dôkaz. Pracujeme v Banachovom priestore $(C\,[a,b]\,, \|\cdot\|_C)$. Definujme operátor $F : C\,[a,b] \to C\,[a,b]$ predpisom

$$(Fu)(x) = \int_a^b K(x,y) f(y, u(y))\,\mathrm{d}y.$$

Pre $u \in C\,[a,b]$ je integrand spojitá funkcia na $[a,b] \times [a,b]$, a teda platí, že Fu je spojité na $[a,b]$, z čoho vyplýva, že F zobrazuje priestor $C\,[a,b]$ do seba. Kontraktivita operátoru sa ukáže pomocou odhadu $\left|\int f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int f(x)\,\mathrm{d}x$ a využitím predpokladu vety. Predpoklady Banachovej vety sú splnené, z čoho plynie, že operátor F má práve jeden pevný bod, ktorý je zrejme jediným riešením rovnice (12). □

Vráťme sa k integrálnej rovnici (8). Pomocou vety 3.5 ukážeme, za akých podmienok má táto rovnica jediné spojité riešenie.

Veta 3.6. *Predpokladajme, že $\alpha < (2\sqrt{2}/\pi)\omega$, kde ω je uhlová frekvencia sily pôsobiacej na kyvadlo a α je vlastná frekvencia kyvadla. Potom má rovnica* (8) *jediné spojité riešenie.*

Dôkaz. Pre konštantu β definovanú v (5) využitím predpokladu vety dostávame

$$\beta = \frac{\alpha\pi}{\omega} < \frac{2\sqrt{2}\pi\omega}{\pi\omega} = 2\sqrt{2}.$$

Položme $N(t,s) = \beta^2\,|G(t,s)|$. Potom

$$\begin{aligned}|G(t,s)\,[h(s,z_1) - h(s,z_2)]| &= \beta^2\,|G(t,s)\,[\sin(z_1) - \sin(z_2)]| \\ &\le \beta^2\,|G(t,s)\,|z_1 - z_2|| = N(t,s)\,|z_1 - z_2|\,.\end{aligned}$$

Na intervale $[0,1] \times [0,1]$ platí $G(t,s) \le 0$, a teda $|G(t,s)| = -G(t,s)$. Platí

$$\begin{aligned}\max_{t\in[0,1]} \int_0^1 |N(t,s)|\,\mathrm{d}s &= \beta^2 \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 -G(t,s)\,\mathrm{d}s \\ &= \beta^2 \max_{t\in[0,1]} \int_0^t (1-t)s\,\mathrm{d}s + \int_t^1 t(1-s)\,\mathrm{d}s \\ &= \beta^2 \max_{t\in[0,1]} \left(\frac{-t^2}{2} + \frac{t}{2}\right) = \frac{\beta^2}{8} < \frac{1}{8}(2\sqrt{2})^2 = 1,\end{aligned}$$

a teda predpoklady vety 3.5 sú splnené, čím je zaručené jednoznačná riešiteľnosť integrálnej rovnice (8). $\square$

Znova uvažujme integrálnu rovnicu (12). Podmienku jednoznačnosti vieme vylepšiť prácou v $L^2[a,b]$.

Veta 3.7. *Nech platia predpoklady vety 3.2*[2] *a nech existuje merateľná funkcia $N(x,y)$ taká, že*

$$|K(x,y)\,[f(y,z_1) - f(y,z_2)]| \le N(x,y)\,|z_1 - z_2|$$

pre všetky $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ a $x,y \in [a,b]$, $\int_a^b N^2(x,y)\,\mathrm{d}x < \infty$ pre všetky $y \in [a,b]$ a $\sqrt{\int_a^b \left(\int_a^b N^2(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y} = M$, kde $M < 1$. Potom má rovnica (8) *jediné spojité riešenie.*

Dôkaz. Pracujeme v Banachovom priestore $L^2[a,b]$ s normou

$$\|u\|_2 = \sqrt{\int_a^b |u(x)|^2\,\mathrm{d}x}.$$

Definujme operátor $F : L^2[a,b] \to L^2[a,b]$ predpisom

$$(Fu)(x) = \int_a^b K(x,y) f(y,u(y))\,\mathrm{d}y.$$

Pomocou Cauchy-Schwarzovej nerovnosti, predpokladov a rôznych odhadov sa ukáže, že F je kontrakcia a $Fu \in L^2[a,b]$ pre $u \in L^2[a,b]$. Predpoklady Banachovej vety sú splnené, z čoho plynie, že operátor F má práve jeden pevný bod, ktorý je zrejme jediným riešením rovnice (12) v $L^2[a,b]$.

Všeobecne nám tento výsledok nemusí implikovať existenciu a jednoznačnosť spojitého riešenia, avšak uvažujme nasledujúcu myšlienku. Nech $u^\times, u^*$ sú rôzne spojité riešenia (12). Poznamenajme, že existenciu aspoň jedného spojitého riešenia zaručuje veta 3.2 (ktorá nepotrebuje žiadne dodatočné predpoklady). Ak sú $u^\times, u^*$ dve rôzne spojité funkcie, tak sa líšia na množine nenulovej miery, a teda sú rôzne aj v L^2 zmysle. Spojitá funkcia na kompaktnom intervale je určite integrovateľná s kvadrátom, z čoho plynie, že $u^\times, u^* \in L^2[a,b]$, odkiaľ vďaka jednoznačnosti v $L^2[a,b]$ dostávame, že $u^\times = u^*$, čo je spor. $\square$

[2] Na dôkaz stačia aj slabšie predpoklady – menovite $K, f \in L^2[a,b]$, avšak v zmysle našej úlohy ponechávame tvrdšie predpoklady.

Aplikujme vetu 3.7 na integrálnu rovnicu (8).

Veta 3.8. *Predpokladajme, že $\alpha < (\sqrt[4]{90}/\pi)\omega$, kde ω je uhlová frekvencia sily pôsobiacej na kyvadlo a α je vlastná frekvencia kyvadla. Potom má rovnica* (8) *jediné spojité riešenie.*

Dôkaz. Pre konštantu β definovanú v (5) využitím predpokladu vety dostávame

$$\beta = \frac{\alpha\pi}{\omega} < \frac{\pi}{\omega}\frac{\sqrt[4]{90}\omega}{\pi} = \sqrt[4]{90}.$$

Opäť položme $N(t,s) = \beta^2 \left|G(t,s)\right|$. Potom

$$\begin{aligned}\int_a^b \left(\int_a^b N^2(t,s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \beta^4 G^2(t,s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t \\ &= \beta^4 \int_0^1 \left(\int_0^t (t-1)^2 s^2\,\mathrm{d}s + \int_t^1 t^2(s-1)^2\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t \\ &= \beta^4 \int_0^1 \left(\frac{t^4}{3} - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^2}{3}\right)\mathrm{d}t = \frac{\beta^4}{90} = M^2,\end{aligned}$$

kde

$$M = \frac{\beta^2}{\sqrt{90}} < \frac{\left(\sqrt[4]{90}\right)^2}{\sqrt{90}} = 1.$$

Rovnica (8) spĺňa podmienky vety 3.7, a teda existuje jej jediné spojité riešenie. □

Poznámka 3.9. (i) Približným vyčíslením podmienky pre jednoznačnosť riešenia v priestore $C\,[a,b]$ získame $\alpha < (2\sqrt{2}/\pi)\omega \doteq 0{,}9003\,\omega$. Ak urobíme to isté pre podmienku v priestore $L^2\,[a,b]$, dostaneme $\alpha < (\sqrt[4]{90}/\pi)\omega \doteq 0{,}9804\,\omega$. Prácou v $L^2\,[a,b]$ sme si skutočne polepšili, pretože nám umožňuje brať za budiacu silu funkcie aj s nižšou periódou, a teda celkovo viac funkcií.

(ii) Ukázali sme, že náš okrajový problém bude mať jednoznačné riešenie, ak bude, zhruba povedané, frekvencia budiacej sily väčšia ako vlastná frekvencia kyvadla.

(iii) Jednoznačnosť riešenia integrálnej rovnice (8) sme mohli dokázať jednoduchším spôsobom, ktorý je obdobný dôkazu vety 3.2 a je založený na ohraničenosti funkcie G. Poskytuje však horšiu podmienku pre jednoznačnosť riešenia (8). Definujme operátor $F : C\,[0,1] \to C\,[0,1]$ predpisom

$$(Fu)(t) = \int_0^1 G(t,s)\left[F(s) - \beta^2 \sin(u(s))\right]\,\mathrm{d}s.$$

Platí

$$\begin{aligned}\left\|Fu_1 - Fu_2\right\|_C &\le \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 \beta^2 \left|G(t,s)\left[\sin(u_2(s)) - \sin(u_1(s))\right]\right|\,\mathrm{d}s \\ &\le \frac{\beta^2}{4}\int_0^1 \left\|u_2 - u_1\right\|_C\,\mathrm{d}s = \frac{\beta^2}{4}\left\|u_1 - u_2\right\|_C,\end{aligned}$$

kde sme využili fakt, že $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ a $\max\{|G(t,s)|, t, s \in [a,b]\} = 1/4$. Ak chceme, aby bola splnená podmienka kontraktivity, potrebujeme, aby

$$\frac{\beta^2}{4} = \frac{\alpha^2\pi^2}{4\omega^2} < 1, \text{ tj. } \alpha < \frac{2}{\pi}\omega \doteq 0{,}6366\,\omega,$$

a vidíme, že podmienka získaná jednoduchším spôsobom je skutočne výrazne horšia v porovnaní s tými získanými vo vyššie uvedených prístupoch.

3.4. Podmienka pre jednoznačnosť riešenia v priestore L^p

Ako sme už poznamenali, prácou v $L^2[a,b]$ sme si oproti práci v $C[a,b]$ polepšili. Prirodzená otázka je, či sa dá podmienka ďalej vylepšiť prácou v $L^p[a,b]$ s vhodne zvoleným p. Ukážeme, že sa to dá. V tejto časti budú odvedené nové výsledky.

Uvažujme rovnicu (12). Pracujme v priestore $L^p[a,b]$ s normou

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

Nech platia predpoklady vety 3.2. Ďalej predpokladajme, že existuje merateľná funkcia $N(x,y)$ taká, že

$$|K(x,y)\,[f(y,z_1) - f(y,z_2)]| \leq N(x,y)\,|z_1 - z_2|$$

pre všetky $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ a $x, y \in [a,b]$, $\int_a^b N^q(x,y)\,\mathrm{d}y < \infty$ pre všetky $y \in [a,b]$ a $\int_a^b \left(\int_a^b N^q(x,y)\,\mathrm{d}y\right)^{p/q} \mathrm{d}x < \infty$, kde $1 < p, q < \infty$ sú čísla zviazané vzťahom $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Definujme operátor $F : L^p[a,b] \to L^p[a,b]$ predpisom

$$(Fu)(x) = \int_a^b K(x,y) f(y,u(y))\,\mathrm{d}y.$$

Overme, že $Fu \in L^p[a,b]$. Nech $u \in L^p[a,b]$. Potom

$$\begin{aligned} |(Fu)(x)| &\leq |(Fu)(x) - (F0)(x)| + |(F0)(x)| \\ &\leq \int_a^b N(x,y)\,|u(y)|\,\mathrm{d}y + \int_a^b K(x,y) f(y,0)\,\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

kde 0 chápeme ako nulovú funkciu. Oba členy na pravej strane nerovnosti patria do $L^p[a,b]$. Druhý, pretože ide o spojitú funkciu na kompaktnom intervale a integrovateľnosť prvého plynie z Hölderovej nerovnosti a predpokladov, a teda $Fu \in L^p[a,b]$. Nájdime podmienku pre kontraktivitu operátoru. Využitím predpokladu a Hölderovej nerovnosti dostávame

$$\begin{aligned} |(Fu_1)(x) - (Fu_2)(x)| &\leq \int_a^b |K(x,y)\,[f(y,u_1(y)) - f(y,u_2(y))]|\,\mathrm{d}y \\ &\leq \int_a^b N(x,y)\,|u_1(y) - u_2(y)|\,\mathrm{d}y \leq \|u_1 - u_2\|_p \left(\int_a^b N^q(x,y)\,\mathrm{d}y\right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Platí

$$\|Fu_1 - Fu_2\|_p \le \left\| \|u_1 - u_2\|_p \left(\int_a^b N^q(x,y)\,\mathrm{d}y \right)^{1/q} \right\|_p = \|u_1 - u_2\|_p \,\mathrm{I}_p,$$

kde

$$\mathrm{I}_p = \left(\int_a^b \left(\int_a^b N^q(x,y)\,\mathrm{d}y \right)^{p/q} \mathrm{d}x \right)^{1/p}.$$

Prejdime k nášmu problému, kde podobne ako v dôkaze vety 3.6 (resp. vety 3.8) vieme zvoliť tvar funkcie $N(x,y) = \beta^2 \,|G(x,y)|$. Potom

$$\begin{aligned}
\int_a^b N^q(x,y)\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \beta^{2q}\,|G(x,y)|^q \,\mathrm{d}y \\
&= \beta^{2q} \left(\int_0^x (1-x)^q\, y^q \,\mathrm{d}y + \int_x^1 (1-y)^q x^q \,\mathrm{d}y \right) \\
&= \beta^{2q} (1-x)^q x^q \frac{1}{q+1},
\end{aligned}$$

kde sme využili, že $|G(x,y)| = -G(x,y)$ a

$$|G(x,y)|^q = \begin{cases} x^q(1-y)^q & \text{pre } 0 \le x \le y \le 1 \\ (1-x)^q y^q & \text{pre } 0 \le y < x \le 1 \end{cases}.$$

Z podmienky $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ plynie $q = \dfrac{p}{p-1}$. Potom

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_p = \left(\int_a^b \left(\int_a^b N^q(x,y)\,\mathrm{d}y \right)^{p/q} \mathrm{d}x \right)^{1/p} \\
&= \left(\int_0^1 \left(\beta^{2q} \frac{(1-x)^q x^q}{q+1} \right)^{p/q} \mathrm{d}x \right)^{1/p} \\
&= \beta^2 \left(\int_0^1 \frac{(1-x)^p x^p}{\left(\frac{p}{p-1}+1\right)^{p-1}} \,\mathrm{d}x \right)^{1/p} \\
&= \beta^2 \left(\frac{p}{p-1} + 1 \right)^{(1-p)/p} \left(\int_0^1 (1-x)^p x^p \,\mathrm{d}x \right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Binomický integrál, ktorý sa objavil na pravej strane, sa dá vyjadriť v tvare

$$\int_0^1 (1-x)^p x^p \,\mathrm{d}x = \mathrm{B}(p+1, p+1),$$

kde B je beta funkcia. Potom

$$\mathrm{I}_p = \beta^2 \left(\frac{p}{p-1} + 1 \right)^{(1-p)/p} \sqrt[p]{\mathrm{B}\,(p+1, p+1)}.$$

Ak chceme, aby bol operátor kontraktívny, potrebujeme $\mathrm{I}_p < 1$. Odtiaľ s využitím definície β v (5) dostávame predpis pre správanie sa podmienky pre jednoznačnosť riešenia integrálnej rovnice (8) pre všeobecné p

$$\alpha < \frac{1}{\pi} \left(\frac{p}{p-1} + 1 \right)^{(p-1)/2p} \sqrt[-2p]{\mathrm{B}\,(p+1, p+1)}\,\omega, \tag{13}$$

kde ω je uhlová frekvencia sily pôsobiacej na kyvadlo a α je vlastná frekvencia kyvadla. Označme

$$k(p) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{p}{p-1} + 1 \right)^{(p-1)/2p} \sqrt[-2p]{\mathrm{B}\,(p+1, p+1)}.$$

Potom

$$\alpha < k(p)\,\omega.$$

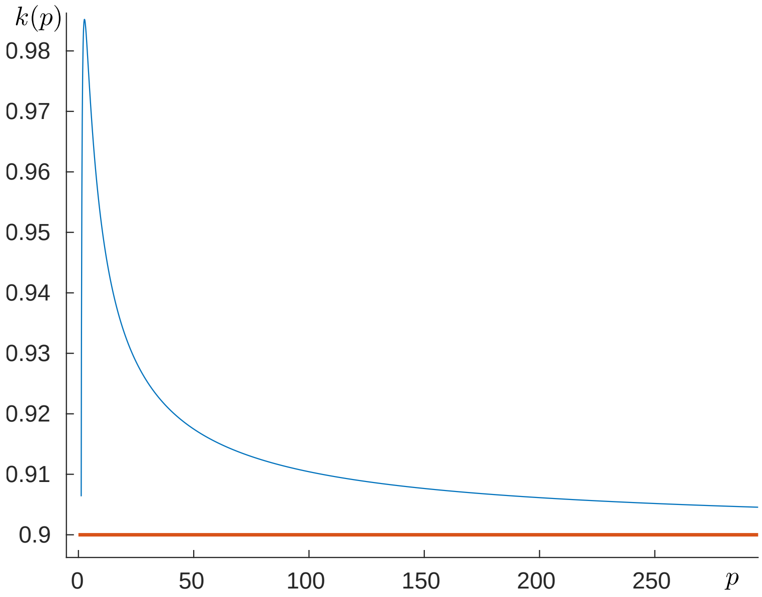
Je zrejmé, že hľadáme také p, aby bolo $k(p)$ čo najväčšie. Hľadať extrém analyticky je príliš náročné, nájdeme ho numericky s grafickou interpretáciou. Graf funkcie $k(p)$ je na obrázku 1, kde je naznačená aj hodnota konštanty pre prácu v priestore $C\,[0,1]$ a na obrázku 2. Prácou v priestore $L^p\,[0,1]$ sa podarilo zväčšiť hodnotu k_m takú, že $\alpha < k_m\,\omega \doteq 0{,}9852\,\omega$, ktorú nadobudne $k(p)$ zhruba pre $p \doteq 2{,}6$, čím sme ďalej vylepšili podmienku pre jednoznačnosť riešenia rovnice (8). Fakt, že toto riešenie je spojité by sa ukázalo rovnakým spôsobom ako tým na konci dôkazu vety 3.7.

