MATEMATICKÉ MODELOVÁNÍ MECHANICKÝCH SOUSTAV

PETR KAMARÝT

ABSTRAKT. Tento článek se zabývá matematickým modelováním mechanických soustav. Jsou odvozeny pohybové rovnice dvojitého kyvadla, dále je analyzován aproximativní systém a některé jeho speciální případy.

1. LAGRANGEOVA FORMULACE KLASICKÉ MECHANIKY

Dříve než odvodíme pohybové rovnice vybrané mechanické soustavy, stručně zmíníme základy Lagrangeovy formulace mechaniky. Z Hamiltonova principu lze odvodit Eulerovy-Lagrangeovy rovnice, které jsou v kartézských souřadnicích ekvivalentní rovnicím získáným z Newtonova druhého pohybového zákona, avšak na rozdíl od nich platí i pro jiné souřadnice. Navíc místo vektorové síly se pracuje se skalární energií. Nejprve definujme některé fyzikální pojmy, které budeme potřebovat; viz [3, 4] pro detaily.

Mechanickou soustavou rozumíme jakoukoliv soustavu částic nebo těles, jejíž pohyb chceme popisovat. V tomto článku se budeme zabývat pouze *nedisipativními soustavami*, tj. soustavami, ve kterých nedochází k tepelným ztrátám, např. třením.

Zobecněnými souřadnicemi nazýváme jakékoliv parametry mechanické soustavy, které popisují její pohyb. Mohou to být vzdálenosti, úhly, aj. Budeme je označovat $q_1, q_2, \ldots$. Zobecněné souřadnice jsou většinou funkcemi času, tj. $q_1 = q_1(t)$, $q_2 = q_2(t)$, atd. Počet nezávislých zobecněných souřadnic, které zcela popisují pohyb mechanické soustavy označíme f. Například pro jednoduché kyvadlo je $f = 1$, pro dvojité kyvadlo je $f = 2$, v případě hmotného bodu v prostoru máme $f = 3$.

Hamiltonův princip (princip nejmenší akce). Trajektorie částice bude taková, pro kterou má funkcionál

$$S(t_A, t_B) = \int_{t_A}^{t_B} L(t, q_1(t), q_2(t), \ldots, q_f(t), \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \ldots, \dot{q}_f(t))\, \mathrm{d}t \tag{1.1}$$

2010 *MSC.* Primární 34A05, 37N05.

Klíčová slova. matematické modelování, mechanické soustavy, dvojité kyvadlo, autonomní systémy ODR.

Článek vznikl na základě bakalářské práce autorky v oboru Matematické inženýrství na FSI VUT v Brně. Vedoucím práce byl Jiří Šremr z Ústavu matematiky FSI VUT v Brně.

minimální (přesněji stacionární) hodnotu. Funkci L nazýváme *Lagrangeovou funkcí* (nebo také *lagrangián*) a integrál $S(t_A, t_B)$ *akce*. Hamiltonův princip tedy říká, že ze všech možných trajektorií částice bude realizována ta, pro kterou je akce nejmenší.

Eulerovy-Lagrangeovy rovnice. Z variačního počtu je známo následující tvrzení. Nechť funkcionál (1.1) nabývá stacionární hodnoty, pak platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}, \quad k = 1, 2, \dots, f. \tag{1.2}$$

Rovnice (1.2) se nazývají *Eulerovy-Lagrangeovy rovnice*. Jedná se o systém f diferenciálních rovnic druhého řádu, k jejich vyřešení stačí zadat $2f$ počátečních podmínek (např. počátečních poloh a rychlostí). Splnění Eulerových–Lagrangeových rovnic je nutnou podmínkou pro stacionaritu funkcionálu (1.1). V mechanice bereme lagrangián tvaru $L = T - V$, kde T je kinetická energie a V je potenciální energie soustavy.

2. Pomocná tvrzení

V této části uvedeme některá pomocná matematická tvrzení, která budou využita v dalších kapitolách. Jejich důkazy lze nalézt v [2].

Tvrzení 2.1. *Nechť* $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ *je reálná matice a* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Pak* λ *je vlastní číslo matice*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

právě tehdy, když λ^2 *je vlastní číslo matice* $\mathbf{B}$.

