

APLIKOVANÁ NELINEÁRNÍ DYNAMIKA

LENKA PŘIBYLOVÁ

ABSTRAKT. Článek se věnuje aplikacím nelineární dynamiky a jevům, které se objevují v různých oblastech a vědních oborech. Uvádí základní typy bifurkačních rovnováh a cyklů, spolu s typickými jevy, které vznikají v systémech procházejících těmito bifurkacemi. Zároveň ukazuje tyto jevy na jednoduchých modelech nebo odkazuje na vybrané články.

1. ÚVOD

Dynamicky se měnící svět kolem nás lze v mnoha případech docela dobře popisovat pomocí vzájemných vztahů mezi kvantifikovatelnými veličinami. Obecně lze definovat dynamický systém pomocí následující definice.

Definice 1.1. Dynamickým systémem rozumíme trojici $\{T, \mathbf{X}, \varphi^t\}$, kde T je číselná množina (čas), \mathbf{X} je metrický prostor, který nazýváme fázovým nebo stavovým prostorem, a φ^t je parametrický systém evolučních operátorů s parametrem $t \in T$ definovaných jako zobrazení $\varphi^t: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$, které zobrazuje počáteční stav $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}$ na nějaký stav $\mathbf{x}_t = \varphi^t \mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}$.

Pod takovou definici dynamického systému se schová téměř cokoli, co jsme schopni kvantifikovat a popsat. Chladnoucí šálek kávy na stole popsaný diferenciální rovnicí Newtonova zákona ochlazování, pohyby vesmírných těles popsané zákony gravitace, tvorba proteinu v buňce popsaná kinetickými chemickými rovnicemi, počet infikovaných osob v období epidemie COVID-19 popsaný systémem diferenciálních rovnic nebo pohyby cen na burze popsané stochastickými diferenciálními rovnicemi, to vše jsou příklady takových dynamických systémů.

Často se pro jednoduchost modelu sledovaného dynamického procesu pracuje s deterministickým systémem.

Definice 1.2. Deterministickým dynamickým systémem rozumíme dynamický systém $\{T, \mathbf{X}, \varphi^t\}$ splňující podmínku

$$\varphi^0 = \text{id},$$

kde id je identita na \mathbf{X} , tj. $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}: \text{id } \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

2010 MSC. Primární 34C23, 34C15, 37G10, 37G15.

Klíčová slova. Nelineární dynamika, bifurkace, atraktor, bistabilita.

Práce byla podporována projektem Matematické a statistické modelování 5 (MUNI/A/1615/2020).

Tato vlastnost říká, že systém spontánně nemění svůj stav. Ne vždy je takový model vhodný, ale v mnoha situacích ano. Pokud pracujeme s fyzikálními veličinami jako je model chladnoucí kávy nebo pohybu kosmických těles, jsou fyzikální zákony neúprosně deterministické, dokud nenarazíme např. na náhodně letící kometu nebo pravděpodobnosti u kvantové mechaniky. Náhodu ale můžeme často vynechat i u zcela náhodně se chovajících systémů. Pokud jde např. o systém s mnoha částicemi jako jsou molekuly účastnící se chemické reakce nebo lidé potkávající se v období epidemie, pak lze systém modelovat deterministicky jako celek, agregovaně.

V následujícím textu se ale chci věnovat ještě specifičtějším deterministickým dynamickým systémům, tzv. autonomním systémům. Pro autonomní systémy se „zákony evoluce“ nemění během času. Zápis deterministického systému jako autonomního je spíše technickou záležitostí, kdy můžeme transformovat čas, nebo systém vnořit do vhodného nadprostoru.

Definice 1.3. Autonomním dynamickým systémem rozumíme deterministický systém $\{T, \mathbf{X}, \varphi^t\}$ splňující podmínku

$$\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s,$$

tj. $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}: \varphi^{t+s}\mathbf{x} = \varphi^t(\varphi^s\mathbf{x})$, pokud jsou definovány obě strany rovnice.

Typickým příkladem autonomního systému je v čase spojitě měnící se stav $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^m$, pro $t \in \mathbb{R}$ podle systému obyčejných diferenciálních rovnic

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) \quad (1.1)$$

nebo v čase skokově měnící se stav (iterační proces, kde $n \in \mathbb{N}$, příp. $n \in \mathbb{Z}$)

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n, \boldsymbol{\varepsilon}), \quad (1.2)$$

kde $\mathbf{f}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ je dostatečně hladká funkce a $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}^p$ jsou dané parametry. Jde tedy o dynamické systémy, kde závislost na čase není explicitní, pouze skrze měnící se stavové proměnné.

Zdálo by se, že takové restriktce na dynamické systémy budou příliš velké, aby mohly popisovat a vysvětlovat složitost světa kolem nás. Opak je ale pravdou. Nejenže je velké množství dynamických systémů v různých oblastech právě takto možné popsat, ale i samotná dynamika takových systémů je natolik rozmanitá, že typické dynamické jevy umožňuje modelovat velice dobře. Dokonce lze takovými systémy popisovat i jevy, kde je dynamika nepředvídatelná, tj. chaotická.

2. BIFURKACE ROVNOVÁH A S NIMI SOUVISEJÍCÍ JEVY

Nejjednodušší dynamikou, kterou umožňuje rovnice (1.1) resp. (1.2), je rovnovážná dynamika. Protože rovnováha splňuje

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}, \text{ resp. } \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{x},$$

je v prostoru $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ stavových proměnných a parametrů zadaná implicitně. Obecně mluvíme o rovnovážné varietě. Na tomto místě je vhodné upozornit na rozdíl v definici variety („manifold“) a algebraické variety („variety“). V angličtině

se v teorii dynamických systémů používá pojmu „manifold“, přestože by lépe vyhovoval asi pojem „variety“. Čeština ovšem tyto názvy nerozlišuje. Např. afinní algebraická varieta je definována jako množina řešení systému polynomiálních rovnic nad komplexními čísly¹. Varieta může obsahovat i singulární body, ve kterých nelze definovat tečný prostor (naproti tomu „manifold“ je regulární). Rovnovážná varieta systému (1.1) resp. (1.2) může také obsahovat singulární body. V takovém případě se ale nejčastěji mluví o větvích rovnováh ve stavově-parametrickém prostoru.

