

TRAJEKTORIE AUTONOMNÍCH ROVNIC V ROVINĚ II. NELINEÁRNÍ ROVNICE A SOUSTAVY

JAN FRANCŮ

ABSTRAKT. Příspěvek navazuje na práci J. Franců: *Trajektorie autonomních rovnic v rovině I.*, která se zabývá trajektoriemi řešení lineárních autonomních soustav dvou rovnic a rovnicemi druhého řádu. V této práci uvedeme několik příkladů konkrétních nelineárních rovnic a soustav, které mají zajímavé trajektorie.

V mechanice je to nelineární rovnice matematického kyvadla a popis trajektorií jeho netlumených i tlumených kmitů. V matematické biologii jsou to modely soužití dvou populací: symbióza, slabá a silná konkurence, dominance a vztah predátor-kořist. Trajektorie konkrétních příkladů jsou vykresleny.

ÚVOD

Obyčejné diferenciální rovnice se využívají při modelování řady jevů ve fyzice, mechanice, biologii, ekonomii i dalších oblastech. V případě řešení autonomní soustavy dvou rovnic $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ nebo jedné rovnice druhého řádu $y'' = f(y, y')$ chování řešení dobře znázorňují trajektorie.

Trajektorie je průmět grafu řešení do prostoru hodnot řešení. V případě autonomních rovnic $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$, $y'' = f(y, y')$ s lipchitzovskými funkcemi $\mathbf{f}(\mathbf{y})$, $f(y, y')$ trajektorie řešení vytváří systém disjunktních křivek nebo bodů v rovině. V okolí trajektorie nekonstantního řešení jsou to „rovnoběžné“ a stejně orientované křivky.

V okolí singulárního bodu, tj. trajektorie konstantního řešení, je situace složitější, trajektorie se mohou chovat různě. Možné situace jsou studovány v článku [3], kde jsou podrobně studovány singulární body lineárních soustav i rovnic, včetně konkrétních příkladů s náčrty trajektorií – tzv. fázových portrétů.

V tomto článku se budeme zabývat trajektoriemi vybraných nelineárních rovnic a soustav modelujících reálné jevy ve dvou oblastech. První je mechanika, rovnice druhého řádu popisující netlumené i tlumené kmity matematického kyvadla.

Druhou oblastí je matematická biologie. Soustava dvou rovnic prvního řádu popisuje vývoj počtu dvou populací, které se navzájem ovlivňují. Rozebereme několik typů tohoto vztahu: symbióza, tři stupně konkurence a vztah predátor-kořist.

2010 MSC. Primární 34A34; Sekundární 70B05, 92D25.

Klíčová slova. Autonomní diferenciální rovnice, autonomní systém diferenciálních rovnic, trajektorie, singulární body, matematické kyvadlo, modelování vývoje populací.

Práce byla podporována Vysokým učením technickým v Brně projektem *Specifický výzkum* č. FSI-S-20-6187.

1. TRAJEKTORIE ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ A ROVNIC

Připomeňme pojmy a výsledky z článku [3], ve kterém jsme studovali trajektorie lineárních soustavy dvou rovnic a lineárních rovnic druhého řádu.

Autonomní soustava dvou rovnic

Autonomní soustavu dvou obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu pro neznámé funkce $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), y_2(x))$ lze zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(y_1, y_2), \\ y_2' &= f_2(y_1, y_2), \end{aligned} \quad \text{vektorově} \quad \mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(\mathbf{y}). \quad (1.1)$$

Budeme předpokládat, že funkce $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ je lokálně lipschitzovská v oblasti G , tj.

$$|\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{y}})| \leq L |\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}|, \quad \forall \mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}} \in K, \quad (L = L(K) > 0)$$

pro každou kompaktní podmnožinu $K \subseteq G$. Díky Picardově větě řešení soustavy (1.1) s počáteční podmínkou $\mathbf{y}(x_0) = \boldsymbol{\gamma}_0$ existuje a je jednoznačné.

Trajektorie $\langle \mathbf{y} \rangle$ řešení \mathbf{y} na intervalu I je průmět grafu řešení v prostoru $I \times \mathbb{R}^2$ do prostoru hodnot řešení, do tzv. *fázového prostoru*, kterým je rovina \mathbb{R}^2 . Tedy

$$\langle \mathbf{y} \rangle := \{ \mathbf{y}(x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I \} \subset G.$$

Pokud trajektorie je křivka, orientujeme ji podle rostoucího x . Trajektorie konstantního řešení je bod, zvaný *singulární bod*. Budeme se zabývat jen trajektoriemi úplných řešení, tj. řešení, které už nelze prodloužit na větší interval. Připomeňme vlastnosti trajektorií, viz [3].

Věta 1.1. *Trajektorie úplných řešení soustavy rovnic (1.1) splňují:*

- (a) *Je-li $\mathbf{y}(x)$ řešení na intervalu (a, b) , potom $\mathbf{y}_c(x) = \mathbf{y}(x - c)$ pro $c \in \mathbb{R}$ je řešení na posunutém intervalu $(a + c, b + c)$ a má stejnou trajektorii.*
- (b) *Dvě řešení mají disjunktní nebo totožné trajektorie.*
- (c) *Každým bodem fázového prostoru G prochází právě jedna trajektorie.*
- (d) *Existují tři druhy trajektorií úplných řešení:*
singulární bod: *trajektorie konstantního řešení,*
uzavřená neprotínající se křivka: *trajektorie periodického řešení,*
otevřená neprotínající se křivka: *ostatní trajektorie.*

Autonomní rovnice druhého řádu

Počáteční úlohu pro autonomní rovnici druhého řádu lze zapsat ve tvaru

$$y'' = f(y, y'), \quad y(x_0) = \gamma_0, \quad y'(x_0) = \gamma_1. \quad (1.2)$$

Jestliže funkce $f(\xi, \eta)$ je lokálně lipschitzovská v oblasti $G \subseteq \mathbb{R}^2$, potom pro každé $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ úloha (1.2) má právě jedno řešení. Každou rovnici druhého řádu lze převést na soustavu dvou rovnic prvního řádu

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = f(y_1, y_2), \quad (1.3)$$

přičemž nové neznámé jsou $y_1 = y$, $y_2 = y'$ a počáteční podmínky přejdou na $y_1(x_0) = \gamma_0$, $y_2(x_0) = \gamma_1$. Trajektorie řešení rovnice (1.2) jsou trajektorie řešení

odpovídající soustavy rovnic (1.3). Jsou to křivky, případně body v rovině, jejichž „vodorovnou“ souřadnicí je hodnota řešení $y(x)$ a „svislou“ hodnoty derivace $y'(x)$. Tedy

$$\langle y \rangle := \{(y(x), y'(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I\} \subset G.$$

Kromě uvedených vlastností trajektorií soustavy rovnic, trajektorie řešení rovnice splňují navíc vlastnost, které nám usnadní zjistit orientaci trajektorií.

Věta 1.2. *Trajektorie úplných řešení rovnice druhého řádu splňují:*

- Všechny singulární body leží na ose y , protože $y' = 0$.*
- Trajektorie nad osou y mají kladnou souřadnici y' , a proto jsou orientovány v kladném směru, tj. vpravo, zatímco trajektorie pod osou y mají zápornou souřadnici y' a jsou proto orientovány v záporném směru, tj. vlevo.*
- Hladké trajektorie protínají osu y s tečnou kolmou na osu y .*

Klasifikace singulárních bodů

Bodem \mathbf{y}^* , který není singulární, tj. $\mathbf{f}(\mathbf{y}^*) \neq \mathbf{0}$, prochází křivka, která je trajektorií nekonstantního řešení. Okolí tohoto bodu je vyplněné „rovnoběžnými“ stejně orientovanými trajektoriemi. V okolí singulárního bodu \mathbf{y}^* je situace odlišná. Podle chování trajektorií v *ryzím* okolí singulárního bodu (tj. okolím bodu bez tohoto bodu) rozlišujeme následující typy singulárních bodů.

Definice 1.3. Nechť \mathbf{y}^* je izolovaný singulární bod soustavy rovnic $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ nebo rovnice $y'' = f(y, y')$, tj. izolované řešení soustavy rovnic $\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$ nebo rovnice druhého řádu $f(y, 0) = 0$. Bod \mathbf{y}^* nazveme:

- střed*, pokud existuje ryzí okolí U bodu \mathbf{y}^* , ve kterém každým bodem $\mathbf{y} \in U$ prochází uzavřená trajektorie obsahující ve svém vnitřku bod \mathbf{y}^* .
- atraktivní uzel*, pokud existuje jeho ryzí okolí, ve kterém jsou jen trajektorie směřující do tohoto bodu, přičemž směrový vektor tečny trajektorie má limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{y}(x) = \mathbf{y}^* \quad \text{a existuje limita} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{y}'(x)}{\|\mathbf{y}'(x)\|}.$$

- neatraktivní uzel*, pokud existuje ryzí okolí, ve kterém jsou jen trajektorie vycházející z tohoto bodu, přičemž směrový vektor tečny trajektorie má limitu

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{y}(x) = \mathbf{y}^* \quad \text{a existuje limita} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\mathbf{y}'(x)}{\|\mathbf{y}'(x)\|}.$$

- atraktivní ohnisko*, pokud existuje jeho ryzí okolí, ve kterém jsou jen trajektorie blížící se k tomuto bodu, ale směrový vektor tečny trajektorie nemá limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{y}(x) = \mathbf{y}^* \quad \text{a neexistuje limita} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{y}'(x)}{\|\mathbf{y}'(x)\|}.$$

- neatraktivní ohnisko*, pokud existuje ryzí okolí, ve kterém jsou jen trajektorie vycházející z tohoto bodu a směrový vektor tečny trajektorie nemá limitu

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{y}(x) = \mathbf{y}^* \quad \text{a neexistuje limita} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\mathbf{y}'(x)}{\|\mathbf{y}'(x)\|}.$$

- (f) *sedlo*, pokud existuje jeho ryzí okolí, ve kterém existují jak trajektorie, které se k němu blíží, tak trajektorie, které se od něj vzdalují, tj. existují řešení $\mathbf{y}_1(x)$ a $\mathbf{y}_2(x)$ takové, že

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{y}_1(x) = \mathbf{y}^*, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{y}_2(x) = \mathbf{y}^*.$$

Poznámka 1.4.

- (a) Izolované singulární body v rovině, tj. soustavy dvou rovnic nebo rovnice druhého řádu, mohou být jen uvedených typů: střed, uzel, ohnisko a sedlo.
 (b) Zatím jsme se zabývali izolovanými singulárními body. V případě, kdy singulární body v rovině tvoří křivku, mohou nastat tyto případy:
 (α) Body křivky jsou atraktivní uzly, tj. ke každému bodu se blíží po jedné trajektorii z obou stran.
 (β) Body křivky jsou neatraktivní uzly, tj. z každého bodu vychází po jedné trajektorii na obě strany.
 (γ) Trajektorie v okolí křivky singulárních bodů vedou „rovnoběžně“ podél křivky.
 (c) Singulární body mohou zaplnit plochu, například soustava $y'_1 = 0, y'_2 = 0$ má jen konstantní řešení, singulární body zaplňují celou rovinu.
 (d) Existují autonomní soustavy rovnic, které nemají žádný singulární bod, například $y'_1 = 1, y'_2 = 2$.