Ďalej nás zaujíma správanie sa podmienky pre jednoznačnost pre $p \to \infty$, najmä, či platí, že podmienka v $(L^p\,[a,b]\,, \|\cdot\|_p)$ bude pre $p \to \infty$ rovnaká, ako v $(C\,[a,b]\,, \|\cdot\|_C)$, čo intuitívne očakávame. Ak $p \to \infty$, pre beta funkciu platí podľa Stirlingovho vzorca

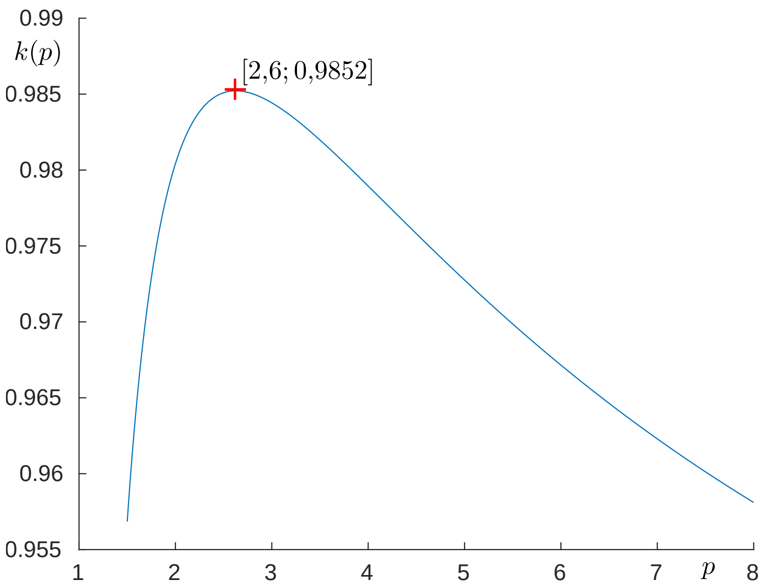
$$\mathrm{B}(p+1, p+1) \sim \frac{\sqrt{2\pi}(p+1)^{p+1/2}(p+1)^{p+1/2}}{(2p+2)^{2p+3/2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2^{2p+1}(2p+2)}$$

kde $f(x) \sim g(x)$ je symbol pre asymptotickú ekvivalenciu funkcií f a g, tj. platí $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Užitím predchádzajúcich relácií a L'Hospitalovho pravidla dostávame

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to\infty} \mathrm{I}_p &= \lim_{p\to\infty} \beta^2 \left(\frac{p}{p-1} + 1 \right)^{(1-p)/p} \sqrt[p]{\mathrm{B}\,(p+1+p+1)} \\
&= \beta^2 \lim_{p\to\infty} \left(\frac{p}{p-1} + 1 \right)^{(1-p)/p} \lim_{p\to\infty} \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{2^{2p+1}(2p+2)} \right)^{1/p} \\
&= \beta^2\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4} = \frac{\beta^2}{8}.
\end{aligned}$$



Obr. 1. Graf závislosti $k(p)$ na p.



Obr. 2. Graf závislosti $k(p)$ na p – priblíženie.

Ak chceme, aby bola podmienka kontraktivity splnená, potrebujeme $\lim_{p\to\infty} \mathrm{I}_p < 1$, čiže

$$\frac{\alpha^2\pi^2}{\omega^2}\,\frac{1}{8} = \frac{\beta^2}{8} < 1,$$

odkiaľ dostávame

$$\alpha < \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\omega,$$

čím sme získali rovnakú podmienku pre jednoznačnosť riešenia ako v priestore $(C\,[a,b],\, \|\cdot\|_C)$.

4. Záver

V článku sme sa zaoberali existenciou a jednoznačnosťou periodických riešení nelineárneho modelu matematického kyvadla so spojitou, nepárnou a periodickou pravou stranou. Ukázali sme, že s pomocou pomerne základných výsledkov funkcionálnej analýzy (a diferenciálneho a integrálneho počtu) dokážeme získať netriviálne výsledky.

Detailné dôkazy a rôzne alternatívne možnosti pri dokazovaní sa dajú nájsť v práci [1].

Literatúra

[1] D. Čaputa: *Funkcionální analýza a matematické kyvadlo*, Bakalářská práce, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Brno, 2019.
[2] D. H. Griffel: *Applied functional analysis*, New York, Dover, 2002.
[3] J. Mawhin: *Seventy-five years of global analysis around the forced pendulum equation*, In: Equadiff 9. Brno: Stony Brook, New York, 1998, 115–145.

Daniel Čaputa, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: daniel.caputa@gmail.com

APLIKÁCIA ČASTICOVÝCH FILTROV NA MERANIA MULTISTATICKÉHO RADARU

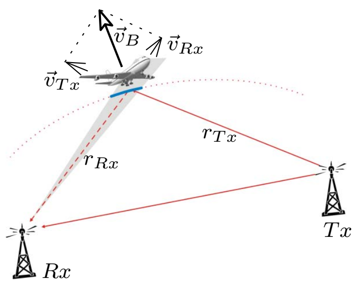
MATEJ BENKO a PAVEL KULMON

Abstrakt. Tento článok sa zaoberá aplikáciou časticových filtrov (skrátene PF z *angl.* Particle Filters) na problematiku určovania polohy a rýchlosti cieľov systémom Multi-Static Primary Surveillance Radar (MSPSR). V článku je popísaný základný princíp fungovania systému, merania vydávané systémom a ich vzťah k polohe a rýchlosti objektu. Ďalej je použitie PF ilustrované na konkrétnom prípade určenia polohy a rýchlosti cieľa v systéme s dvoma prijímačmi a dvoma vysielačmi. Je uvedené zhodnotenie presnosti a analýza dosiahnutých výsledkov pre rôzne druhy filtrácie voči referenčným dátam a tiež načrtnutý smer pre budúci výskum.

1. Úvod

1.1. Popis MSPSR radaru

Multi-Static Primary Surveillance Radar (MSPSR) je pasívne sledovacie zariadenie slúžiace na detekciu a určenie polohy a rýchlosti cieľov vo vzdušnom priestore. Skladá sa z niekoľkých *bistatických párov.* Jeden bistatický pár obsahuje prijímač Rx a vysielač Tx.



Obr. 1. Bistatický pár zakreslený v rovine [4].

2010 *MSC.* Primární 62M05; Sekundární 62P30, 65C35, 65C40.

Klíčová slova. Multistatický radar, optimálny Bayesov odhad, časticová filtrácia.

Článok vznikol na základe bakalárskej práce Mateja Benka v odbore Matematické in-žinierstvo na FSI VUT v Brne. Vedúcim práce bol Libor Žák z Ústavu matematiky FSI VUT v Brne. Práca bola riešená v spolupráci so spoločnosťou ERA a.s.

Jeden takýto pár vie zmerať dve hodnoty. *Bistatickú polohu* a *bistatickú rýchlosť*. Bistatická poloha predstavuje súčet vzdialeností od lietadla (cieľa) k prijímaču Rx a vysielaču Tx. Formálne zapísané $r_B = r_{Rx} + r_{Tx}$. Bistatická rýchlosť predstavuje deriváciu bistatickej polohy podľa času, teda $v_B = \dot{r}_B$. Geometricky je to $\|\vec{v}_B\|$ s kladným znamienkom, ak $\vec{v}_B$ smeruje von z elipsy na obrázku 1 (v skutočnosti elipsoidu), a záporným, ak smeruje dovnútra. V tomto článku je použitý MSPSR radar so 4 takýmito bistatickými pármi (2 vysielače a 2 prijímače).

1.2. Optimálny Bayesov odhad

Definícia (stavovo-priestorového modelu)**.** Nech postupnosť stavov $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \ldots,$ $\mathbf{x}^{(k)}, \ldots$ je Markovova ($\mathbf{x}^{(k)}$ závisí len od $\mathbf{x}^{(k-1)}$), $\mathbf{x}^{(k)} \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$.[1] Ďalej nech je postupnosť meraní $\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \ldots, \mathbf{y}^{(k)}, \ldots$, $\mathbf{y}^{(k)} \in \mathbb{R}^{m_k}$, pričom $m_k \in \mathbb{N}$ môže závisieť na $k \in \{1, 2, \ldots\}$. Dynamickým systémom v stavovo-priestorovej formulácii sa nazve model

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathscr{A}^{(k-1)}(\mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{u}^{(k-1)}), \tag{1}$$

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathscr{B}^{(k)}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{w}^{(k)}); \tag{2}$$

$\mathbf{x}^{(0)}$, $\mathbf{u}^{(0)}$ sú dané, zatiaľ čo $\mathbf{y}^{(0)}$, $\mathbf{w}^{(0)}$ nie je k dispozícii. $\mathscr{A}^{(k-1)} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sa nazýva model systému, kde $\mathbf{u}^{(k-1)}$ je realizáciou riadiaceho šumu

$$\boldsymbol{U}^{(k-1)} \sim F(\boldsymbol{\phi}^{(k-1)})$$

s parametrami $\boldsymbol{\phi}^{(k-1)} \in \mathcal{P}$.[2] $\boldsymbol{U}^{(k-1)}$ vyjadruje neurčitosť systému. $\mathscr{B}^{(k)} : \mathbb{R}^{m_k} \times \mathbb{R}^{m_k} \to \mathbb{R}^{m_k}$ sa nazýva model meraní. $\mathbf{w}^{(k)}$ je realizáciou $\boldsymbol{W}^{(k)} \sim F(\boldsymbol{\psi}^{(k)})$, šumu meraní, určeného parametrami $\boldsymbol{\psi}^{(k)} \in \mathcal{P}$. Charakterizuje nepresnosť senzorov. Zvyčajne býva konštantný od k, avšak nie nutne.

Odvodenie (Bayesovho odhadu)**.** Zmyslom Bayesovho odhadu je v čase k odhadnúť stav $\mathbf{x}^{(k)}$ ako číselnú charakteristiku (stredná hodnota, medián, ...) náhodného vektora, ktorý je daný aposteriórnou hustotou $f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k)})$, kde $\mathbf{Y}^{(k)} = \{\mathbf{y}^{(i)}\}_{i=1}^{k}$ je postupnosť všetkých meraní až po k (odhad stavu sa tiež zvykne nazývať filtrácia). Teda hlavným cieľom je získať $f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k)})$. Jej odvodenie je v nasledujúcich riadkoch, skladá sa z 2 krokov.

1. predikčný krok. Určí sa apriórna hustota $f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k-1)})$ pomocou *Chapman-Kolmogorovej vety* (je použiteľná len pri Markovových reťazcoch, čo je splnené).

$$f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k-1)}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{x}^{(k-1)}) \cdot f(\mathbf{x}^{(k-1)}|\mathbf{Y}^{(k-1)}) \, \mathrm{d}\mathbf{x}^{(k-1)}.$$

Hustota $f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{x}^{(k-1)})$ vychádza z rovnice (1). $f(\mathbf{x}^{(k-1)}|\mathbf{Y}^{(k-1)})$ je aposteriórna hustota pravdepodobnosti v čase $k-1$. Cieľom filtrácie je túto hustotu určiť, tzn.

[1]Symbolom $\mathcal{S}$ sa myslí stavový priestor. Je to „vhodná“ oblasť (záujmu), kde sa pozorujú stavy sledovaných objektov a je k nim možné získať merania $\mathbf{y}^{(k)}$ zo senzorov.

[2]Symbolom $\mathcal{P}$ sa myslí parametrický priestor, ktorého prvky jednoznačne určujú rozdelenie (distribučnú funkciu) šumu (náhodného vektora).

že v čase k je už táto hustota známa. Pre $k = 1$ platí $f(\mathbf{x}^{(1)}|\mathbf{Y}^{(0)}) \equiv f(\mathbf{x}^{(1)})$. Pretože $\mathbf{y}^{(0)}$, je $\mathbf{Y}^{(0)} = \emptyset$ a $f(\mathbf{x}^{(1)}|\,\emptyset\,) \equiv f(\mathbf{x}^{(1)})$.

2. aktualizačný krok. Na vyjadrenie $f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k)})$ sa využije *Bayesova veta*:

$$f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k)}) = \frac{f(\mathbf{y}^{(k)}|\mathbf{x}^{(k)}) \cdot f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k-1)})}{f(\mathbf{y}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k-1)})}.$$

Obe hustoty v čitateli zlomku sú už v tomto kroku známe. Zostáva vyjadriť len hustotu v menovateli, tzv. normalizujúcu konštantu. Opäť sa využije Chapman-Kolmogorova rovnica a získa sa vzťah

$$f(\mathbf{y}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k-1)}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{y}^{(k)}|\mathbf{x}^{(k)}) \cdot f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k-1)})\,\mathrm{d}\mathbf{x}^{(k)}.$$

$f(\mathbf{y}^{(k)}|\mathbf{x}^{(k)})$ je tzv. dôveryhodnosť meraní a vychádza priamo z rovnice (2). Keďže je daný počiatočný stav $\mathbf{x}^{(0)}$, je daná $f(\mathbf{x}^{(0)}|\mathbf{Y}^{(0)}) = f(\mathbf{x}^{(0)}|\,\emptyset\,) \equiv f(\mathbf{x}^{(0)})$. Tým je hotové odvodenie $f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k)})$. Problém však zostáva, ako túto hustotu spočítať.

1.3. Výpočet aposteriórnej hustoty časticovými filtrami (PF)

PF predstavujú tzv. *tvrdé numerické riešenie* na výpočet $f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k)})$. Existujú aj iné filtre (*optimálne*), ktoré spočítajú $f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k)})$ analyticky (napr. Kálmánov filter (KF) [1]), avšak merania z multistatického radaru nespĺňajú predpoklady na to, aby optimálne filtre mohli byť použité. Ďalej existujú filtre založené na rozšírení analytických filtrov, ktoré aproximujú $f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k)})$. Typicky napríklad Extended KF alebo Unscented KF [6]. S touto triedou algoritmov neboli dosiahnuté uspokojivé výsledky pre multistatické merania, preto nie sú bližšie popísané.

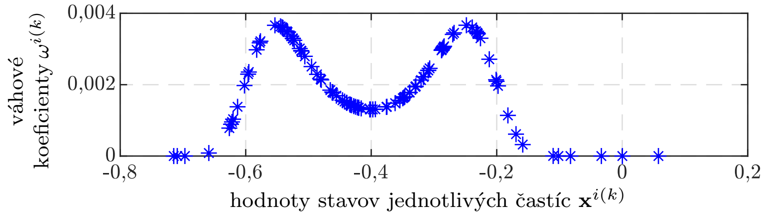
PF kladú minimálne požiadavky na $\mathscr{A}^{(k-1)}$, $\mathscr{B}^{(k)}$ a rozdelenie šumov $\boldsymbol{U}^{(k-1)}$, $\boldsymbol{W}^{(k)}$. Jediné obmedzenie je, aby boli ich hodnoty fyzikálne prípustné (zmysluplné). PF sú trieda algoritmov založených na náhodnom vzorkovaní častíc (stav každej častice v čase k sa označí $\mathbf{x}^{i(k)}$), pomocou ktorých diskrétne aproximujú $f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k)})$. Základný PF je SIS (Sequence Importance Sampling) filter. Všetky ostatné PF sú z neho odvodené pridaním výpočtov. Stručný popis SIS filtra:

1. predikčný krok. Vďaka znalosti stavu každej častice v predchádzajúcom kroku $\mathbf{x}^{i(k-1)}$, rozdelenia šumu $\boldsymbol{U}^{(k-1)}$ a modelu systému $\mathscr{A}^{(k-1)}$ vygeneruje nové stavy častíc $\mathbf{x}^{i(k)}$. Tieto nové stavy sú náhodnými nezávislými vzorkami (i.i.d.) z apriórnej hustoty, značí sa $\mathbf{x}^{i(k)} \sim f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k-1)})$.

