

GRAFOVÁ ROZŠÍŘENÍ NĚKTERÝCH DYNAMICKÝCH MODELŮ

RADKA SKÁCELOVÁ

ABSTRAKT. Tento článek se zabývá rozšířením dynamických modelů o možnost cestování v prostoru pomocí teorie grafů. Nejprve je uvedeno obecné rozšíření užitím konečného souvislého grafu a jeho interpretace pomocí Laplaceovy matice. Dále je tento obecný přístup aplikován na Lotkvy-Volterrovy modely dravec-kořist a konkurence a na epidemiologický model SIR. Podrobněji jsou analyzována prostorová homogenní a heterogenní stacionární řešení grafového modelu dravec-kořist z hlediska existence a stability. Stabilita homogenních stacionárních řešení je zkoumána také z hlediska obecného planárního modelu.

1. ÚVOD

Když popisujeme reálné problémy pomocí soustav diferenciálních rovnic, zpravidla musíme uvažovat jisté idealizace. V případě popisu situace, kdy se zkoumané subjekty, ať už zvířata či lidé, pohybují a interagují spolu, se předpokládá izolace oblastí, na které se subjekty vyskytují. Toto je bohužel značné omezení. Abychom se více přiblížili skutečnému chování, umožníme proto zkoumaným subjektům pohyb v prostoru, což znamená zavedení možnosti migrace/cestování mezi různými oblastmi. Vhodným aparátem pro požadované zobecnění je teorie grafů. V případě zvířecích populací si situaci můžeme představit tak, že existuje systém ostrovů, které jsou navzájem pospojovány mosty, přičemž tyto mosty umožňují přesun populace z jednoho ostrova na druhý. Nebo systém lesů, kdy místo mostů můžeme uvažovat, že zvíře je, či není schopné dostat se do lesa sousedního. Analogicky můžeme vzít v úvahu cestování člověka např. mezi obcemi či státy. I když se musí i v takovém modelu uvažovat idealizace, toto rozšíření je velkým krokem kupředu.

2. ZAVEDENÍ OBECNÉHO GRAFOVÉHO ROZŠÍŘENÍ

Klasický přístup analýzy modelu spočívá v tom, že máme autonomní soustavu m diferenciálních rovnic popisující daný model, jež můžeme zapsat ve tvaru

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}), \quad (2.1)$$

2010 MSC. Primární 92B25,34D20,37C25.

Klíčová slova. Lotkuv-Volterrov model, autonomní systém diferenciálních rovnic, stacionární bod, stabilita, teorie grafů, Laplaceova matice, SIR model.

Článek vznikl na základě bakalářské práce autorky v oboru Matematické inženýrství na FSI VUT v Brně. Vedoucím práce byl Jan Čermák z Ústavu matematiky FSI VUT v Brně.

kde složky vektoru \mathbf{f} jsou definovány v tzv. fázovém prostoru $\Omega \in \mathbb{R}^m$ a \mathbf{y} je m -rozměrný vektor, jehož jednotlivé složky y_k jsou proměnné představující různé druhy zvířecích populací, popřípadě různé skupiny osob.

Obeční model (2.1) se nyní rozšíří o možnost migrace všech jedinců. Zavedeme množinu $V = \{1, \dots, n\}$, která reprezentuje soubor oblastí v prostoru, ve kterých pozorování jedinci žijí. Může se jednat například o rybníky, ostrovy, lesy, města či státy, přičemž v každé oblasti spolu jednotlivé druhy interagují jako v klasickém modelu. Dále je třeba, aby bylo možné mezi oblastmi cestovat. K tomu se zavádí množina E tak, že existuje-li cesta mezi oblastmi i, j , pak $\{i, j\} \in E$. Dvojice právě zavedených množin $G = (V, E)$ pak reprezentuje konečný graf. Prvky z množiny V proto nazýváme vrcholy grafu G a prvky množiny E představují jeho hrany. Důležitým předpokladem je souvislost grafu G (mezi každými dvěma vrcholy existuje taková posloupnost vrcholů a hran, že se dostaneme z jednoho vrcholu do druhého). Dále se zavádí difuzní koeficienty $d_{y_k} \geq 0$, které představují intenzitu migrace konkrétního druhu / skupiny lidí y_k , $k \in \{1, \dots, m\}$.