V tomto okamžiku se konečně dostáváme k pojmu bifurkace a postupně i ke slíbeným aplikacím.

Implicitně daná rovnováha totiž může být díky větě o implicitní funkci lokálně definována v okolí pevně dané hodnoty parametru ε_0 jako funkce $\varepsilon \mapsto \beta(\varepsilon)$, která splňuje $\beta(\varepsilon_0) = \mathbf{x}_0$ a $\mathbf{f}(\beta(\varepsilon), \varepsilon) \equiv \mathbf{0}$, resp. $\mathbf{f}(\beta(\varepsilon), \varepsilon) \equiv \beta(\varepsilon)$, tedy $\beta(\varepsilon)$ odpovídá rovnovážnému bodu pro parametr ε .

Ovšem v případě, že má Jacobiho matice $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \varepsilon_0)$ nějakou vlastní hodnotu nulovou ve spojitém případě nebo rovnu 1 v diskrétním případě, není zaručena existence ani jednoznačnost rovnováhy $\beta(\varepsilon)$, tj. při perturbaci může dojít k zániku rovnovážného bodu (v každém okolí ε_0), nebo k vzniku nové větve rovnovážných řešení (odtud vznikl název, rozvětvení = bifurkace) a samozřejmě při přechodu ε_0 může dojít ke změně stability, tedy obecně k lokální kvalitativní změně chování systému.

Definice 2.1. Lokální bifurkací systému (1.1) resp. (1.2) v okolí rovnováhy $\mathbf{x}_0 = \beta(\varepsilon_0)$ s kritickou hodnotou parametru $\varepsilon = \varepsilon_0$ rozumíme kvalitativní změnu dynamiky v okolí kritické hodnoty ε_0 , kdy fázové portréty v okolí rovnováhy \mathbf{x}_0 při přechodu přes bifurkační parametr ε_0 nejsou lokálně topologicky ekvivalentní, tj. neexistuje homeomorfismus, který by zobrazoval trajektorie okolí rovnováhy na sebe.

Obecněji je třeba poznamenat, že k lokální změně dynamiky (bifurkaci) může dojít v případě, kdy vlastní hodnota Jacobiho matice $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \varepsilon_0)$ má nulovou reálnou část ve spojitém případě nebo velikost rovnu 1 v diskrétním případě.

Je zřejmé, že právě lokální bifurkace budou mít významné postavení v aplikacích, protože přináší změnu dynamiky při drobné změně hodnoty parametru. Může jít o změnu v rychlosti chemické reakce, která způsobí, že buňka začne produkovat určitý protein, může jít o snížení průměrného počtu kontaktů mezi lidmi, která způsobí zánik exploze epidemie, může jít o drobné procentuální navýšení výlovu populace ryb, která způsobí jejich vyhynutí, nebo zvýšení průměrné teploty oceánu, která způsobí změnu v dynamice mořského proudění a v ekosystému Země.

¹V aplikacích nás samozřejmě zajímá její reálná část, základní dynamické jevy se popisují právě pomocí systémů polynomiálních rovnic.

2.1. Ohyb variety rovnováh

Nejjednodušší lokální bifurkací je ohyb variety rovnováh, neboli fold bifurkace někdy nazývaná také bifurkace sedlo-uzel². Jde o případ, kdy má Jacobiho matice $Df(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\varepsilon}_0)$ právě jednu vlastní hodnotu λ s nulovou reálnou částí ve spojitém případě nebo s velikostí rovnou 1 v diskretním případě. V aplikacích pak jsou typicky ostatní vlastní hodnoty se zápornou reálnou částí ve spojitém případě nebo s velikostí menší než 1 v diskretním případě, jelikož v takovém případě jde o změnu stability – ze stabilní rovnováhy do nestabilní. Systém pak lze redukovat na tzv. centrální varietu, která v okolí rovnováhy vždy lokálně existuje a je to invariantní množina, ke které jsou blízké trajektorie přitahovány. Vzhledem k jednomu parametru pak lze pro spojitý případ využít následující větu. Analogicky lze pracovat i se systémem iterací (zobrazení) (1.2).

Věta 2.2. *Předpokládejme, že jednodimenzionální jednoparametrická rovnice*

$$\dot{x} = f(x, \varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

kde f je hladká funkce, má pro $\varepsilon = \varepsilon_0$ rovnovážný bod $x = x_0$ a $\lambda = f_x(x_0, \varepsilon_0) = 0$. Předpokládejme, že jsou splněny podmínky

$$\begin{aligned} f_{xx}(x_0, \varepsilon_0) &\neq 0 && \text{podmínka nedegenerovanosti,} \\ f_\varepsilon(x_0, \varepsilon_0) &\neq 0 && \text{podmínka transverzality.} \end{aligned}$$

Pak je (2.1) v okolí rovnováhy lokálně topologicky ekvivalentní systému v normální formě fold bifurkace

$$\dot{x} = \pm \varepsilon \pm x^2.$$

Uvádím pouze jeden příklad bifurkačního diagramu bifurkace typu fold pro případ (volba znamének) $\dot{x} = \varepsilon - x^2$ na obr. 1. Kritický bod fold bifurkace se v bifurkačních diagramech označuje nejčastěji LP (limit point) a pro tuto normální formu jde o vrchol paraboly $\varepsilon = x^2$, tj. počátek parametricko-stavového prostoru.