2. aktualizačný krok. V tomto kroku sú do systému dodané merania v čase k ($\mathbf{y}^{(k)}$), viď odsek 1.2. Každá častica sa ohodnotí tzv. váhovým koeficientom $\omega^{i(k)} \propto \omega^{i(k-1)} f(\mathbf{y}^{(k)}|\mathbf{x}^{i(k)})$. Aposteriórna hustota $f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k)})$ sa aproximuje vzťahom

$$f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k)}) \approx \sum_{i=1}^{N} \omega^{i(k)} \delta(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{i(k)}), \tag{3}$$

kde $\delta(\cdot)$ je Diracova miera. Ukážka aproximácie (3) je znázornená na obrázku 2.



Obr. 2. Ukážka aproximácie $f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k)})$ v určitom k použitím SIS filtra pre $n = 1$, $m_k = 1$.

2. Metodológia

2.1. Základné varianty časticových filtrov (PF)

SIS filter predstavený v odseku 1.3 trpí tzv. *degeneračným fenoménom* – viď nižšie a preto je v praxi nepoužiteľný. V tomto odseku sú stručne predstavené tri základné použiteľné PF: SIR, Auxiliary a Regularized. Ich podrobnejší opis je možné nájsť napríklad v [1]. Všetky sú odvodené zo SIS filtra.

2.1.1. Riešenie degeneračného fenoménu. Problém spôsobený SIS filtrom. Po niekoľkých iteráciach má iba malé množstvo častíc nenulový váhový koeficient $\omega^{i(k)}$ (viď obrázok 3a). Ostatné nemajú vplyv na aproximáciu $f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k)})$. Sú uvažované nasledujúce 2 riešenia tohoto problému:

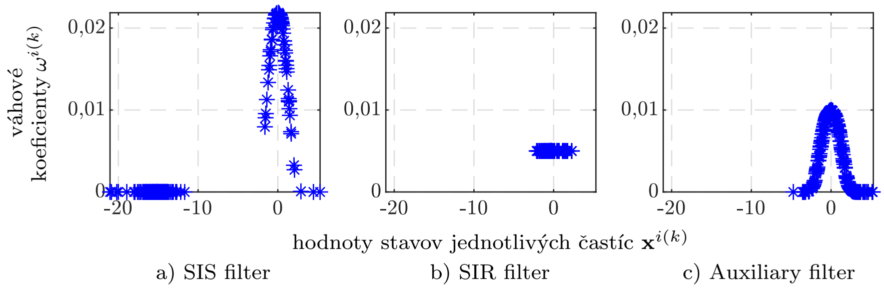
1. Sampling Importance Resampling (SIR) PF. Je rozšírený SIS filter, kde na konci je pridaný algoritmus *Resampling* [1]. Jeho výsledkom sa častice stanú i.i.d. vzorkami z $f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k)})$, t.j. majú rovnaké $\omega^{i(k)}$ a vyššie hodnoty $f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k)})$ určuje vyššia hustota častíc v danej oblasti. Viď obrázok 3b.

2. Auxiliary Sampling Importance Resampling (Auxiliary) PF. Predstavuje rozšírenie SIR filtra. Postupom zhodným so SIS filtrom vygeneruje pomocné častice $\boldsymbol{\mu}^{i(k)}$. Ohodnotí ich váhovými koeficientami $\omega^{i(k)} \propto \omega^{i(k-1)} f(\mathbf{y}^{(k)}|\boldsymbol{\mu}^{i(k)})$. Nasleduje algoritmus *Resampling*, ale výstup z neho sú len referencie i^j na pôvodné $\boldsymbol{\mu}^{i(k)}$. Nakoniec sa opakuje postup ako pri SIS filtri, avšak s dvoma rozdielmi. Na vzorkovanie sa použijú častice $\mathbf{x}^{i^j(k-1)}$ a výsledné vzorky sa ohodnotia $\omega^{j(k)} \propto f(\mathbf{y}^{(k)}|\mathbf{x}^{j(k)})/f(\mathbf{y}^{(k)}|\boldsymbol{\mu}^{i^j(k)})$.[3] Viď obrázok 3c.

2.1.2. Riešenie problému vyčerpania vzoriek. Použitie algoritmu *Resampling* môže spôsobiť pri nízkych hodnotách rozptylu šumu (variačnej matice) tzv. *problém vyčerpania vzoriek*. Najmä viditeľný pri SIR filtroch. Tento problém znamená stratu diverzity častíc, čo sa prejavuje na znížení spoľahlivosti filtra. Jeho riešením je algoritmus *Regularization* [5].

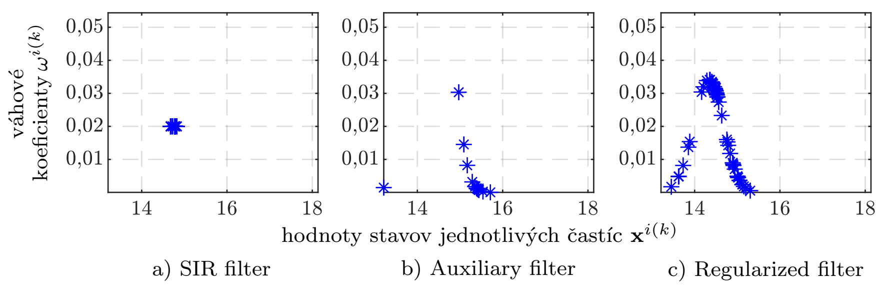
3. Regularized PF. Vznikne rozšírením SIS filtra o algoritmus *Regularization*. Tento algoritmus v prvom kroku vytvorí množinu častíc ako vzoriek zo spojitej aproximácie $f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k)}) \approx \sum_{i=1}^{N} \omega^{i(k)} K_h(\mathbf{x}^{(\mathbf{k})} - \mathbf{x}^{i(k)})$. K_h je jadro, štandardne

[3] Algoritmus *Resampling* vytvorí častice ako i.i.d vzorky tak, že častice s nízkymi $\omega^{i(k)}$ odstráni a s vyššími zdupľuje. Auxiliary PF teda pomocné vzorky $\boldsymbol{\mu}^{i(k)}$ využije na odstránenie častíc, ktorých $\omega^{i(k)}$ by boli nízke. i^j odkazujú na častice, ktoré zostanú zachované.



Obr. 3. Ukážka degeneračného fenoménu a jeho riešenia v podobe SIR a Auxiliary filtrov pre $n = 1$, $m_k = 1$.

sa používa Epanechnikovo. Potom tieto častice znova ohodnotí váhovými koeficientami. Viď obrázok 4c.



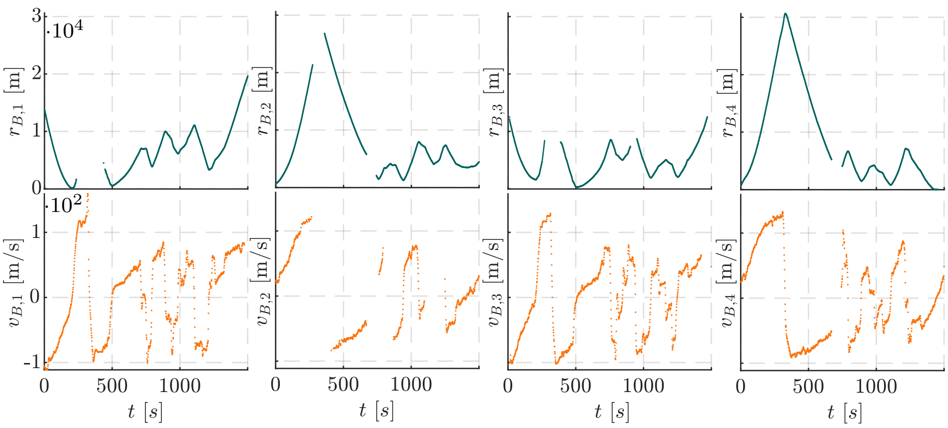
Obr. 4. Ukážka problému vyčerpania vzoriek a jeho riešenia v podobe Regularized filtra pre $n = 1$, $m_k = 1$.

2.2. Popis dostupných dát a použitej referencie

Spracovávané dáta sú multistatické meranie (hodnoty bistatických polôh a rýchlostí pre 4 bistatické páry - získané v rovnakých časoch $t^{(k)}$, $k \in \{1, 2, \ldots, 1\,192\}$) plánovaného preletu ľahkého civilného jednomotorového lietadla Cessna C172SP. Toto plánované meranie nezahŕňalo obmedzenie inej letovej prevádzky v stavovom priestore $\mathcal{S}$. Preto sú v meraných dátach prítomné detekcie od všetkých cieľov, ktoré bol systém schopný detekovať (meranie prebiehalo v okolí Čáslavi). V rámci predspracovania boli ostatné detekcie odstránené.

Ďalej, táto sada nameraných dát obsahuje niekoľko narušených úsekov, kedy zlyhal HW niektorého vysielača a meranie neprebiehalo určitý čas vo všetkých (štyroch) bistatických pároch. Získané dáta očistené od ostatných detekcií sú zobrazené na obrázku 5.

Ako referencia k nameraným multistatickým meraniam bol použitý záznam z palubnej GPS lietadla, ktorý dosahuje o niečo lepšiu presnosť v určení polohy. Súradnice rýchlosti boli dopočítané, teda majú nižšiu presnosť. Označenie $\mathbf{x}^{\mathrm{GPS}}$.



Obr. 5. Namerané hodnoty bistatickej polohy a rýchlosti pre 4 bistatické páry v čase.

Boli upravené tak, aby tvorili referenciu v rovnakých časoch $t^{(k)}$ ako sú získané multistatické merania.

2.3. Nastavenia parametrov pre časticové filtre

Pre filtráciu dát popísaných v odseku 2.2 boli použité nasledovné parametre. Stavový vektor $\mathbf{x} = [x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^\top$. Šum $\mathbf{u}^{(k-1)}$ je realizáciou $\boldsymbol{U}^{(k-1)} \sim \mathsf{N}_6(\mathbf{0}, \mathbf{Q})$, časový rozdiel medzi dvoma meraniami je $\Delta t^{(k-1)} = t^{(k)} - t^{(k-1)}$,

$$\mathscr{A}^{(k-1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta t^{(k-1)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t^{(k-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t^{(k-1)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{u}^{(k-1)}, \mathbf{Q} = \operatorname{diag}\begin{pmatrix} 700 \\ 700 \\ 1 \\ 70 \\ 70 \\ 10^{-6} \end{pmatrix}.$$

Vektor meraní $\mathbf{y} = [r_{B,1}, r_{B,2}, r_{B,3}, r_{B,4}, v_{B,1}, v_{B,2}, v_{B,3}, v_{B,4}]^\top$. Pre stručnosť sa označí $\mathbf{r} = [x, y, z]^\top$ a $\mathbf{v} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^\top$. Šum $\mathbf{w}^{(k)}$ je realizáciou $\boldsymbol{W}^{(k)} \sim \mathsf{N}_8(\mathbf{0}, \mathbf{R})$,

$$\mathscr{B}^{(k)} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{Rx_1}\| + \|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{Tx_1}\| \\ \|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{Rx_1}\| + \|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{Tx_2}\| \\ \|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{Rx_2}\| + \|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{Tx_1}\| \\ \|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{Rx_2}\| + \|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{Tx_2}\| \\ \left(\frac{\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{R_1}}{\|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{R_1}\|} + \frac{\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{Tx_1}}{\|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{Tx_1}\|}\right)^\top \cdot \mathbf{v}^{(k)} \\ \left(\frac{\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{Rx_1}}{\|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{Rx_1}\|} + \frac{\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{Tx_2}}{\|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{Tx_2}\|}\right)^\top \cdot \mathbf{v}^{(k)} \\ \left(\frac{\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{Rx_2}}{\|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{Rx_2}\|} + \frac{\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{Tx_1}}{\|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{Tx_1}\|}\right)^\top \cdot \mathbf{v}^{(k)} \\ \left(\frac{\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{Rx_2}}{\|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{Rx_2}\|} + \frac{\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{Tx_2}}{\|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{Tx_2}\|}\right)^\top \cdot \mathbf{v}^{(k)} \end{pmatrix} + \mathbf{w}^{(k)}, \quad \mathbf{R} = \operatorname{diag}\begin{pmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \\ 400 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

V čase k bol odhad stavu $\mathbf{x}^{*(k)}$ braný ako stredná hodnota aposteriórnej hustoty, t.j. $\mathbf{x}^{*(k)} = E(f(\mathbf{x}^{(k)} | \mathbf{Y}^{(k)}))$.

Pre niektoré k nie sú všetky hodnoty multistatických meraní k dispozícii (viď odsek 2.2). V takom prípade sú vynechané príslušné riadky v rovnici (4). Na určenie počiatočného stavu $\mathbf{x}^{*(0)}$ bola použitá GPS referencia, t.j. $\mathbf{x}^{*(0)} = \mathbf{x}^{\mathrm{GPS}(0)}$ (odhadnuté stavy (výsledok filtrácie) budú ďalej pre rozlíšenie značené ako $\mathbf{x}^{*(k)}$). Počiatočný riadiaci šum $\mathbf{u}^{(0)}$ ako realizácia $\boldsymbol{U}^{(0)} \sim \mathsf{N}(\mathbf{o}, \mathbf{Q})$.

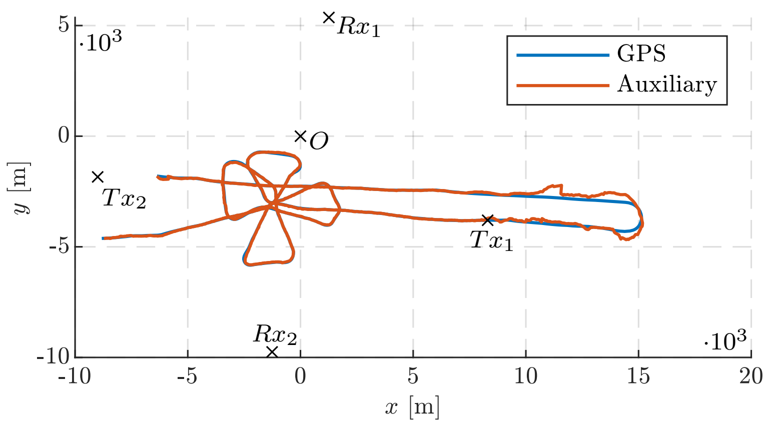
2.4. Testy štatistických hypotéz

Pre vyhodnotenie úspešnosti filtrov bolo potrebné ohodnotiť, či dve množiny stavov $\mathbf{x}_a = \{\mathbf{x}_a^{(k)}\}_{k=1}^N$, $\mathbf{x}_b = \{\mathbf{x}_b^{(k)}\}_{k=1}^N$ sú ekvivalentné pre odpovedajúce si hodnoty k. Test hypotézy $H : \mathbf{x}_a = \mathbf{x}_b$ proti $H_A : \mathbf{x}_a \neq \mathbf{x}_b$, súhrnne značí testy po zložkách stavového vektora $\mathbf{x}$, t.j. $H : x_a - x_b = 0$ proti $H_A : x_a - x_b \neq 0$, $H : y_a - y_b = 0$ proti $H_A : y_a - y_b \neq 0$, atď. Ako miera zhody bola uvažovaná p-hodnota testu, ktorým bol znamienkový, resp. Wilcoxonov, resp. t-test v závislosti od splnenia predpokladov pre dané testy. Je potrebné poznamenať, že sila testov β vzrastá v poradí ako sú vymenované, na čo bol braný ohľad.