Linearizace nelineární soustavy dvou rovnic

V předchozím odstavci jsme klasifikovali singulární bod \mathbf{y}^* soustavy nelineárních rovnic (1.1) podle chování trajektorií v jeho okolí. Abychom zjistili typ singulárního bodu, budeme nelineární funkce $f_1(y_1, y_2), f_2(y_1, y_2)$ v okolí singulárního bodu $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*)$ linearizovat pomocí Taylorova polynomu prvního řádu. Díky rovnosti $\mathbf{f}(\mathbf{y}^*) = \mathbf{0}$ funkce $\mathbf{f}(\mathbf{y}) = (f_1(y_1, y_2), f_2(y_1, y_2))$ aproximujeme

$$f_1(\mathbf{y}) \approx A_{11}(y_1 - y_1^*) + A_{12}(y_2 - y_2^*), \quad f_2(\mathbf{y}) \approx A_{21}(y_1 - y_1^*) + A_{22}(y_2 - y_2^*), \quad (1.4)$$

kde konstanty A_{ij} jsou parciální derivace funkcí f_1, f_2 v singulárním bodě:

$$A_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\mathbf{y}^*), \quad A_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(\mathbf{y}^*), \quad A_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(\mathbf{y}^*), \quad A_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(\mathbf{y}^*). \quad (1.5)$$

Tímto způsobem můžeme posuzovat typ singulárního bodu \mathbf{y}^* nelineární soustavy $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ pomocí přidružené homogenní soustavy lineárních diferenciálních rovnic $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ s maticí koeficientů $\mathbf{A} = (A_{ij})$. Její charakteristický polynom je

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (A_{11} + A_{22})\lambda + (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}). \quad (1.6)$$

Tento polynom umožňuje určit typ singulárního bodu pomocí svých kořenů.

Linearizace nelineární rovnice druhého řádu

Odvoďme charakteristický polynom $P(\lambda)$ nelineární rovnice $y'' = f(y, y')$. Rovnici převedeme na soustavu rovnic (1.3) s funkcemi $f_1(y_1, y_2) = y_2 \approx y', f_2(y_1, y_2) =$

$f(y_1, y_2) \approx f(y, y')$. Souřadnice singulárního bodu \mathbf{y}^* jsou $(y^*, 0)$, kde y^* splňuje rovnost $f(y^*, 0) = 0$. Příslušné parciální derivace – koeficienty A_{ij} jsou

$$A_{11} = 0, \quad A_{12} = 1, \quad A_{21} = \frac{\partial f}{\partial y}(y^*, 0), \quad A_{22} = \frac{\partial f}{\partial y'}(y^*, 0)$$

a příslušný charakteristický polynom je

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \frac{\partial f}{\partial y'}(y^*, 0) \cdot \lambda - \frac{\partial f}{\partial y}(y^*, 0). \quad (1.7)$$

Určení typu singulárního bodu

Pomocí kořenů charakteristického polynomu můžeme určit typ singulárního bodu jako v lineárním případě. Využijeme přitom následující věty.

Věta 1.5. *Nechť $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*)$ je izolovaný singulární bod soustavy rovnic (1.1) s charakteristickým polynomem (1.6) nebo izolovaný singulární bod $\mathbf{y}^* = (y^*, 0)$ rovnice (1.2) s charakteristickým polynomem (1.7). Nechť polynom $P(\lambda)$ má nenulové kořeny λ_1, λ_2 . Potom izolovaný singulární bod \mathbf{y}^* je:*

- neatraktivní uzel, pokud oba kořeny jsou reálné a kladné, tj. $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$,
- atraktivní uzel, pokud oba kořeny jsou reálné a záporné, tj. $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$,
- sedlo, pokud jeden kořen je kladný a druhý záporný, tj. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$,
- neatraktivní ohnisko, pokud kořeny jsou komplexně sdružené s kladnou reálnou částí, tj. $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\nu$, ($\mu > 0$, $\nu \neq 0$),
- atraktivní ohnisko, pokud kořeny jsou komplexně sdružené se zápornou reálnou částí, tj. $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\nu$, ($\mu < 0$, $\nu \neq 0$).

Poznámka 1.6. V případě komplexně sdružených kořenů s nulovou reálnou částí, tj. $\lambda_{1,2} = \pm i\nu$, ($\nu \neq 0$), singulární bod nemusí být střed jako v lineárním případě. Body s kořeny $\lambda = \mu \pm i\nu$ s $\mu \neq 0$ se nazývají také *hyperbolické*.

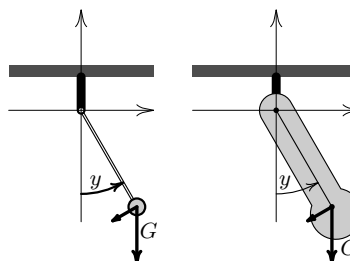
2. MATEMATICKÉ KYVADLO

Nelineární rovnice druhého řádu, která modeluje jednoduchý mechanický jev *kmitání matematického kyvadla*, má zajímavé trajektorie.

Fyzikální formulace úlohy

Ve svislé rovině uvažujeme hmotný bod o hmotnosti m upevněný na konci tuhé nehmotné tyče délky ℓ , jejíž druhý konec se může volně otáčet okolo počátku $(0, 0)$. Na hmotný bod působí gravitační síla $G = mg$ svisle dolů.

Označme $y(x)$ orientovaný úhel (v radiánech proti směru pohybu hodinových ručiček), který v čase x svírá tyč s dolní svislou poloosou, viz Obr. 1. Hledáme závislost úhlu y na čase x .



Obrázek 1. Matematické a fyzické kyvadlo.

Poznámka 2.1. Tento jev se nazývá kmitání *matematického kyvadla*. Obecnější úlohou je kmitání *fyzického kyvadla*, kdy místo hmotného bodu a nehmotné tyče uvažujeme hmotné těleso v prostoru \mathbb{R}^3 , které se může volně otáčet okolo vodorovné osy, která neprochází těžištěm, viz Obr. 1. Dříve užívaný název fyzikální kyvadlo není správný. Matematické kyvadlo je idealizace reálného objektu – fyzického tělesa, není na něm nic fyzikálního, [2].

Odvození diferenciální rovnice

Hmotný bod se může pohybovat po kružnici se středem v počátku a poloměrem ℓ . Působí na něj svisle dolů stálá gravitační síla $G = mg$, která se rozkládá na normálovou F_n a tečnou složku F_t . Normálová složka je v rovnováze se silou, kterou působí tyč na hmotný bod, tečná složka F_t způsobí zrychlení kyvadla.

Pomocí úhlu $y(x)$ v čase x tečnou složku síly G vyjádříme jako $F_t = -\sin(y)mg$, viz Obr. 2.

Derivací funkce $y(x)$ dostáváme úhlovou rychlost $\omega(x) = y'(x)$ a úhlové zrychlení $\alpha(x) = y''(x)$. Při pohybu po kružnici o poloměru ℓ dráhová rychlost je $v(x) = \ell y'(x)$ a dráhové zrychlení $a(x) = \ell y''(x)$.

Podle Newtonova zákona $F = ma$ platí rovnice $-mg \sin(y) = m \ell y''$. Hmotností bodu m rovnici vydělíme a po úpravě dostáváme

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{g}{\ell} \sin(y) = 0. \quad (2.1)$$

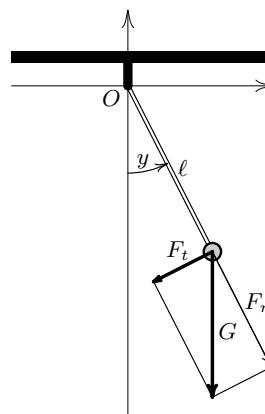
Označme $a = \sqrt{g/\ell}$ ($g, \ell > 0$). Dostáváme tak obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu pro neznámou funkci y proměnné x :

$$y'' + a^2 \sin(y) = 0. \quad (2.2)$$

Rovnici doplníme počátečními podmínkami v čase x_0 : $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, kde y_0 je počáteční úhlová výchylka a y_1 počáteční úhlová rychlost kyvadla.

V okolí $y = 0$, tj. pro malé hodnoty y , platí $\sin(y) \approx y$. Nahradíme-li $\sin(y)$ neznámou y dostáváme lineární aproximaci rovnice (2.2) tvaru

$$y'' + a^2 y = 0. \quad (2.3)$$



Obrázek 2. Matematické kyvadlo.

Řešení linearizované úlohy

Budeme studovat obě úlohy. Začneme jednodušší linearizovanou rovnicí.

Příklad 2.2. Určete trajektorie řešení rovnice $y'' + a^2 y = 0$.

Řešení: Charakteristický polynom $P(\lambda) = \lambda^2 + a^2$ lineární rovnice (2.3) má jediné řešení: dvojici komplexně sdružených kořenů $\lambda_{1,2} = \pm i a$. Rovnice má proto jediný singulární bod, který odpovídá konstantnímu nulovému řešení $y(x) = 0$. Protože rovnice je lineární, typ tohoto singulárního bodu je *střed*.

Ověřme výsledek výpočtem. Obecné řešení je $y(x) = c_1 \cos(ax) + c_2 \sin(ax)$, kde konstanty c_1, c_2 jsou určeny hodnotami počátečních podmínek y_0, y_1 . Dokažme, že

trajektorie jsou elipsy. Derivace řešení je $y'(x) = -c_1 a \sin(ax) + c_2 a \cos(ax)$. Dosazením do výrazu elipsy $a^2 y^2 + (y')^2$ po úpravě dostáváme

$$\frac{y^2}{c_1^2 + c_2^2} + \frac{(y')^2}{a^2(c_1^2 + c_2^2)} = 1,$$

což je rovnice elipsy s „vodorovnou“ poloosou $\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ a „svislou“ poloosou $a\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$. Trajektorie v souřadnicovém systému y, y' jsou koncentrické elipsy se středem v počátku, viz Obr. 3. Singulární bod $(0, 0)$ je proto *střed*. \square

Trajektorie řešení lze určit také přímo integrací. Rovnici (2.3) vynásobíme y' . Získanou rovnost $y' y'' + a^2 y y' = 0$ integrujeme na $\frac{1}{2}(y')^2 + \frac{1}{2}a^2 y^2 = K$.

Z počátečních podmínek $y(0) = y_0, y'(0) = 0$ plyne $K = \frac{1}{2}a^2 y_0^2$. Rovnice dává

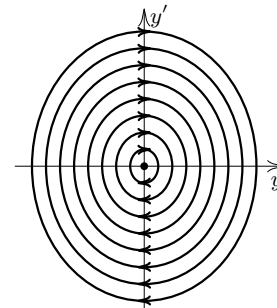
$$y' = \pm a \sqrt{y_0^2 - y^2}, \quad y \in \langle -y_0, y_0 \rangle.$$

Jak zjistit orientaci trajektorií? Podle Věty 1.2 trajektorie nad osou y jsou orientovány vpravo, pod osou vlevo a osu y protínají „kolmo“. Elipsy jsou proto orientované ve směru pohybu hodinových ručiček, tj. v záporném smyslu.

