VYBRANÉ ÚLOHY Z UČEBNICE R. H. WASSERMANA TENSORS AND MANIFOLDS WITH APPLICATIONS TO PHYSICS; I. LINEÁRNÍ ALGEBRA

DUŠAN NAVRÁTIL

Abstrakt. V tomto článku jsou vyřešeny vybrané úlohy z učebnice R. H. Wassermana Tensors and Manifolds [1]. První část problémů se týká ekvivalentních definic pojmů z lineární algebry, druhá část je zaměřena na důkaz nespočetnosti báze prostoru lineárních forem a třetí část je věnována ekvivalenci reprezentací lineárních zobrazení.

Úvod

V literatuře z lineární algebry se můžeme setkat s různými, ale ekvivalentními definicemi některých pojmů. Pomocí různých definic jsou například nadefinovány pojmy lineárního obalu, součtu vektorových podprostorů, lineárně nezávislých množin a bází. Účelem první kapitoly bude ukázat ekvivalenci a souvislosti mezi různými definicemi těchto pojmů.

Druhá kapitola je dále věnována prostoru lineárních zobrazení $L(V,\mathbb{R})$ z vektorového prostoru V do tělesa reálných čísel $\mathbb{R}$ (neboli také prostoru lineárních forem V^*). V této kapitole bude ukázáno, že spočetnost báze prostoru V implikuje nespočetnost báze prostoru $L(V,\mathbb{R})$.

V závěrečné třetí kapitole bude rozebrán problém ekvivalence dvou lineárních zobrazení $\phi,\psi \in L(V,V^*)$ pomocí maticových reprezentací (kongruentní matice) a matice přechodu.

Symbolem $\mathbb{K}$ bude v textu označena množina reálných nebo komplexních čísel ($\mathbb{K} = \mathbb{R},\mathbb{C}$).

1. Ekvivalentní definice pojmů z lineární algebry

Ke každému pojmu v první kapitole budou uvedeny dvě ekvivalentní definice spolu s důkazem této ekvivalence.

2010 *MSC.* Primární 15A03, 15A24.
Klíčová slova. Vektorový prostor, báze, lineární zobrazení, duální prostor.

1.1. Lineární obal

Definice 1.1. Nechť S je libovolná množina (ne nutně konečná) prvků vektorového prostoru V. Lineární obal $\langle S\rangle$ je průnik všech vektorových podprostorů prostoru V, obsahujících množinu S.

Definice 1.2. Nechť S je libovolná množina (ne nutně konečná) prvků vektorového prostoru V. Lineární obal $\langle S\rangle$ je množina všech lineárních kombinací prvků množiny S.

V důkazu ekvivalence využijeme následující pomocné lemma.

Lemma 1.3. *Nechť $A, B \neq \emptyset$ jsou libovolné podmnožiny vektorového prostoru V. Pak*

$$A \subseteq B \Rightarrow \langle A\rangle \subseteq \langle B\rangle,$$

kde lineární obal $\langle A\rangle$ množiny A uvažujeme podle definice 1.1.

Důkaz. Pro případ $A \supset B$ je tvrzení splněno triviálně. Nechť $A \subseteq B$. Lineární obal $\langle A\rangle$ je průnik všech vektorových prostorů obsahujících množinu A. Označme tyto prostory obsahující množinu A jako A_p, $p \in I$ a obdobně pro lineární obal $\langle B\rangle$ označme prostory obsahující množinu B jako B_r, $r \in J$. Platí tedy

$$\langle A\rangle = \bigcap_{p\in I} A_p, \qquad \langle B\rangle = \bigcap_{r\in J} B_r.$$

Zřejmě platí

$$x \in \langle A\rangle = \bigcap_{p\in I} A_p \Rightarrow x \in B_r \qquad \forall r \in J,$$

neboť pokud prvek x patří do každého prostoru obsahující množinu A, pak musí patřit i do prostoru B_r, neboť vektorový prostor B_r množinu A také obsahuje. Index r byl pro B_r zvolen libovolně a implikace tak platí $\forall r \in J$. Odtud získáme

$$x \in \langle A\rangle = \bigcap_{p\in I} A_p \Rightarrow x \in \bigcap_{r\in J} B_r = \langle B\rangle,$$

odkud již nutně $\langle A\rangle \subseteq \langle B\rangle$. □

Tvrzení 1.4. *Definice 1.1 a 1.2 jsou ekvivalentní.*

Důkaz. Označme nejdříve průnik všech podprostorů obsahující S, jako

$$W = \bigcap_{p\in I} W_p,$$

a množinu všech (konečných) lineárních kombinací jako

$$L = \{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n;\ \alpha_i \in \mathbb{K}, x_i \in S, n \in \mathbb{N}\}.$$