Věta 2.2. *Nechť* $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ *je reálná matice a* $\lambda \in \mathbb{C}$ *je vlastní číslo matice* $\mathbf{A}$ *dané vztahem* (2.1). *Potom platí:*

1. *Je-li* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$ *vlastní vektor matice* $\mathbf{A}$ *příslušný vlastnímu číslu* λ, *pak* $u_3 = \lambda u_1$, $u_4 = \lambda u_2$ *a* $\mathbf{v} = (u_1, u_2)^T$ *je vlastní vektor matice* $\mathbf{B}$ *příslušný vlastnímu číslu* λ^2.
2. *Je-li* $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$ *vlastní vektor matice* $\mathbf{B}$ *příslušný vlastnímu číslu* λ^2, *pak* $\mathbf{u} = (v_1, v_2, \lambda v_1, \lambda v_2)^T$ *je vlastní vektor matice* $\mathbf{A}$ *příslušný vlastnímu číslu* λ.

Věta 2.3. *Nechť* $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ *je reálná matice a* μ *je jednonásobné vlastní číslo matice* $\mathbf{B}$. *Potom platí:*

1. *Jestliže* $b_{11} - \mu \neq 0$, *pak vlastní vektor matice* $\mathbf{B}$ *je tvaru*

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -\frac{b_{12}}{b_{11}-\mu} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. *Jestliže $b_{22} - \mu \neq 0$, pak vlastní vektor matice* $\mathbf{B}$ *je tvaru*

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{b_{21}}{b_{22}-\mu} \end{pmatrix}.$$

Poznámka 2.4. Všimněme si, že v předešlé větě jsou zahrnuty všechny případy, které mohou pro jednonásobné vlastní číslo μ nastat. Vskutku, jestliže $b_{11} - \mu = 0$ a zároveň $b_{22} - \mu = 0$, pak $b_{12} = 0$ nebo $b_{21} = 0$ a $\mu = b_{11} = b_{22}$, což znamená, že μ nemůže být jednonásobné vlastní číslo.

3. Dvojité kyvadlo

Pro mechanickou soustavu na obrázku 1 lze pomocí postupu uvedeného v první části vcelku snadno odvodit její pohybové rovnice. Uvažujme matematické kyvadlo s délkou závěsu l_1 a hmotností m_1, na jehož konci visí druhé matematické kyvadlo s délkou závěsu l_2 o hmotnosti m_2 (viz obrázek 1). Předpokládejme, že pohyb probíhá pouze v rovině obrázku a že gravitační síla působí v opačném směru než je orientována osa y. Výchylku prvního bodu, respektive druhého bodu ze svislé polohy označíme φ_1, respektive φ_2, přičemž výchylka proti směru hodinových ručiček je kladná – získáme tak dvě zobecněné souřadnice. Najdeme vztahy mezi zobecněnými souřadnicemi φ_1, φ_2 a kartézskými souřadnicemi x_1, y_1, x_2, y_2. Dále určíme kinetickou a potenciální energii soustavy; v kartézských souřadnicích jsou dány výrazy

$$T = \frac{1}{2}\, m_1\big(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\big) + \frac{1}{2}\, m_1\big(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\big)$$

a

$$V = m_1 g y_1 + m_2 g y_2\,.$$

Použijeme transformační vztahy mezi kartézskými a zobecněnými sopuřadnicemi, a získáme tak lagrangián soustavy $L = T - V$. Dosazením do Eulerových-Lagrangeových rovnic (1.2) dostaneme rovnice

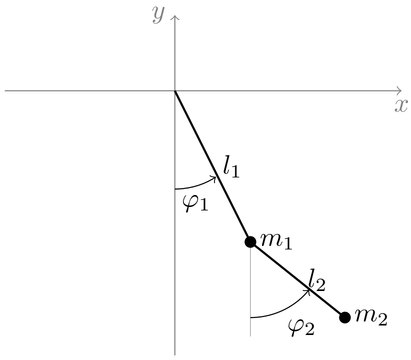
$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi}_1 + \frac{m_2 l_2}{(m_1+m_2)l_1}\, \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \qquad & \\
+ \frac{m_2 l_2}{(m_1+m_2)l_1}\, \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{g}{l_1} \sin\varphi_1 &= 0, \\
l_1 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + l_2 \ddot{\varphi}_2 - l_1 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + g \sin\varphi_2 &= 0.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Jedná se o autonomní systém dvou nelineárních obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu, který popisuje pohyb dvojitého matematického kyvadla.