Všechna řešení jsou periodická. Jaká je perioda? Funkce kosinus má periodu 2π , proto délka periody T podle rovnice $aT = 2\pi$ je

$$T = 2\pi/a = 2\pi\sqrt{\ell/g}. \quad (2.4)$$

Délka periody tedy nezávisí na rozkmitu, roste s odmocninou délky kyvadla ℓ , tj. čím delší je kyvadlo, tím kmitá pomaleji, a klesá s odmocninou gravitační konstanty g , na Měsíci s menší gravitační konstantou g stejné kyvadlo kmitá pomaleji než na Zemi. Perioda T (kyv tam a zpět) kyvadla dlouhého $\ell = 1\text{m}$ na rovníku Země, kde $g = 9,807\text{ m s}^{-2}$, je $T = 2\pi\sqrt{1/9,807} = 2,006$ sekundy, zatímco na Měsíci, kde $g = 1,62\text{ m s}^{-2}$, je perioda $T = 4,94$ sekundy.



Obrázek 3. Trajektorie linearizované rovnice kyvadla pro $a = 1,2$.

Nelineární rovnice matematického kyvadla

Příklad 2.3. Určete trajektorie řešení nelineární rovnice $y'' + a^2 \sin(y) = 0$.

Řešení: Určeme singulární body. Jsou to řešení rovnice $f(y, 0) \equiv a^2 \sin(y) = 0$, která má řešení $y^* = n\pi$, pro celá čísla n , singulární body jsou $\mathbf{y}^* = (n\pi, 0)$. Příslušný charakteristický polynom je $P(\lambda) = \lambda^2 + a^2 \cos(y^*)$.

Pro liché $n = 2k + 1$ polynom $P(\lambda) = \lambda^2 - a^2$ má dva reálné kořeny $\lambda_{1,2} = \pm a$ s opačnými znaménky, singulární bod $\mathbf{y}^* = (2k\pi + \pi, 0)$ je podle Věty 1.5 *sedlo*.

Pro sudé $n = 2k \in \mathbb{Z}$ polynom $P(\lambda) = \lambda^2 + a^2$ má dva komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2} = \pm ia$. Typ singulárního bodu $\mathbf{y}^* = (2k\pi, 0)$ určíme výpočtem a charakterizací jednotlivých typů trajektorií, protože v nelineárním případě singulární bod nemusí být *střed*. Rovnici $y'' + a^2 \sin(y)$ vynásobíme y' , čímž získáme rovnici

$y'y'' + a^2 \sin(y)y' = 0$. Integrace dává rovnost

$$\frac{1}{2}(y')^2 - a^2 \cos(y) = K. \quad (2.5)$$

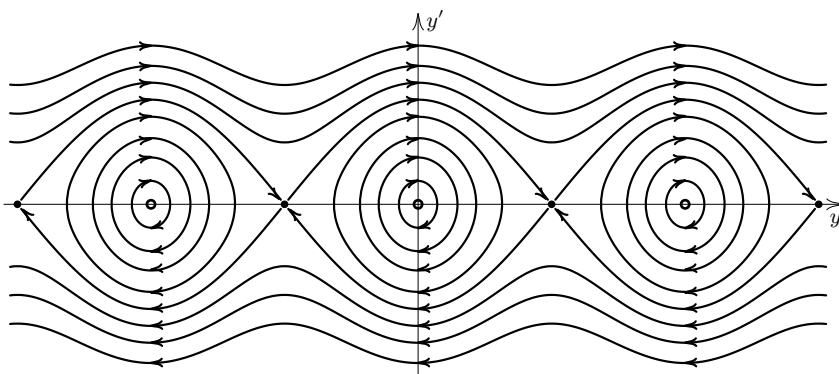
Určeme trajektorie řešení. Z rovnice (2.5) plyne $|y'| = \sqrt{2(K + a^2 \cos y)}$. Odmocnina na pravé straně je definována pro

$$K + a^2 \cos y \geq 0. \quad (2.6)$$

Protože funkce kosinus nabývá hodnoty z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$, rozlišíme případy:

- Jestliže $K = -a^2$, potom z (2.6) plyne $\cos(y) = 1$, tedy $y = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ a $y' = 0$. Dostáváme tak spočetně mnoho singulárních bodů $(y, y') = (2k\pi, 0)$ pro $k \in \mathbb{Z}$. Jsou to situace, kdy kyvadlo je v klidu ve stabilní dolní poloze.
- Jestliže $K \in (-a^2, a^2)$, potom (2.6) platí v základní periodě $(-\pi, \pi)$ pro hodnoty $y \in \langle -y_0, y_0 \rangle$, kde $y_0 = \arccos(-K/a^2) > 0$. Jsou to případy, kdy kyvadlo z krajní polohy $y = y_0$ ($|y_0| < \pi$) přechází do opačné polohy $y = -y_0$ a pak obráceně. Analogická situace je v intervalech $y \in (2k\pi - \pi, 2k\pi + \pi)$.
- Jestliže $K = a^2$ a přitom $y' = 0$, potom pro $y = (2k + 1)\pi$ dostaneme singulární body, kdy kyvadlo je opět v klidu ale v horní nestabilní poloze.
- Jestliže $K = a^2$ a $y' \neq 0$, potom v základní periodě y probíhá interval $(-\pi, \pi)$. Je to situace, kdy kyvadlo se z limitní polohy π v čase $x \rightarrow -\infty$ pohybuje v záporném směru do polohy $y \rightarrow \pi$ v čase $x \rightarrow \infty$, nebo obráceně: z polohy $y \rightarrow -\pi$ do polohy $y = \pi$ v kladném směru. Analogická situace je v intervalech $y \in (2k\pi - \pi, 2k\pi + \pi)$.
- Jestliže $K > a^2$, potom $K + a^2 \cos y$ je kladné pro všechna $y \in \mathbb{R}$ a kyvadlo se točí stále v kladném směru nebo stále v záporném směru.

Jaká je klasifikace singulárních bodů? Podle fázového portréту a definice, singulární body $(2k\pi, 0)$ – dolní stabilní polohy kyvadla – jsou body typu *střed* a body $(2k\pi + \pi, 0)$ – horní nestabilní polohy – mají typ *sedlo*, viz Obr.4, což je v souladu s analýzou pomocí charakteristického polynomu $P(\lambda)$. \square



Obrázek 4. Trajektorie nelineární rovnice kyvadla s $a = 1, 2$, singulární body jsou *střed*y a *sedla*.

Poznámka 2.4.

- (a) Rovnice (2.5) je (až na násobek hmotnosti m) zákon zachování energie. Kinetická energie bodu o hmotnosti m pohybující se rychlostí $v = \ell y'$ je $E_{\text{kin}}(x) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\ell y')^2$. Potenciální energie bodu o hmotnosti m v gravitačním poli ve výšce $h = -\ell \cos(y)$ je $E_{\text{pot}} = mgh = -mg\ell \cos(y)$. Zákon zachování mechanické energie tak lze zapsat ve tvaru

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}m\ell^2(y')^2 - mg\ell \cos(y) = Km = \text{konst.}$$

- (b) Linearizovaná rovnice (2.3) je aproximací nelineární rovnice (2.2) v okolí bodu $\mathbf{y} = (0, 0)$. Při zvětšování rozkmitu y_0 se chyba zvětšuje, situace (c)–(e) už linearizovaná rovnice nedovede popsat.
- (c) Fyzické kyvadlo vede na stejnou rovnici. Na těleso kyvadla o objemu V v jeho těžišti T působí stejná gravitační síla $G = mg$, kde m je hmotnost celého kyvadla, její tečná složka je opět $F_t = -mg \sin(y)$. Protože body kyvadla mají různou vzdálenost od závěsu, Newtonův zákon $F = ma$ pro dráhové zrychlení a nahradíme vztahem $M = J\alpha$ mezi momentem síly $M = F_t \ell$, kde ℓ je rameno síly, tj. vzdálenost těžiště T od osy otáčení, a úhlovým zrychlením $\alpha = y''$, kde J je moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose otáčení. Moment setrvačnosti lze spočítat integrací součinu hustoty $\rho(x)$ a čtverce vzdálenosti bodu kyvadla od osy otáčení. Při popisu kyvadla o objemu $V \subset \mathbb{R}^3$ v kartézských souřadnicích $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ otáčející se okolo osy x_1 lze moment setrvačnosti spočítat integrálem

$$J = \int_V (x_2^2 + x_3^2) \rho(x) \, dx.$$

Dostáváme rovnici $Jy'' + mg\ell \sin(y) = 0$. Označení $a^2 = mg\ell/J$ vede na stejnou rovnici $y'' + a^2 \sin(y) = 0$.

- (d) Perioda kyvů (čas kyvu tam a zpět) v lineárním modelu je $T = 2\pi/a$ a nezávisí na rozkmitu y_0 . Protože pro malé kladné y je $\sin y < y$, tj. síla způsobující pohyb kyvadla je menší než v linearizované rovnici, zrychlení kyvadla je (v absolutní hodnotě) menší. Kyvadlo se proto kýve pomaleji, délka periody T kyvadla se s rozkmitem zvětšuje.
- (e) Jaká je perioda kyvu T v nelineárním případě? Naznačme metodu výpočtu. Při rozkmitu, tj. maximální výchylce y_0 , je rychlost $y' = 0$. Z rovnice (2.5) dostaneme $K = -a^2 \cos(y_0)$. Pro rostoucí část kyvu $y' \geq 0$ z rovnice (2.5) po dosazení za K plyne $y' = a\sqrt{2(\cos(y) - \cos(y_0))}$.

Zaměňme roli závislé a nezávislé proměnné: místo $y(x)$ uvažujme neznámou $x(y)$. Derivace vztahu $y(x(y)) = y$ podle y dává $y'(x(y))x'(y) = 1$, odkud dostáváme $x'(y) = 1/y'(x(y))$. Inverzní neznámá $x(y)$ proto splňuje

$$\frac{dx}{dy}(y) = \frac{1}{a\sqrt{2(\cos(y) - \cos(y_0))}}.$$

Perioda kyvu kyvadla T je čtyřnásobek času mezi polohou $y = 0$ a rozkmitem $y_0 \in (0, \pi)$. Získáme ji integrací

$$T = 4 \frac{1}{a\sqrt{2}} \int_0^{y_0} \frac{dy}{\sqrt{\cos(y) - \cos(y_0)}} = 4 \left(\frac{\ell}{2g} \right)^{1/2} \int_0^{y_0} \frac{dy}{\sqrt{\cos(y) - \cos(y_0)}}.$$

Jde o tzv. eliptický integrál, primitivní funkci nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí. Pro zvětšující se počáteční výchylku se perioda kyvu prodlužuje, pro $y_0 \rightarrow \pi -$ čas T roste do nekonečna.

Tlumené kmity kyvadla

Uvažujme kyvadlo pohybující se v prostředí, které brzdí pohyb kyvadla, např. kyvadlo ponořené v kapalině. Tlumení pohyb brzdí, tlumící síla T_t je orientována proti směru pohybu. Předpokládejme, že tlumící síla je přímo úměrná rychlosti $y'(x)$ pohybu, tj. $T_t(x) = -b y'(x)$, kde b je kladná konstanta. Dostáváme tak

$$y'' = -a^2 \sin(y) - b y'. \quad (2.7)$$

Příklad 2.5. Určete typ singulárních bodů rovnice (2.7) kyvadla s tlumením.

Řešení: Rovnice $f(y, 0) = -\sin(y) = 0$ dává opět singulární body $\mathbf{y}_n^* = (y_n^*, 0)$, kde $y_n^* = n\pi$ pro celá $n \in \mathbb{Z}$ jako v případě rovnice bez tlumení. Příslušný charakteristický polynom podle (1.7) je

$$P(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + a^2 \cos(y^*).$$

Rozlišíme základní dva případy: n sudé a n liché, které vedou na kvadratický polynom se záporným a kladným diskriminantem $D = b^2 - 4a^2 \cos(y^*)$.