V první části dokážeme $L \subseteq W$. Platí

$$x \in L \Rightarrow \exists \alpha_i \in \mathbb{K}, \exists x_i \in S, \exists k \in \mathbb{N};\ x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k.$$

Dále z $x_1, \dots, x_k \in S$ plyne $x_1, \dots, x_k \in W_p$ $\forall p \in I$ a jelikož W_p je vektorový prostor pro libovolné $p \in I$, pak $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k \in W_p$ $\forall p \in I$ a tím pádem $x \in W$.

V druhé části dokážeme $W \subseteq L$. Zřejmě platí $S \subseteq L$, neboť každý prvek $x_i \in S$ můžeme napsat ve tvaru $x_i = 1 \cdot x_i \in L$. Dále $L = \langle L \rangle$, neboť množina všech lineárních kombinací je sama o sobě vektorovým prostorem.

Z nerovnosti $S \subseteq L$ tak pomocí lemmatu 1.3 dostáváme $W = \langle S \rangle \subseteq \langle L \rangle = L$ a tvrzení je dokázané. $\square$

1.2. Součet vektorových podprostorů

Definice 1.5. Nechť $\{W_i\}$ je libovolná množina (ne nutně konečná) vektorových podprostorů prostoru V. Součet podprostorů $\sum_i W_i$ prostoru V je průnik všech podprostorů V obsahujících množinu $\bigcup_i W_i$.

Definice 1.6. Nechť $\{W_i\}$ je libovolná množina (ne nutně konečná) vektorových podprostorů prostoru V. Součet podprostorů $\sum_i W_i$ prostoru V je množina všech vektorů, které lze napsat ve tvaru konečných součtů $w_{i_1} + w_{i_2} + \dots + w_{i_n}$, kde

$$w_{i_1} \in W_{i_1}, w_{i_2} \in W_{i_2}, \dots, w_{i_n} \in W_{i_n}.$$

Tvrzení 1.7. *Definice 1.5 a 1.6 jsou ekvivalentní.*

Důkaz. Označme symbolem P průnik všech podprostorů V obsahujících $\bigcup_i W_i$ a symbolem S množinu vektorů ve tvaru zmíněných součtů.

Nejdříve dokážeme $P \subseteq S$. Pokud $x \in P$, pak x patří (podle definice) do lineárního obalu množiny $\bigcup_i W_i$. Z předchozího tvrzení víme, že lineární obal $\bigcup_i W_i$ je množina všech lineárních kombinací prvků $\bigcup_i W_i$. Tím pádem pro $j = 1, \dots, n$

$$\exists \alpha_j \in \mathbb{K}, w_{i_1} \in W_{i_1}, w_{i_2} \in W_{i_2}, \dots, w_{i_n} \in W_{i_n},$$

že platí

$$\Big\langle \bigcup_i W_i \Big\rangle \ni x = \alpha_1 w_{i_1} + \alpha_2 w_{i_2} + \dots + \alpha_n w_{i_n} \in S,$$

neboť pro každý sčítanec máme $\alpha_j w_{i_j} \in W_{i_j}$ (plyne z vlastnosti, že W_{i_j} je vektorový prostor).

Nyní dokážeme $S \subseteq P$. Nechť $x \in S$. Pak lze tento prvek zapsat pomocí $w_{i_1} \in W_{i_1}, w_{i_2} \in W_{i_2}, \dots, w_{i_n} \in W_{i_n}$, ve tvaru

$$S \ni w_{i_1} + w_{i_2} + \dots + w_{i_n} = 1 \cdot w_{i_1} + 1 \cdot w_{i_2} + \dots + 1 \cdot w_{i_n} \in \Big\langle \bigcup_i W_i \Big\rangle = P.$$

$\square$

1.3. Lineárně nezávislá množina

Definice 1.8. Množinu S vektorů nazveme lineárně nezávislou, pokud pro všechny konečné součty $\sum_i a_i v_i$, $v_i \in S$ platí $\sum_i a_i v_i = o \Rightarrow a_i = 0$ $\forall i$.