Předpokládáme-li, že migrace jedinců k -tého druhu z jednoho vrcholu do druhého je úměrná rozdílu jejich počtů v sousedících vrcholech, pak lze grafové rozšíření zapsat ve tvaru

$$y'_{ki} = d_{y_k} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (y_{kj} - y_{ki}) + f_{ki}(y_{11}, \dots, y_{1n}, \dots, y_{m1}, \dots, y_{mn}) \quad (2.2)$$

pro $k \in \{1, \dots, m\}$ a $i \in V$, kde $\mathcal{N}(i)$ představuje množinu vrcholů sousedících s vrcholem i , přičemž prvek y_{ki} představuje populaci k -tého druhu na i -tém vrcholu a funkce f_{ki} ovlivňuje dynamiku toho prvku.

Systém (2.2) lze zapsat také jako soustavu rovnic v maticovém tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'_1 &= -d_{y_1} L \mathbf{y}_1 + \mathbf{f}_1(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m), \\ &\vdots \\ \mathbf{y}'_m &= -d_{y_m} L \mathbf{y}_m + \mathbf{f}_m(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m), \end{aligned} \quad (2.3)$$

kde $\mathbf{y}_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{f}_k: \mathbb{R}^{mn} \rightarrow \mathbb{R}^n$ jsou dány vztahy

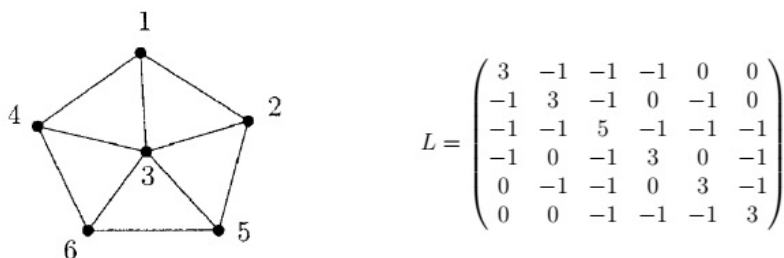
$$\mathbf{y}_k = \begin{pmatrix} y_{k1} \\ \vdots \\ y_{kn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_k = \begin{pmatrix} f_{k1} \\ \vdots \\ f_{kn} \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, m.$$

Matice L vystupující v (2.3) je Laplaceova matice. Tato matice nám umožňuje graf jednoduše zaznamenat a je definována jako rozdíl dvou matic $L = \Delta - S$. Tyto matice si nyní popíšeme.

Matice $\Delta = (\delta_{ij})_{i,j=1}^n$ je diagonální matice popisující graf s množinou vrcholů $V = \{1, \dots, n\}$, na jejíž pozici δ_{ii} je stupeň vrcholu i , $i \in V$, přičemž stupněm vrcholu i v grafu G rozumíme počet hran vycházejících z tohoto vrcholu.

Matice $S = (s_{ij})_{i,j=1}^n$ nazýváme matice sousednosti grafu G . Tato matice má na pozici s_{ij} číslo 1, jestliže existuje hrana spojující vrcholy i a j grafu G , tj. existuje-li $\{i, j\} \in E$. V opačném případě má na dané pozici 0.

Pro lepší porozumění pojmu Laplaceova matice je na obrázku 1 zobrazena Laplaceova matice pro konkrétní graf s 6-ti vrcholy.



Obrázek 1. Vlevo reprezentace konečného souvislého grafu, vpravo jeho příslušná Laplaceova matice.

Pro Laplaceovy matice platí následující věta.