Případ $n = 2k + 1$ liché. Singulární bod $\mathbf{y}^* = (2k\pi + \pi, 0)$ odpovídá situaci, kdy kyvadlo „stojí“ v labilní poloze nad osou otáčení. Protože $\cos(y^*) = -1$, charakteristický polynom $P(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda - a^2$ má kladný diskriminant $D = b^2 + 4a^2$ a dva reálné kořeny $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-b \pm \sqrt{D})$. Protože $\sqrt{D} > b$, kořeny mají opačná znaménka a singulární bod je opět *sedlo* jako v případě kmitů bez tlumení.

Případ $n = 2k$ sudé. Singulární bod $\mathbf{y}^* = (2k\pi, 0)$ odpovídá situaci, kdy kyvadlo „visí“ ve stabilní poloze pod osou otáčení. Protože $\cos(y^*) = 1$, charakteristický polynom $P(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + a^2$ má diskriminant $D = b^2 - 4a^2$. V závislosti na velikosti tlumení určeném parametrem b rozlišujeme tři případy podle znaménka diskriminantu D :

(a) $D = b^2 - 4a^2$ je záporný, tj. $b < 2a$. Potom charakteristický polynom má dvojici komplexně sdružených kořenů $\lambda_{1,2} = -b/2 \pm i\nu$, kde $\nu = \sqrt{a^2 - b^2/4}$, se zápornou reálnou částí. Podle Věty 1.5 singulární bod je *atraktivní ohnisko*. V okolí singulárního bodu trajektorie obecného řešení linearizované rovnice

$$y(x) = 2k\pi + [c_1 \cos(\nu x) + c_2 \sin(\nu x)] e^{-bx/2}$$

mají tvar spirál, které se blíží k bodu $\mathbf{y}^* = (n\pi, 0)$, přičemž nekonečně mnohokrát obíhají bod \mathbf{y}^* ve směru pohybu hodinových ručiček, viz Obr.5.

Hodnota ν , která určuje dobu oscilací pomocí (2.4), je menší než a , a proto perioda tlumeného kyvu $T_b = 2\pi/\nu$ je delší než v netlumeném případě. Pro $b \rightarrow 0+$

platí $\nu \rightarrow a$ a perioda T_b klesá k periodě T netlumeného kmitu. Tato situace se nazývá *podkritické tlumení*, také *podtlumené* nebo *kvaziperiodické* kmitání.

(b) Diskriminant $D = b^2 - 4a^2$ je nulový, tj. $b = 2a$. Potom charakteristický polynom má dvojnásobný záporný kořen $\lambda_{1,2} = -a$ a podle Věty 1.5 singulární bod je *atraktivní uzel*. V okolí singulárního bodu $\mathbf{y}^* = (2k\pi, 0)$ je obecné řešení linearizované rovnice

$$y(x) = 2k\pi + (c_1 + c_2x)e^{-ax}.$$

Trajektorie řešení $y(x)$ s $c_2 = 0$ jsou polopřímky $y' = 2k\pi - ay$ orientované pro $x \rightarrow \infty$ k singulárnímu bodu. Jak vypadají ostatní trajektorie v okolí singulárního bodu? Trajektorie nad přímkou $y = 2k\pi - ax$ nad osou y jdou JV směrem, osu y protínají J směrem a stáčí se doprava, k singulárnímu bodu se blíží ve směru $(-1, a)$. Trajektorie pod přímkou $y = 2k\pi - ax$ pod osou y jdou SZ směrem, osu y protínají S směrem, stáčí se doprava s k singulárnímu bodu přicházejí ve směru se směrnicí $(1, -a)$, viz Obr. 6. Situace se nazývá *kritické tlumení*.

(c) $D = b^2 - 4a^2 > 0$, tj. $b > 2a$. Potom charakteristický polynom má dva různé záporné kořeny $\lambda_{1,2} = -b/2 \pm \nu$, kde $\nu = \sqrt{D}/2 = \sqrt{b^2/4 - a^2}$. Podle Věty 1.5 singulární bod je opět *atraktivní uzel*. V okolí bodu $\mathbf{y}^* = (2k\pi, 0)$ máme

$$y(x) = 2k\pi + c_1 e^{(-b/2+\nu)x} + c_2 e^{(-b/2-\nu)x},$$

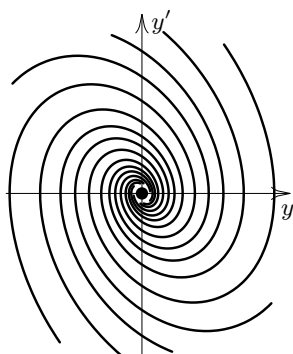
kteří dává dvě dvojice trajektorií tvaru polopřímek se směrnicemi $-b/2 \pm \nu$. Ostatní trajektorie se blíží k singulárnímu řešení s tečným vektorem $\pm(1, -b/2+\nu)$. Situace se nazývá *nadkritické tlumení*. \square

Poznámka 2.6. Uvažujme nyní pohyb kyvadla s počátečními podmínkami blízkými singulárním bodům $(2k\pi, 0)$. Co plyne z výše odvozených vzorců?

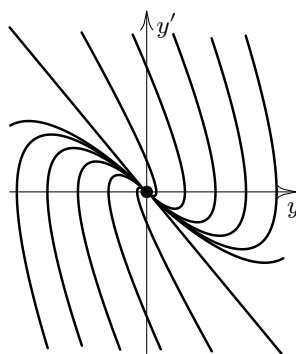
- Ve všech případech s časem $x \rightarrow \infty$ výchylka kyvadla konverguje k $2k\pi$. Ale tato limita bude dosažena až v „nekonečném čase“. Jaký je rozdíl mezi jednotlivými případy? V podtlumeném případě kyvadlo prochází nulovou polohou nekonečně mnohokrát s periodou trochu delší než v netlumeném případě. V případě kritického i nadkritického tlumení kyvadlo už přejde limitní polohou $2k\pi$ nejvýše jednou a potom už jen klesá k ní.
- Ve kterém případě tlumení klesá výchylka nejrychleji? Poznáme to podle exponenciální části řešení, tj. podle exponentu μ exponenciálního členu $e^{-\mu x}$ řešení. V podkritickém případě je $\mu = b/2$, přičemž $\mu < a$. V kritickém případě je $\mu = b/2 = a$. V nadkritickém případě je řešení součtem dvou exponenciálních funkcí kromě případu $c_i = 0$. Rychlost určuje k nule pomaleji jdoucí exponenciála $e^{-\mu x}$ s $\mu = b/2 - \sqrt{b^2/4 - a^2}$, což je pomalejší exponenciální funkce, než v případě kritického tlumení. Je to překvapivý fakt, že zvýšení tlumící síly nad kritickou hodnotu tlumení kmitů zpomalí.
- Porovnejme konkrétní příklady s konstantou $a = 1.2$ (stejnou jako v netlumeném případě, Příklad 2.2) a různým stupněm tlumení $\alpha = b/a$: s nulovým $\alpha = 0$, podkritickým $\alpha < 2$, kritickým $\alpha = 2$ a nadkritickým $\alpha > 2$ stupněm tlumením α a sledujme rychlost kmitání a amplitudu kmitů.

- *Netlumené kmity*: $\alpha = 0$, $b = 0$. Diskriminant $D = -4a^2 = -2,4^2$. Perioda malých kmitů je $T_0 = 2\pi/a = 2\pi/1,2 = 5,236$, amplituda kmitů se nemění.
 - *Podtlumené kmity*: $\alpha = 0,56$, $b = \alpha a = 0,672$. Diskriminant má hodnotu $D = b^2 - 4a^2 = -2,304^2$, $\lambda_{1,2} = -0,336 \pm i1,152$. Perioda malých kmitů je $T = 2\pi/\nu = 2\pi/1,152 = 5,454$. Amplituda oscilací řešení klesá jako $e^{-0,336x}$, viz Obr. 5.
 - *Kritické tlumení*: $\alpha = 2$, $b = \alpha a = 2,4$. Diskriminant je $D = 0$, kořeny $\lambda_{1,2} = -1,2$. Výchylka klesá jako $e^{-1,2x}$, viz Obr. 6.
 - *Nadkritické tlumení*: $\alpha = 2,5$, $b = \alpha a = 3$. Diskriminant $D = b^2 - 4a^2 = 1,8^2$, $\lambda_1 = -0,6$, $\lambda_2 = -2,4$. Výchylka klesá jako $e^{-0,6x}$, viz Obr. 7. Všimněte si dva páry polopřímek: jedné strmější – to je to výjimečné „nejrychlejší“ tlumení, a druhé pozvolnější, ke které se všech ostatní „zakřivené“ trajektorie blíží – ty znázorňují to nadkritické tlumení, které je „pomalejší“ než menší tlumení kritické.
- (d) Obrázky 5–7 zobrazují trajektorie linearizované rovnice, která modeluje přibližné trajektorie nelineární rovnice v okolí singulárního bodu. Všechny trajektorie jsou orientovány do počátku, orientace však není vyznačena.
- (e) V celém fázovém prostoru trajektorie úplných řešení nelineární rovnice s tlumením začínající vlevo nad osou y jdou doprava, mají tvar „vln“ z Obr. 4, ale klesajících do okamžiku, kdy protnou osu y , a začnou se blížit k singulárnímu bodu jedním ze způsobů popsaným v Příkladě 2.5 body (a)–(c).

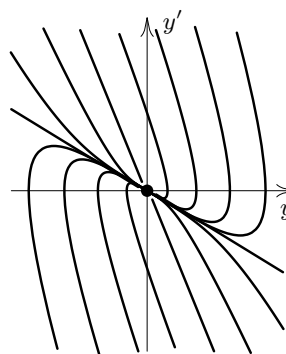
Trajektorie začínajících vpravo pod osou y jdou zprava doleva ve tvaru rostoucích „vln“ z Obr. 4 až do okamžiku, kdy protnou osu y . Tlumené kyvadlo tedy rotuje v kladném nebo záporném směru až do okamžiku, kdy už horní polohu nepřekoná a začne se „kývat tam a zpět“ se zmenšujícím se rozkmitem, jeho trajektorie obíhá singulární bod. V případě kritického a nadkritického tlumení trajektorie singulární bod „neobíhá“.



Obrázek 5. Podkritické tlumení ($a = 1,2$, $b = 0,672$).



Obrázek 6. Kritické tlumení ($a = 1,2$, $b = 2,4$).



Obrázek 7. Nadkritické tlumení ($a = 1,2$, $b = 3$).

3. PŘÍKLADY Z POPULAČNÍ BIOLOGIE

Spojité matematické modely v biologii, popisující vývoj populací vedou, viz [4], na rovnice a soustavy obyčejných diferenciálních rovnic. Pokud se vnější podmínky v čase nemění, rovnice i soustavy jsou autonomní. Uvedeme několik příkladů.

Naproti předchozímu fyzikálnímu jevu matematického a fyzického kyvadla, který je ve své idealizované podobě zcela přesný, modely v biologii přinášejí řadu aproximací: jedince tvořící populaci považujeme za identické: nerozlišujeme jejich věk, pohlaví, velikost ani jiné individuální charakteristiky. Jejich počet, což je ve skutečnosti nezáporné celé číslo, nahrazujeme nezáporným reálným číslem, v reálné populaci přírůstek nastává s jistým časovým zpožděním, atd.