Definice 1.9. Množinu S vektorů nazveme lineárně nezávislou, pokud $o \notin S$ a zároveň každý konečný součet podprostorů tvaru $l_v = \{av \mid a \in \mathbb{K}, v \in S\}$ je přímý.

Tvrzení 1.10. *Definice 1.8 a 1.9 jsou ekvivalentní.*

Důkaz. Dokážeme ekvivalenci opačných tvrzení. Chceme tedy dokázat, že existuje konečný součet $\sum_i a_i v_i$, $v_i \in S$ s vlastností $\sum_i a_i v_i = o$ (kde alespoň jeden člen a_i je nenulový) právě tehdy, když $o \in S$ nebo existuje konečný součet podprostorů l_v, který není přímý. Předpokládejme nejdříve, že existuje konečný součet n vektorů množiny S, pro který platí

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = o \wedge \exists i \; a_i \neq 0.$$

Z tohoto tvrzení vyplývá, že člen s nenulovým koeficientem a_i lze vyjádřit jako součet ostatních členů. Platí tedy

$$-a_i v_i = a_1 v_1 + \cdots + a_{i-1} v_{i-1} + a_{i+1} v_{i+1} + \cdots + a_n v_n$$

odtud dostáváme

$$l_{v_i} \bigcap \sum_{j \neq i} l_{v_j} \neq o,$$

což platí pouze tehdy, když $v_i \neq o$ a součet podprostorů tedy není přímý. Kdyby $v_i = o$, pak nenulové a_i lze zvolit libovolně a $v_i = o \in S$.

Předpokládejme nyní, že $o \in S$ nebo existuje konečný součet podprostoů l_v, který není přímý. Pokud $o \in S$, důkaz je zřejmý (tento člen vynásobíme libovolným koeficientem a a všechny ostatní koeficienty položíme rovny nule). Nechť daný konečný součet podprostorů l_v není přímý. To znamená

$$l_{v_i} \bigcap \sum_{j \neq i} l_{v_j} \neq o, \; \forall i.$$

Existuje tedy nenulový vektor, který se nachází v obou množinách. V množině l_{v_i} nabývá tvaru $a_i v_i$ a v množině $\sum_{j \neq i} l_{v_j}$ tvaru $a_1 v_1 + \cdots + a_{i-1} v_{i-1} + a_{i+1} v_{i+1} + \cdots + a_n v_n$, odkud

$$a_i v_i = a_1 v_1 + \cdots + a_{i-1} v_{i-1} + a_{i+1} v_{i+1} + \cdots + a_n v_n,$$
$$a_1 v_1 + \cdots + a_{i-1} v_{i-1} - a_i v_i + a_{i+1} v_{i+1} + \cdots + a_n v_n = o.$$

Jelikož je člen $a_i v_i$ nenulový, tvrzení platí. Díky libovolně zvolenému $n \in \mathbb{N}$ tvrzení platí pro libovolně velké součty. □

1.4. Báze vektorového prostoru

Definice 1.11. Množinu S vektorů $v_i \in S$ nazveme bází podprostoru W prostoru V, pokud je lineárně nezávislá a generuje podprostor W.

Definice 1.12. Množinu S vektorů $v_i \in S$ nazveme bází podprostoru W prostoru V, pokud pro každé $v_i \in S$ existuje právě jedno $a_i \in \mathbb{K}$ tak, že každý vektor $w \in W$ lze vyjádřit ve tvaru $w = \sum_i a_i v_i$.

Tvrzení 1.13. *Definice 1.11 a 1.12 jsou ekvivalentní.*

Důkaz. Předpokládejme nejdříve, že daný vektor $w \in W$ lze vyjádřit dvěma různými způsoby pomocí koeficientů $a_i, b_i \in \mathbb{K}$ jako

$$w = \sum_i a_i v_i = \sum_i b_i v_i,$$

dále od sebe odečteme odpovídající si členy, odkud obdržíme

$$\sum_i a_i v_i - \sum_i b_i v_i = \sum_i (a_i - b_i) v_i = o.$$

Jelikož je množina S lineárně nezávislá, pak z této rovnosti plyne

$$a_i - b_i = 0 \ \forall i \implies a_i = b_i \ \forall i,$$

a vektor w tak lze vyjádřit pouze jediným možným způsobem, pomocí koeficientů $a_i \in \mathbb{K}$.