Věta 2.1. *Nechť $G = (V, E)$ je graf s n vrcholy a L jeho Laplaceova matice. Potom pro tuto matici platí následující:*

1. L je symetrická a pozitivně semidefinitní;
2. součet prvků každého jejího řádku a každého sloupce je roven nule;
3. algebraické doplňky každých dvou prvků matice L se rovnají.

Z této věty vyplývají některé užitečné vlastnosti Laplaceovy matice. Dle vlastnosti 1 jsou všechna vlastní čísla Laplaceovy matice reálná a nezáporná. Z vlastnosti 2 navíc dostáváme, že tato matice má vždy nulové vlastní číslo, přičemž příslušný vlastní vektor má všechny složky stejné.

Více informací o Laplaceových maticích lze nalézt např. v [4, 5].

3. VYBRANÉ GRAFOVÉ MODELY

V této kapitole bude ukázáno, jak aplikovat obecně odvozený model z předchozí kapitoly na tři konkrétní modely, jejichž význam bude v každé sekci vysvětlen. Podrobnější informace o těchto modelech lze nalézt například v [3].

3.1. Model dravec-kořist

Obecný přístup nyní aplikujeme na Lotkúv-Volterrúv model dravec-kořist s omezenou kapacitou prostředí. Tento model vyjadřuje situaci, kdy se dvě populace vzájemně ovlivňují a to tak, že jeden druh je potravou pro druhý druh, jako například dvojice ryba-žralok či zajíc-rys. V tomto modelu se předpokládá, že se dravec živí výhradně kořistí a tedy nemůže přežít, jakmile je kořist zcela vyhubena. Kořist je naopak pozitivně ovlivněna nepřítomností dravce, ale musíme zde předpokládat omezenou kapacitu prostředí, aby počet jedinců nerostl nade všechny meze – tato myšlenka je vyjádřena pomocí vnitrodruhové konkurence.

V dalším označíme $y_1 = N$ jako velikost populace kořisti a $y_2 = P$ velikost populace dravce.

Klasický model je tvaru

$$\begin{aligned} N'(t) &= (1 - N(t) - aP(t))N(t), \\ P'(t) &= (-c + bN(t) - P(t))P(t). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Konstanty, které se v něm vyskytují, jsou tvaru $a = \frac{\gamma_N}{\alpha_P}$, $b = \frac{\gamma_P}{\alpha_N}$, $c = \frac{\varepsilon_P}{\varepsilon_N}$, přičemž α představuje míru vnitrodruhové konkurence, ε specifickou míru růstu daného druhu při jeho izolaci a naopak γ specifickou míru růstu za přítomnosti druhého druhu.

V tomto modelu se typicky předpokládá, že se oba druhy vyskytují na jedné omezené oblasti. Toto omezení však neodpovídá reálné situaci, a proto v následujícím provedeme rozšíření pomocí teorie grafů. V takovém případě už budeme mít vícero uzavřených oblastí, mezi kterými budou moci oba druhy cestovat, přičemž se předpokládá, že každou cestu mohou využít oba druhy. Nemůže se tedy stát například to, že bude existovat systém ostrovů (bez mostů), kde dravec je suchozemský jedinec, který je neschopný mezi ostrovy přecházet, ale kořisti by byli ptáci, již mohou mezi ostrovy přelétat (tj. stále pro ně jakési imaginární mosty existují). Dále se předpokládá, že všechny trasy jsou stejně náročné. Nemůže tedy nastat situace, kdy by některá cesta byla využívána častěji z důvodu její menší náročnosti. Zavedení různé obtížnosti tras by se dalo vyjádřit pomocí váženého grafu, avšak tím se nebudeme momentálně zabývat.