Aproximací nelinearit[1] systému (3.1) vznikne systém

$$\begin{aligned}
(m_1+m_2) l_1 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_2 \ddot{\varphi}_2 + (m_1+m_2) g \varphi_1 &= 0, \\
l_1 \ddot{\varphi}_1 + l_2 \ddot{\varphi}_2 + g\varphi_2 &= 0.
\end{aligned}$$

[1] Předpokládáme-li malé hodnoty výchylek, pak lze sinus nahradit jeho argumentem, kosinus jedničkou a druhé mocniny prvních derivací lze zanedbat.



Obrázek 1. Dvojité kyvadlo.

Tento systém rovnic je lineární vzhledem k φ_1, φ_2, lze ho tedy zapsat v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{(m_1+m_2)g}{m_1 l_1} & \frac{m_2 g}{m_1 l_1} \\ \frac{(m_1+m_2)g}{m_1 l_2} & -\frac{(m_1+m_2)g}{m_1 l_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}.$$

Označíme-li $\boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$, $\ddot{\boldsymbol{\varphi}} = \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{pmatrix}$ a

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\frac{(m_1+m_2)g}{m_1 l_1} & \frac{m_2 g}{m_1 l_1} \\ \frac{(m_1+m_2)g}{m_1 l_2} & -\frac{(m_1+m_2)g}{m_1 l_2} \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

dostaneme

$$\ddot{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{B}\boldsymbol{\varphi}. \tag{3.3}$$

Přímým výpočtem zjistíme, že vlastní čísla matice $\mathbf{B}$ dané vztahem (3.2) jsou tvaru

$$\mu_{1,2} = -\frac{g}{2m_1 l_1 l_2}\left((m_1+m_2)(l_1+l_2) \pm \sqrt{(m_1+m_2)\big(m_1(l_1-l_2)^2 + m_2(l_1+l_2)^2\big)}\right). \tag{3.4}$$

Odtud je okamžitě vidět, že výraz pod odmocninou je kladný, dostaneme tedy μ_1, μ_2 reálná různá. Dále lze dokázat, že platí $\mu_{1,2} < 0$ (pro důkaz viz [2]) Nyní již můžeme přistoupit k důkazu věty o tvaru obecného řešení systému (3.3).

Věta 3.1. *Obecné řešení systému* (3.3) *lze psát ve tvaru*

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = A_1 \mathbf{v}_1 \sin\big(\sqrt{|\mu_1|}\, t + \alpha_1\big) + A_2 \mathbf{v}_2 \sin\big(\sqrt{|\mu_2|}\, t + \alpha_2\big), \tag{3.5}$$

kde $A_1, A_2 \in \langle 0, \infty)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \langle 0, 2\pi)$,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{m_2 g}{(m_1+m_2)g + \mu_1 m_1 l_1} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{m_2 g}{(m_1+m_2)g + \mu_2 m_1 l_1} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

a μ_1, μ_2 *jsou vlastní čísla matice* $\mathbf{B}$ *daná vztahem* (3.4).

Důkaz. Z teorie obyčejných diferenciálních rovnic víme, že systém (3.3) lze převést[2] na systém čtyř obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu tvaru

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}, \tag{3.7}$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{(m_1+m_2)g}{m_1 l_1} & \frac{m_2 g}{m_1 l_1} & 0 & 0 \\ \frac{(m_1+m_2)g}{m_1 l_2} & -\frac{(m_1+m_2)g}{m_1 l_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Obecné řešení tohoto systému je tvaru

$$\mathbf{y}(t) = C_1\boldsymbol{\psi}_1(t) + C_2\boldsymbol{\psi}_2(t) + C_3\boldsymbol{\psi}_3(t) + C_4\boldsymbol{\psi}_4(t), \tag{3.9}$$

kde funkce $\boldsymbol{\psi}_1$, $\boldsymbol{\psi}_2$, $\boldsymbol{\psi}_3$, $\boldsymbol{\psi}_4$ tvoří fundamentální systém řešení soustavy (3.7) a $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$. Z tvrzení 2.1 a faktu $\mu_{1,2} < 0$ plyne, že matice $\mathbf{A}$ má dvě dvojice komplexně sdružených vlastních čísel $\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}\sqrt{|\mu_1|}$, $\lambda_{3,4} = \pm \mathrm{i}\sqrt{|\mu_2|}$. Z věty 2.2 plyne, že vlastní vektory příslušné těmto vlastním číslům jsou také komplexně sdružené $\mathbf{u}_{1,2} = \mathbf{a}_1 \pm \mathrm{i}\mathbf{b}_1$, $\mathbf{u}_{3,4} = \mathbf{a}_2 \pm \mathrm{i}\mathbf{b}_2$. Získáme tak fundamentální systém řešení systému (3.7) ve tvaru