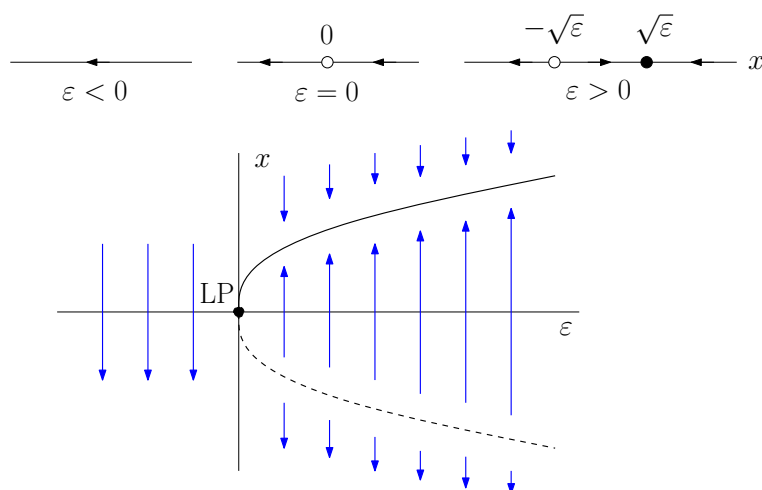
2.2. Přepínače a hysterese

Typickým příkladem skokové změny zapříčiněné fold bifurkací, tedy ohybem variety rovnováh, je biochemický přepínač. Modelová (tedy velmi zjednodušená) rovnice produkce genetického proteinu v buňce má tvar

$$\dot{g} = k_1 \frac{g^2}{1 + g^2} - k_2 g,$$

kde g kvantifikuje množství proteinu a k_1, k_2 jsou kladné parametry související s rychlostmi probíhající chemických reakcí. První člen $k_1 \frac{g^2}{1+g^2}$ odpovídá genové expresi probíhající skrze transkripci a translaci. Protein vzniká autokatalytickou reakcí, která zde není uvedena a popisuje ji tzv. Hillova funkce. Druhý člen $k_2 g$ odpovídá rozkladu proteinu.

²Toto pojmenování vychází z časté situace, kdy v ohybu dochází ke splynutí sedla a uzlu, což ale není vždy nutné. Název ohybová ani dotyková nebo tečná bifurkace se v české terminologii nepoužívá a sedlo-uzel zase není matematicky korektní pojmenování.



Obrázek 1. Bifurkační diagram pro normální formu fold bifurkace.

Zavedením nové proměnné $x(t) = g(\frac{t}{k_1})$ a označením $a = \frac{k_2}{k_1}$ dostáváme rovnici v ještě jednodušším tvaru

$$\dot{x} = \frac{x^2}{1+x^2} - ax. \quad (2.2)$$

Libovolná rovnováha proto splňuje

$$x \left(\frac{x}{1+x^2} - a \right) = 0.$$

Dostáváme tak dvě variety rovnováh (v závislosti na parametru a): triviální rovnováhu a netriviální varietu

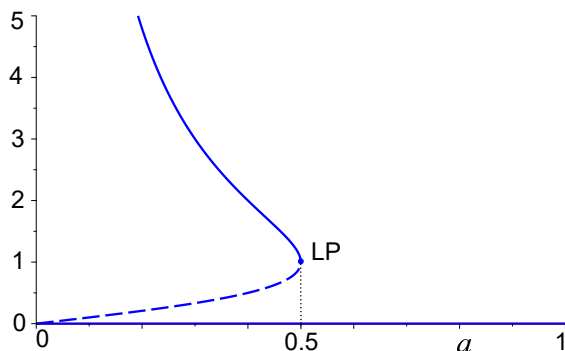
$$a = \frac{x}{1+x^2}.$$

Protože nás zajímají pouze kladné hodnoty koncentrace i parametru jako poměru rychlostí reakcí, vidíme, že bod $[0, 0]$ je průsečíkem dvou větví rovnováh (tzv. transkritická bifurkace) a bod $[a^*, x^*] = [\frac{1}{2}, 1]$ je limitním bodem, neboli ohybem variety rovnováh (ukazuje obr. 2). V tomto bodě dochází k fold bifurkaci, kdy horní část této větve rovnováh je stabilní a dolní nestabilní.

Překročí-li parametr $a = \frac{k_2}{k_1}$ kritickou hodnotu $\frac{1}{2}$, gen se přestane produkovat a dojde k biochemickému přepnutí na nulovou větev rovnováhy.

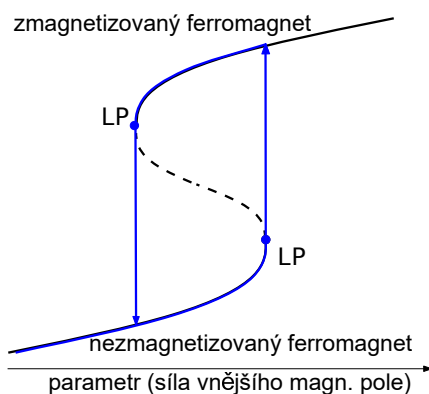
Velice často se v dynamických systémech objevují dva takové přepínače. Vzniká pak jev, kterému se říká hystereze. Systém s hysterezí vykazuje typicky jakési zpoždění či zabránění návratu do původního stavu. Známa je hystereze u feromagnetických materiálů (náčrt na obr. 3), které po vystavení magnetickému poli vykazují nějakou dobu magnetické vlastnosti, poté dojde k zániku vnitřního magnetického pole.

Tento jev se ale objevuje v aplikacích i v jiných oborech – biologii, medicíně, ekonomii apod. Ve skutečnosti jde o ohyb variety rovnováh v závislosti na dvou



Obrázek 2. Rovnovážné variety rovnice (2.2) v závislosti na parametru a .

parametrech. V teorii bifurkací se kritický bod této rovnovážné variety nazývá dvouparametrickou lokální bifurkací rovnováhy typu cusp (hrot, bod vratu).



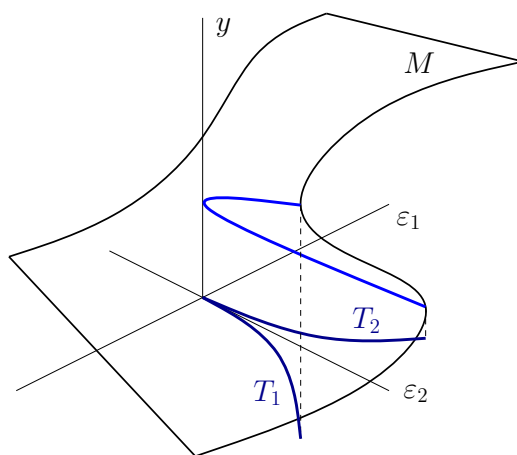
Obrázek 3. Náčrt hysterese u ferromagnetického materiálu v závislosti na velikosti vnějšího magnetického pole.