V dalším budeme uvažovat difuzní koeficienty d_N, d_P . Tyto koeficienty můžeme chápat jako potřebu daného druhu migrovat. Čím větší je tento koeficient, tím je větší šance, že jedinci daného druhu budou cestovat. Naopak, kdyby byl tento koeficient roven nule, pak nedochází k žádné migraci a každý vrchol grafu se může vyšetřovat separátně na základě klasického modelu dravec-kořist. Navíc předpokládáme, že migrace jedinců z jednoho vrcholu do druhého je úměrná rozdílu populací daného druhu v obou vrcholech.

Nyní již napíšeme konkrétní tvar grafového rozšíření. Pomocí sumačního zápisu (2.2) se dá vyjádřit jako

$$\begin{aligned} N'_i(t) &= d_N \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (N_j(t) - N_i(t)) + N_i(t)(1 - N_i(t) - aP_i(t)), \\ P'_i(t) &= d_P \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (P_j(t) - P_i(t)) + P_i(t)(-c + bN_i(t) - P_i(t)) \end{aligned} \quad (3.2)$$

pro $i \in V$. V případě využití Laplaceovy matice, tj. vztahu (2.3), má pak grafový model tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{N}'(t) &= -d_N L\mathbf{N}(t) + \mathbf{f}_N(\mathbf{N}(t), \mathbf{P}(t)), \\ \mathbf{P}'(t) &= -d_P L\mathbf{P}(t) + \mathbf{f}_P(\mathbf{N}(t), \mathbf{P}(t)), \end{aligned} \quad (3.3)$$

kde \mathbf{N} , \mathbf{P} jsou nyní n rozměrné sloupcové vektory o složkách $N_i, P_i, i \in V$ a

$$\mathbf{f}_N(\mathbf{N}, \mathbf{P}) = \begin{pmatrix} N_1(1 - N_1 - aP_1) \\ \vdots \\ N_n(1 - N_n - aP_n) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_P(\mathbf{N}, \mathbf{P}) = \begin{pmatrix} P_1(-c + bN_1 - P_1) \\ \vdots \\ P_n(-c + bN_n - P_n) \end{pmatrix},$$

přičemž $\mathbf{f}_N, \mathbf{f}_P: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

3.2. Model konkurence

Model konkurence popisuje soužití dvou druhů, které se navzájem negativně ovlivňují. Může se jednat například o soupeření o potravu či vytlačování jednoho druhu v důsledku zabírání území druhým druhem.

Stejně jako u předchozího modelu dravec-kořist, i zde se předpokládá omezená kapacita prostředí. Obzvláště proto, že u modelu konkurence se často stává, že jeden druh vyhubí druhý druh. Pak by totiž populace druhu, který zvítězil, mohla neomezeně růst, což ale neodpovídá realitě.

Klasický model konkurence s omezenou kapacitou prostředí je popsán soustavou dvou diferenciálních rovnic tvaru

$$\begin{aligned} N'(t) &= \rho_1 N(t)(1 - N(t) - \alpha P(t)), \\ P'(t) &= \rho_2 P(t)(1 - \beta N(t) - P(t)), \end{aligned}$$

kde $\rho_1, \rho_2, \alpha, \beta > 0$ jsou parametry a proměnné N, P představují jednotlivé soutěžící druhy.

Parametry ρ představují specifickou míru porodnosti populace daného druhu. Parametr α je vyjádřen jako $\alpha = \frac{\alpha^* K_2}{K_1}$, přičemž α^* je specifická míra úbytku 1. druhu vlivem soutěživosti 2. druhu, K_1 je kapacita prostředí pro 1. druh a K_2 kapacita prostředí pro 2. druh. Parametr β je analogicky $\beta = \frac{\beta^* K_1}{K_2}$, kde β^* je specifická míra úbytku 2. druhu vlivem soutěživosti 1. druhu.

I u modelu konkurence chceme zajistit možnost pohybu v prostoru. Zde opět musíme brát v úvahu, že není možné povolit libovolný pohyb, nýbrž pohyb mezi několika oblastmi, z nichž každou uvažujeme idealizovanou. Jako takové oblasti si můžeme představit různé rybníky, ostrovy v moři, ale například i sousedící lesy, přičemž cesty mezi nimi musíme předpokládat opět idealizované. Potom například nemůže dojít ke snížení počtu populace v závislosti na náročné cestě. Navíc se ani nepředpokládá, že by přechod do sousedící oblasti zabíral určitý časový úsek.