Nyní naopak předpokládejme, že libovolný vektor $w \in W$ lze vyjádřit pouze pomocí jediné n-tice koeficientů $a_i \in \mathbb{K}$ a vektorů $v_i \in S$, tedy

$$w = \sum_i a_i v_i.$$

Je zřejmé, že množina S generuje podprostor W, neboť každý vektor $w \in W$ lze vyjádřit pomocí lineární kombinace $v_i \in S$. Zbývá dokázat, že množina S je lineárně nezávislá. Nechť

$$w = \sum_i a_i v_i = o.$$

Jelikož je vektor w nulový a pro každý vektor $w \in W$ existuje pouze jediná n-tice koeficientů $a_i \in \mathbb{K}$, která tuto rovnost splňuje, touto n-ticí musí být koeficienty $a_i = 0 \ \forall i$, což je definice lineární nezávislosti. □

2. Nespočetnost báze prostoru $L(V, \mathbb{R})$

Než se pustíme k samotnému důkazu nespočetnosti báze $L(V, \mathbb{R})$ za předpokladu spočetnosti báze V, dokážeme tvrzení 2.1, které bude v důkazu nápomocné. Pro snadnější čitelnost bude použita Einsteinova sumační konvence.

Tvrzení 2.1. *Nechť V a W jsou vektorové prostory a S je báze prostoru V. Pak existuje právě jedno lineární zobrazení $\phi : V \to W$ takové, že $\phi(v_i) = w_i$, kde $v_i \in S$ a w_i jsou libovolně zvolené prvky W.*

Důkaz. Definujme ϕ jako zobrazení

$$\phi(v) = a^i w_i \quad \text{pro } v = a^i v_i.$$

Takové zobrazení je lineární, neboť

$$\phi(u+v) = \phi(b^i v_i + a^i v_i) = \phi((b^i + a^i) v_i) = (b^i + a^i) w_i = b^i w_i + a^i w_i = \phi(u) + \phi(v)$$

a

$$\phi(\alpha v) = \phi(\alpha a^i v_i) = \alpha a^i w_i = \alpha \phi(v).$$

Předpokládejme dále, že existuje jiné lineární zobrazení $\psi : V \to W$, pro které platí $\psi(v_i) = w_i$. Díky linearitě ψ získáme

$$\psi(v) = \psi(a^i v_i) = a^i \psi(v_i) = a^i w_i$$

a tedy

$$\phi(v) = \psi(v), \ \forall v \in V,$$

odkud plyne $\phi = \psi$. □

Pro případ $W = \mathbb{R}$ (neboli $\phi \in L(V, \mathbb{R}) = V^*$) toto tvrzení říká, že pro libovolně zvolené reálné číslo $r \in \mathbb{R}$ a přirozené číslo $k \in \mathbb{N}$, existuje pouze jedno lineární zobrazení $\phi : V \to \mathbb{R}$, pro které platí (předpokládáme uspořádanou bázi prostoru V)

$$\phi(v_k) = r, \ \phi(v_j) = 0, \quad \forall j \neq k$$

a je tedy ve tvaru

$$\phi(v) = \phi(a^i v_i) = a^i \phi(v_i) = a^k r.$$

Nyní mohou nastat dva různé případy pro V. Pokud je V konečněrozměrný prostor ($\dim V = n < \aleph_0$), pak jsou prostory V a V^* izomorfní a $k \leq n$. Tento izomorfismus je dán zobrazením

$$\Phi : V \to V^*,$$
$$\Phi(v_k) = \phi_k(v), \quad k = 1, \ldots, n$$

($\phi_k(v)$ je zobrazení popsané výše) a odpovídajícími reálnými čísly r_k.

Pokud je naopak V nekonečněrozměrný ($\dim V \geq \aleph_0$), pak je obecně V^* větší než V (viz. následující tvrzení) a $k \in \mathbb{N}$.

Tvrzení 2.2. *Nechť $L(V, \mathbb{R})$ je vektorový prostor všech lineárních zobrazení (lineárních forem) z vektorového prostoru V do $\mathbb{R}$. Pokud má V spočetně nekonečnou bázi, pak je báze prostoru $L(V, \mathbb{R})$ nespočetně nekonečná.*

Důkaz. Nechť $S = \{v_1, v_2, v_3, \ldots\}$ je spočetná báze prostoru V. Uvažujme dále množinu všech posloupností reálných čísel tvaru $(1, r, r^2, r^3, \ldots)$, kde $r > 1$ a označme posloupnost pro dané r symbolem ϱ_r. Podle tvrzení 2.1 víme, že existuje právě jedno lineární zobrazení f_r, pro které platí

$$f_r(v_i) = r^{i-1}.$$

Odpovídajících posloupností je zřejmě díky $r \in \mathbb{R}$, $r > 1$ nespočetně mnoho. Zbývá tedy ukázat, že libovolná konečná podmnožina lineárních zobrazení $\{f_1, \ldots, f_n\}$ je lineárně nezávislá.