3. Výsledky

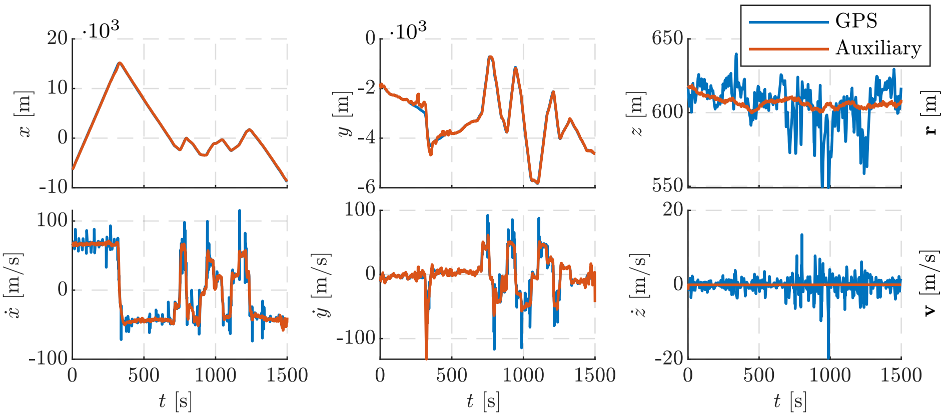
Získané multistatické merania (popísané v odseku 2.2) boli postupne prefiltrované za účelom odhadu kartézskych polôh a rýchlostí $\mathbf{x}^* = \{\mathbf{x}^{*(k)}\}_{k=1}^N$ ($N = 1\,192$). Boli použité filtre SIR, Auxiliary a Regularized (viď odsek 2.1), ktorých výsledky sú ďalej diskutované (SIS filter nezachytil ani tvar trajektórie, čo sa aj predpokladalo, rovnako aj PF Progressive Proposal [3], ktorý v texte preto ani nebol uvádzaný).

Na Obrázku 6 sú znázornené výsledky filtrácie pre súradnice x^*, y^* filtra Auxiliary v porovnaní s GPS referenciou x^{GPS}, y^{GPS}.



Obr. 6. Trajektória letu v rovine xy.

Na obrázku 7 sú znázornené výsledky filtrácie pre všetky súradnice $\mathbf{x}^*$ v porovnaní s $\mathbf{x}^{\mathrm{GPS}}$. Z obrázku 6 je zjavné, že výsledky filtrácie sú vnútri štvoruholníka $Rx_1Tx_1Rx_2Tx_2 =: \mathcal{Q}$ kvalitnejšie ako v jeho okolí. Je to jednoznačne spôsobené



Obr. 7. Vývoj trajektórie letu v čase pre jednotlivé súradnice stavového vektora $\mathbf{x}$.

výrazne horšou presnosťou meraní pre stav mimo $\mathcal{Q}$ (viď [2]). Preto boli výsledky analyzované zvlášť pre let vnútri (t.j. $\{\mathbf{x}^{*(k)}; [x^{*(k)}, y^{*(k)}]^\top \in \mathcal{Q}$, bude sa skrátene písať $\mathbf{x}^* \in Q$) a mimo $\mathcal{Q}$ (analogicky $\mathbf{x}^* \notin \mathcal{Q}$). V tabuľke 1 sú vypísané pozorované stredné a maximálne hodnoty chyby odhadu vektorov polohy a rýchlosti od GPS.

Ako objektívne zhodnotenie úspešnosti filtrov slúžil test hypotézy $H : \mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{\mathrm{GPS}}$ proti $H_A : \mathbf{x}^* \neq \mathbf{x}^{\mathrm{GPS}}$, resp. výsledná p-hodnota. Pre súradnice $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ bol

Tabuľka 1. Vektorové charakteristiky vedenia leteckého cieľa zvlášť pre polohu a rýchlosť.

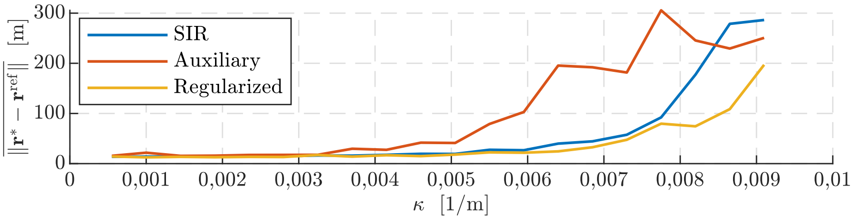
	$\overline{\lVert\mathbf{r}^* - \mathbf{r}^{\mathrm{GPS}}\rVert}$ [m]	$\max\lVert\mathbf{r}^* - \mathbf{r}^{\mathrm{GPS}}\rVert$ [m]	$\overline{\lVert\mathbf{v}^* - \mathbf{v}^{\mathrm{GPS}}\rVert}$ [m/s]	$\max\lVert\mathbf{v}^* - \mathbf{v}^{\mathrm{GPS}}\rVert$ [m/s]
vnútri $Rx_1Tx_1Rx_2Tx_2$ ($\mathbf{x}^* \in \mathcal{Q}$)				
SIR	79, 56	162, 05	10, 33	64, 23
Auxiliary	79, 14	166, 38	10, 33	65, 07
Regularized	87, 66	196, 36	10, 17	63, 95
mimo $Rx_1Tx_1Rx_2Tx_2$ ($\mathbf{x}^* \notin \mathcal{Q}$)				
SIR	236, 83	720, 52	14, 26	109, 67
Auxiliary	245, 83	817, 49	12, 45	113, 21
Regularized	273, 17	1018, 21	13, 64	111, 95

[·] jednotka fyzikálnej veličiny.
$\overline{\lVert\cdot\rVert}$ stredná hodnota z euklidovských noriem vektorov,
$\max\lVert\cdot\rVert$ maximálna hodnota z euklidovských noriem vektorov,

test jemne skreslený vyšším rozptylom v referenčných GPS dátach, čo bolo aj vzaté do úvahy pri vyvodzovaní záverov. Na základe testu bolo vyhodnotené, že všetky filtre mali problém odhadnúť súradnicu z vnútri $\mathcal{Q}$ a pre $\mathbf{x}^* \notin \mathcal{Q}$ aj súradnicu y. Inak najvyššia presnosť voči GPS referenciám bola dosiahnutá s filtrom Auxiliary. Najhoršie obstál filter SIR (pre $\mathbf{x}^* \in \mathcal{Q}$ však stále dosiahol kvalitný výsledok).

Tie isté dáta boli následne prefiltrované SIR filtrom raz s 1 000 (ozn. $\mathbf{x}_s^*$) a potom so 100 000 (ozn. $\mathbf{x}_t^*$) generovanými časticami. Bol vykonaný test hypotézy $H : \mathbf{x}_s^* = \mathbf{x}_t^*$ proti $H_A : \mathbf{x}_s^* \neq \mathbf{x}_t^*$ opäť zvlášť pre $\mathbf{x}_s^* \in \mathcal{Q}$ a $\mathbf{x}_s^* \notin \mathcal{Q}$. Hypotéza bola zamietnutá pre súradnice $y, z, \dot{x}$; $\mathbf{x}_s^* \notin \mathcal{Q}$.

V nastaveniach parametrov filtrov (odsek 2.3) je predpokladaný model pohybu $\mathscr{A}^{(k-1)}$ ako takmer rovnomerný priamočiary pohyb so šumom. Vyvstáva otázka, aká je závislosť tvaru trajektórie od chyby odhadu s takýmto modelom. Pre tieto účely boli vygenerované syntetické dáta s rôznou krivosťou trajektórie κ a rôznou veľkosťou zrýchlenia a, ozn. $\mathbf{x}^{\text{ref}}$. Zaujímavý výsledok bol získaný pre let s konštantným a v rovine $z = 500$ m pre priemernú chybu v odhade polohy, t.j. $\|\mathbf{r}^* - \mathbf{r}^{\text{ref}}\|$ v závislosti od κ. Viď obrázok 8. Pre pohyb s nekonštantným z bola



Obr. 8. Ukážka závislosti chyby odhadu od zakrivenia trajektórie v rovine.

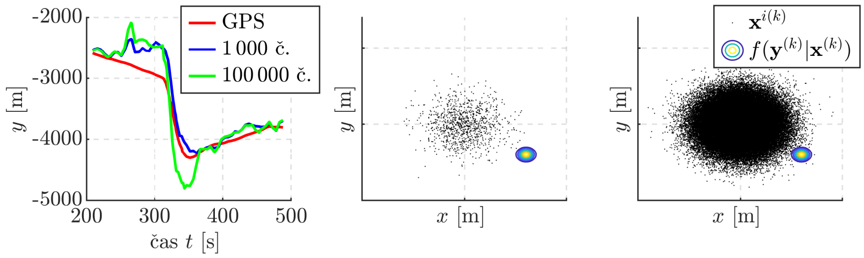
$\|\mathbf{r}^* - \mathbf{r}^{\text{ref}}\|$ od κ nekorelovaná. Obdobne sa ukázalo, že chyba odhadu rýchlosti $\|\mathbf{v}^* - \mathbf{v}^{\text{ref}}\|$ a veľkosť zrýchlenia a nie sú (štatisticky významne) korelované.

4. Diskusia

Na základe výsledkov v 3. kapitole je možno konštatovať vhodnosť použitia PF (konkrétne SIR, Auxiliary a Regularized) na multistatické radarové merania. Je potrebné spomenúť ich stabilitu rozdielu medzi realitou a modelom $\mathscr{A}^{(k-1)}$. Viď obrázok 8 (krivosť $\kappa = 0{,}005$ môže byť považovaná za hraničnú pre reálne lietadlo). Kriticky citlivý na tento rozdiel sa ukázal Unscented Kálmánov filter [6]. Tiež neboli pozorované štatisticky významné vychýlenia v prípade výpadku meraní z niektorých bistatických párov. V neposlednom rade je potrebné podtrhnúť vysporiadanie sa so silnou nelinearitou v meraniach (model $\mathscr{B}^{(k)}$), ktorá sa ukázala ako kritická pre iné filtre, ako Extended Kálmánov filter [6] alebo Progressive Proposal PF [3]. Medzi slabšie stránky PF sa radí vyššia výpočtová náročnosť (logicky vyplývajúca z generácie náhodných vzoriek).

Nefunkčnosť SIS filtra dokázala prítomnosť silného degeneračného fenoménu pri filtrácii reálnych multistatických meraní. Jeho odstránenie v podobe Auxiliary PF sa ukázalo ako veľmi vhodné. Na druhej strane pre výsledky zo syntetických meraní (obrázok 8), kde šum meraní presne zodpovedá modelu $\mathscr{B}^{(k)}$ sa ukázal najvhodnejší filter Regularized, ktorý zabezpečil dostatočnú diverzitu častíc. Vďaka nej aj dobre zachytil silnejší odklon od predpokladaného modelu systému $\mathscr{A}^{(k-1)}$.

Porovnaním výsledkov 1 000 a 100 000 generovaných častíc sa ukázalo, že výrazné navýšenie počtu vnútri $\mathcal{Q}$ nemá vplyv na presnosť odhadu a mimo $\mathcal{Q}$ sa presnosť zhorší, čo pôsobí paradoxne. Viď obrázok 9a pre y, $\mathbf{x}^* \notin \mathcal{Q}$. To je spôsobené



a) poloha v súradnici y b) 1 000 častíc c) 100 000 častíc

Obr. 9. Ukážka závislosti počtu častíc na presnosť odhadu a vysvetľujúce náčrty problému.

tým, že ak sú merania kvalitné a model $\mathscr{A}^{(k-1)}$ je dostatočne dobrý, aproximácia $f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k)})$ (3) má nenulové hodnoty v oblasti s vyššou hustotou častíc (aj pri 1 000 časticiach), ktoré sa ohodnotia nenulovými váhovými koeficientmi $\omega^{i(k)}$ a ďalšie navyšovanie počtu častíc je zbytočné. Ak sú však merania nekvalitné, v oblasti, kde by boli ohodnotené váhové koeficienty nenulovými hodnotami, nemusia byť žiadne častice. To znamená, že vo výsledku filter chybné merania nezoberie do úvahy (odfiltruje ich). Viď obrázok 9b. Ak je však počet častíc výrazne navýšený (napríklad z 1 000 na 100 000), viď obrázok 9c, bude oveľa pravdepodobnejšie, že v tejto oblasti s nízkou pravdepodobnosťou vyplývajúcou z $f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k-1)})$ bude nejaká častica, resp. niekoľko málo častíc. Tieto však budú ohodnotené významným váhovým koeficientom a odhad $\mathbf{x}^{*(k)}$ bude stiahnutý k chybným meraniam a filter ich neodfiltruje (viď obrázok 9a).

5. Záver

Cieľom článku bolo stručne načrtnúť problematiku optimálneho Bayesovho odhadu so zameraním na jeho riešenie pomocou časticovej filtrácie a jej následná aplikácia na multistatické merania z MSPSR radarového systému. Významnou časťou bolo následné zhodnotenie a analýza výsledkov.

Časticovými filtrami (konkrétne SIR, Auxiliary a Regularized) boli dosiahnuté uspokojivé výsledky. Z diskusie stojí za zmienku pomerne zaujímavé zistenie, že navýšenie počtu častíc môže spôsobiť zníženie presnosti výsledného odhadu. Je to možné považovať za zistenie, ktoré je paradoxné, avšak je v článku objasnené.

Problematiku aplikácie časticových filtrov nie je možné považovať za uzavretú. Z hľadiska nastavenia parametrov by bola v budúcnosti vhodná analýza vplyvu šumu $\boldsymbol{U}^{(k-1)}$. Tiež by bola vhodná analýza vplyvu nepresného počiatočného stavu $\mathbf{x}^{(0)}$ na celkový výsledok. Z hľadiska analýzy by bolo do budúcnosti dobré zistiť, prečo a za akých podmienok chyba odhadu nemá normálne rozdelenie, resp. jej rozdelenie nie je symetrické.

Literatúra

[1] M. Arulampalam, M. Sanjeev, S. MASKELL, N. GORDON, T. CLAPP: *Tutorial on Particle Filters for Online Nonlinear/Non-Gaussian Bayesian Tracking*, IEEE Transactions on Signal Processing **50** (2002), 174–188, doi:10.1109/78.978374.

[2] M. Benko: *Vyhodnocení úspěšnosti filtrů při sledování cílů*, Bakalářská práce, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Brno, 2019.

[3] P. Bunch, S. J. Godsill: *The Progressive Proposal Particle Filter: Better Approximations to the Optimal Importance Density*, Journal of the American Statistical Association **111** (2014), 748–762.

[4] P. Cabalkova, D. Kubal, M. Pelant, R.Plsek, V. Stejskal: *Aspects of target detection in MSPSR system under clutter conditions*, 15th International Radar Symposium (IRS), IEEE, 2014, 1–4, doi:10.1109/IRS.2014.6869190.

[5] Ch. Musso, N. Oudjane, F. Le Gland: *Improving Regularized Particle Filters*, Doucet A., de Freitas N., Gordon N. (eds) Sequential Monte Carlo Methods in Practice. Statistics for Engineering and Information Science, 1–25, Springer, New York, 2001.

[6] E. A. Wan, R. Van der Merwe: *The unscented Kalman filter for nonlinear estimation*, Proceedings of the IEEE 2000 Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium (Cat. No. 00EX373), IEEE, 2000, 153–158, doi:10.1109/ASSPCC.2000.882463.

Matej Benko, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: matej.benko@vutbr.cz

Pavel Kulmon, Oddělení výzkumu a analýzy, ERA a.s., Nekázanka 880/11, 110 00 Praha, Česká republika,
e-mail: p.kulmon@era.aero

SOUTĚŽ V MATEMATICKÉM MODELOVÁNÍ SCUDEM IV 2019

ZDENĚK OPLUŠTIL

Abstrakt. Článek popisuje čtvrtý ročník mezinárodní soutěže v modelování pomocí diferenciálních rovnic SCUDEM IV 2019, kterého se účastnili studenti oboru Matematického inženýrství FSI VUT v Brně.

1. Úvod

Na podzim minulého roku proběhl už čtvrtý ročník mezinárodní soutěže *Student Competition Using Differential Equation Modeling* (SCUDEM), kterou zajišťuje organizace „Systemic Initiative for Modeling Investigations & Opportunities with Differential Equations"(SIMIODE). Tato organizace sdružuje učitele a studenty z celého světa a jedním z jejích hlavních cílů je podpora výuky matematického modelování a řešení praktických problémů pomocí diferenciálních rovnic.

Aktuálně posledního ročníku soutěže SCUDEM IV 2019 se poprvé zúčastnili také naši studenti oboru Matematické inženýrství. V kategorii studentů bakalářského studia soutěžili Anna Glozigová, Martin Buriánek a Petr Kamarýt s koučem docentem Zdeňkem Opluštilem a v kategorii studentů magisterského studia Daniel Kiša, Adam Kyjovský a Daniel Kunz, jejich kouč byl profesor Jan Franců.

Systém soutěže byl následující: Jednotlivé týmy si při registraci vybraly hostitelskou univerzitu, v našem případě to byla Masarykova univerzita v Brně - přesněji Ústav matematiky a statistiky Přírodovědecké fakulty. Všechny týmy obdržely ve stejný čas zadání, které obsahovalo následující tři témata: Problem A: Group Affinity and Fashion Sense, Problem B: Movement Of An Object In Microgravity Environments, Problem C: Chemical Espionage (přesné znění zadání je uvedeno níže). Studenti si jedno z nich vybrali a měli týden na jeho zpracování, resp. vytvoření matematického modelu popsaného pomocí diferenciálních rovnic.