Přes tato a další zjednodušení, modely dávají zajímavé výsledky, které vysvětlují některé skutečnosti. Omezíme se jen na deterministické modely.

Modely dynamiky jedné populace

Místo označení užívaného v matematické biologii zachováme naše označení z ODR z předchozích částí s nezávislou proměnnou x , která hraje roli času, a závislou proměnnou y , která popisuje počet jedinců v čase x . Bude to nezáporná reálná funkce $y(x)$. Vývoj počtu populace bude záviset jen na velikosti populace a nebude záviset přímo na času x . Obecný model tak vede na autonomní diferenciální rovnici prvního řádu

$$y' = f(y) = \mu(y)y, \quad y(0) = y_0 \geq 0$$

s *parametrem růstu* $\mu(y)$, který udává počet $\mu\Delta x$ nově vzniklých jedinců na každého jedince za časový úsek Δx . V nejstarším *Malthusově modelu* $y' = ay$ je parametr růstu konstantní $\mu(y) = a$; parametr a je rozdíl *porodnosti* a *úmrtnosti*, tj. rozdíl počtu narozených a zemřelých vztahený na jednoho jedince a jednotku času. Úloha má jediné řešení $y(x) = y_0 e^{ax}$. Podle tohoto modelu pro kladné a počet jedinců roste exponenciálně do nekonečna.

Model odpovídá skutečnosti jen v situaci, kdy počet jedinců je malý a zdroje potravy jsou dostatečné. Kromě nulového řešení všechna řešení jsou rostoucí, nulové řešení $y(x) = 0$ je tedy *neatraktivní uzel*. Doplňme, že pro $a = 0$ je počet jedinců konstantní a pro $a < 0$ populace vymírá, nulové řešení je *atraktivní uzel*.

Protože v reálném světě zdroje potravy jsou omezené, při zvětšování množství jedinců y nastává snižování parametru růstu. Lineární závislost dává $\mu(y) = a - by$. K parametru růstu a jsme přidali parametr b zvaný *zpomalení růstu*. Rovnice

$$y' = (a - by)y$$

s kladnými parametry a, b vedle řešení $y(x) = 0$, které dává *neatraktivní uzel*, má také konstantní řešení $y(x) = y^* = a/b$. Je to „rovnovážný“ počet jedinců: pro počáteční podmínku $y(0) < y^*$ řešení $y(x)$ stoupá k y^* a pro $y(0) > y^*$ řešení $y(x)$ klesá k y^* . Trajektorie singulárního řešení $y(x) = y^*$ je *atraktivní uzel*, protože všechna nenulová řešení se blíží k rovnovážnému a „udržitelnému“ řešení y^* .

Modely dvou populací

Uvažujme dvě různé populace obývající stejný prostor. Počet jejich jedinců v čase x budou popisovat dvě nezáporné reálné funkce $y_1(x)$, $y_2(x)$, přičemž vývoj jejich počtu bude záviset jen na okamžitém počtu jedinců obou populací. Model vede na autonomní soustavu dvou obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu

$$y_1' = f_1(y_1, y_2) = \mu_1(y_1, y_2)y_1, \quad y_2' = f_2(y_1, y_2) = \mu_2(y_1, y_2)y_2$$

se spojitými funkcemi $\mu_1(y_1, y_2)$, $\mu_2(y_1, y_2)$. Soustavu doplníme počátečními podmínkami $y_1(x_0) = \gamma_1$, $y_2(x_0) = \gamma_2$, kde $\gamma_i \geq 0$, obvykle předpokládáme, že γ_i jsou kladné. Pro jednoduchost místo obecných spojitých funkcí μ_1 , μ_2 se obvykle uvažují jednoduché lineární závislosti s konstantními parametry, které popisují jednotlivé vlivy. K rovnicím $y_i' = (a_i - b_i y_i)y_i$ přidáme členy $c_i y_1 y_2$ popisující vliv druhé populace:

$$y_1' = (a_1 - b_1 y_1 + c_1 y_2)y_1, \quad y_2' = (a_2 - b_2 y_2 + c_2 y_1)y_2. \quad (3.1)$$

Pro $c_1 > 0$ populace y_2 zvyšuje růst populace y_1 , zatímco pro $c_1 < 0$ populace y_2 snižuje růst populace y_1 . Význam parametru c_2 je analogický.

Podle znamének parametrů c_1 , c_2 rozlišíme tři základní situace:

- (A) oba parametry c_1 , c_2 jsou kladné, jde o případ *mutualismu*, také *symbiózy*, kdy se obě populace navzájem podporují,
- (B) oba parametry c_1 , c_2 jsou záporné, jde o *konkurenci*, kdy populace mezi sebou o potravu soutěží,
- (C) parametry c_1 , c_2 mají opačná znaménka: $c_1 < 0$, $c_2 > 0$ jde o *predaci*, kdy *predátor* y_2 se živí *kořistí* y_1 . V případě $c_1 > 0$, $c_2 < 0$ jde jen o výměnu rolí.

Pomocné výsledky

Při zkoumání trajektorií budeme využívat pojem *nulkliny*, viz [4]. V našem případě dvou proměnných *první nulklina* je množina bodů ve fázovém prostoru, ve kterých je první složka tečného vektoru (y_1', y_2') řešení nulová, tj. $y_1' = 0$. Jsou to tedy body fázového prostoru splňující $f_1(y_1, y_2) = 0$. V těchto bodech je tečna řešení rovnoběžná s osou y_2 . Analogicky *druhou nulklinu* tvoří body fázového prostoru, ve kterých je druhá složka tečného vektoru nulová, tj. $y_2' = 0$. Jsou to body, kde $f_2(y_1, y_2) = 0$, v těchto bodech má tečný vektor směr osy y_1 . Singulární body jsou průsečíky nulklin prvního a druhého druhu.

Typ singulárního bodu nelineární soustavy diferenciálních rovnic určíme pomocí kořenů charakteristického polynomu příslušné *linearizované soustavy* v tomto bodě vztahy (1.4)–(1.5). Pokud tyto kořeny mají nenulovou reálnou část, jsou nenulové i v okolí a řešení nelineární a linearizované rovnice mají stejný charakter.

Charakteristický polynom (1.6) má tvar

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + \det(A), \quad (3.2)$$

kde $\text{Tr}(A) = A_{11} + A_{22}$ je *stopa* matice A a $\det(A) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$ je *determinant* matice $A = (A_{ij})$ parciálních derivací $(\partial f_i / \partial y_j)$.

Teorie kvadratických rovnic dává následující tvrzení, které nám umožní určit typ kořenů reálného polynomu (3.2) a pomocí Věty 1.5 typ singulárního bodu.

Věta 3.1 (Kořeny kvadratického polynomu). *Uvažujme kvadratický polynom $P(\lambda) = \lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + \det(A)$ a jeho diskriminant*

$$D = (\text{Tr}(A))^2 - 4\det(A) = (A_{11} - A_{22})^2 + 4A_{12}A_{21}. \quad (3.3)$$

Potom platí:

- (a) *Kořeny λ_1, λ_2 splňují rovnosti $\text{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$ a $\det(A) = \lambda_1\lambda_2$.*
- (b) *Pokud $\det(A) < 0$, diskriminant D je kladný a polynom má dva reálné nenulové kořeny λ_1, λ_2 s opačnými znaménky.*
- (c) *Pokud $\det(A) \geq 0$ a diskriminant $D \geq 0$, polynom má dva reálné kořeny ne nutně různé. Jestliže $\text{Tr}(A) > 0$, kořeny jsou kladné. Jestliže $\text{Tr}(A) < 0$, kořeny jsou záporné.*
- (d) *Pokud $\det(A) \geq 0$ a $D < 0$, polynom má dva komplexně sdružené kořeny.*

Zkoumejme soustavu rovnic (3.1). Předpokládejme, že parametry a_i, b_i, c_i jsou nenulové. Rovnice $f_1(y_1, y_2) \equiv y_1(a_1 - b_1y_1 + c_1y_2) = 0$ dává dvě první nulkliny

$$y_1 = 0, \quad a_1 - b_1y_1 + c_1y_2 = 0.$$

Je to osa y_2 a přímka p_2 s ní různoběžná.

Rovnice $f_2(y_1, y_2) \equiv y_2(a_2 - b_2y_2 + c_2y_1) = 0$ dává dvě druhé nulkliny

$$y_2 = 0, \quad a_2 - b_2y_2 + c_2y_1 = 0.$$

Je to osa y_1 a přímka p_1 s ní různoběžná. Průsečíky prvních nulklin s druhými jsou singulární body. Jsou to vždy tři body $S_0 = (0, 0)$, $S_1 = (a_1/b_1, 0)$, $S_2 = (0, a_2/b_2)$. Pokud „šikmé“ nulkliny nejsou rovnoběžné, tj. $d = b_1b_2 - c_1c_2 \neq 0$, jejich průsečík je čtvrtý singulární bod, který označíme S_{12} . Jednoduchý výpočet dává

$$S_{12} = (y_1^*, y_2^*) = \left(\frac{a_1b_2 + a_2c_1}{b_1b_2 - c_1c_2}, \frac{a_2b_1 + a_1c_2}{b_1b_2 - c_1c_2} \right) \equiv \left(\frac{B_1}{d}, \frac{B_2}{d} \right), \quad (3.4)$$

kde

$$d = b_1b_2 - c_1c_2, \quad B_1 = a_1b_2 + a_2c_1, \quad B_2 = a_2b_1 + a_1c_2.$$

Záleží ještě na tom, zda průsečík S_{12} leží v prvním kvadrantu.

Vyčíslíme nyní parametry linearizované soustavy v singulárních bodech. Matice A koeficientů (1.5) linearizované soustavy v případě (1.4) má složky

$$A_{11} = a_1 - 2b_1y_1^* + c_1y_2^*, \quad A_{12} = c_1y_1^*, \quad A_{21} = c_2y_2^*, \quad A_{22} = a_2 + c_2y_1^* - 2b_2y_2^*.$$

V bodě $S_0 = (0, 0)$ platí $A_{11} = a_1$, $A_{12} = A_{21} = 0$, $A_{22} = a_2$. Charakteristický polynom

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (a_1 + a_2)\lambda + a_1a_2 \quad (3.5)$$

má dva ne nutně různé reálné kořeny a_1, a_2 . Podle Věty 1.5 je S_0 *neatraktivní uzel*.