Systém lze v takovém případě redukovat v okolí takového bodu na centrální varietu a zapsat ve tvaru normální formy

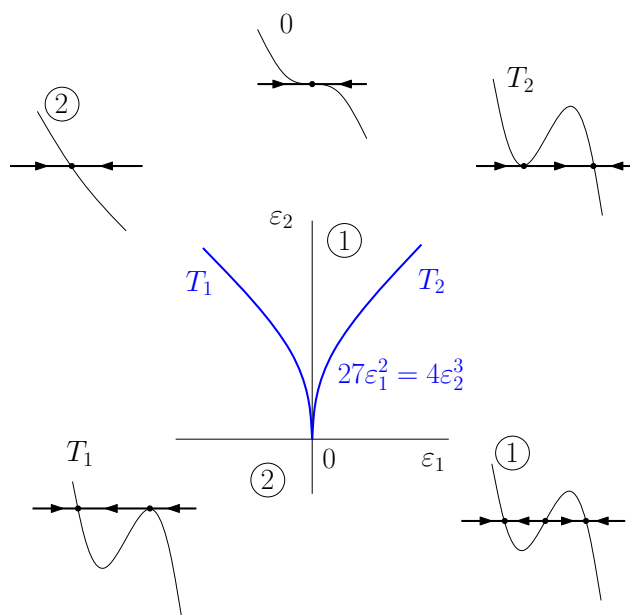
$$\dot{y} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 y \pm y^3. \quad (2.3)$$

Rovnovážné body leží na varietě $M : \varepsilon_1 + \varepsilon_2 y \pm y^3 = 0$, která je zobrazena na obr. 4. Nulová první derivace podle y , tedy podmínka pro bifurkaci typu fold (ohyb), je na křivce splňující navíc $\varepsilon_2 \pm 3y^2 = 0$. Jednotlivé větve T_1, T_2 odpovídají zánikům dvojice rovnovážných bodů v ohybech variety M , tedy jsou to bifurkační hranice bifurkace fold (LP). Pokud z těchto dvou rovnic vyloučíme y , dostaneme průmět ohybů do roviny parametrů $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, kterým je křivka typického tvaru V s bodem vratu v počátku. Pro znaménko mínus ji ukazuje obr. 5 a je tvaru

$$27\varepsilon_1^2 - 4\varepsilon_2^3 = 0.$$



Obrázek 4. Rovnovážná varieta rovnice (2.3) závislá na dvou parametrech ε_1 a ε_2 .



Obrázek 5. Bifurkační diagram normální formy cusp bifurkace $\dot{y} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 y - y^3$.

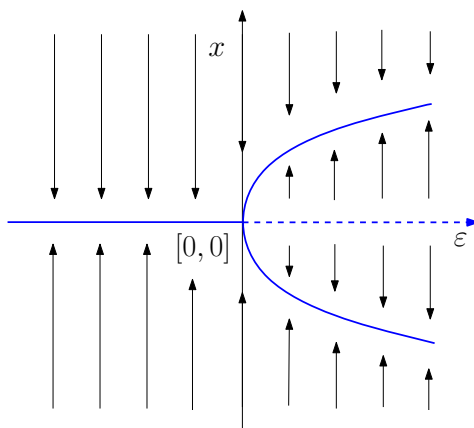
Oblasti označené 1 a 2 jsou strukturálně stabilní oblasti³, ve kterých má systém tři resp. jedinou stabilní rovnováhu. Variety T_1 a T_2 odpovídají jednoparametrické bifurkaci typu fold, jsou to hranice kodimenze 1 ve 2-rozměrném prostoru

³Strukturální stabilitou se rozumí zachování existence tří rovnováh resp. jediné stabilní rovnováhy i při malé změně parametrů.

parametrů. Jejich průnikem je bod vratu, který má dimenzi 0, tedy kodimenzi 2 v 2-rozměrném prostoru parametrů. Cusp bifurkace v bodě vratu se proto nazývá lokální dvouparametrickou bifurkací nebo bifurkací kodimenze 2. Tento typický jev nezávisí na tvaru rovnic a vzniká genericky v situaci, kdy dojde k dotyku dvou větví fold bifurkace. Existují samozřejmě exaktní podmínky (tzv. podmínky nedege-nerovanosti a transverzalita podobné větě 2.2), za kterých obecný systém prochází cusp bifurkací, ale pro naše potřeby je daleko užitečnější geometrická představa průhybu variety rovnováh na obr. 4.

Hystereze se tak objevuje v situaci, kdy je přítomna nelinearita typu sigmoidy. Takové systémy jsou v přírodě velice časté. Příkladem mohou být populační modely, kdy charakter sigmoidy určují např. predační funkce nebo jiné funkce závislé na prostředí. Appetit predátora je zastropován nějakou horní hranicí, a i další funkce ovlivňující populaci kořisti mají často esovitý charakter právě díky dolní a horní hranici, která je dána naplněním kapacity prostředí nebo velikostí jiné interagující populace. V biochemii je to podobné. Právě u modelu biochemického přepínače jsou uvedené Hillové funkce, které jsou sigmoidního charakteru. Takové funkce popisující kinetiku v chemických reakcích vznikají typicky právě pro autokatalytické reakce v živých buňkách, zatímco chemické reakce mimo živé organismy jsou naopak typicky bez sigmoid, takže vedou na rovnovážné stavy bez vzniku složitějších jevů.

Fold bifurkace a hystereze nejsou jedinými jevy, které souvisejí se singularitou variety rovnováh. Další generickou jednoparametrickou bifurkací je transkritická bifurkace (generický průsečík dvou větví rovnovážných variet) a vidličková bifurkace, která vykazuje jistou symetrii a její aplikace se objevují například v evolučních modelech větvení. U vidličkové bifurkace totiž dochází k průsečíku dvou větví rovnováh právě v ohybu jedné z větví. To v aplikacích umožňuje modelovat právě jevy větvení, kdy zaniká jedna stabilní rovnováha (a stává se nestabilní) a zároveň vznikají dvě další stabilní větve v jejím okolí, viz obr. 6.