Hlavní část soutěže pak probíhala v Brně na Přírodovědecké fakultě před porotou složenou z koučů jednotlivých týmů a dále z vysokoškolských pedagogů zabývajících se problematikou diferenciálních rovnic. Hodnocení poroty bylo rozděleno na dvě části. Nejprve byla anonymně hodnocena odevzdaná řešení jednotlivých týmů a dále pak samotná prezentace studentů. Přičemž do ní museli soutěžící

2010 *MSC.* Primární 00A09; Sekundární 00A35, 34-XX, 92-XX.
Klíčová slova. Soutěž SCUDEM, matematické modelování, diferenciální rovnice.

ještě zahrnout i odpovědi na doplňující otázky položené přímo na místě. Pro odlehčení soutěžního napětí hlavní organizátoři akce připravili i doprovodný program, který spočíval např. v modelování vývoje populace nebo matematickém kvízu.

Mimo týmy z našeho oboru Matematické inženýrství se brněnské části soutěže zúčastnili ještě jeden tým z Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity a tři týmy z Matematicko - fyzikální fakulty Univerzity Karlovy. Celkově pak SCUDEM IV 2019 proběhl na více než 60 univerzitách po celém světě (v Evropě to byla ještě univerzita v maďarském Szegedu).

Podle hodnocení poroty soutěžící úspěšně zvládli zpracovat vybraná témata. Velmi zajímavé bylo, jak rozdílným způsobem jednotlivé týmy přistupovaly k řešení stejných problémů - často to korespondovalo s jejich zaměřením studia (nejednalo se totiž jen o studenty čistě matematických oborů). Samotní účastníci soutěže podle svých slov ocenili možnost vyzkoušet si prezentaci svých výsledků před porotou, což pro většinu byla nová a ne úplně příjemná zkušenost. Na druhou stranu se to dalo brát jako příprava např. na obhajobu závěrečné práce. Dalším přínosem soutěže určitě bylo vyzkoušet si týmové řešení zadaného problému v daném časovém intervalu, tj. navrhnout řešení a obhájit si ho před porotou, tak jak to běžně v praxi chodí.

Celkový dojem ze soutěže byl velmi pozitivní a doufáme, že studenti Matematického inženýrství se budou soutěže pravidelně účastnit i v příštích ročnících. Byla by to pro ně určitě zajímavá a užitečná zkušenost.

Ještě poznamenejme, že podrobnější informace o organizaci SIMIODE a o samotné soutěži SCUDEM lze nalézt na webovských stránkách
`https://www.simiode.org/` resp. `https://www.simiode.org/scudem`.

Na závěr uvedeme přesná zadání jednotlivých témat a dále pak řešení, které sestavili studenti našeho oboru.

Problem A: Group Affinity and Fashion Sense

People tend to congregate into groups in different ways. People can create strong links in small cliques or identify loosely as part of a larger trend. One example of the latter phenomena is hipsters. An amusing example of how someone identified and adapted their appearance to conform to the look of a stereotypical hipster is a person who complained that his image was used in an article about people conforming to a stereotypical look [1]. It later turned out the image in the article [2] was someone else who happened to look like the person complaining that image was appropriated. This raises a number of questions about how people choose which groups to associate with as well as how they decideto adjust to the expectations of the other people within their group. We focus on the latter question, and you are asked to examine the propensity for a person to alter their appearance and conform to particular expectations. You should develop a model that describes how different people within an established group interact and decide to change some particular part of their appearance. How long does it take for people in the group to change their appearance? How many people will change, and how much alike will they eventually appear? You should provide an analysis about which parts of your model impact how different subgroups change and how quickly the change occurs. Your description of the model should include the following:

- Clearly describe the aspect that is being changed.
- Describe how information about it is exchanged between people in the group.
- Describe the way people interact and how the model mimics those interactions.
- Describe the range of values of the parameters and the meaning associated with higher versus lower values of these parameters.

Note, the work that sparked this exchange included a mathematical model of how people decide whether or not to conform and change their appearance [3]. The model and analysis in the paper is advanced, and it is not a good starting point for the beginning development of a model. The model in the paper only included two different groups: conformists and nonconformists. It also included a delay to approximate the interactions between the two groups. (A delay can be difficult to approximate and analyze and should probably be avoided for a first effort in a short term project.)

References:

[1] Garcia-Navarro, Lulu and Feingold, Lindsey, “Man Inadvertently Proves That Hipsters Look Alike By Mistaking Photo As Himself,”March 10, 2019, https://www.npr.org/2019/03/10/702063209/man-inadvertently-proves-that-hipsters-look-alike-by-mistaking-photo-as-himself. Accessed June 2019.
[2] ”The hipster effect: Why anti-conformists always end up looking the same,” MIT Technology Review, Feb 28, 2019, https://www.technologyreview.com/s/613034/the-hipster-effect-why-anti-conformists-always-end-up-looking-the-same/. Accessed June 2019.
[3] Touboul, Jonathon, “The Hipster Effect: When Anticonformists All Look The Same,” https://arxiv.org/abs/1410.8001. Accessed June 2019.

Problem B: Movement Of An Object In Microgravity Environments

In February 2019 a Japanese probe made contact with a small asteroid, Ryugu [1]. The team overseeing the program had to overcome a number of technical challenges. For this question we focus on the issues associated with a low gravity environment. The team had to land a probe gently enough so that it does not bounce and move too far away from a designated landing position. The next problem is moving the probe to a new position using a minimal amount of energy and also minimizing how far the probe bounces on the surface of the asteroid.

You have been asked to provide guidance in helping find a new asteroid on which to land a probe. The goal is to determine the range of dimensions for the smallest possible asteroids which can be used to land a probe. (Keep in mind that asteroids can have high aspect ratios and are generally not round.)Your team should develop a method to land a small probeon the asteroidand the final position of the probe after coming to rest should be as close as possible to a predetermined landing point. At the same time the amount of bouncing should be as small as possible to avoid damaging the probe.You should also develop a way to move the probe to a predetermined position using a spring that will allow the probe to hop in a given direction without using a device that generates thrust. The analysis you provide should include a detailed description of the mathematical models you develop to describe the movement of the probe in these different conditions.

The surface of the asteroid is assumed to be quite rugged, and the probe may have to jump into a ravine or along the side of a steep cliff. You should provide guidance concerning the limits of moving theprobe using a minimal number of jumps under a wide variety of situations. Your analysis should include a description of the possible limits to what area can be exploredand the description should include guidance on choosing an asteroid with respect to the possible dimensions.

References:

[1] Wall, Mike, "Japanese Spacecraft Successfully Snags Sample of Asteroid Ryugu," space.com, 22 February 2019, https://www.space.com/japanese-asteroid-probe-lands-ryugu.html. Accessed June 2019.

Problem C: Chemical Espionage

It can be difficult for some insects to find mates. One common way for a female to attract a male is to use chemical signals. One problem with this approach is that this signaling can attract many males, and in response the males often use chemical signals, called anti-aphrodisiacs, that are used to either mask or dissuade other males. An example of this can be found in the large cabbage white butterfly Pieris brassicae. Unfortunately for the butterflies,the chemical signals can be exploited by parasitic wasps. Two species of wasps have been identified that can detect the anti-aphrodisiacs, and when a female butterfly has the chemical signal thewaspsare more likely to follow the butterfly and lay their own eggs in the butterflies' eggs. These interactions introduce two competing pressures on the butterfly population. For the male butterflies the anti-aphrodisiacs make it more likely for them tofertilize eggs. For the female butterflies the anti-aphrodisiacs make it less likely to be bothered by more males, and the females can focus on placing their eggs in the most advantageous place. On the other hand the anti-aphrodisiacs make it more likely these eggs will be eaten by the wasp larvae. One question that arises is to determine the trade-offs and balance between the two competing interests. To do so develop a mathematical model for the interactions of the male and female P. brassicaeas well as the parasitic wasps. What is the best balance for this system and what is likely to happen in the long run?

References:

[1] "Chemical espionage on species-specific butterfly anti-aphrodisiacs by hitchhiking Trichogramma wasps, " Martinus E. Huigens, Jozef B. Woelke, Foteini G. Pashalidou, T. Bukovinszky, Hans M. Smid, and Nina E. Fatouros.Behavioral Ecology. Volume 21, Issue 3, May-June 2010, Pages 470–478, 11 February 2010. https://doi.org/10.1093/beheco/arq007.

www.simiode.org
SIMIODE A SYSTEMIC INITIATIVE FOR MODELING INVESTIGATIONS & OPPORTUNITIES WITH DIFFERENTIAL EQUATIONS

Problem C: Chemical Espionage

Anna Glozigová, Martin Buriánek, Petr Kamarýt
coach: doc. Mgr. Zdeněk Opluštil, Ph.D.

SCUDEM IV, November 2019

Pro modelování řešení tohoto problému jsme využili klasický *Lotkův-Volterrův* model dravce a kořisti. Avšak narazili jsme na problém, že v tomto modelu vymřela jedna z populací, nebo přežili pouze motýli, jejichž populace rostla nade všechny meze. Proto jsme zvolili tzv. model *s vnitrodruhovou konkurencí.*

Nechť tedy x je *populace motýlů* a y *populace vos.* Daný problém je popsán následující soustavou

$$\begin{cases} x' = (\epsilon_1 - \alpha x - \gamma_1 y)x \\ y' = (-\epsilon_2 + \gamma_2 x)y \end{cases} \tag{1}$$

kde
$\epsilon_1 \dots$ *míra růstu populace kořisti,*
$\epsilon_2 \dots$ *míra růstu populace dravce izolovaného od kořisti,* $\epsilon_2 > 0$,
$\alpha \dots$ *míra vnitrodruhové konkurence kořisti,* $\alpha > 0$,
$\gamma_1 \dots$ *míra ničení populace kořisti dravcem,*
$\gamma_2 \dots \kappa\gamma_1$, *kde* $\kappa > 0$,
$\kappa \dots$ *efektivnost přeměny zničené kořisti na populaci dravce,*

dále γ_1, ϵ_1 jsou funkce závislé na c, kde $c \dots$ *koncentrace feromonů od populace motýlů,* $c > 0$. Zvolili jsme $\epsilon_1 = ec$ a $\gamma_1 = gc$, kde $e, g > 0$. Dostáváme tedy tvar

$$\begin{cases} x' = (ec - \alpha x - gcy)x \\ y' = (-\epsilon_2 + \kappa \mathrm{gcx})\mathrm{y} \end{cases} \tag{2}$$

1. ANALÝZA MODELU A SINGULÁRNÍCH BODŮ

Obě rovnice položíme rovny nule a obdržíme následující singulární body

$$[0,0],\ [\tfrac{ec}{\alpha},0],\ [\tfrac{\epsilon_2}{\kappa gc}, \tfrac{\kappa egc^2 - \alpha\epsilon_2}{\kappa g^2 c^2}]$$

Jacobiho matice pro danou soustavu je

$$\mathrm{J(x,y)}=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ec-2\alpha x-gcy & -gcx \\ \kappa gcy & -\epsilon_2+\kappa gcx \end{pmatrix}$$

Jacobiho matice v prvním singulárním bodě

$$\mathrm{J(0,0)}=\begin{pmatrix} ec & e \\ 0 & -\epsilon_2 \end{pmatrix},$$

jejíž vlastní čísla jsou λ_1= -ec, λ_2= ϵ_2, za předpokladu e,c >0. Jelikož dostáváme kombinaci *kladné a záporné vlastní číslo*, jedná se o typ singulárního bodu tzv. *sedlo* (nezávisí na c).

Jacobiho matice v druhém singulárním bodě

$$\mathrm{J}(\tfrac{ec}{\alpha},0)=\begin{pmatrix} -ec & \frac{-gc^2e}{\alpha} \\ 0 & -\epsilon_2+\frac{\kappa gc^2e}{\alpha} \end{pmatrix},$$

jejíž vlastní čísla jsou λ_1= ec, λ_2= $\frac{\kappa gc^2e-\epsilon_2\alpha}{\alpha}$, kde podle κgc$^2e-\epsilon_2\alpha$ máme dva typy singulárních bodů.

$$\kappa\mathrm{gc}^2e<\epsilon_2\alpha \ldots \mathrm{c}\in(0;\sqrt{\tfrac{\epsilon_2\alpha}{\kappa ge}})$$

$$\kappa\mathrm{gc}^2e>\epsilon_2\alpha \ldots \mathrm{c}\in(\sqrt{\tfrac{\epsilon_2\alpha}{\kappa ge}};\infty)$$

V prvním případě se jedná o *stabilní uzel*, v druhém o *sedlo*, přičemž uvažujeme $[\frac{\epsilon_2}{\kappa gc},\frac{\kappa egc^2-\alpha\epsilon_2}{\kappa g^2c^2}]$ pro κgc$^2e>\epsilon_2\alpha$, neboť opak nemá smysl.
Třetí a nejzajímavější singulární bod má Jacobiho matici

$$\mathrm{J}(\tfrac{\epsilon_2}{\kappa gc},\tfrac{\kappa egc^2-\alpha\epsilon_2}{\kappa g^2c^2})=\begin{pmatrix} \frac{-\alpha\epsilon_2}{\kappa gc} & \frac{-\epsilon_2}{\kappa} \\ \frac{\kappa egc^2-\alpha\epsilon_2}{gc} & 0 \end{pmatrix},$$

vlastní čísla zjistíme z následujícího výrazu $\lambda^2+\frac{\epsilon_2\alpha}{\kappa gc}\lambda+\frac{\epsilon_2(\kappa egc^2-\alpha\epsilon_2)}{\kappa gc}=0$.
Diskriminant této rovnice je D $=\alpha^2\epsilon_2^2-4\kappa gc\epsilon_2(\kappa egc^2-\alpha\epsilon_2)$
D>0 … jelikož $\alpha\epsilon_2>\sqrt{D}$ obě reálná vlastní čísla jsou záporná, dostáváme tedy *uzel.*
D<0 … komplexně sdružená vlastní čísla se zápornými reálnými částmi, dostáváme *stabilní ohnisko.*
D=0 … řešíme rovnici vzhledem k α jejíž kořeny jsou $\alpha^*=2\kappa\mathrm{gc}(\pm\sqrt{1+\frac{ce}{\epsilon_2^2}}$-1),
kde smysl má pouze uvažovat kladný kořen.
Pro $\alpha<\alpha^*$ dostáváme *ohnisko* a pro $\alpha>\alpha^*$ *uzel.*

2.ZÁVĚR

Námětem k další analýze by mohl být rozbor vzhledem k c u třetího singulárního bodu, to však vede k *rovnici třetího stupně* analyticky obtížně řešitelné. Jinou modifikací by mohlo být rozšíření modelu do třetí dimenze (např. pro motýly a dva druhy vos). Řešení komplikovanějších modelů by však vyžadovalo více času.

DODATEČNÉ ÚKOLY
ÚKOL 1
Naši soustavu jsme rozšířili o další rovnici, model tedy nabývá podoby

$$\begin{cases} x' = (\epsilon_1 - \alpha x - \gamma_1 y - \delta_1 z)x \\ y' = (-\epsilon_2 + \gamma_2 x - \delta_2 z)y \\ z' = (-\epsilon_3 + \sigma_3 x + \tau_3 y)z \end{cases} \tag{3}$$

kde
$\epsilon_3 \ldots$ *míra růstu populace dravce izolovaného od obou druhů kořisti,* $\epsilon_3 > 0$,
$\sigma_3 \ldots$ *míra ničení prvního druhu populace kořisti dravcem, kde* $\sigma_3 = A\delta_1, A > 0$,
$\tau_3 \ldots$ *míra míra ničení druhého druhu populace kořisti dravcem, kde* $\tau_3 = B\delta_2, B > 0$,
A,B... efektivnost přeměny jednotlivého druhu zničené kořisti na populaci dravce,

Dostáváme tedy matici 3x3, kde určování typu singulárních bodů by přinášelo jisté komplikace.