V bodě $S_1 = (a_1/b_1, 0)$ čísla A_{ij} jsou $A_{11} = -a_1$, $A_{12} = a_1c_1/b_1$, $A_{21} = 0$, $A_{22} = a_2 + a_1c_2/b_1$. Charakteristický polynom $P(\lambda)$ a jeho diskriminant D je

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \left(\frac{B_2}{b_1} - a_1 \right) \lambda - a_1 \frac{B_2}{b_1}, \quad D = \left(\frac{B_2}{b_1} + a_1 \right)^2. \quad (3.6)$$

Podobně v bodě $S_2 = (0, a_2/b_2)$ je $A_{11} = a_1 + a_2c_1/b_2$, $A_{12} = 0$, $A_{21} = a_2c_2/b_2$, $A_{22} = -a_2$ a charakteristický polynom $P(\lambda)$ a jeho diskriminant D vyjde

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \left(\frac{B_1}{b_2} - a_2\right)\lambda - a_2\frac{B_1}{b_2}, \quad D = \left(\frac{B_1}{b_2} + a_2\right)^2. \quad (3.7)$$

Pokud $d = b_1b_2 - c_1c_2 \neq 0$, existuje i čtvrtý singulární bod $S_{12} = (B_1/d, B_2/d)$. Spočítejme koeficienty matice A v tomto singulárním bodu

$$A_{11} = -\frac{b_1B_1}{d}, \quad A_{12} = \frac{c_1B_1}{d}, \quad A_{21} = \frac{c_2B_2}{d}, \quad A_{22} = -\frac{b_2B_2}{d}.$$

Koeficienty dávají charakteristický polynom $P(\lambda)$ a jeho diskriminant D

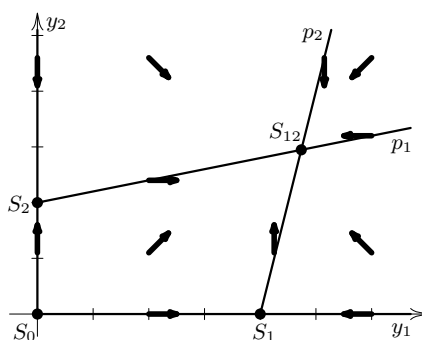
$$P(\lambda) = \lambda^2 + \frac{b_1B_1 + b_2B_2}{d}\lambda + \frac{B_1B_2}{d}, \quad D = \frac{(b_1B_1 - b_2B_2)^2}{d^2} + 4\frac{c_1c_2B_1B_2}{d^2}. \quad (3.8)$$

Proberme jednotlivé případy podle znamének c_1 , c_2 , které určují situaci.

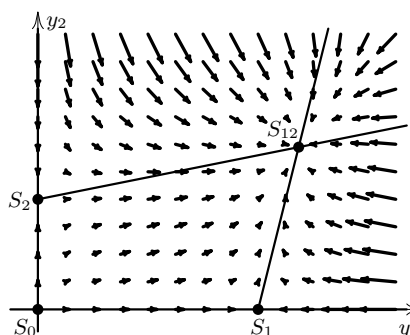
(A) Mutualismus, symbióza – kladné c_1, c_2

Nechť všechny parametry $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ jsou kladné. Potom B_1, B_2 jsou také kladné. Navíc předpokládejme, že $d = b_1b_2 - c_1c_2$ je kladné. Kdyby d bylo záporné, „šikmé“ nulkliny by se neprotínaly v prvním kvadrantu a obě populace by v limitě rostly nade všechny meze, což by vedlo k destrukci prostředí a následnému vyhytnutí obou populací. Z předchozího víme, že první nulkliny $y'_1 = 0$ jsou dvě přímky: $y_1 = 0$, tj. osa y_2 , a přímka $p_2: a_1 - b_1y_1 + c_1y_2 = 0$, která vychází ze singulárního bodu $S_1 = (a_1/b_1, 0)$ s kladnou směrnici b_1/c_1 , viz Obr. 8.

V bodech prvního kvadrantu mezi polopřímkami y_2 a p_2 je hodnota funkce $y'_1 = f_1(y_1, y_2)$ kladná, proto první složka y'_1 tečného vektoru je kladná. V bodech vpravo od pravé nulkliny p_2 je první složka tečného vektoru záporná.



Obrázek 8. Symbióza: nulkliny a singulární body ($a_1 = 4$, $b_1 = 1$, $c_1 = 0,25$, $a_2 = 2$, $b_2 = 1$, $c_2 = 0,2$).



Obrázek 9. Symbióza: tečné vektory trajektorií ($a_1 = 4$, $b_1 = 1$, $c_1 = 0,25$, $a_2 = 2, b_2 = 1$, $c_2 = 0,2$).

Analogicky vyšetříme druhé nulkliny $y'_2 = 0$. Jsou to opět dvě přímky: $y_2 = 0$, tj. osa y_1 a přímka $p_1: a_2 - b_2y_2 + c_2y_1 = 0$ vycházející ze bodu $S_2 = (0, a_2/b_2)$ s kladnou směrnici c_2/b_2 , viz Obr. 8. V bodech prvního kvadrantu mezi oběma

přímkami je hodnota $y_2' = f_2(y_1, y_2)$ kladná, proto druhá složka tečného vektoru y_2' je kladná, a v bodech nad horní nulklínou je složka tečného vektoru záporná.

Protože $d > 0$, „šikmé“ nulklíny, přímky p_1, p_2 , se protínají v prvním kvadrantu v bodě S_{12} a rozdělují tak první kvadrant na čtyři oblasti. Podle znamének složek tečného vektoru v Obr. 8 je zakreslena „orientace“ tečných vektorů, tj. ve kterém kvadrantu nebo na které poloose je tečný vektor, protože v jednotlivých oblastech a na nulklínách je tato orientace konstantní. V Obr. 9 jsou zakresleny skutečné tečné vektory. Podle Věty 1.5 a podseky *Pomocné výsledky* v souladu s Obr. 8, 9 bod S_0 je *neatraktivní uzel*, body S_1, S_2 *sedla* a S_{12} *atraktivní uzel*.

Všimněte si efektu symbiózy: singulární bod S_{12} přitahuje všechna řešení (kromě poloos y_1, y_2) a dává vyšší „rovnovážné hodnoty“ pro obě populace, než jsou rovnovážné hodnoty a_i/b_i u obou populací bez vzájemného vlivu. Tento stav je proto stabilní a „udržitelný“. Je to *atraktivní uzel*.

(B) Konkurence — záporné c_1, c_2

Nechť všechny parametry a_1, a_2, b_1, b_2 jsou kladné a parametry c_1, c_2 záporné. Stejně jako v případě symbiózy první nulklíny $y_1' = 0$ jsou dvě přímky: $y_1 = 0$, tj. osa y_2 , a „šikmá“ přímka $p_2: a_1 - b_1y_1 + c_1y_2 = 0$, která vychází ze singulárního bodu $S_1 = (a_1/b_1, 0)$ se zápornou směrnici $b_1/c_1 < 0$. Druhé nulklíny $y_2' = 0$ jsou také dvě přímky: $y_2 = 0$, tj. osa y_1 a „šikmá“ přímka $p_1: a_2 - b_2y_2 + c_2y_1 = 0$, která vychází ze singulárního bodu $S_2 = (0, a_2/b_2)$ se zápornou směrnici $c_2/b_2 < 0$.

V případě konkurence se první nulklíny navíc protínají v prvním kvadrantu na kladné poloose y_2 v průsečíku $P_1 = (0, -a_1/c_1)$ a druhé nulklíny se protínají na kladné poloose y_1 v bodě $P_2 = (-a_2/c_2, 0)$. Pozor, tyto průsečíky ovšem nejsou singulárními body, protínají se zde dvě první nebo dvě druhé nulklíny. Navíc, pokud koeficient $d = b_1b_2 - c_1c_2$ je nenulový, šikmé nulklíny se protínají.

Jaké je pořadí bodů S_1 a P_2 na poloose y_1 ? Jestliže $B_2 = a_2b_1 + a_1c_2 > 0$, potom $a_2b_1 > -a_1c_2 > 0$, odkud plyne $-a_2/c_2 > a_1/b_1$, tedy průsečík P_2 leží vpravo za singulárním bodem S_1 . V opačném případě $B_2 < 0$ průsečík P_2 leží vlevo před S_1 . Podobně v případě $B_1 = a_1b_2 + a_2c_1 > 0$ na poloose y_2 průsečík P_1 leží nad bodem S_2 , pro $B_1 < 0$ bod P_1 leží pod bodem S_2 . V případě $B_1 = 0$ nebo $B_2 = 0$ body P_1, S_2 nebo P_2, S_1 splývají.

Rozlišíme jednotlivé situace podle znamének parametrů B_1, B_2 .

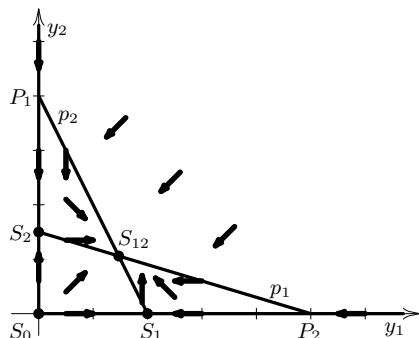
(Ba) „Slabá konkurence“ – kladné B_1, B_2

V tomto případě na poloose y_1 bod P_2 leží za bodem S_1 a na poloose y_2 bod P_1 leží nad bodem S_2 , viz Obr. 10.

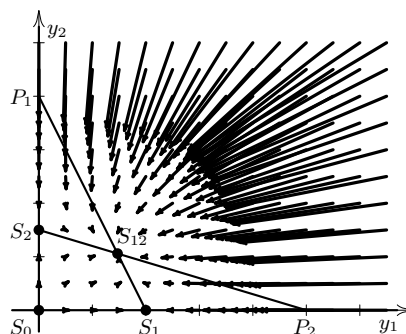
Jaké je d ? Z podmínky $B_1 > 0$ plyne $b_2/a_2 > -c_1/a_1 > 0$, podmínka $B_2 > 0$ dává $b_1/a_1 > -c_2/a_2 > 0$. Součin obou nerovností po vynásobení $a_1a_2 > 0$ dává $b_1b_2 > c_1c_2$, proto $d > 0$. To potvrzuje skutečnost, že průsečík S_{12} , leží v prvním kvadrantu, jeho souřadnice, viz (3.4), jsou kladné.

Nulklíny protínající se v singulárním bodě S_{12} rozdělují první kvadrant na čtyři části. Podle znamének $f_1(y_1, y_2), f_2(y_1, y_2)$ v nich vykreslíme „orientaci“ příslušných tečných vektorů (y_1', y_2') , viz Obr. 10.

Vyšetřeme singulární body. Podle Věty 1.5 a výsledků podsekcce *Pomocné výsledky* v souladu s Obr.10, 11 bod S_0 je *neatraktivní uzel*. Podle (3.6) a (3.7) charakteristické polynomy v bodech S_1 a S_2 mají záporný absolutní člen $\det(A)$, mají proto reálné kořeny s opačnými znaménky a body S_1, S_2 jsou tudíž *sedla*.



Obrázek 10. Slabá konkurence: nulkliny, singulární body ($a_1 = 4, b_1 = 2, c_1 = -1, a_2 = 3, b_2 = 1, c_2 = -0,6$).



Obrázek 11. Slabá konkurence: tečné vektory ($a_1 = 4, b_1 = 2, c_1 = -1, a_2 = 3, b_2 = 1, c_2 = -0,6$).

Ve čtvrtém singulárním bodě S_{12} podle (3.8) je $\det(A) = B_1 B_2 / d$ kladný, diskriminant D kladný a stopa $\text{Tr}(A)$ je záporná. Podle Věty 3.1 kořeny jsou záporné. Podle Věty 1.5 bod S_{12} je *atraktivní uzel*. Pro kontrolu vykresleme směrové vektory v Obr.11, potvrzují typy singulárních bodů.