Jako první část důkazu ověříme, že množina posloupností

$$\varrho_r = \{r^{k-1}\}_{k=1}^{\infty} = (1, r, r^2, r^3, \ldots), r > 1,$$

je lineárně nezávislou podmnožinou vektorového prostoru všech posloupností.

Mějme tedy n posloupností, které odpovídají n-prvkové množině $\{f_{r_1}, \ldots, f_{r_n}\}$, a seřaďme je vzestupně podle velikosti r_i, tedy $\varrho_{r_1}, \varrho_{r_2}, \ldots, \varrho_{r_n}$, kde $r_i > r_j$ pro

$i > j$. Díky $r > 1$ platí také $(r_i^k > r_j^k, i > j) \wedge (r_k^i > r_k^j, i > j)$ pro $k \in \mathbb{N}$. Vytvořme nyní libovolnou lineární kombinaci těchto posloupností

$$a_1 \varrho_{r_1} + a_2 \varrho_{r_2} + \cdots + a_n \varrho_{r_n}.$$

Pro dokázání lineární nezávislosti položme součet těchto posloupnosti roven nulové posloupnosti $(0, 0, 0, \ldots)$. Obdržíme tak systém spočetně mnoha rovnic

$$\sum_{i=1}^{n} a_i r_i^k = 0, \; k \in \mathbb{N}_0.$$

Chceme tedy dokázat

$$a_1 r_1^k + a_2 r_2^k + \cdots + a_n r_n^k = 0, \; \forall k \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow a_1 = \cdots = a_n = 0,$$

kde $r_i > 1$. Celou rovnici vydělíme členem r_n^k, odkud obdržíme

$$a_1 \left(\frac{r_1}{r_n}\right)^k + a_2 \left(\frac{r_2}{r_n}\right)^k + \cdots + a_{n-1} \left(\frac{r_{n-1}}{r_n}\right)^k + a_n = 0.$$

Jelikož platí $r_i > r_j$, $\forall i > j$, pak nutně

$$\lim_{k \to \infty} a_1 \left(\frac{r_1}{r_n}\right)^k + a_2 \left(\frac{r_2}{r_n}\right)^k + \cdots + a_{n-1} \left(\frac{r_{n-1}}{r_n}\right)^k + a_n = a_n = 0.$$

Totéž opakujeme pro koeficienty $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1$, odkud dostáváme $a_1 = \cdots = a_n = 0$, a množina posloupností je tak nutně lineárně nezávislá.

V druhé části důkazu je třeba ukázat, že se lineární nezávislost mezi vektorovými prostory izomorfním lineárním zobrazením přenáší. Mějmě izomorfní lineární zobrazení ϕ mezi prostory V a W, dále $\{v_1, \ldots, v_n\}$ lineárně nezávislou podmnožinu V a $\{w_1, \ldots, w_n\}$ množinu odpovídajících prvků ve W. Pak máme

$$\begin{aligned} b_1 w_1 + \cdots + b_n w_n &= b_1 \phi(v_1) + \cdots + b_n \phi(v_n) \\ &= \phi(b_1 v_1) + \cdots + \phi(b_n v_n) = \phi(b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n) = 0, \end{aligned}$$

kde za předpokladu, že zobrazení ϕ je izomorfní, musí platit

$$b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n = 0.$$

Množina $\{v_1, \ldots, v_n\}$ je však lineárně nezávislá a proto $b_1 = \cdots = b_n = 0$, odkud plyne lineární nezávislost $\{w_1, \ldots, w_n\}$.