Při sestavování grafového rozšíření pak stejně jako u modelu dravec-kořist uvažujeme difuzní koeficienty vyjadřující míru migrace jednotlivých druhů, která je navíc úměrná rozdílu populací na sousedících vrcholech. Potom na základě (2.2) máme grafový model tvaru

$$\begin{aligned} N'_i(t) &= d_N \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (N_j(t) - N_i(t)) + \rho_1 N_i(t)(1 - N_i(t) - \alpha P_i(t)), \\ P'_i(t) &= d_P \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (P_j(t) - P_i(t)) + \rho_2 P_i(t)(1 - P_i(t) - \beta N_i(t)) \end{aligned} \quad (3.4)$$

pro všechna $i \in V$, $V = \{1, \dots, n\}$. Dostáváme tak $2n$ rovnic popisujících dynamiku modelu při zavedení migrace.

Systém (3.4) lze opět přepsat do vektorového tvaru

$$\begin{aligned}\mathbf{N}'(t) &= -d_N L \mathbf{N}(t) + \rho_1 \mathbf{f}_N(\mathbf{N}(t), \mathbf{P}(t)), \\ \mathbf{P}'(t) &= -d_P L \mathbf{P}(t) + \rho_2 \mathbf{f}_P(\mathbf{N}(t), \mathbf{P}(t)),\end{aligned}$$

kde \mathbf{N} , \mathbf{P} jsou n rozměrné sloupcové vektory o složkách N_i, P_i , $i \in V$, a

$$\mathbf{f}_N(\mathbf{N}, \mathbf{P}) = \begin{pmatrix} N_1(1 - N_1 - \alpha P_1) \\ \vdots \\ N_n(1 - N_n - \alpha P_n) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_P(\mathbf{N}, \mathbf{P}) = \begin{pmatrix} P_1(1 - P_1 - \beta N_1) \\ \vdots \\ P_n(1 - P_n - \beta N_n) \end{pmatrix},$$

přičemž $\mathbf{f}_N, \mathbf{f}_P: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ a L je příslušná Laplaceova matice popisující souvislý graf.

Analýza klasického modelu konkurence i jeho grafového rozšíření je detailně provedena v článku [2].

3.3. SIR model

V této sekci se pokusíme aplikovat obecný přístup ke grafovému rozšíření na známý epidemiologický model SIR. V tomto modelu předpokládáme, že každý člen populace spadá do jedné z následujících tří kategorií:

- S ... populace náchylná k infekci (netrpí danou chorobu, ale jedinci jsou schopni onemocnět),
- I ... populace, která je infikovaná a schopná infekci přenášet dále,
- R ... populace, která onemocněla, ale už nešíří nákazu dále, ať už z důvodu izolace, získání trvalé imunity, či smrti v důsledku prodělání nemoci.

Velikosti těchto populací jsou závislé na čase t a v každém časovém okamžiku platí, že

$$S(t) + I(t) + R(t) = N, \quad (3.5)$$

kde $N > 0$ je celkový konstantní počet populace.

Dále předpokládáme, že je daná populace homogenní. To znamená, že pravděpodobnost kontaktu libovolných dvou jedinců je stejná, přičemž možnost nákazy zdravého jedince od infikovaného je také totožná. Nebere se tedy v potaz věk, předchozí zdravotní stav jedinců ani například délka setkání dvou lidí.