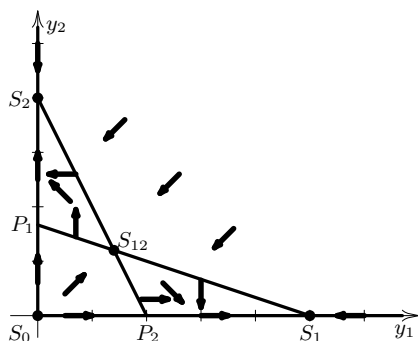
Jaké je hodnocení situace? Všechny trajektorie (kromě bodů na poloosách y_1 a y_2) směřují do atraktivního bodu S_{12} , který dává oběma druhům rovnovážný stabilní stav. Tento stav je sice menší než v případě samotné první nebo druhé populace, ale oba druhy přežívají.

(Bb) „Silná konkurence“ – záporné B_1, B_2

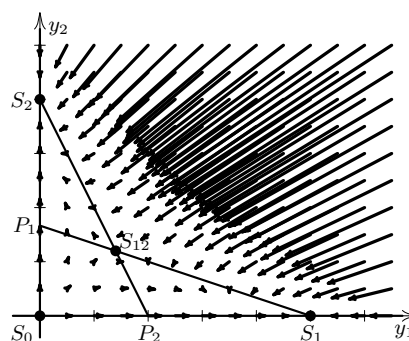
V tomto případě na poloose y_1 bod P_2 leží před bodem S_1 a na poloose y_2 bod P_1 před bodem S_2 , viz Obr. 12. Záporné B_1, B_2 dávají $0 < b_2/a_2 < -c_1/a_1, 0 < b_1/a_1 < -c_2/a_2$, součin nerovností pak $b_1 b_2 < c_1 c_2$. Proto $d < 0$ a v (3.4) souřadnice bodu S_{12} jsou kladné. Nulkliny se protínají v singulárním bodě S_{12} a rozdělují první kvadrant na čtyři části. Podle znamének $f_1(y_1, y_2), f_2(y_1, y_2)$ je v Obr.12 vykreslena orientace příslušných tečných vektorů (y'_1, y'_2) .

Určíme typy singulárních bodů. Z Věty 1.5 s (3.5) plyne, že bod S_0 je *neatraktivní uzel*. Podle (3.6) v bodě S_1 charakteristický polynom (3.6) má díky $B_2 < 0$ zápornou stopu $\text{Tr}(A)$ a nezáporný diskriminant D . Kořeny λ_1, λ_2 jsou proto záporné a podle Věty 1.5 singulární bod S_1 je *atraktivní uzel*. Analogickým výpočtem lze zjistit, že singulární bod S_2 je také *atraktivní uzel*.

V singulárním bodě S_{12} je $\det(A) = B_1 B_2 / d$ záporný, protože B_1, B_2, d jsou záporné. Charakteristický polynom $P(\lambda)$ má kladný diskriminant, viz (3.8). Podle Věty 3.1 polynom $P(\lambda)$ má proto reálné kořeny s opačnými znaménky a Věta 1.5 dává, že singulární bod S_{12} je *sedlo*. Směrové vektory v Obr. 12 to potvrzují.



Obrázek 12. Silná konkurence: nulklíny, singulární body ($a_1 = 5, b_1 = 1, c_1 = -3, a_2 = 4, b_2 = 1, c_2 = -2$).

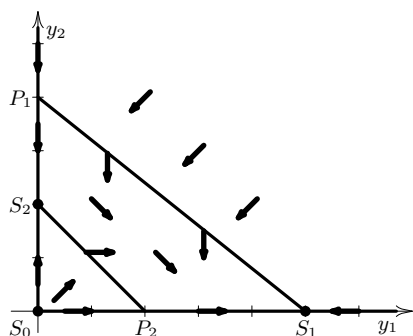


Obrázek 13. Silná konkurence: tečné vektory ($a_1 = 5, b_1 = 1, c_1 = -3, a_2 = 4, b_2 = 1, c_2 = -2$).

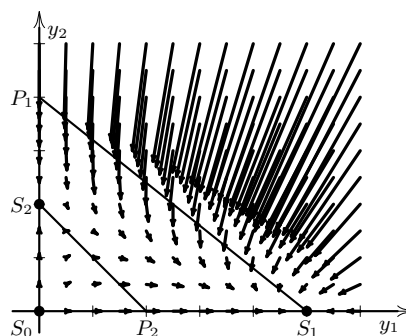
Jaké je hodnocení situace? Narozdíl od slabé konkurence, kdy body S_1 a S_2 byla sedla a S_{12} atraktivní uzel, v případě silné konkurence stavy S_1 a S_2 jsou atraktivní uzly a S_{12} sedlo. Téměř všechny trajektorie proto jdou buď do bodu S_1 nebo S_2 , tedy buď jedna nebo druhá populace vyhyne, záleží na počátečních hodnotách populací.

(Bc) „Dominance“ první populace – B_1 kladné a B_2 záporné

V tomto případě na poloose y_1 bod P_2 leží před bodem S_1 a na poloose y_2 bod P_1 nad bodem S_2 , viz Obr. 14. Nulklíny se v prvním kvadrantu neprotínají, rozdělují ho proto jen na tři části, průsečík S_{12} „šikmých“ nulklin není v prvním kvadrantu nebo neexistuje. Podle znamének hodnot $f_1(y_1, y_2), f_2(y_1, y_2)$ vykresleme v jednotlivých oblastech „orientaci“ tečných vektorů (y'_1, y'_2) , viz Obr. 14.



Obrázek 14. Dominance: nulklíny a singulární body ($a_1 = 5, b_1 = 1, c_1 = -1,25, a_2 = 4, b_2 = 2, c_2 = -2$).



Obrázek 15. Dominance: tečné vektory trajektorií ($a_1 = 5, b_1 = 1, c_1 = -1,25, a_2 = 4, b_2 = 2, c_2 = -2$).

Jakého typu jsou singulární body? Opět (3.5) dává, že bod S_0 je *neatraktivní uzel*. Charakteristický polynom (3.6) má v bodě S_1 díky (3.6) a $B_2 < 0$ zápornou

stopu $\text{Tr}(A)$ a nezáporný diskriminant D . Kořeny λ_1, λ_2 jsou proto záporné a z Věty 1.5 plyne, že singulární bod S_1 je *atraktivní uzel*.

V singulárním bodě $S_2 = (0, a_2/b_2)$ je situace odlišná. Podle (3.7) determinant $\det(A)$ je záporný, a z Věty 3.1 plyne, že polynom $P(\lambda)$ má dva reálné kořeny s opačnými znaménky. Věta 1.5 potom dává, že singulární bod S_2 je *sedlo*.

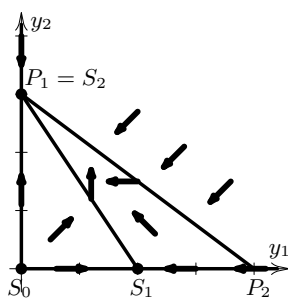
Jaké je hodnocení situace? V tomto případě je situace pro „slabší“ druh ještě horší než v případě silné konkurence. Kromě výjimečné situace $y_1 = 0$, kdy první druh neexistuje, populace y_2 vždy vyhyne. První druh se ustálí na stejné hodnotě, jako v případě, kdy druhý druh neexistuje.

(Bd) „Dominance“ druhé populace – B_1 záporné a B_2 kladné

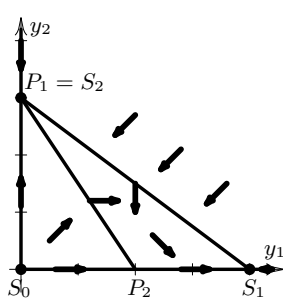
V případě $B_1 < 0$ a $B_2 > 0$ je situace opačná, S_2 je *atraktivní uzel*, S_1 je *sedlo*, první druh vyhyne a druhý se ustálí na hodnotě, jako když první druh neexistuje.

(Be) Mezní situace: B_1 nebo B_2 nulové

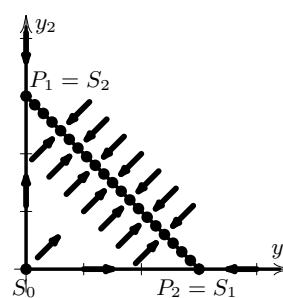
V dalším stručně analyzujeme „mezní situace“, kdy B_1 nebo B_2 je nulové. Opět parametry a_1, a_2, b_1, b_2 jsou kladné a c_1, c_2 záporné. Jestliže $B_1 = a_1 b_2 + a_2 c_1 = 0$, potom $c_1 = -a_1 b_2 / a_2$ body P_1, S_2 a S_{12} splynou. V dalším rozlišíme znaménko B_2 , které určuje, zda průsečík P_2 je před nebo za singulárním bodem S_1 .



Obrázek 16. $B_1 = 0$,
 $B_2 > 0$ ($a_1 = 3, b_1 = 2$,
 $c_1 = -1, a_2 = 3,6, b_2 = 1,2$,
 $c_2 = -1,2$).



Obrázek 17. $B_1 = 0$,
 $B_2 < 0$ ($a_1 = 3, b_1 = 2$,
 $c_1 = -1, a_2 = 3,6, b_2 = 1,2$,
 $c_2 = -1,2$).



Obrázek 18. $B_1 = 0, B_2 = 0$
($a_1 = 3, b_1 = 1, c_1 = -1$,
 $a_2 = 3, b_2 = 1, c_2 = -1$).

- (i) B_1 nulové, B_2 kladné: Protože $B_2 \equiv a_2 b_1 + a_1 c_2 > 0$, průsečík P_2 leží na ose y_1 za singulárním bodem S_1 a soustava má tři singulární body, viz Obr. 16. Bod S_0 je ve všech případech *neatraktivní uzel*, viz (3.5). Podle (3.6) v bodě S_1 charakteristický polynom má dva různé reálné kořeny s opačnými znaménky, bod S_1 je *sedlo* v souladu s Obr. 16.

V bodě S_2 vztah (3.7) dává charakteristický polynom $P(\lambda) = \lambda^2 + a_2 \lambda$, který má nulový a záporný kořen, což v našem případě nelineární soustavy typ bodu nedává. Podle orientace tečných vektorů v okolí izolovaného singulárního bodu S_2 , viz Obr. 16, všechny trajektorie do bodu S_2 směřují, proto bod S_2 je *atraktivní uzel*.

Jaké je hodnocení situace? Narozdíl od případu (Ba) slabé konkurence populace y_1 vyhyne, (kromě případu $y_2 = 0$) stejně jako v případě (Bd) dominance druhé populace.

- (ii) B_1 nulové, B_2 záporné: Protože B_2 je záporné, průsečík P_2 leží před singulárním bodem S_1 , viz Obr. 17. Bod S_0 je neatraktivní uzel. V bodě S_1 charakteristický polynom (3.6) má kladný lineární i absolutní člen, proto má záporné kořeny a bod S_1 je *atraktivní uzel*.

V bodě S_2 vztah (3.7) dává charakteristický polynom $P(\lambda) = \lambda^2 + a_2\lambda$, který má nulový a záporný kořen, což typ bodu nedává. Podle orientace tečných vektorů v jeho okolí, viz Obr. 17, existují trajektorie, které do bodu směřují, i trajektorie, které se od něj vzdalují, bod S_2 je proto *sedlo*.

Jaké je hodnocení situace? V tomto případě populace y_2 vyhyne (kromě případu $y_1 = 0$) stejně jako v případě (Bc) dominance první populace.

- (iii) B_1 i B_2 nulové: V tomto případě také body P_2 a S_1 splynuly, viz Obr. 18. První a druhá šikmá nulklina splynuly, singulární body proto tvoří celou úsečku $\overline{S_1S_2}$. Bod S_0 zůstává neatraktivním uzlem. Podle Obr. 18. všechny trajektorie v okolí všech bodů úsečky $\overline{S_1S_2}$ k singulárním bodům směřují.