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}^*_{1,2}(t) &= (\mathbf{a}_1 \pm \mathrm{i}\mathbf{b}_1)\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\sqrt{|\mu_1|}\,t}, \\ \boldsymbol{\psi}^*_{3,4}(t) &= (\mathbf{a}_2 \pm \mathrm{i}\mathbf{b}_2)\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\sqrt{|\mu_2|}\,t}. \end{aligned}$$

Tato řešení upravíme pomocí Eulerova vzorce a obdržíme

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}^*_{1,2}(t) &= (\mathbf{a}_1 \cos\sqrt{|\mu_1|}\,t - \mathbf{b}_1 \sin\sqrt{|\mu_1|}\,t) \pm \mathrm{i}(\mathbf{a}_1 \sin\sqrt{|\mu_1|}\,t + \mathbf{b}_1 \cos\sqrt{|\mu_1|}\,t), \\ \boldsymbol{\psi}^*_{3,4}(t) &= (\mathbf{a}_2 \cos\sqrt{|\mu_2|}\,t - \mathbf{b}_2 \sin\sqrt{|\mu_2|}\,t) \pm \mathrm{i}(\mathbf{a}_2 \sin\sqrt{|\mu_2|}\,t + \mathbf{b}_2 \cos\sqrt{|\mu_2|}\,t). \end{aligned}$$

Nyní vezmeme následující lineární kombinace těchto řešení

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}_1(t) &= \frac{\boldsymbol{\psi}^*_1(t) + \boldsymbol{\psi}^*_2(t)}{2} = \mathbf{a}_1 \cos\sqrt{|\mu_1|}\,t - \mathbf{b}_1 \sin\sqrt{|\mu_1|}\,t, \\ \boldsymbol{\psi}_2(t) &= \frac{\boldsymbol{\psi}^*_1(t) - \boldsymbol{\psi}^*_2(t)}{2i} = \mathbf{a}_1 \sin\sqrt{|\mu_1|}\,t + \mathbf{b}_1 \cos\sqrt{|\mu_1|}\,t, \\ \boldsymbol{\psi}_3(t) &= \frac{\boldsymbol{\psi}^*_3(t) + \boldsymbol{\psi}^*_4(t)}{2} = \mathbf{a}_2 \cos\sqrt{|\mu_2|}\,t - \mathbf{b}_2 \sin\sqrt{|\mu_2|}\,t, \\ \boldsymbol{\psi}_4(t) &= \frac{\boldsymbol{\psi}^*_3(t) - \boldsymbol{\psi}^*_4(t)}{2i} = \mathbf{a}_2 \sin\sqrt{|\mu_2|}\,t + \mathbf{b}_2 \cos\sqrt{|\mu_2|}\,t \end{aligned}$$

a dostaneme tak reálný fundamentální systém řešení systému (3.7). Po dosazení do (3.9) získáme

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) = C_1&\big(\mathbf{a}_1 \cos\sqrt{|\mu_1|}\,t - \mathbf{b}_1 \sin\sqrt{|\mu_1|}\,t\big) + C_2\big(\mathbf{a}_1 \sin\sqrt{|\mu_1|}\,t + \mathbf{b}_1 \cos\sqrt{|\mu_1|}\,t\big) \\ &+ C_3\big(\mathbf{a}_2 \cos\sqrt{|\mu_2|}\,t - \mathbf{b}_2 \sin\sqrt{|\mu_2|}\,t\big) + C_4\big(\mathbf{a}_2 \sin\sqrt{|\mu_2|}\,t + \mathbf{b}_2 \cos\sqrt{|\mu_2|}\,t\big). \end{aligned}$$

Protože ale hledáme řešení systému (3.3), zajímají nás pouze první dvě složky vektorové funkce $\mathbf{y}$. Jelikož jsou vlastní vektory matice $\mathbf{B}$ reálné, podle věty 2.2

[2] Položíme-li $\mathbf{y} = (\varphi, \dot{\varphi})^T$, pak $\dot{\mathbf{y}} = (\dot{\varphi}, \ddot{\varphi})^T = (\dot{\varphi}, \mathbf{B}\varphi)^T = \mathbf{A}\mathbf{y}$.