Poslední část důkazu spočívá v nalezení izomorfního lineárního zobrazení, které by díky bijekci zachovávalo lineární nezávislost. Toto zobrazení zavedeme následujícím způsobem. Nechť $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ je libovolná posloupnost, které přiřadíme index $\alpha = a_1 a_2 a_3 \ldots$ Pak odpovídající lineární zobrazení bude mít díky tvrzení 2.1 tvar pro bázové vektory v_i

$$f_\alpha(v_i) = a_i, \; i \in \mathbb{N},$$

a zároveň bude lineární. Je zřejmé, že takto zavedená lineární zobrazení (označme např. F) budou tvořit vektorový prostor, neboť tvoří podmnožinu vektorového prostoru všech lineárních zobrazení. Nulovým prvkem je zobrazení

$$f_0(v_i) = 0,$$

které zobrazí libovolný vektor na nulu. Součet dvou zobrazení a skalární násobek splňují

$$f_\alpha(v_i) + f_\beta(v_i) = a_i + b_i = f_{\alpha+\beta}(v_i) \in F,$$
$$a \cdot f_\alpha(v_i) = a \cdot a_i = f_{a\alpha}(v_i) \in F.$$

Mezi vektorovým prostorem $F \subseteq L(V, \mathbb{R})$ a posloupnostmi $\mathbb{R}^\infty$ tak existuje bijekce spolu s lineárním zobrazením a jde tedy o izomorfismus. Z předchozího plyne, že z lineární nezávislosti posloupností $\varrho_{r_1}, \varrho_{r_2}, \dots, \varrho_{r_n}$, plyne lineární nezávislost odpovídající množiny $\{f_{r_1}, \dots, f_{r_n}\}$. Jelikož je takových množin v prostoru $L(V, \mathbb{R})$ díky $r \in \mathbb{R}, r > 1$ nespočetně mnoho, existuje nespočetně mnoho lineárně nezávislých podmnožin $L(V, \mathbb{R})$, odkud plyne existence nespočetné báze prostoru $L(V, \mathbb{R})$. □

3. Ekvivalence lineárních zobrazení mezi V a V^*

V poslední kapitole se budeme zabývat lineárními zobrazeními mezi prostory V a V^*, pro případ $\dim V = \dim V^* = n \in \mathbb{N}$. Z lineární algebry víme, že množinu všech lineárních zobrazení z vektorového prostoru V do sebe sama (endomorfismů), můžeme ztotožnit s množinou matic $M_n(\mathbb{K})$ nad $\mathbb{K}$. Pokud navíc předpokládáme tato zobrazení bijektivní (automorfismy $\phi : V \to V$), můžeme je ztotožnit s množinou regulárních matic $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$. Nyní si připomeneme, jakým způsobem se změní složky vektorů při změně báze prostoru V a jak můžeme reprezentovat lineární zobrazení pomocí matic.

Uvažujme vektor $v \in V$ v n-rozměrném prostoru V, s bází $\{e_i\}$. Z definice báze víme, že k vektoru v existuje jednoznačně určená n-tice reálných čísel taková, že platí $v = x^i e_i$ a tedy

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

jednoznačně popisuje vektor v při stanovené bázi $\{e_i\}$. Pokud dojde ke změně báze na bázi $\{\bar{e}_i\}$, popisujeme sice stejný vektor v, ale n-tice reálných čísel je tentokrát odlišná, tedy

$$v = y^i \bar{e}_i, \qquad y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n.$$

Díky lineární nezávislosti bází $\{e_i\}$ a $\{\bar{e}_i\}$ existuje právě jedna matice $a^i_j \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, pro kterou platí

$$\bar{e}_j = a^i_j e_i.$$

Dosazením této rovnosti do jednotlivých vyjádření v získáme

$$v = x^i e_i = y^j a^i_j e_i$$

odkud

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$$

a tedy

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Matici a_j^i říkáme matice přechodu. Vyjadřuje, jakým způsobem se změní složky vektorů při změně báze. Díky lineární nezávislosti prvků báze je matice přechodu nutně regulární a inverzní matice vždy existuje.

Pro reprezentaci lineárního zobrazení pomocí matic mějme vektorové prostory V a W s bázemi $\{e_i\}$, resp. $\{E_i\}$ a dimenzemi $\dim V = n$, resp. $\dim W = m$. Pak pro lineární zobrazení $\phi : V \to W$ a i-tý prvek báze e_i bude existovat podle tvrzení 2.1 jednoznačně určená m-tice čísel ϕ_i^j, $j = 1, \dots, m$ taková, že platí

$$\phi(e_i) = \phi_i^j E_j.$$

Pokud pak $v \in V,\ w \in W$, získáme

$$y^j E_j = w = \phi(v) = \phi(x^i e_i) = x^i \phi(e_i) = x^i \phi_i^j E_j$$

Takové lineární zobrazení ϕ je pak vyjádřeno maticovým násobením

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1^1 & \phi_2^1 & \dots & \phi_n^1 \\ \phi_1^2 & \phi_2^2 & \dots & \phi_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1^m & \dots & \dots & \phi_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

a říkáme, že matice ϕ_i^j reprezentuje lineární zobrazení ϕ.