ÚKOL 2
Naši soustavu jsme modifikovali následovně

$$\begin{cases} x' = \alpha_1 xy - \beta_1 xz \\ y' = \alpha_2 xy - \beta_2 yz \\ z' = -\alpha_3 + \delta_1 xz + \delta_2 yz \end{cases} \tag{4}$$

kde
$x \ldots$ *populace samců,*
$y \ldots$ *populace samic,*
$z \ldots$ *populace dravců,*
$\alpha_1 = \alpha_2 \ldots$ *předpoklad, že se stejnou pravděpodobností narodí samec/samice,*
$\beta_1 = \beta_2 \ldots$ *předpoklad, že dravec bude se stejnou pravěpodobností ničit samce i samice,*

Odpověď na otázku vede k řešení optimalizační úlohy. Samec nepoužívající feromony má malou šanci, že ho samička vyhledá. Samec používající naopak příliš moc feromonů riskuje sežrání jeho mláďat. Je tedy třeba nalézt optimální hodnotu feromoů.

ÚKOL 3
Naši původní soustavu jsme modifikovali následujícím způsobem

$$\begin{cases} x' = (\epsilon_1 - \alpha x - \gamma_1 y)x \\ y' = (-\epsilon_2 + \gamma_2 x)y \end{cases} \tag{5}$$

kde
z původní závislosti $\epsilon_1 = \epsilon_1(c)$ dostáváme závislost na času $\epsilon_1 = \epsilon_1(c, t)$ a z $\gamma_1 = \gamma_1(c)$ dostáváme závislost na času $\gamma_1 = \gamma_1(c, t)$.

Modifikovaná soustava by však potom nebyl autonomní systém.

ZDROJE

[1] bakalářská práce *LOTKŮV-VOLTERRŮV POPULAČNÍ MODEL A JEHO ZOBECNĚNÍ*; Kateřina Zubková; 2016; Brno; VUT FSI
[2] *Spojité modely v biologii*; Josef Kalas, Zdeněk Pospíšil; 2001; Brno; MU PřF
[3] skripta *Matematika III*; Jan Čermák, Luděk Nechvátal; 2016; Brno; VUT FSI
[4] diplomová práce *Modely dravec–kořist a jejich počítačové simulace*; Jitka Kühnová; 2007; Brno; MU PřF

www.simiode.org
SIMIODE A SYSTEMIC INITIATIVE FOR MODELING INVESTIGATIONS & OPPORTUNITIES WITH DIFFERENTIAL EQUATIONS

SCUDEM CHALLENGE 2019: PROBLEM C

Team: Daniel Kiša, Daniel Kunz, Adam Kyjovský.

Coach: Jan Franců.

School: Brno University of Technology.

Zadání problému

Modelovaná situace se týká populace běláska zelného a parazitických vosiček z rodu Trichogramma. Bělásci při rozmnožování používají chemické signály. Feromon samičky láká samečky, oproti tomu feromon jednoho samečka odpuzuje ostatní samečky. Zároveň však látka sameččího feromonu (benzylchlorid) láká dva druhy parazitických vosiček k místu páření. Vosičky kladou svoje vajíčka dovnitř vajíček běláska, těmi se následně vylíhnuté larvy krmí. Hladina sameččího feromonu tudíž vytváří dva protichůdné nátlaky na populaci bělásků. Pro samičky vysoká hladina benzylchloridu znamená, že může klást vajíčka v klidu bez obtěžování ostatních samců, to ale zároveň způsobí přílet více parazitických vosiček.
Úkolem je sestavit matematický model (pomocí diferenciálních rovnic) popisující tuto situaci, diskutovat rovnováhu systému a dlouhodobé dopady.

2. Zvolený model, jeho předpoklady a výsledky

Zvolený model zkoumá změnu populací běláska a vosiček v čase, přičemž interakce těchto dvou druhů je modelována pomocí třetí proměnné symbolizující počet běláskem nakladených vajec. Dostáváme tak systém tří diferenciálních rovnic.
Předpokládáme, že přírůstky populací běláska (resp. vosiček) jsou přímo úměrné počtu nenapadených vajec (resp. napadených vajec), a že jejich úbytek je přímo úměrný jejich populacím. Jelikož dotyčný druh je v rámci jednoho pářícího období monogamní, předpokládáme, že přírůstek vajec je úměrný počtu oplozených samiček.
Funkce afrodiziaka vylučovaného samičkami je v modelu zanedbána, funkce antiafrodiziaka vylučovaného samečky je modelována tak, že čím více samečků benzylchlorid při páření vypouští, tím více roste pravděpodobnost, že nakladená vejce budou napadena parazitickými vosičkami. Poměr mezi pohlavími běláska je uvažován konstantní a roven 2.23:1 samečků ku samičkám[2]. Nejsou uvažována jednotlivá vývojová stádia bělásků a vosiček, v modelu se z vajec líhnou už dospělí jedinci. Dále model zanedbává fakt, že bělásci se nerozmnožují po celý rok, ale pouze v určitých obdobích.
Model je ve tvaru

$$\dot{x} = c_1 \delta e^{-p(\alpha+\beta r)} y - d_1 x$$

$$\dot{y} = c_2(1 - e^{-\gamma x})(1-\mu)x - \delta y$$
$$\dot{p} = c_3\delta(1 - e^{-p(\alpha+\beta r)})y - d_2 p,$$

kde x vyjadřuje populaci běláskŭ, y počet vajec a p populaci parazitických vosiček.

Parametry použité v modelu jsou zesumarizovány v následující tabulce. Většina hodnot byla zvolena pouze orientačně pro numerické řešení systému.

Parametr	Popis	Hodnota
c_1	podíl nenapadených vajec, která se zdárně vylíhnou v běláska	0.9
c_2	počet vajec nakladených jednou oplozenou samičkou	20
c_3	podíl napadených vajec, která se zdárně vylíhnou ve vosičku	1
d_1	úmrtnost běláskŭ	1
d_2	úmrtnost vosiček	1
r	podíl samečkŭ používajících anti-afrodiziakum	
δ	rychlost líhnutí vajec	1
α, β	slouží k vyjádření schopnosti hledání vajec vosičkami	0.1, 0.9
γ	slouží k vyjádření pravděpodobnosti, že si každá samička najde partnera	1
μ	poměr pohlaví mezi samečky a samičkami	0.69

Pro vysvětlení významu jednotlivých členŭ začneme u členu vyjadřujícího přírŭstek vajec. Z předpokladu monogamie samiček plyne, že za jedno pářící období mŭže dojít k maximálně $(1-\mu)x$ oplození. $(1-e^{-\gamma x})$ je rostoucí funkce nabývající hodnot mezi 0 a 1 a vyjadřuje pravděpodobnost, že dojde k oplození všech samic. Po vynásobení konstantou c_2 dostáváme celkový počet nakladených vajec.
Úbytek vajec $-\delta y$ se pak dělí na tři části - přírŭstek běláskŭ v dŭsledku vylíhnutí, přírŭstek vosiček v dŭsledku parazitace a případný úbytek vajec z externích dŭvodŭ. Funkce $e^{-p(\alpha+\beta r)}$ ve zmíněných přírŭstcích vyjadřuje jakou část vajec vosička nenapadne. Pro velké hodnoty p se funkce blíží nule, jinak řečeno, pokud je počet vosiček velký, podaří se jim napadnout téměr všechna vejce. Parazitismus vosiček je silně ovlivněn parametrem r, který vyjadřuje podíl samečkŭ běláska v populaci využívajících anti-afrodiziakum pro zvýšení šance svého rozmnožení. Čím větší tento podíl je, tím lépe vosička na běláscích parazituje. Parametr α vyjadřuje minimální schopnost vosiček parazitovat, tedy i bez pomoci sameččího feromonu. $\alpha+\beta$ pak tu maximální, tedy v případě všech samečkŭ vypouštějících benzylchlorid.
Úbytky $-d_1x$ a $-d_2p$ jsou v tomto tvaru kvŭli předpokladu lineární závislosti rychlosti vymírání populace na její velikosti.

3. Interpretace a diskuse výsledkŭ

Vzhledem k nelinearitě systému rovnic byla úloha řešena pouze numericky v prostředí MATLAB. Konstanty pro výpočet byly zvoleny dle tabulky výše. Zkoumán byl vliv podílu samečkŭ používajících anti-afrodiziakum na řešení systému. Při malých hodnotách r bylo řešení asymptoticky stabilní a po několika oscilacích se populace běláska a vosiček ustálily na nenulových hodnotách - oba druhy v systému žily v rovnováze. Při zvyšování parametru r se nejprve zvětšovalo oscilování řešení a trvalo déle, než se populace ustálily. Okolo hodnoty $r = 0.3$ se řešení kvalitativně změnilo a ekvilibrium přestalo být asymptoticky stabilní, řešení okolo něj soustavně kmitalo. Pro hodnoty nad $r = 0.33$ se stacionární bod přesunul do počátku, v systému tedy došlo k vymření obou druhů.

Výsledky lze interpretovat tak, že pro celkovou populaci běláska je výhodnější menší míra využívání benzylchloridu pro odrazení ostatních samečků. Feromon sice zvýší šanci jedince na úspěšné rozmnožení, v přítomnosti vosiček ale jeho vylučování působí od jisté meze katastrofálně a vede k vyhynutí celé populace.

Reference

[1] "Chemical espionage on species-specific butterfly anti-aphrodisiacs by hitchhiking Trichogramma wasps. "Martinus E. Huigens, Jozef B. Woelke, Foteini G. Pashalidou, T. Bukovinszky, Hans M. Smid and Nina E. Fatouros, Behavioral Ecology, Volume 21, Issue 3, May-June 2010, Pages 470–478, https://doi.org/10.1093/beheco/arq007

[2] "Biology of Pieris brassicae (Linnaeus) (Lepidoptera: Pieridae) under Laboratory Conditions,"Muhammad Aslam and Nazia Suleman, Pakistan Journal of Biological Sciences, 2: 199-200, 1999.

[3] "Spojité modely v biologii,"Josef Kalas, Zdeněk Pospíšil, 2001.

Zdeněk Opluštil, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, VUT v Brně,
e-mail: `oplustil@fme.vut.cz`

VYBRANÉ PRÍKLADY Z INTERNETOVEJ MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

VIERA ŠTOUDKOVÁ RŮŽIČKOVÁ

ABSTRAKT. V článku sú riešené vybrané príklady súvisiace s Internetovou matematickou olympiádou pre študentov stredných škôl. Prvý príklad je o výpočte objemu telesa, v druhom sa hľadajú rastúce funkcie s daným rozdielom, v treťom sa pracuje s množinou komplexných čísiel a vo štvrtom sa hľadá dvojica funkcií spĺňajúca daný vzťah, pričom jedna z nich je funkciou dvoch premenných.

Ústav matematiky na FSI VUT v Brne každoročne organizuje Internetovú matematickú olympiádu pre študentov stredných škôl ČR a SR. V roku 2019 prebehol už jej dvanásty ročník. Na príprave príkladov a ich vyhodnotení sa nemalou mierou podieľajú študenti oboru Matematické inženýrství a oboru Aplikovaná matematika. Na stránkach `matholymp.fme.vutbr.cz` je možné nájsť zadania aj riešenia príkladov zo všetkých ročníkov.

Tento príspevok je tretí v poradí na túto tému. Vybrala som štyri príklady, ktoré riešim nie len s cieľom nájsť nejaké riešenie ale usilujem o to, aby toto riešenie spĺňalo rôzne kritériá. Niektoré príklady je možné riešiť aj s využitím limít, derivácií a integrálov, ktoré nie všetci stredoškoláci poznajú, preto na súťaži tieto postupy riešení neuvádzame. V tomto článku je priestor aj na takéto riešenia.

1. PRÍKLAD SUBSTRÁT

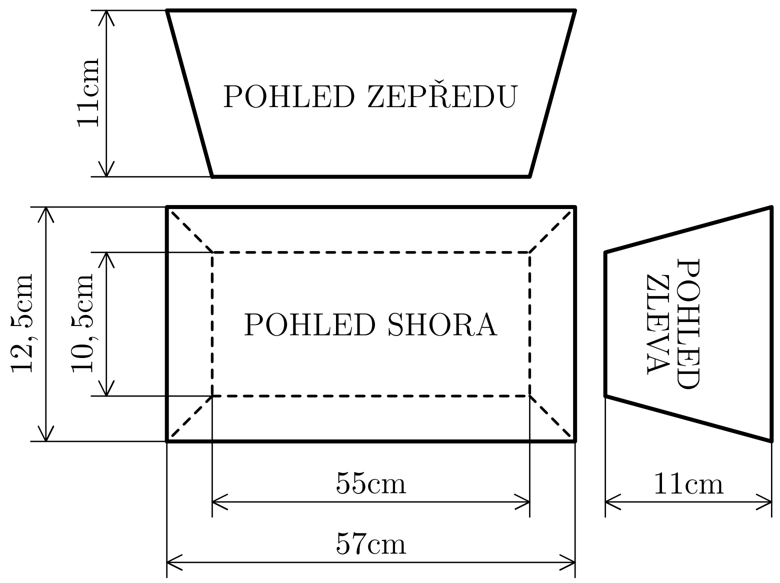
Príklad nazvaný pracovne Substrát je jedným z tých, ktoré vznikli podľa reálnej situácie. Riešitelia nemali problém pochopiť, o čo ide, v zadaní sa nevyskytujú žiadne zložité či menej známe matematické pojmy. Preto riešenia tohto príkladu poslali skoro všetky zúčastnené tímy, aj keď nie vždy správne. Príklad bol použitý v roku 2019 a mal číslo 1.

Príklad 1 (autorka Jana Hoderová)**.** *Potřebujeme nachystat 8 truhlíků pro vysazení balkónových květin. Tvar a rozměry truhlíku jsou uvedeny na obrázku 1. Truhlíky chceme naplnit substrátem právě 2* cm *pod horní okraj.*

a) *Kolik substrátu v* cm^3 *zaokrouhlených na celá čísla budeme potřebovat?*
b) *Jaký je nejmenší počet 20litrových balení substrátu, který k tomu budeme potřebovat?*

2010 *MSC.* Primární 00A09; Sekundární 00A35.
Klíčová slova. Matematická olympiáda.

c) *Bude finančně výhodnější koupit odpovídající počet 20litrových substrátů á 77 Kč, nebo odpovídající počet 40litrových substrátů á 112 Kč?*



Obrázok 1

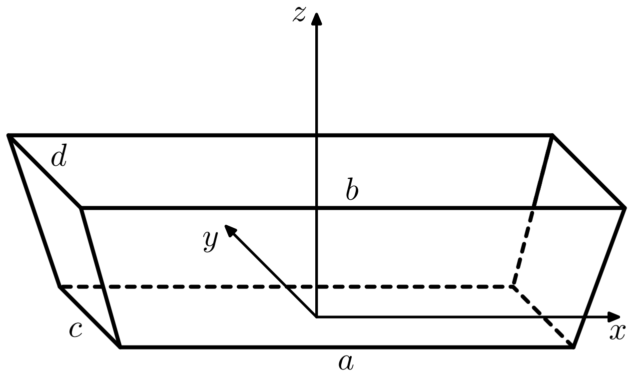
Možných postupov riešenia je niekoľko. Dá sa postupovať podobne, ako je to ukázané vo vzorovom riešení na stránkach olympiády, teda rozdeliť teleso na niekoľko častí – kváder, hranoly a ihlany, ktorých objemy vieme spočítať podľa známych vzorcov.

Existuje aj priamy vzorec na výpočet objemu daného telesa? Dané teleso vyzerá na prvý pohľad ako zrezaný ihlan, ale nie je ním. Šikmé hrany by sa totiž po predĺžení nepretli v jednom bode ale v dvoch bodoch. Preto nemôžeme použiť vzorec na objem zrezaného ihlana, v takom prípade by sme síce dostali správne výsledky častí b) a c) ale len približný výsledok časti a). Aj pre naše teleso existuje vzorec na výpočet jeho objemu. Dá sa nájsť v tabuľkách, niektorí riešitelia ho našli a použili. Že taký vzorec existuje, nie je až tak prekvapivé – pokiaľ vo výpočte objemu nahradíme dané údaje parametrami, dostaneme výraz, ktorý bude hľadaným vzorcom. A že bude tento výraz pomerne jednoduchý, sa tiež dá dopredu odhadnúť z toho, že ide o symetrické teleso, ktorého povrch je tvorený časťami šiestich rovín, pričom dve z nich sú rovnobežné.

Toto všetko je zaujímavé, ale príklad som sem vybrala pre niečo iné. Chcela by som tu ukázať, ako sa dá riešiť tento príklad postupom, ktorý učíme našich študentov na vysokej škole, a to je pomocou integrálov.

Najskôr odvodím vzorec pre objem celého truhlíka. Označím rozmery dna truhlíka ako a, c a rozmery horných okrajov truhlíka ako b, d tak, že rovnobežné sú dvojice hrán s dĺžkami a, b a taktiež c, d. Výšku truhlíka označím ako v.