jsou první dvě složky vektorů $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ nulové. Dále podle této věty první a druhá složka vektorů $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ tvoří vlastní vektory matice $\mathbf{B}$. Obecné řešení systému (3.3) můžeme tedy napsat ve tvaru

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = C_1\mathbf{v}_1 \cos\sqrt{|\mu_1|}\,t + C_2\mathbf{v}_1 \sin\sqrt{|\mu_1|}\,t + C_3\mathbf{v}_2 \cos\sqrt{|\mu_2|}\,t + C_4\mathbf{v}_2 \sin\sqrt{|\mu_2|}\,t,$$

kde $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ jsou vlastní vektory matice $\mathbf{B}$ příslušné vlastním číslům μ_1, μ_2. Nyní stačí položit $C_1 = A_1 \sin\alpha_1$, $C_2 = A_1 \cos\alpha_1$ a $C_3 = A_2 \sin\alpha_2$, $C_4 = A_2 \cos\alpha_2$, upravit pomocí goniometrického vzorce a dostaneme (3.5). Zbývá poznamenat, že vzhledem k větě 2.3 jsou vlastní vektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ tvaru (3.6). □

Poznámka 3.2. Vektor $\boldsymbol{\varphi}$ tedy vznikne složením dvojice anizochronních kmitů[3] s úhlovými frekvencemi $\sqrt{|\mu_1|}$, $\sqrt{|\mu_2|}$ (tzv. oscilačních módů). Obecně se tedy bude jednat o velmi komplikovaný pohyb, který nemusí být periodický. Budou-li úhlové frekvence $\sqrt{|\mu_1|}$, $\sqrt{|\mu_2|}$ soudělné, tj. bude-li platit

$$\frac{\sqrt{|\mu_1|}}{\sqrt{|\mu_2|}} = \frac{n_1}{n_2},$$

kde n_1, n_2 jsou nesoudělná přirozená čísla, pak výsledný pohyb bude periodický s periodou rovnou nejmenšímu společnému násobku jednotlivých period. Výsledný pohyb závisí také na amplitudách a fázích jednotlivých kmitů (viz [1]).

4. Speciální případy

V této části se podíváme na dva speciální případy soustavy, jejíž pohyb je popsaný systémem rovnic (3.3). Nejprve předpokládejme, že $l_1 = l_2 = l$. Z (3.4) a (3.6) plyne, že vlastní čísla matice $\mathbf{B}$ soustavy (3.3) jsou ve tvaru

$$\mu_{1,2} = -\frac{g}{m_1 l}\left(m_1 + m_2 \pm \sqrt{(m_1+m_2)m_2}\right)$$

a odpovídající vlastní vektory jsou násobky vektorů

$$\mathbf{v}_{1,2} = \begin{pmatrix} \mp\sqrt{m_2} \\ \sqrt{m_1+m_2} \end{pmatrix}.$$

Dále:

- Jestliže je navíc hmotnost obou hmotných bodů stejná, tj. $m_1 = m_2 = m$, pak vlastní čísla matice $\mathbf{B}$ jsou ve tvaru

  $$\mu_{1,2} = -\frac{g}{l}\,(2 \pm \sqrt{2})$$

  a vlastní vektory jsou násobky vektorů

  $$\mathbf{v}_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mp\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

  Podle věty 3.1 je pohyb soustavy složením módů

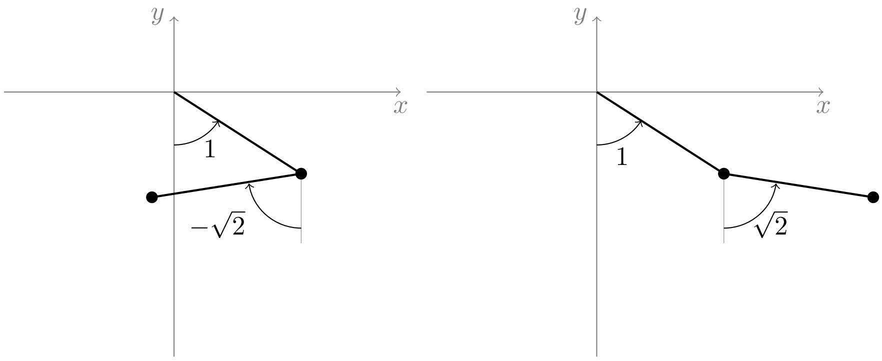
  $$\boldsymbol{\varphi}_1(t) = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}\,(2+\sqrt{2})}\,t + \alpha_1\right)$$

[3] tj. stejnosměrných kmitů různých frekvencí

a

$$\boldsymbol{\varphi}_2(t) = A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}\,(2-\sqrt{2})}\,t + \alpha_2\right).$$

Tyto módy si můžeme představit jako periodické pohyby při nulových počátečních rychlostech a počátečních podmínkách ukázaných na obrázku 2 (tj. $A_1 = A_2 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$).