Dále dokážeme pomocné tvrzení, které říká, že matice přechodu b_j^i mezi bázemi V^* je inverzní k matici přechodu a_j^i mezi odpovídajícími bázemi V.

Tvrzení 3.1. *Nechť $\{e_i\}$ a $\{\bar{e}_i\}$ jsou báze V, $i = 1, \dots, n$, $\{\varepsilon^i\}$ a $\{\bar{\varepsilon}^i\}$ odpovídající duální báze V^*. Pokud*

$$(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n) = (e_1 \dots e_n) \begin{pmatrix} a_1^1 \dots a_n^1 \\ \vdots \\ a_1^n \dots a_n^n \end{pmatrix},$$

pak

$$\begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_1 \\ \vdots \\ \bar{\varepsilon}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^1 \dots b_n^1 \\ \vdots \\ b_1^n \dots b_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix},$$

kde $a^i_j b^j_k = \delta^i_k$ *(matice přechodu* b^i_j *je inverzní k matici přechodu* a^i_j*).*

Důkaz. Nechť v je libovolný vektor prostoru V. Pak

$$v = x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n = y^1 \bar{e}_1 + \ldots + y^n \bar{e}_n$$

a

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (v) = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_1 \\ \vdots \\ \bar{\varepsilon}_n \end{pmatrix} (v) = \begin{pmatrix} \bar{v}^1 \\ \vdots \\ \bar{v}^n \end{pmatrix}.$$

Jelikož

$$v = (e_1 \ldots e_n) \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = (\bar{e}_1 \ldots \bar{e}_n) \begin{pmatrix} \bar{v}^1 \\ \vdots \\ \bar{v}^n \end{pmatrix}$$

pak

$$\begin{aligned} v = (e_1 \ldots e_n) \begin{pmatrix} \varepsilon^1 \\ \vdots \\ \varepsilon^n \end{pmatrix} (v) &= (\bar{e}_1 \ldots \bar{e}_n) \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}^1 \\ \vdots \\ \bar{\varepsilon}^n \end{pmatrix} (v) \\ &= (e_1 \ldots e_n) \begin{pmatrix} a^1_1 \ldots a^1_n \\ \vdots \\ a^n_1 \ldots a^n_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}^1 \\ \vdots \\ \bar{\varepsilon}^n \end{pmatrix} (v). \end{aligned}$$

Protože pro danou bázi $\{e_i\}$ je lineární kombinace vektoru v dána jednoznačně, musí platit

$$\begin{pmatrix} \varepsilon^1 \\ \vdots \\ \varepsilon^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1_1 \ldots a^1_n \\ \vdots \\ a^n_1 \ldots a^n_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}^1 \\ \vdots \\ \bar{\varepsilon}^n \end{pmatrix}.$$

Matice a^i_j je regulární a existuje k ní tedy inverzní matice b^i_j. Vynásobením rovnice zleva maticí b^i_j dostáváme požadovanou rovnost

$$\begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_1 \\ \vdots \\ \bar{\varepsilon}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1_1 \ldots b^1_n \\ \vdots \\ b^n_1 \ldots b^n_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$

□

Nyní přejděme k samotnému tvrzení, které dává do souvislosti ekvivalentní lineární zobrazení při změne báze prostoru V.