Umiestnim si truhlík do súradnicovej sústavy. Je mi jasné, že najvhodnejšie bude čo najsymetrickejšie umiestnenie. Dno truhlíka preto položím na rovinu xy tak, aby os z prechádzala stredom truhlíka a hrany dna boli rovnobežné s osami x, y. Na obrázku 2 je znázornený umiestnený truhlík.



Obrázok 2

A teraz sa zamyslím, ako je to najlepšie integrovať, čiže ako by sa to dalo pekne nakrájať na „nekonečne veľa“ plátkov s „nulovou hrúbkou“. Vidím, že najjednoduchšie je to vtedy, keď režem truhlík rovnobežne s rovinou xy. Vtedy totiž v reze dostanem vždy obdĺžnik. Jeho rozmery závisia lineárne od výšky z, v akej režem, a teda sú rovné $A+Bz$ a $C+Dz$, kde A, B, C, D sú konštanty a dajú sa jednoducho vypočítať. Pre $z=0$ sú rozmery tohto obdĺžnika rovné rozmerom dna truhlíka, to je a, c. Z toho hneď mám, že $a=A$, $c=C$. Ďalej, pre $z=v$ sú rozmery tohto obdĺžnika rovné rozmerom horných okrajov truhlíka, to je b, d. Z toho môžem vyjadriť B, D a dostávam, že $B=\frac{b-a}{v}$, $D=\frac{d-c}{v}$. Rozmery obdĺžnikového rezu truhlíka vo výške z sú teda

$$a+\frac{b-a}{v}\cdot z, \quad c+\frac{d-c}{v}\cdot z.$$

Objem truhlíka teda môžem vypočítať tak, že budem integrovať obsahy obdĺžnikov pre z od 0 po v. Dostávam

$$V=\int_0^v\left(a+\frac{b-a}{v}\cdot z\right)\cdot\left(c+\frac{d-c}{v}\cdot z\right)\mathrm{d}z.$$

Funkcia, ktorú integrujem, je polynóm. Výraz roznásobím a dostávam

$$V=\int_0^v\left(\frac{(b-a)(d-c)}{v^2}\cdot z^2+\frac{c(b-a)+a(d-c)}{v}\cdot z+ac\right)\mathrm{d}z$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\frac{(b-a)(d-c)}{v^2}\cdot\frac{z^3}{3}+\frac{c(b-a)+a(d-c)}{v}\cdot\frac{z^2}{2}+ac\cdot z\right]_0^v\\
&= \frac{(b-a)(d-c)}{3}\cdot v+\frac{c(b-a)+a(d-c)}{2}\cdot v+ac\cdot v\\
&= \frac{v}{6}\left[2(b-a)(d-c)+3c(b-a)+3a(d-c)+6ac\right]\\
&= \frac{v}{6}\left[2ac+ad+bc+2bd\right]=\frac{v}{6}\left[a(2c+d)+b(c+2d)\right],
\end{aligned}
$$

čo je už výsledný vzorec pre objem truhlíka s rozmermi a, b, c, d, v popísanými vyššie.

V zadaní sa od nás v skutočnosti nechce vypočítať objem truhlíka, ale objem substrátu v ňom, ktorý dosahuje do menšej výšky, než je výška truhlíka. To ale nie je žiaden problém, objem substrátu môžem vypočítať pomocou toho istého integrálu, s tým rozdielom, že namiesto od nuly po v budem integrovať len po výšku substrátu. Označím si ju v_s. Integrál už som vypočítala vyššie, po dosadení dostanem

$$
\begin{aligned}
V_s &= \left[\frac{(b-a)(d-c)}{v^2}\cdot\frac{z^3}{3}+\frac{c(b-a)+a(d-c)}{v}\cdot\frac{z^2}{2}+ac\cdot z\right]_0^{v_s}\\
&= \frac{(b-a)(d-c)}{v^2}\cdot\frac{v_s^3}{3}+\frac{c(b-a)+a(d-c)}{v}\cdot\frac{v_s^2}{2}+ac\cdot v_s.
\end{aligned}
$$

Vidím teda, že objem substrátu nie je priamo úmerný jeho výške, táto závislosť nie je lineárna, ale vyskytuje sa tam aj druhá a tretia mocnina výšky.

Po dosadení hodnôt $a = 55$, $b = 57$, $c = 10,5$, $d = 12,5$, $v = 11$ a $v_s = 9$ do vzorca a vynásobení počtom truhlíkov dostanem výslednú hodnotu, na ktorú sa nás pýtajú v zadaní, v časti a), teda

$$
\begin{aligned}
V_s &= \frac{4}{11^2}\cdot\frac{9^3}{3}+\frac{21+110}{11}\cdot\frac{9^2}{2}+55\cdot 10,5\cdot 9=\frac{688230}{121},\\
8V_s &= \frac{5505840}{121}=45\,503-\frac{23}{121}.
\end{aligned}
$$

Zvyčajne sa snažím o to, aby postup riešenia neobsahoval zbytočne zložitejšiu, „vyššiu“ matematiku, než je nutné. V tomto prípade ale postup pomocou integrálov sa mi zdá byť elegantnejší - nemusím deliť teleso na menšie časti ale počítam všetko v jednom. A dokonca sa ukazuje, že ani nie je nutné použiť trojný integrál. Napriek tomu, že ide o trojrozmerný útvar a počíta sa objem, dá sa vystačiť aj s jednoduchým integrálom.

2. Príklad s rastúcimi funkciami

Tento príklad mal na súťaži v roku 2012 číslo 2 a umiestnil sa medzi tými najťažšími pre riešiteľov. Pracuje sa tu s pojmom „rastúca funkcia“.

Príklad 2 (autor Zdeněk Opluštil). *Najděte rostoucí funkce f, g takové, že $f(x) - g(x) = \sin x$ pro všechna reálná x.*

Mám teda vzťah $f(x) = g(x) + \sin x$. Prvé, čo ma napadlo, je, že ak k rastúcej funkcii g pripočítam funkciu $\sin x$, výsledná funkcia f bude ešte viac rastúca na tých intervaloch, kde $\sin x$ rastie, a bude menej rastúca, prípadne klesajúca tam, kde $\sin x$ klesá. Tie pojmy „viac rastúca“ a „menej rastúca“ sa dajú presne definovať pomocou hodnoty derivácie. Pretože derivácia $(\sin x)' = \cos x \geq -1$ pre všetky reálne x a rovnosť nastáva len v izolovaných bodoch, stačí, aby derivácia $g'(x) \geq 1$ pre všetky reálne x. Potom pre deriváciu ich súčtu platí

$$f'(x) = \cos x + g'(x) \geq -1 + 1 = 0$$

pre všetky reálne x a rovnosť môže nastať len pre také x, kde je $\cos x = -1$, a teda len v izolovaných bodoch. Jednoduchá rastúca funkcia s touto vlastnosťou je $g(x) = x$, ktorá má všade deriváciu rovnú 1.

Tento postup vyzerá pekne jednoducho, ale vyžaduje znalosť derivácií. Ktorú nie všetci stredoškoláci majú. Zaujímalo by ma, či sa to dá ukázať bez nich, s použitím čo najzákladnejších pojmov a vzťahov.

Mám teda funkciu $f(x) = x + \sin x$ a chcem ukázať, že je rastúca pre všetky reálne x. To znamená, že pre každú dvojicu reálnych čísel $x > y$ platí $f(x) > f(y)$. Dosadením a úpravou z toho dostávam ekvivalentný vzťah

$$\begin{aligned} x + \sin x &> y + \sin y, \\ x - y &> \sin y - \sin x. \end{aligned}$$

Na pravej strane je rozdiel dvoch sínusov. Môžem ho napísať ako súčin sínusu a kosínusu pomocou známeho vzorca $\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$. Dostávam vzťah

$$\begin{aligned} x - y &> -2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right), \\ \frac{x-y}{2} &> -\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right), \\ 1 &> -\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\frac{x-y}{2}}. \end{aligned}$$

Tá posledná z úprav asi vyzerá dosť „umelo“, ale má logiku: všimla som si, že výraz naľavo bol rovnaký ako je argument sínusu napravo, a viem, že často pomáha dávať rovnaké výrazy k sebe, tak som to urobila. Vychádzam z predpokladu, že $x > y$, takže znamienko nerovnosti sa nezmenilo. Zatiaľ som stále robila ekvivalentné úpravy, takže táto posledná nerovnosť platí práve vtedy, keď $f(x) > f(y)$.

Teraz si myslím, že by sa malo dať ukázať, že za predpokladu $x > y$ sú oba činitele v súčine na pravej strane menšie alebo rovné 1. V prvom prípade je to zrejmé, platí

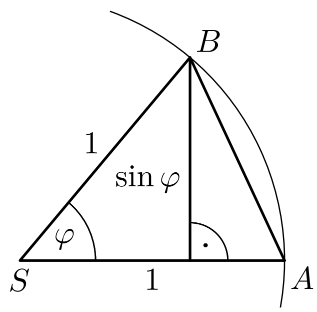
$$-\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq 1.$$

V druhom prípade si zjednoduším výraz zavedením novej premennej $\varphi = \frac{x-y}{2} > 0$. Chcem teda ukázať, že

$$\begin{gathered} \frac{\sin\varphi}{\varphi} < 1, \text{ teda} \\ \sin\varphi < \varphi \end{gathered}$$

pre každé $\varphi > 0$. To je predsa už jasné z obrázka. Graf funkcie $\sin x$ leží pod grafom funkcie x. Skutočne? A odkiaľ viem, že sínus nerastie na začiatku strmšie než $45°$? Predsa z derivácie. Lenže pojmu derivácie som sa chcela v tomto dôkaze vyhnúť. Takže znova. Ako inak sa dá zdôvodniť, že $\sin\varphi < \varphi$ pre každé $\varphi > 0$? Skúsim si pomôcť iným obrázkom, s jednotkovou kružnicou. Predtým ale si ešte uvedomím, že stačí uvažovať $\varphi \leq 1$, lebo ak by $\varphi > 1$, mám hneď $\sin\varphi \leq 1 < \varphi$.

Nakreslím si teraz kružnicu s polomerom 1 a na nej vyznačím dva body A, B, ktoré spolu s jej stredom S tvoria rovnoramenný trojuholník, s veľkosťou uhla φ (v radiánoch, nie stupňoch) pri vrchole S, viď obrázok 3. Obsah kruhového výseku



Obrázok 3

medzi bodmi A, B je rovný $\frac{\varphi}{2}$. A kde mám hodnotu $\sin\varphi$? Je to dĺžka výšky trojuholníka ABS a jeho obsah je teda $\frac{\sin\varphi}{2}$. A pretože je (tentoraz už každému) z obrázka jasné, že obsah trojuholníka ABS je menší než obsah kruhového výseku, platí, že $\frac{\sin\varphi}{2} < \frac{\varphi}{2}$.

A to už je všetko. Ale … niečo sa mi na tom nezdá. Ja som ukázala, že ak $x > y$, potom $-\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq 1$ a $\frac{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\frac{x-y}{2}} < 1$. Ale to ešte neznamená, že aj ich súčin bude menší než 1. Mohli by totiž obidve hodnoty byť záporné. Mala som tam dať absolútne hodnoty. Potom už to stačí. Takže znova.

V prvom prípade je to zrejmé, platí

$$\left|\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| \leq 1.$$

V druhom prípade musím ukázať, že

$$\begin{gathered} \left|\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right| < 1 \quad \text{pre každé } \varphi > 0, \text{ teda} \\ |\sin\varphi| < \varphi \quad \text{pre každé } \varphi > 0. \end{gathered}$$

Zase stačí uvažovať $\varphi \leq 1$, lebo ak by $\varphi > 1$, mám hneď $|\sin\varphi| \leq 1 < \varphi$. No a pre $0 < \varphi \leq 1$ je $\sin\varphi > 0$ a teda $|\sin\varphi| = \sin\varphi$ a viem, že $\sin\varphi < \varphi$, to už mám dokázané vyššie.

Ešte poznámka na záver: podobným „obrázkovým“ postupom sa robí výpočet derivácie funkcie $\sin x$ z definície.

3. Príklad s komplexnými číslami

Príklad, kde sa pracuje s komplexnými číslami, sa vyskytol na súťaži v roku 2017 pod číslom 6 a patril k tým najťažším.

Príklad 3 (autor Luděk Nechvátal). *Uvažujme funkci danou vztahem* $f(z) = z\sqrt{1-\frac{1}{z}}$. *Určete množinu, na kterou tato funkce zobrazí množinu* $M = \{z \in \mathbb{C} : z = t + 0\cdot \mathrm{i}$, *kde* $0 < t < 1\}$.

Poznámka: Komplexní číslo $z = a + b\,\mathrm{i}$, *kde* $a, b, \in \mathbb{R}$ *lze pomocí Eulerovy formule* $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$ *zapsat ve tvaru* $z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$, *kde číslo* $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ *se nazývá modul a* φ *se nazývá argument (nebo také úhel) komplexního čísla* z. *Reálná mocnina komplexního čísla* z *je definována jako* $z^r = \mathrm{e}^{r(\ln|z| + \mathrm{i}\,\varphi)}$, *kde* $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $r \in \mathbb{R}$, $\varphi \in (-\pi, \pi\rangle$.

Ukážem dva postupy riešenia. Prvý bude čo najjednoduchší, druhý čo najvšeobecnejší.

V prvom prípade sa budem čo najviac vyhýbať práci s komplexnými číslami. Takže si hneď všimnem, že všetky čísla $z \in M$ dosadzované do funkcie f sú reálne a kladné. Pre takéto čísla z môžem písať

$$f(z) = z\sqrt{1-\frac{1}{z}} = \sqrt{z^2 - z}.$$

Teraz vyhodnotím výraz pod odmocninou. Pretože číslo $z \in M$ je z intervalu $(0, 1)$, výraz

$$z^2 - z = z(z-1) = z(1-z)\cdot(-1)$$

je záporný. Mám teda

$$f(z) = \sqrt{z(1-z)\cdot(-1)} = \sqrt{z(1-z)}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{z(1-z)}\cdot \mathrm{i},$$

kde pod odmocninou je už kladné reálne číslo $z(1-z)$. Číslo $z \in M$ je z intervalu $(0, 1)$, a preto číslo $z(1-z)$ je z intervalu $\left(0, \frac{1}{4}\right)$. To vyplýva napríklad z toho, že ide o kvadratickú funkciu, ktorá nadobúda nulové hodnoty v bodoch 0 a 1 a teda extrém má uprostred, v bode $\frac{1}{2}$. Jeho dosadením dostanem $\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$, čo je hodnota maxima.

Hodnota $\sqrt{z(1-z)}$ teda leží v intervale $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ a funkcia f zobrazí množinu M na množinu $\{z \in \mathbb{C} : z = 0 + t\cdot \mathrm{i}$, kde $0 < t < \frac{1}{2}\}$.