Obrázek 6. Bifurkační diagram normální formy vidličkové (pitchfork) bifurkace $\dot{x} = \epsilon x - x^3$.

3. BIFURKACE CYKLŮ A S NIMI SOUVISEJÍCÍ JEVY

Dá se jistě očekávat, že cykly, tedy oscilace, budou další významnou dynamikou se zajímavými aplikacemi. Kyvadla, elektromagnetické vlny, střídavý proud, aktivita srdečního svalu nebo pohyb planet, to všechno jsou příklady cyklické dynamiky. Je také velmi zajímavé, že jeden ze základních nelineárních jevů, tedy vznik oscilací, je spojen s lokální bifurkací uvedenou již v předchozím textu.

3.1. Vznik oscilací Hopfovou bifurkací

Pro jednoduchost se budeme zabývat pouze spjitým systémem (1.1). Pokud se dvě komplexně sdružená vlastní čísla Jacobiho matice $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \varepsilon_0)$ pro danou rovnováhu \mathbf{x}_0 změní tak, že jejich reálné části při změně parametru přecházejí imaginární osu, varieta rovnováh je sice vzhledem k parametru ε dána jednoznačně, ale mění stabilitu. Genericky dochází k tzv. Hopfově bifurkaci, kdy se stabilní ohnisko mění v nestabilní ohnisko. Trajektorie blízké rovnováze tak vykazují tlumené nebo gradující oscilace. Lze ukázat, že v generickém případě (za splnění jistých podmínek nedegenerovanosti a transversality) je tato bifurkace nutně spojena se vznikem limitního cyklu. Asi lze vytušit, že cyklus může vznikat buď v okolí nestabilního ohniska (mluvíme o superkritické Hopfově bifurkaci), nebo v okolí stabilního ohniska (mluvíme o subkritické bifurkaci). Podobně jako v případě fold bifurkace je rozhodnutí o typu bifurkace dáno znaménkem jistého členu v normální formě. Ta se typicky zapisuje i v komplexním nebo v polárním tvaru, kde je popis cyklu jednodušší. Zde uvádím komplexní normální formu superkritické Hopfovy bifurkace

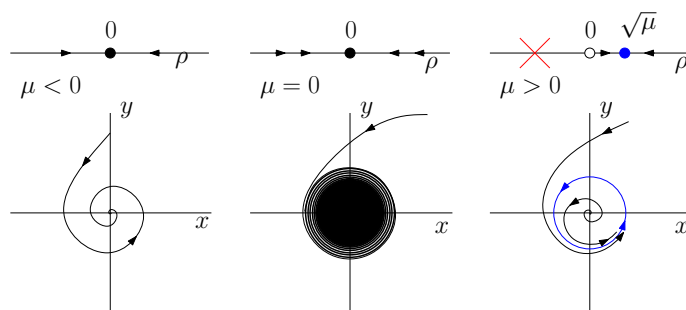
$$\dot{z} = (\mu + i)z - z|z|^2,$$

kde Eulerův tvar komplexního čísla $z = \rho e^{i\varphi}$ pak dává polární tvar

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \rho(\mu - \rho^2), \\ \dot{\varphi} &= 1. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Rovnice (3.1) je normálním tvarem vidličkové bifurkace. Pro $\mu \leq 0$ je tedy počátek jedinou stabilní rovnováhou. Pro $\mu > 0$ vzniká další rovnovážný bod $\rho = \sqrt{\mu}$ (zápornou hodnotu můžeme vynechat, nemá v této reprezentaci smysl, jde o vzdálenost). Počátek je v tomto případě pro $\mu > 0$ nestabilní, rovnováha $\rho = \sqrt{\mu}$ je stabilní. Tento bod odpovídá stabilnímu limitnímu cyklu v okolí počátku (viz obr. 7). Z komplexního zápisu je vidět, že komplexně sdružená vlastní čísla jsou $\mu \pm i$. Pro jednoduchost je zde parametr ε nahrazen přímo reálnou částí vlastního čísla μ , která je původcem kvalitativní změny dynamiky.

Z hlediska aplikací jsou tyto dva typy Hopfovy bifurkace velice odlišné. Pokud si představíme superkritickou bifurkaci na nějakém reálném jevu, zjistíme, že nejde o nijak významnou změnu. V malém okolí kritické hodnoty parametru sice rovnováha ztrácí stabilitu, ale je nahrazena drobnými oscilacemi (amplituda oscilací roste s odmocninou parametru). Příkladem může být třeba vznik tónu při hře na flétnu nebo při pískotu konvice na čaj. Při nízké rychlosti vzduchu tón nevzniká, překročením určitého prahu vznikne, ale je velmi tichý. Výrazný tón (velká amplituda stejné frekvence) vzniká silným výdechem do dechového nástroje. Pískot



Obrázek 7. Superkritická Hopfova bifurkace.

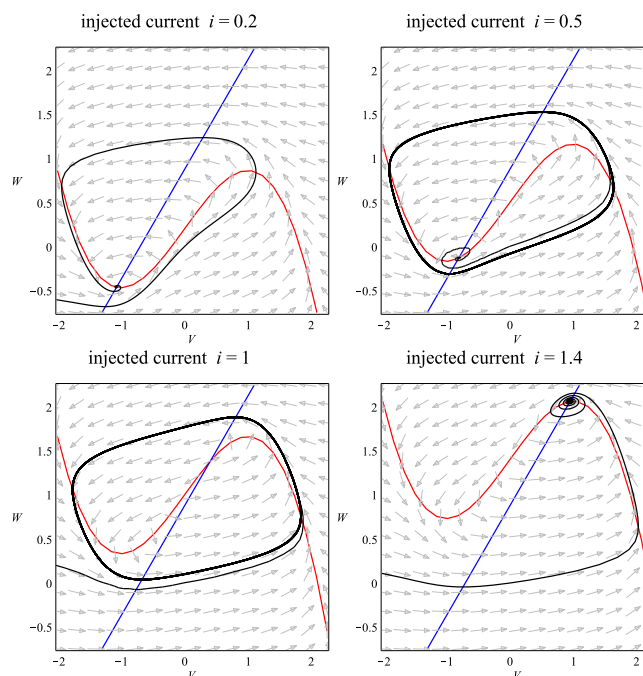
konvice, ve které začne vřít voda také začíná jemně a nabírá postupně na síle. Naopak subkritická bifurkace je spojena s často katastrofickými jevy jako je např. aeroelastický jev rozkmitání křídel letadla, která se mohou vlivem nárazového větru určité prahové hodnoty zlomit [13]. Podobně jsou známy případy pádu mostů [2] („nejslavnější“ je pravděpodobně kolaps Tacomského mostu), vznik vibrací motoru při vypínání turbín nebo při přistávání letadel [1]. Jde totiž o zánik stabilní rovnováhy (obklopené nestabilním cyklem) a rychlý vznik silných oscilací s velkou amplitudou.