Tvrzení 3.2. *Nechť* V *je* n*-rozměrný vektorový prostor. Pak dvě matice* $M = \phi^i_j$ *a* $N = \psi^i_j$ *reprezentují (vzhledem ke stanoveným bázím prostoru* V *a jejich duálním bázím ve* V^**) stejné lineární zobrazení z* V *do* V^* *právě tehdy, když platí* $N = A^T M A$*, kde* A *je matice přechodu* a^i_j *mezi bázemi* V*.*

Důkaz. Nechť $\{e_i\}$, $\{\bar{e}_i\}$ jsou dvě různé báze prostoru V s maticí přechodu $A = a^i_j$. Předpokládejme nejdříve, že matice $M = \phi^i_j$ a $N = \psi^i_j$ reprezentují stejné lineární zobrazení z V do V^* a vektor $v \in V$ se tak při aplikaci obou matic zobrazí na stejný prvek $f \in V^*$. Získáme dvě různé báze prostoru V^*, $\{E_i\}$, resp. $\{\bar{E}_i\}$, duální k $\{e_i\}$, resp. $\{\bar{e}_i\}$ pomocí ϕ^i_j, resp. ψ^i_j. Nechť dále

$$v = x^i e_i = y^i \bar{e}_i$$

je vektor $v \in V$ vyjádřený v bázích $\{e_i\}, \{\bar{e}_i\}$ a

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$$

jeho složky v jednotlivých bázích. Pokud je A maticí přechodu mezi $\{e_i\}$ a $\{\bar{e}_i\}$, pak platí

$$y = A^{-1}x, \qquad \bar{e} = A^T e,$$

kde e, resp. $\bar{e}$ označuje vektor bázových vektorů e_i, resp. $\bar{e}_i$ (viz. tvrzení 3.1). Dále

$$p^i = x^j \phi^i_j \quad \text{a} \quad q^i = y^j \psi^i_j$$

jsou obrazy vektorů x a y vzhledem k jednotlivým maticím $M = \phi^i_j, N = \psi^i_j$ a bázím $\{e_i\}$, $\{\bar{e}_i\}$. Proto

$$f = p^i E_i = q^i \bar{E}_i \in V^*$$

je obrazem lineárního zobrazení vektoru $v \in V$ se složkami

$$p = \begin{pmatrix} p^1 \\ \vdots \\ p^n \end{pmatrix}, \qquad q = \begin{pmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q^n \end{pmatrix}.$$

v jednotlivých bázích $\{E_i\}$, $\{\bar{E}_i\}$.

Pokud matice ϕ^i_j a ψ^i_j reprezentují stejné lineární zobrazení, vektor v se v případech obou bází zobrazí na f a matice přechodu mezi $\{E_i\}$ a $\{\bar{E}_i\}$ bude maticí inverzní k A (důsledek tvrzení 3.1). Platí tedy

$$\bar{E} = A^{-1}E,$$

odkud plyne (aplikace vztahů $\bar{e} = A^T e$, $y = A^{-1}x$ na vektory E, $\bar{E}$ bázových vektorů E_i, $\bar{E}_i$)

$$q = ((A^{-1})^T)^{-1}p = A^T p.$$

Dále z rovnic

$$p = Mx, \qquad x = Ay,$$

získáme

$$p = M(Ay).$$

Vynásobením zleva A^T dostaneme

$$A^T p = A^T(M(Ay)),$$

odkud ze vztahů

$$q = Ny, \qquad q = A^T p,$$

plyne
$$Ny = A^T(M(Ay)) = (A^T MA)y.$$
Jelikož tento vztah platí pro libovolné $y \in V$, dostáváme rovnost
$$N = A^T MA.$$
První část tvrzení je tedy dokázaná.

Nechť obráceně platí
$$N = A^T MA$$
pro matici přechodu A mezi $\{e_i\}$ a $\{\bar{e}_i\}$ (dvě libovolně zvolené báze V), a matice ϕ^i_j, ψ^i_j reprezentují dvě různá lineární zobrazení ϕ, ψ (provedeme důkaz sporem), tzn.
$$\phi(v) = f = p^i E_i = p^T E,$$
$$\psi(v) = \tilde{f} = q^i \bar{E}_i = q^T \bar{E},$$
kde $f \neq \tilde{f}$. Musí tak platit
$$p^T E \neq q^T \bar{E} = q^T(A^{-1}E) = (q^T A^{-1})E,$$
z čehož vyplývá
$$p^T \neq q^T A^{-1},$$
$$p \neq (A^T)^{-1} q,$$
$$Mx \neq (A^T)^{-1}(Ny),$$
$$M(Ay) \neq (A^T)^{-1}(Ny),$$
$$(A^T MA)y \neq Ny,$$
odkud již získáváme hledaný spor, neboť $N = A^T MA$ a tvrzení je tak dokázané. □

Reference

[1] R. H. Wasserman: *Tensors and Manifolds*, Oxford University Press, 1992.

Dušan Navrátil, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: `171626@vutbr.cz`