Obrázek 2. Oscilační módy pro $m_1 = m_2$ a $l_1 = l_2$.

- Jestliže je hmotnost prvního hmotného bodu výrazně větší než hmotnost druhého hmotného bodu, tj. $m_1 \gg m_2$ a označíme-li $\varepsilon = \frac{m_2}{m_1}$, pak po úpravách dostaneme vlastní čísla matice $\mathbf{B}$ ve tvaru

$$\mu_{1,2} = -\frac{g}{l}\left(1 + \varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon(1+\varepsilon)}\right)$$

a vlastní vektory jsou násobky vektorů

$$\mathbf{v}_{1,2} = \begin{pmatrix} \mp\sqrt{\varepsilon} \\ \sqrt{1+\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

Podle věty 3.1 je pohyb soustavy složením módů

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t) = A_1 \begin{pmatrix} -\sqrt{\varepsilon} \\ \sqrt{1+\varepsilon} \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}\left(1+\varepsilon+\sqrt{\varepsilon(1+\varepsilon)}\right)}\,t + \alpha_1\right)$$

a

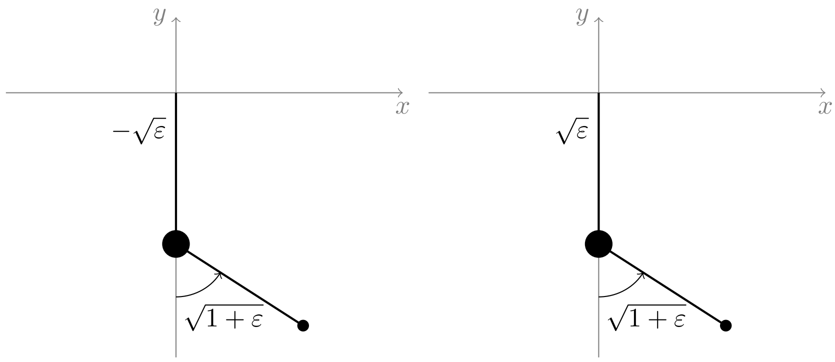
$$\boldsymbol{\varphi}_2(t) = A_2 \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon} \\ \sqrt{1+\varepsilon} \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}\left(1+\varepsilon-\sqrt{\varepsilon(1+\varepsilon)}\right)}\,t + \alpha_2\right).$$

Tyto módy jsou znázorněny na obrázku 3.

Všimněme si, že

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \sqrt{|\mu_{1,2}|} = \sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathbf{v}_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

V těchto oscilačních módech se první hmotný bod v podstatě nebude hýbat a druhý bude v podstatě kmitat jako jednoduché kyvadlo délky l. Vzhledem k poznámce 3.2 bude pohyb soustavy periodický pouze v případě, je-li $A_1 = 0$ nebo $A_2 = 0$.



Obrázek 3. Oscilační módy pro $m_1 \gg m_2$ a $l_1 = l_2$.

5. Závěr

Při modelování mechanických soustav se vyskytují obyčejné diferenciální rovnice, případně jejich systémy. Nejčastěji se jedná o rovnice druhého řádu, které jsou nelineární. Omezíme-li se však na malé výchylky, lze tyto rovnice aproximovat lineárním systémem rovnic. V tomto článku jsme se zaměřili na dvojité kyvadlo. Nastínili jsme odvození systému pohybových rovnic, dále byla dokázána věta o tvaru obecného řešení linearizovaného systému a nakonec jsme diskutovali dva speciální případy této mechanické soustavy.

Reference

[1] J. Bajer: *Mechanika 3*, Univerzita Palackého, Olomouc, 2006.

[2] P. Kamarýt: *Matematické modelování mechanických soustav*, Bakalářská práce, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Brno, 2020.

[3] P. Kulhánek: *Vybrané kapitoly z teoretické fyziky*, AGA, Praha, 2016.

[4] D. Morin: *Introduction to classical mechanics: With problems and solutions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

Petr Kamarýt, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,

e-mail: 200675@vutbr.cz