V reálných aplikacích je tento jev podobný hysterezi a souvisí podobně s dvouparametrickou bifurkací, kdy vně nestabilního cyklu vzniká další stabilní cyklus. Jde také o bistabilitu, tedy současný vznik dvou stabilních atraktorů. Subkritická Hopfova bifurkace tak může být i nekatastrofickou. U neuronů jde o nejtýpější způsob vzniku oscilací. Při překročení prahové hodnoty totiž nevzniká cyklus s postupně se zvětšující amplitudou jako u superkritické bifurkace, ale systém skočí rovnou na stabilní větev vnějšího cyklu s velkou amplitudou. Jako příklad si uvedeme nejjednodušší Fitz-Hughův-Nagumův model neuronu.

$$\begin{aligned}\dot{V} &= V - \frac{1}{3}V^3 - W + i, \\ \dot{W} &= a(bV - cW + d),\end{aligned}$$

kde V je membránový potenciál, W je proměnná související s návratem, i je dodávaný proud a a, b, c, d jsou parametry. Všimněte si, že změna napětí V na membráně axonu popsaná první rovnicí má zase tvar esovité křivky. Ostatní parametry i stavová proměnná W vycházejí z popisu kinetiky chemických reakcí na membráně axonu (přenos signálu je zprostředkován změnami koncentrací iontů K^+ , Na^+ , Cl^- a anionty bílkovin), $a, b, c > 0$. Druhá rovnice je obnovovací, má pomalejší odezvu (proto je zde ponechán parametr a , který má malou hodnotu) a umožňuje vznik impulzu, který následně ukončí.

Obrázky 8 a 9 demonstrují, proč neuron odpovídá vysíláním oscilujícího signálu jen pro určité hodnoty dodávaného proudu i . Rovnováha zakreslená vzhledem

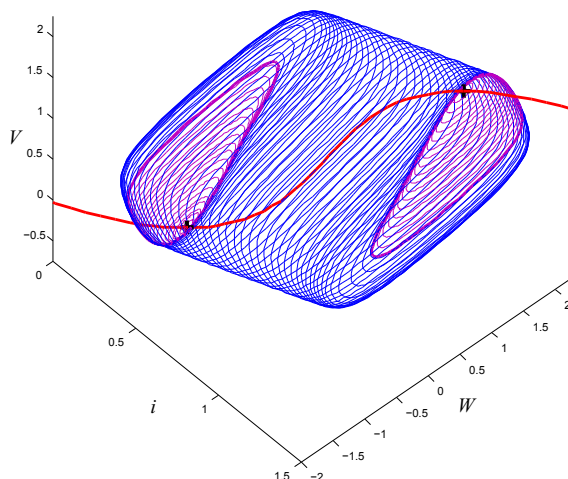


Obrázek 8. Fázové portréty pro $a = 0.2$, $b = 1$, $c = 0.8$, $d = 0.7$, z [5].

k parametru i jako červená křivka $[V(i), W(i)]$ prochází dvěma subkritickými Hopfovými bifurkacemi. Růžové cykly jsou ale nestabilní a systém se na nich neustaluje, nikdy je tedy nepozorujeme. Pozorujeme pouze výrazné oscilace odpovídající modrým cyklům, nebo rovnováhu. Dokud se nezvýší proud do dostatečné hodnoty, neuron nereaguje, pokud je proud příliš velký, také ne.

3.2. Zánik oscilací na sedle

Vznik limitních cyklů lze často pozorovat i v populačních modelech predátor-kořist. Systémy tohoto typu mají často v přípustné nezáporné oblasti stavového prostoru sedlový bod. Významné trajektorie, které se v blízkosti sedla rovnováže limitně přibližují pro $t \rightarrow \pm\infty$, mají důležité postavení i z hlediska aplikací, ať už jde o spojité nebo diskrétní systémy. Mohou totiž oddělovat části stavového prostoru a separovat tak oblasti, ve kterých mají trajektorie naprosto odlišné dynamické vlastnosti. Sedlová trajektorie také od toho získala jméno separatrix. Na separatrix sedla se tak může (a často musí) rozpadnout i limitní cyklus. Například u modelů typu predátor-kořist tak může znenadání dojít k zániku velkých oscilací a k významné změně ve velikosti populací, dokonce i k vymření některého druhu, přičemž roli v takové změně dynamiky může hrát množství faktorů od způsobu predace po evoluční tlak, a teorie bifurkací je schopna některé tyto vazby rozklíčovat.



Obrázek 9. Cykly vznikající na varietě rovnováh pro $a = 0.2$, $b = 1$, $c = 0.8$, $d = 0.7$, z [5].

Z obrovského množství článků v této oblasti si zde dovoluji vložit několik odkazů na články, jejichž jsem autorkou nebo spoluautorkou [10, 11, 3, 9]. Studium takových globálních bifurkací je obtížnější a využívá většinou kontinuálních numerických metod. Vzhledem k jejich úzké souvislosti s lokálními bifurkacemi vyšší kodimenze ale existují i metody, které využívají analytický přístup např. pomocí využití Gröbnerových bazí [4]. Tento přístup umožňuje částečně zautomatizovat nalezení důležitých bifurkačních variet u systémů (1.1) a (1.2) s funkcí \mathbf{f} ve tvaru polynomu nebo racionální lomené funkce a umožnit provádět alespoň částečnou bifurkační analýzu dynamických systémů širšímu okruhu lidí, nikoliv pouze specializovaným matematikům. Ukazuje se totiž, že právě takové systémy vystupují v popisech biochemických reakcí v buňkách nebo ve zmíněných modelech populační biologie či neurovědy a pochopení závislosti změn dynamiky na změnách parametrů dynamického systému je pro ně klíčové.