Teraz ukážem, ako by som to počítala všeobecne. Teda, keby som na začiatku namiesto reálneho čísla z uvažovala ľubovoľné komplexné číslo $z = a + b\,\mathrm{i}$, kde

$a, b \in \mathbb{R}$. Možno z toho vyjde nejaký zaujímavý vzťah. Dosadením takéhoto výrazu do funkcie f dostanem

$$f(z) = (a + b\,\mathrm{i})\sqrt{1 - \frac{1}{a + b\,\mathrm{i}}}\,.$$

Pretože neviem nič o čísle $z = a + b\,\mathrm{i}$, nemôžem ho presunúť pod odmocninu ako v predchádzajúcom prípade. Môžem ale upravovať výraz pod odmocninou tak, aby som tam dostala číslo v tvare $c + d\,\mathrm{i}$, kde $c, d, \in \mathbb{R}$, teda

$$\sqrt{1 - \frac{1}{a + b\,\mathrm{i}}} = \sqrt{\frac{a - 1 + b\,\mathrm{i}}{a + b\,\mathrm{i}}} = \sqrt{\frac{a - 1 + b\,\mathrm{i}}{a + b\,\mathrm{i}} \cdot \frac{a - b\,\mathrm{i}}{a - b\,\mathrm{i}}} = \sqrt{\frac{a^2 - a + b^2 + b\,\mathrm{i}}{a^2 + b^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{a^2 - a + b^2}{a^2 + b^2} + \frac{b}{a^2 + b^2}\,\mathrm{i}} = \sqrt{c + d\,\mathrm{i}}\,.$$

Aby som toto mohla ďalej upravovať, potrebujem odmocninu z komplexného čísla napísať v tvare súčtu reálneho a imaginárneho čísla. To znamená, že musím použiť Eulerovu formulu, uvedenú v poznámke k zadaniu. Pokiaľ $c + d\,\mathrm{i} \neq 0$, výraz pod odmocninou si môžem napísať ako

$$\begin{aligned} c + d\,\mathrm{i} &= \sqrt{c^2 + d^2}\left(\frac{c}{\sqrt{c^2 + d^2}} + \frac{d}{\sqrt{c^2 + d^2}}\,\mathrm{i}\right) = \sqrt{c^2 + d^2}\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \\ &= \sqrt{c^2 + d^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}, \end{aligned}$$

kde φ je jednoznačne určené vzťahmi

$$\cos\varphi = \frac{c}{\sqrt{c^2 + d^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{d}{\sqrt{c^2 + d^2}}, \quad \varphi \in (-\pi, \pi\rangle. \tag{1}$$

Teraz to odmocním a dostávam

$$\sqrt{c + d\,\mathrm{i}} = \sqrt{\sqrt{c^2 + d^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\varphi}{2}}} = \sqrt[4]{c^2 + d^2}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}\right). \tag{2}$$

Hodnoty $\cos\frac{\varphi}{2}$ a $\sin\frac{\varphi}{2}$ vyjadrím pomocou $\cos\varphi$, využijem vzťahy

$$\cos^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1 + \cos\varphi}{2}, \quad \sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1 - \cos\varphi}{2}, \tag{3}$$

ktoré odmocním. Pre $\varphi \in (-\pi, \pi\rangle$ je $\cos\frac{\varphi}{2} \geq 0$, takže

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{c}{2\sqrt{c^2 + d^2}}}\,.$$

Odmocňovanie sínusu bude zložitejšie, pretože výraz $\sin\frac{\varphi}{2}$ má rovnaké znamienko ako φ pre $\varphi \in (-\pi, \pi\rangle$, a teda niekedy je kladný a inokedy záporný. Potrebujem jeho znamienko vyjadriť pomocou c, d. Zo vzťahu (1) vidím, že

$$\operatorname{sgn}(\varphi) = \begin{cases} 1, \text{ ak je } d > 0, \\ -1, \text{ ak je } d < 0, \\ 0, \text{ ak je } d = 0,\ c > 0, \\ 1, \text{ ak je } d = 0,\ c < 0, \end{cases}$$

kde $\varphi \in (-\pi, \pi\rangle$. Stále predpokladám, že $[c, d] \in \mathbb{R}^2 \setminus \{[0, 0]\}$. Môžem to celé zapísať aj na jeden riadok pomocou znamienkovej funkcie signum a dostanem

$$\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right) = \operatorname{sgn}(\varphi) = \operatorname{sgn}(d) + (1 - |\operatorname{sgn}(d)|)\,\frac{1 - \operatorname{sgn}(c)}{2} := \kappa.$$

Pretože tento výraz je taký dlhý, jeho hodnotu som označila ako κ. Odmocnením druhej rovnice v (3) dostenem teda

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \operatorname{sgn}(\varphi)\sqrt{\frac{1 - \cos\varphi}{2}} = \kappa\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{c}{2\sqrt{c^2 + d^2}}}\,.$$

Toto dosadím do výpočtu (2) odmocniny $\sqrt{c + d\,\mathrm{i}}$ a mám

$$\begin{aligned}\sqrt{c + d\,\mathrm{i}} &= \sqrt[4]{c^2 + d^2}\left(\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{c}{2\sqrt{c^2 + d^2}}} + \kappa\,\mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{c}{2\sqrt{c^2 + d^2}}}\right)\\ &= \sqrt{\frac{\sqrt{c^2 + d^2} + c}{2}} + \kappa\,\mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{c^2 + d^2} - c}{2}}\,.\end{aligned}$$

Vidím, že to platí aj pre $c = d = 0$. Teraz sa vrátim k funkcii f a dosadím to tam. Hodnota funkcie bude

$$\begin{aligned}f(a + b\,\mathrm{i}) &= (a + b\,\mathrm{i})\sqrt{c + d\,\mathrm{i}}\\ &= (a + b\,\mathrm{i})\left(\sqrt{\frac{\sqrt{c^2 + d^2} + c}{2}} + \kappa\,\mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{c^2 + d^2} - c}{2}}\right)\\ &= a\sqrt{\frac{\sqrt{c^2 + d^2} + c}{2}} - \kappa b\sqrt{\frac{\sqrt{c^2 + d^2} - c}{2}}\\ &\quad + \mathrm{i}\left(b\sqrt{\frac{\sqrt{c^2 + d^2} + c}{2}} + \kappa a\sqrt{\frac{\sqrt{c^2 + d^2} - c}{2}}\right),\end{aligned}\tag{4}$$

kde c, d sú

$$c = \frac{a^2 - a + b^2}{a^2 + b^2}, \quad d = \frac{b}{a^2 + b^2}\,.$$

Po dosadení týchto výrazov za c, d do (4) by vznikol ešte zložitejší výraz a nevyzerá to, že by mohol byť niečím zaujímavý $\ddot{\frown}$.

Na tomto mieste teda ukončím počítanie so všeobecným $z = a + b\,\mathrm{i}$ a obmedzím sa na to, ktoré je v zadaní. Čiže budem predpokladať, že $b = 0$ a $0 < a < 1$. Potom dostávam

$$c = \frac{a^2 - a}{a^2} < 0, \quad d = 0, \quad \kappa = 1$$

a ďalej

$$\sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{c^2} = -c = \frac{a - a^2}{a^2},$$

takže hodnota funkcie bude

$$f(a+b\,\mathrm{i}) = a\sqrt{\frac{-c+c}{2}} + \mathrm{i}\,a\sqrt{\frac{-c-c}{2}} = \mathrm{i}\,a\sqrt{\frac{a-a^2}{a^2}} = \mathrm{i}\,\sqrt{a-a^2},$$

čím som sa dostala znova ku reálnej funkcii násobenej komplexným číslom i, rovnakej, ako pri prvom postupe riešenia.

Moje výpočty boli v tomto prípade zbytočne zdĺhavé. Mohla by som ich ale teraz využiť na nejaký zložitejší prípad. Napríklad, čo ak by to bolo opačne, $a = 0$ a $0 < b < 1$. Potom dostávam

$$c = 1, \quad d = \frac{1}{b}, \quad \kappa = 1.$$

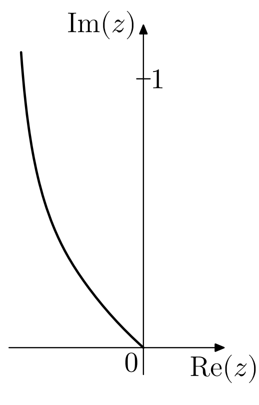
Hodnota

$$\begin{aligned} f(a+b\,\mathrm{i}) &= -b\sqrt{\frac{\sqrt{1+\frac{1}{b^2}}-1}{2}} + \mathrm{i}\,b\sqrt{\frac{\sqrt{1+\frac{1}{b^2}}+1}{2}} \\ &= -\sqrt{\frac{b\sqrt{b^2+1}-b^2}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{b\sqrt{b^2+1}+b^2}{2}}\,. \end{aligned}$$

Množina $\{z \in \mathbb{C} : z = 0 + t \cdot \mathrm{i}, \text{ kde } 0 < t < 1\}$ sa teda zobrazí na množinu

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : z = -\sqrt{\frac{t\sqrt{t^2+1}-t^2}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{t\sqrt{t^2+1}+t^2}{2}}, \text{ kde } 0 < t < 1 \right\}.$$

Kým v predchádzajúcom prípade sa úsečka zobrazí na úsečku, v tomto prípade sa úsečka zobrazí na zložitejšiu krivku, ležiacu v komplexnej rovine v jej druhom kvadrante. Je znázornená na obrázku 4.



Obrázok 4

4. Príklad s funkciou dvoch premenných

Na záver tu mám ešte jeden príklad, ktorý sa tiež vyskytol na olympiáde v roku 2019, mal číslo 5. Nepatril k tým úplne najťažším a nie je ani sám o sebe zvlášť zaujímavý. Uvediem tu ale k nemu jeden komentár, jedno doplnenie, ktoré sa do zadania pre stredoškolákov nedostalo a tiež zmienku o tom, ako vlastne vznikol. Najskôr sa pozrime na zadanie príkladu, ktoré sa objavilo na súťaži.

Príklad 4 (autorka Viera Štoudková Růžičková). *Uvažujme funkci f danou předpisem $f(x) = ax^2 + bx + c$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Zapište funkci g dvou proměnných, která splňuje vztah*

$$g(x \cdot y, y) = y^2 \cdot f(x).$$

(V tomto vztahu hodnotu $f(x)$ násobíme hodnotou y^2, do funkce g dosazujeme za první proměnnou součin $x \cdot y$ a za druhou proměnnou y.)

Riešením je napríklad funkcia $g(z, y) = az^2 + bzy + cy^2$, definovaná pre všetky dvojice reálnych čísiel, čo sa dá jednoducho odvodiť:

$$\begin{aligned}
g(xy, y) &= y^2(ax^2 + bx + c),\\
g(xy, y) &= ax^2y^2 + bxy^2 + cy^2,\\
g(xy, y) &= a(xy)^2 + b(xy)y + cy^2.
\end{aligned}$$

Možno niekoho zarazilo, prečo píšem „napríklad“, keď je to jediná možnosť. V skutočnosti nie je, možností je nekonečne veľa. Nie je totiž zadaný požadovaný definičný obor funkcie g a ani sa nevyžaduje jej spojitosť. Vďaka tomu môžeme za riešenie považovať napríklad aj každú funkciu danú predpisom

$$g(z, y) = \begin{cases} az^2 + bzy + cy^2 \text{ pre } y \neq 0\\ 0 \text{ pre } y = 0,\ z = 0\\ \text{čokoľvek pre } y = 0,\ z \neq 0. \end{cases}$$

Pôvodná verzia zadania mala ešte druhú časť, ktorú sme nakoniec nezaradili. Išlo v nej o to, že keby sme zobrali takú funkciu f, ktorá nie je kvadratická (ani lineárna ani konštantná), či by sme aj k takej našli funkciu g s danými vlastnosťami. A aby to nebolo tak jednoduché, naviac chceme, aby obe funkcie boli definované pre všetky reálne čísla a boli aj všade spojité.

Príklad 5. *Napište příklad reálných funkcí f a g, které jsou definovány a spojité pro všechna reálná čísla, pro které platí vztah*

$$g(x \cdot y, y) = y^2 \cdot f(x) \tag{5}$$

a současně f nemá tvar $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Z dôvodov, ktoré uvediem neskôr a súvisia s motiváciou príkladu, som predpokladala, že také funkcie musia existovať. Prvé, čo ma napadlo pri ich hľadaní, bolo skúšanie nejakých jednoduchších funkcií. Nemôže to byť polynóm druhého stupňa, tak skúsim tretieho. Vezmem $f(x) = x^3$ a podobne ako v predchádzajúcom prípade dosadím do vzťahu a upravím. Dostávam postupne

$$g(xy, y) = y^2 x^3,$$
$$g(xy, y) = \frac{(xy)^3}{y},$$

vyšla mi teda funkcia $g(z, y) = \frac{z^3}{y}$, ktorá nie je definovaná pre $y = 0$ a ani sa tam nedá spojito dodefinovať. Podobne to dopadne aj s polynómami vyšších stupňov. Nie som si ale istá, ako by to bolo pre neceločíselnú mocninu. Skúsim si to odvodiť všeobecne pre $f(x) = x^p$. Dostávam postupne

$$g(xy, y) = y^2 x^p,$$
$$g(xy, y) = (xy)^p y^{2-p},$$

vyšla mi teda funkcia $g(z, y) = z^p y^{2-p}$. Vidím z toho, že napríklad voľbou $p = \frac{1}{3}$ nič nepokazím, obidve funkcie budú definované a spojité všade. Riešením je teda napríklad dvojica funkcií $f(x) = \sqrt[3]{x}$ a $g(z, y) = \sqrt[3]{zy^5}$.

Na tomto postupe riešenia mi trochu vadí, že sa tam niečo na začiatku uhádlo. Že som náhodou skúšala práve polynómy. Zadanie som splnila, zistila som, že také funkcie existujú, ale neviem, či je to jediná možnosť. Pokúsim sa teraz nájsť všetky možné riešenia, to znamená všetky dvojice funkcií f, g s danými vlastnosťami.

Položím $xy = z$ a za predpokladu, že $y \neq 0$, zo vzťahu (5) dostávam

$$g(z, y) = y^2 f\left(\frac{z}{y}\right),$$

takže funkcia g je vyjadrená pomocou funkcie f. Problém ale je, ak $y = 0$. Potom do funkcie f nemôžem dosadiť $\frac{z}{y}$, lebo to nie je reálne číslo. V riešení nájdenom vyššie sa tie ypsilony vykrátili a nevadilo to. Vyzerá to teda, že skutočne iná funkcia f, než nejaká kombinácia mocninových funkcií, ani byť nemôže, lebo v iných prípadoch už sa ypsilony nevykrátia. Len vyzerá. Existuje totiž spôsob, ako do funkcie „dosadzovať nedosaditeľné“ – je to limita. Ak je $y = 0$, zo spojitosti funkcie g mám, že

$$g(z, 0) = \lim_{y \to 0} g(z, y) = \lim_{y \to 0} y^2 f\left(\frac{z}{y}\right). \tag{6}$$

Takže v skutočnosti jediná podmienka pre funkciu f je, že táto limita musí existovať a byť konečná pre každé reálne číslo z. Túto podmienku môžem ešte úpravou zjednodušiť. Urobím substitúciu tak, aby v argumente funkcie f bola jedna premenná. Položím $\frac{z}{y} = v$. Viem, že pre $z \neq 0$ platí

$$\lim_{y \to 0+} \frac{z}{y} = -\lim_{y \to 0-} \frac{z}{y} = \operatorname{sgn}(z) \cdot \infty,$$

takže zo vzťahu (6) dostávam

$$g(z, 0) = z^2 \lim_{v \to \infty} \frac{f(v)}{v^2} = z^2 \lim_{v \to -\infty} \frac{f(v)}{v^2}.$$

Stačí teda, aby tieto limity existovali, boli konečné a rovnali sa.

Ešte to na záver celé zhrniem: Ak reálna funkcia f, ktorá je definovaná pre všetky reálne čísla a je všade spojitá, je ľubovoľná taká, že

$$\lim_{v\to\infty}\frac{f(v)}{v^2}=\lim_{v\to-\infty}\frac{f(v)}{v^2}=l\in\mathbb{R},$$

potom k nej existuje funkcia g daná predpisom

$$g(z,y)=\begin{cases} y^2 f\left(\frac{z}{y}\right) \text{ pre } y\neq 0,\\ z^2\lim\limits_{v\to\infty}\frac{f(v)}{v^2} \text{ pre } y=0,\end{cases}$$

ktorá má požadované vlastnosti. To znamená, že je všade definovaná, spojitá, a platí vzťah (5).

Takých funkcií f je plno … Z tých najznámejších sú to okrem vhodných mocninových funkcií napríklad aj $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{arctg} x$, e^{-x^2} …

A teraz tá sľubovaná motivácia: pôvodné tvrdenie, ktoré ma inšpirovalo k vytvoreniu tohto príkladu, namiesto s reálnymi číslami pracuje s maticami a vektormi, pričom matice sú štvorcové symetrické s rozmerom $n\times n$ a vektory sú n-rozmerné. Funkcia f zobrazuje takéto matice na takéto matice a funkcia g zobrazuje dvojicu takýchto vektorov na reálne číslo. Vzťah, ktorý zodpovedá vzťahu (5), vyzerá nasledovne:

$$g(Xy,y)=y^T f(X)y, \tag{7}$$

kde X je štvorcová symetrická reálna matica s rozmerom $n\times n$ a y je n-rozmerný reálny vektor. A to spomínané tvrdenie hovorí, že pokiaľ $n\geq 2$, potom jediná spojitá, všade definovaná funkcia f taká, že k nej existuje funkcia g spĺňajúca vzťah (7) pre každú takú maticu a každý taký vektor, je funkcia tvaru

$$f(X)=XAX+BX+XB+C,$$

kde A, B, C sú štvorcové matice s rozmerom $n\times n$ a matice A, C sú aj symetrické. Funkcia g je potom tvaru

$$g(z,y)=z^TAz+z^TBy+y^TBz+y^TCy.$$

Príklad 5 rozobraný vyššie vlastne mal za cieľ nájsť protipríklad na toto tvrdenie ak $n=1$, čo sa aj podarilo. Toto tvrdenie aj s jeho (veľmi dlhým) dôkazom je možné nájsť v článku [1], kde je uvedené ako súčasť dôkazu hlavnej vety.

Reference

[1] A. N. Stokes: *A special property of the matrix Riccati equation*, Bull. Austral. Math. Soc. **10** (1974), 245–253.

Viera Štoudková Růžičková, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: ruzickova@fme.vutbr.cz