Jaké je hodnocení situace? V tomto nestabilním případě se obě populace ustálí v některém bodě úsečky $\overline{S_1S_2}$ v závislosti na počátečním stavu.

- (iv) B_2 nulové: Záměnou populací y_1 a y_2 pro $B_1 > 0$, dostáváme případ (i) a pro $B_1 < 0$ případ (ii) s přehozenými rolemi populací.

(C) Modely predátor - kořist — záporné c_1 a kladné c_2

Tyto modely popisují situaci dvou populací: první y_1 se nazývá kořist, druhá y_2 predátor nebo dravec, která se kořistí živí. Například kořistí je sněžný králík a predátorem rys. Dalšími příklady jsou kapři a štiky v rybníku, losi a vlci.

Predátor se živí kořistí, snižuje populaci kořisti, parametr c_1 je proto záporný. Množství kořisti umožňuje množení predátora, proto parametr c_2 je kladný.

Uvedeme zjednodušený model, který nese jména dvou autorů. Model navrhl Alfred J. Lotka v roce 1910 pro chemické reakce, v roce 1925 model aplikoval na systém predátor-kořist ve své knize o biomatematice. Nezávisle stejné rovnice publikoval Vito Volterra 1926, aby vysvětlil periodické chování počtu vylovených ryb v Jaderském moři. Model byl inspirován periodickým vývojem počtu vykoupných koček sněžných králíků a rysů v severní Kanadě v letech 1845–1935, viz např. [5].

Klasický Lotkûv-Volterrûv model

Model je popsán např. v [4]. Abychom mohli využít pro model výsledky ze subsekcce *Pomocné výsledky*, využijeme označení parametrů z předchozích částí. Pro kořist y_1 necháme parametr a_1 kladný, omezení zdroji potravy zanedbáme, tj. položíme $b_1 = 0$. Predátor se živí kořistí, čímž snižuje populaci kořisti, tj. parametr c_1 je záporný. Predátor bez kořisti vymírá, proto parametr a_2 je záporný. Omezení prostředím zanedbáme, tj. $b_2 = 0$, množství potravy kořisti umožňuje přírůstek

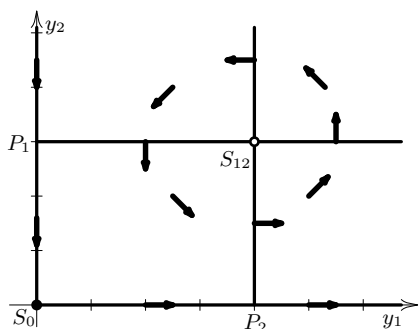
predátora, proto je $c_2 > 0$. Soustava rovnic (3.1) se tedy redukuje na

$$\begin{aligned} y_1' &= a_1 y_1 + c_1 y_1 y_2 = (a_1 + c_1 y_2) y_1, \\ y_2' &= a_2 y_2 + c_2 y_1 y_2 = (a_2 + c_2 y_1) y_2, \end{aligned} \quad (3.9)$$

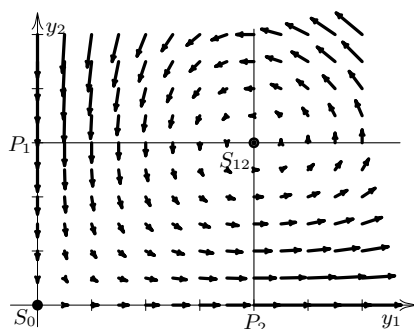
příčemž parametry a_1, c_2 jsou kladné a a_2, c_1 záporné.

První nulkliny jsou dvě na sebe kolmé přímky: $y_1 = 0$, tj. osa y_2 , a přímka $p_2 : a_1 + c_1 y_2 = 0$ vycházející z bodu $(-a_1/c_1, 0)$ kolmá na osu y_1 . Druhé nulkliny jsou také dvě na sebe kolmé přímky: $y_2 = 0$, tj. osa y_1 , a přímka $p_1 : a_2 + c_2 y_1 = 0$ vycházející z bodu $(0, -a_2/c_2)$ kolmá na osu y_2 , viz Obr. 19.

Nulkliny se protínají ve čtyřech bodech: singulární body jsou však pouze dva $S_0 = (0, 0)$, $S_{12} = (-a_2/c_2, -a_1/c_1)$, protože bod $P_1 = (0, -a_1/c_1)$ je průsečík prvních nulklin a bod $P_2 = (-a_2/c_2, 0)$ průsečík druhých nulklin, ne dvou různých nulklin. Nulkliny rozdělují první kvadrant na čtyři části. Vykresleme v Obr. 19 nulkliny a směr tečen trajektorií v příslušných oblastech.



Obrázek 19. Predátor-kořist: nulkliny a body ($a_1 = 3, c_1 = -1, a_2 = -4, c_2 = 1$).



Obrázek 20. Predátor-kořist: tečné vektory ($a_1 = 3, c_1 = -1, a_2 = -4, c_2 = 1$).

Pro určení typu singulárních bodů určíme koeficienty A_{ij} příslušné linearizované rovnice: $A_{11} = a_1 + c_1 y_2^*$, $A_{12} = c_1 y_1^*$, $A_{21} = c_2 y_2^*$, $A_{22} = a_2 + c_2 y_1^*$ a charakteristický polynom nabude tvar

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (a_1 + a_2 + c_1 y_2^* + c_2 y_1^*)\lambda + (a_1 + c_1 y_2^*)(a_2 + c_2 y_1^*).$$

V bodě $S_0 = (0, 0)$ charakteristický polynom $P(\lambda) = \lambda^2 - (a_1 + a_2)\lambda + a_1 a_2$ má kořeny $\lambda_1 = a_1 > 0$, $\lambda_2 = a_2 < 0$, tj. s opačnými znaménky. Podle Věty 1.5 bod S_0 je *sedlo*.

V bodě $S_{12} = (-a_2/c_2, -a_1/c_1)$ je $A_{11} = A_{22} = 0$, což dává $\text{Tr}(A) = 0$. Dále $A_{12} = -c_1 a_2/c_2$, $A_{21} = -c_2 a_1/c_1$ odkud $\det(A) = -A_{12} A_{21} = -a_1 a_2 > 0$. V bodě S_{12} tedy polynom $P(\lambda) = \lambda^2 - a_1 a_2$ má nulovou stopou a záporný diskriminant $D = 4a_1 a_2 < 0$, má tedy dvojici komplexně sdružených kořenů s nulovou reálnou částí. Protože soustava rovnic je nelineární, z Věty 1.5 neplatí, že singulární bod S_{12} je střed. Obecně by se mohlo jednat o ohnisko nebo bod rotace.

V našem případě však lze spočítat trajektorie jako „vrstevnice“ funkce dané vztahem $F(y_1, y_2) = \text{const}$, viz [4]. Z rovnic (3.9) plyne

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{(a_1 + c_1 y_2)y_1}{(a_2 + c_2 y_1)y_2}.$$

V rovnosti proměnné y_1, y_2 lze separovat

$$\left(\frac{a_2}{y_1} + c_2\right) dy_1 = \left(\frac{a_1}{y_2} + c_1\right) dy_2$$

a integrací získáváme $a_2 \ln(y_1) + c_2 y_1 = a_1 \ln(y_2) + c_1 y_2 + \text{const}$, což dává implicitní rovnice pro trajektorie

$$F(y_1, y_2) \equiv a_2 \ln(y_1) + c_2 y_1 - a_1 \ln(y_2) - c_1 y_2 = \text{const}.$$

Funkce F má v bodě $S_{12} = (-a_2/c_2, -a_1/c_1)$ obě první parciální derivace nulové. Protože a_1, c_2 jsou kladné a a_2, c_1 záporné, druhé derivace v bodě S_{12} jsou

$$F''_{y_1 y_1}(S_{12}) = -a_2/y_1^2 > 0, \quad F''_{y_1 y_2}(S_{12}) = 0, \quad F''_{y_2 y_2}(S_{12}) = a_1/y_2^2 > 0.$$

Proto v bodě S_{12} funkce $F(y_1, y_2)$ má ostré lokální minimum. Trajektorie v okolí bodu S_{12} – vrstevnice funkce $F(y_1, y_2)$ – jsou tudíž uzavřené křivky a singulární bod S_{12} je *střed*.

Jaké je hodnocení situace? Pokud je kořist nulová $y_1 = 0$, predátor vyhyne. Pokud neexistuje predátor $y_2 = 0$, kořist se množí neomezeně. V singulárním bodě S_{12} je stav kořisti i predátorů neměnný. Mimo tyto případy jde o periodický jev, vývoj probíhá v cyklu, kdy se postupně periodicky opakují čtyři situace:

- (a) predátorů je málo, kořist se množí,
- (b) kořisti je mnoho, roste počet predátorů,
- (c) predátorů je mnoho, klesá počet kořisti,
- (d) kořisti je málo, klesá počet predátorů.

ZÁVĚREČNÉ POZNÁMKY

Prozkoumali jsme chování matematického kyvadla. Nelineární rovnice přinesla další druhy reálného chování, které linearizovaný model nedokázal popsat. Vyskytly se zde singulární body *střed* a *sedlo*. Přidáním tlumení se singulární bod *střed* změnil na atraktivní ohnisko nebo atraktivní uzel podle velikosti tlumení. Zajímavé je také studovat případy tlumení, které závisejí na rychlosti nelineárně, a které mohou přinést utlumení pohybu v konečném čase.

Kyvadlo je jedním z případů periodických jevů v mechanice. Podobný jev je periodický pohyb kuličky po dráze tvaru písmene U, tj. rovinné křivky v \mathbb{R}^3 dané vztahy $x_3 = \varphi(x_2)$, $x_1 = 0$. Perioda pohybu kuličky po dráze závisí na tvaru dráhy, tj. funkci φ . Obvykle perioda kmitů závisí na velikosti „rozkmitu“, v případě dráhy tvaru cykloidy, tj. funkce hyperbolický kosinus, perioda kmitání na rozkmitu nezávisí, více např. [1].

Modelům populační dynamiky je věnována např. monografie [4]. V případě dvou populací jsme rozlišili tři základní vztahy: symbióza, konkurence a predace. Získali jsme tak singulární body typu atraktivního i neatraktivního uzlu, sedla i středu.

Zajímavým výsledkem je rozlišení tří různých stupňů konkurence. Ve speciálním případě konkurence vzniklo nekonečně mnoho rovnovážných stavů.

Vztah predace jsme uvedli jen v zjednodušeném tvaru. Složitější modely mohou vést i k typu atraktivního ohniska, případně k atraktivnímu cyklu.

REFERENCE

- [1] J. Bajer: *Mechanika 3*, chlupek.net, Olomouc 2012.
- [2] P. Dub: Osobní sdělení.
- [3] J. Franců: *Trajektorie autonomních rovnic v rovině I. Lineární rovnice a soustavy*, Kvaternion, 1–2/2020, 57–78.
- [4] J. Kalas, Z. Pospíšil: *Spojité modely v biologii*, Masarykova univerzita, Brno 2001.
- [5] J. Krempaský a kolektiv: *Synergetika*, Veda, SAV, Bratislava 1988.

Jan Franců, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně,
Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: francu@fme.vutbr.cz