Označí-li se dále $\beta > 0$ jako koeficient šíření choroby a $\nu > 0$ koeficient značící rychlost, se kterou přecházejí jedinci ze skupiny I do R , pak klasický SIR model můžeme popsat pomocí tří diferenciálních rovnic jako

$$\begin{aligned}S'(t) &= -\beta S(t)I(t), \\ I'(t) &= \beta S(t)I(t) - \nu I(t), \\ R'(t) &= \nu I(t),\end{aligned}$$

přičemž se předpokládá, že $S(0) = S_0 > 0$, $I(0) = I_0 > 0$ a $R(0) = 0$.

Na základě vzorců (2.2) a (2.3) provedeme stejně jako u modelů dravec-kořist a konkurence grafové rozšíření. To je v případě sumačního zápisu tvaru

$$\begin{aligned} S'_i(t) &= d_S \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (S_j(t) - S_i(t)) - \beta S_i(t) I_i(t), \\ I'_i(t) &= d_I \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (I_j(t) - I_i(t)) + \beta S_i(t) I_i(t) - \nu I_i(t), \\ R'_i(t) &= d_R \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (R_j(t) - R_i(t)) + \nu I_i(t) \end{aligned}$$

pro $i \in V$ a a soustava maticových rovnic má tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{S}'(t) &= -d_S L \mathbf{S}(t) + \mathbf{f}_S(\mathbf{S}(t), \mathbf{I}(t)), \\ \mathbf{I}'(t) &= -d_I L \mathbf{I}(t) + \mathbf{f}_I(\mathbf{S}(t), \mathbf{I}(t)), \\ \mathbf{R}'(t) &= -d_R L \mathbf{R}(t) + \mathbf{f}_R(\mathbf{I}(t)), \end{aligned}$$

kde \mathbf{S} , \mathbf{I} a \mathbf{R} jsou n rozměrné sloupcové vektory a

$$\mathbf{f}_S(\mathbf{S}, \mathbf{I}) = -\beta \begin{pmatrix} S_1 I_1 \\ \vdots \\ S_n I_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_I(\mathbf{S}, \mathbf{I}) = \begin{pmatrix} \beta S_1 I_1 - \nu I_1 \\ \vdots \\ \beta S_n I_n - \nu I_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_R(\mathbf{I}) = \nu \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix}.$$

Při takovém grafovém rozšíření tedy předpokládáme, že cestování probíhá nezávisle na zdravotním statusu jedince, to jest ať už je člověk v jakékoli ze tří skupin, může se uskutečnit jeho pohyb v prostoru. Tento pohyb je stejně jako v předchozích modelech úměrný rozdílu jedinců v sousedních oblastech a difuzním koeficientům. Zde už tato podmínka nemusí být tak přímočará jako u Lotkových-Volterrových populačních modelů dravec-kořist a konkurence. Můžeme si ji představit například tak, že v každé oblasti existuje jen omezený počet lůžek a aby byla zajištěna dostatečná lékařská péče, je snaha o to, aby byl v každé oblasti stejný počet nakažených jedinců. Tu samou myšlenku můžeme aplikovat i na skupinu R , kde se mimo jiné nacházejí jedinci v izolaci, to jest jejich vyrovnaný počet umožní například kvalitnější lékařskou péči.

Celkově si toto vyrovnavání počtů můžeme představit tak, že v každé oblasti je konstantní počet obytných prostor (do toho můžeme započítat jak domy pro lidi náchylné k nemoci, vyléčené, ale i nemocniční lůžka) a nepřipouštíme situaci, kdy by byly některé obytné prostory nevyužity, popřípadě by naopak byly obydleny nad limit.

K podmínce (3.5) by se mohlo přistupovat dvojitým způsobem. Buďto budeme předpokládat, že na každém vrcholu je součet populací stejný, tj. $S_i(t) + I_i(t) + R_i(t) = N$ pro všechna $i \in V$, anebo můžeme uvažovat počet sice stále konstantní, ale rozdílný na každém vrcholu. Tím máme na mysli, že na vrcholu i bude na počátku N_i jedinců a tento počet zůstane zachován i v průběhu času.