3.3. Ohyb variety cyklů

Pravděpodobně jste si všimli, že v příkladu subkritické Hopfovy bifurkace u modelu neuronu došlo k ohybu variety, která příslušela limitním cyklům. Fakticky lze přejít od studia cyklů chytrým způsobem ke studiu rovnováh zobrazení. Pokud totiž provedeme transversální řez limitním cyklem (v prostoru stavových proměnných), můžeme se na trajektorie v jeho blízkosti dívat jako na iterace zobrazení, které je dáno průsečíkem trajektorie s tímto řezem. Tato úvaha je geniální a stejně geniální byl její autor Henri Poincaré. Ten ve studiu dynamických systémů předběhl dobu o mnoho desítek let.

Fakticky tak můžeme aplikovat lokální teorii pro pevné body (rovnováhy) zobrazení na cykly. Vznik nebo zánik dvojice stabilního a nestabilního pevného bodu

Poincarého zobrazení⁴ generickou fold bifurkací (ohybem) tak dává vzniknout nebo zaniknout příslušnému stabilnímu a nestabilnímu cyklu přesně tak, jak to vidíme na obr. 9.

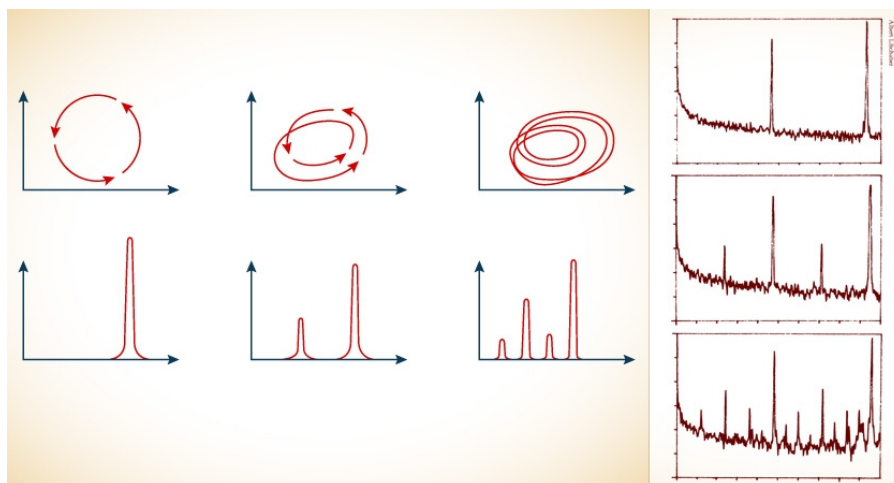
4. CHAOTICKÁ DYNAMIKA

Poincarého zobrazení cyklu může ale procházet i jinými typy diskretních bifurkací. Výše uvedený ohyb odpovídá vlastnímu číslu 1 Poincarého zobrazení (mluvíme často o multiplikátoru cyklu), ale ke změnám dynamiky dochází i v jiných případech přechodu hranice jednotkového kruhu. Pokud vlastní číslo přejde přes hodnotu -1 , vzniká tzv. flip bifurkace Poincarého zobrazení. Flip bifurkace zobrazení je lokální bifurkací pevného bodu, kdy vlastní číslo zobrazení je rovno jedné až po dvou iteracích. Vzniká proto cyklus zobrazení délky 2 z cyklu délky 1, jinak řečeno pevný bod zobrazení se rozpadne do oscilující dvojice bodů. Pokud studujeme spojitě oscilace pomocí Poincarého zobrazení, pak tento vznik 2 cyklu Poincarého zobrazení znamená, že i u limitního cyklu spojitě dynamického systému dochází ke zdvojení periody, přičemž z topologického pohledu je zdvojený cyklus hranicí Möbiova proužku. Generická flip bifurkace ale nekončí jedním zdvojením. Pokud při změně parametru dochází k přechodu přes -1 zevnitř jednotkového kruhu ven, pak multiplikátor zdvojeného cyklu bude také snižovat svou hodnotu z hodnoty 1 a může zase přejít -1 a vznikne 4-cyklus, pak 8-cyklus, a tímto způsobem postupně dojde ke zdvojování periody – k tzv. Feigenbaumově kaskádě bifurkací, která je velmi častou cestou ke vzniku chaotického nepředvídatelného chování u dynamických systémů závislých na parametrech. Chaotická dynamika je velice citlivá na počáteční podmínky. Malá změna v počátečních podmínkách totiž vede k exponenciálně rostoucí změně vzdáleností původní a perturbované trajektorie a pro tento jev se vžil označení „efekt motýlích křídel“. Tvůrce slavného modelu Edward Lorenz totiž na jedné své přednášce přiblížil tento jev v dynamice počasí přiřovnáním, že zamávání křídel motýla v Brazílii může způsobit tornádo v Texasu. Je nutno dodat, že právě tento jev znemožňuje jak dlouhodobé předpovědi počasí, tak mnohé další predikce. Míru divergence blízkých trajektorií lze ovšem měřit tzv. maximálním Ljapunovovým exponentem a tak získat alespoň horizont prediktability, tedy časový úsek, ve kterém jsme ochotni chybu predikce akceptovat. Vznik deterministické chaotické dynamiky kaskádou zdvojování periody je typický a nalezneme jej v mnoha aplikacích.

Slavným a historicky velmi důležitým experimentem se stal pokus Alberta Libchabera (obr. 10). V roce 1977 vytvořil nerezový válec, do kterého vložil kapalné hélium a spodní plochu válce zahříval. Experimentálně pak ověřil, že turbulentní proudění, které vzniká v kapalném héliu poté, co se rozpadne základní konvekční oscilace, vytváří právě onu kaskádu zdvojování periody. V roce 1982 pak publikoval v [8] podobný pokus s rtutí, kde dokonce změřil odhad Feigenbaumem teoreticky odvozené konstanty, která nezávisí na tvaru systému a je pro všechny kaskády zdvojování periody totožná. V rotujících konvektivních proudech rtuti se

⁴Poincarého zobrazení je to výše popsané geniální zobrazení prvního návratu definované na transverzálním řezu cyklem.

totiž indukuje stejnosměrné magnetické pole, které bylo měřitelné pomocí tlumení elektrických oscilátorů principem frekvenční analýzy.



Obrázek 10. Zdvojování periody v experimentu z Libchaberova článku [8].

Za posledních pět dekad došlo díky objevu všudypřítomnosti chaosu k novému pohledu na mnoho oblastí. Naleznete třeba články o chaotické dynamice v neurovědě. Zdá se, že v mozku je chaos žádaný (!) a naopak stabilní periodická dynamika je nežádaný stav – epileptický záchvat [12]. Excitabilní buňky v srdečním svalu pracují synchronně periodicky a chaotická dynamika vede k fibrilaci srdce [14]. Chaotické dynamiky ve Vesmíru a Sluneční soustavě se s předstihem dotkl už sám Poincaré, ač netušil a nemohl ještě tušit její šíři. Dnes je popsána a vysvětlena chaotická rotace Saturnova měsíce Hyperionu a osy rotace Marsu, NASA pomocí znalosti chaotické dynamiky poslala sondu ISEE-3/ICE již v roce 1985 téměř bez paliva na cestu ke kometě, Saturnovy prstence se zkoumají pro jejich fraktální strukturu chaotického atraktoru [7], dokonce je spočten maximální Ljapunovův exponent pro Sluneční soustavu [6]. Na základě Ljapunovova exponentu pak lze odhadovat prediktabilitu systému: rotaci Hyperionu na 36 dní nebo vychýlení osy rotace Marsu a stabilitu Sluneční soustavy na 5 milionů let.

Pokud si chcete doma pohrát, můžete si vyzkoušet pokus s vodovodním kohoutkem. Není to úplně jednoduché, nehodí se k tomu páková baterie, ale naopak starý dobrý (ideálně dokonce i kapající) kohoutek je dostačujícím laboratorním vybavením. Pokud je kohoutek zavřený, ale lehce nedovírá, voda kape. Kap, ticho, kap, ticho, kap, ticho. Dokáže to být docela rušivý periodický zvuk. Stále stejné kap a ticho. Kap a ... to je cyklus (délky 1). Pokud budete dostatečně obratní a kohoutek maličko povolíte, bude kapat jinak. Kap kap ticho kap kap ticho. Pak snad dokážete nastavit i cyklus čtyř kapek ... Rychle totiž začne kapat aperiodicky. Právě vidíte a slyšíte chaotický atraktor, jestli nevěříte, podívejte se do [15].

5. ZÁVĚR

V článku bylo ilustrováno, jak lze vysvětlit různé dynamické nelineární jevy. Uvedené významné aplikace v různých oborech vědy snad dávají tušit, jak může být teorie bifurkací a chaosu prakticky využita. Aby nebyl čtenář zdrčen šíří tématu, chybí zde zcela vysvětlení vzniku dynamiky na invariantním toru Neimark-Sackerovou bifurkací, která úzce souvisí se synchronizacemi oscilací, vázanou rotací planet, cirkadiánními biorytmy, supravodivými Josephsonovými spoji nebo sítěmi spřažených neuronů. Tak třeba příště.

REFERENCE

- [1] A. Chasalevris: *Stability and Hopf bifurcations in rotor-bearing-foundation systems of turbines and generators*, Tribology International, 145:106154, 2020.
- [2] S. Di Nino, A. Luongo: *Nonlinear aeroelastic in-plane behavior of suspension bridges under steady wind flow*, Applied Sciences, 10(5):1689, 2020.
- [3] V. Hajnová, L. Příbylová: *Two-parameter bifurcations in LPA model*, Journal of Mathematical Biology, 75(5):1235–1251, 2017.
- [4] V. Hajnová, L. Příbylová: *Bifurcation manifolds in predator-prey models computed by Gröbner basis method*, Mathematical Biosciences, 312:1–7, 2019.
- [5] V. Hajnová, L. Příbylová, et al: *Biological and physiological phenomena in view of applied bifurcation theory*, 2018.
- [6] J. Laskar: *Large scale chaos and marginal stability in the solar system*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 64(1):115–162, 1996.
- [7] J. Li, M. Ostoj-Starzewski: *Edges of Saturn's rings are fractal*, SpringerPlus, 4(1):1–8, 2015.
- [8] A Libchaber, C Laroche, and Stephan Fauve. Period doubling cascade in mercury, a quantitative measurement. *Journal de Physique Lettres*, 43(7):211–216, 1982.
- [9] L. Příbylová: *Regime shifts caused by adaptive dynamics in prey–predator models and their relationship with intraspecific competition*, Ecological Complexity, 36:48–56, 2018.
- [10] L. Příbylová, L. Berec: *Predator interference and stability of predator–prey dynamics*, Journal of Mathematical Biology, 71(2):301–323, 2015.
- [11] L. Příbylová, A. Peniašková: *Foraging facilitation among predators and its impact on the stability of predator–prey dynamics*, Ecological Complexity, 29:30–39, 2017.
- [12] S. J. Schiff, K. Jerger, D. H. Duong, T. Chang, M. L. Spano, W. L. Ditto: *Controlling chaos in the brain*, Nature, 370(6491):615–620, 1994.
- [13] H. Shukla, M. J. Patil: *Nonlinear state feedback control design to eliminate subcritical limit cycle oscillations in aeroelastic systems*, Nonlinear Dynamics, 88(3):1599–1614, 2017.
- [14] M. Small, D. Yu, R. G. Harrison: *Observation of a period doubling bifurcation during onset of human ventricular fibrillation*, International Journal of Bifurcation and Chaos, 13(03):743–754, 2003.
- [15] H. N. Núñez Yépez, A. L. Salas Brito, C. A. Vargas, L. A. Vicente: *Chaos in a dripping faucet*, European Journal of Physics, 10(2):99, 1989.

Lenka Příbylová, Ústav matematiky a statistiky, Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Koltářská 2, 611 37 Brno, Česká republika,
e-mail: pribylova@math.muni.cz