Analýza grafového modelu SIR může být předmětem dalšího zkoumání. V tomto článku se zaměříme převážně na model dravec-kořist a částečně i na model konkurence.

4. ANALÝZA GRAFOVÉHO MODELU DRAVEC - KOŘIST

Pod analýzou modelu si můžeme představit hledání stacionárních řešení zkoumaného modelu a jejich následné vyšetření z hlediska stability. Na rozdíl od klasického modelu, zde můžeme z kvalitativního hlediska posuzovat dva různé typy řešení – prostorově homogenní stacionární řešení a prostorově heterogenní stacionární řešení. Tato řešení budeme dále převážně nazývat pouze jako homogenní, či heterogenní.

Homogenní řešení $[N_1, P_1, \dots, N_n, P_n] \in \mathbb{R}^{2n}$ systému (3.2) je tvaru $N_i(t) = N^* \geq 0$, $P_i(t) = P^* \geq 0$ pro všechna $i \in V$, $t \geq 0$, kde N^* , P^* se od sebe mohou, ale nemusí lišit. Jinak řečeno, $N_1 = \dots = N_n$ a $P_1 = \dots = P_n$. V opačném případě, tj. existuje-li alespoň jedna dvojice N_i, N_j taková, že $N_i \neq N_j$, popřípadě dvojice P_i, P_j taková, že $P_i \neq P_j$, nazveme toto stacionární řešení heterogenní.

4.1. Homogenní stacionární řešení

Při analýze grafového modelu dravec-kořist se nejprve zaměříme na hledání prostorově homogenních stacionárních řešení.

Dosazením hledaného tvaru řešení do (3.2) a položením pravých stran rovnic rovno 0 zjistíme, že $2n$ -tice $[N^*, P^*, \dots, N^*, P^*]$ může být homogenním řešením systému (3.2) pouze tehdy, je-li zároveň dvojice $[N^*, P^*]$ stacionárním bodem Lotkova-Volterrova modelu s omezenou kapacitou prostředí (3.1).

Řešení tedy mohou být generována body

$$E_0 = [0, -c], \quad E_1 = [0, 0], \quad E_2 = [1, 0], \quad E_3 = \left[\frac{1+ac}{1+ab}, \frac{b-c}{1+ab} \right] \quad (4.1)$$

a pro označení řešení soustavy (3.2) generovaného bodem E_i budeme užívat symbol \mathbf{E}_i . V dalším již nebudeme brát v úvahu bod \mathbf{E}_0 , jelikož při analýze grafového modelu hledáme – stejně jako v případě klasického modelu – pouze řešení nacházející se výhradně v prvním ortantu (ten zachycuje tu část daného prostoru, jehož body mají všechny souřadnice nezáporné).

Nyní se budeme zabývat otázkou stability těchto homogenních řešení. Především je snadné nahlédnout, že je-li E_i nestabilní stacionární bod klasického Lotkova-Volterrova modelu (3.1), potom \mathbf{E}_i je nestabilní homogenní stacionární řešení systému (3.2). Z toho důvodu je bod \mathbf{E}_1 vždy nestabilní.

Otázku stability či nestability $\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ řeší následující tvrzení.

Tvrzení 4.1. *Nechť $\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ jsou výše zavedená homogenní řešení grafového modelu (3.2). Pak*

- \mathbf{E}_2 je nestabilní pro $b > c$ a asymptoticky stabilní pro $b < c$,
- \mathbf{E}_3 nevyšetřujeme pro $b < c$, jelikož se řešení nenachází v prvním ortantu. Pro $b > c$ je potom asymptoticky stabilní, typ řešení je uzel, či ohnisko, a to v závislosti na koeficientech a, b, c .

Pro prokázání tohoto tvrzení vyjádříme Jacobiho matici soustavy (3.2). Využijeme-li jejího tvaru (3.3), pak Jacobiho matici soustavy můžeme vyjádřit jako

$$\begin{pmatrix} -d_N L & 0 \\ 0 & -d_P L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{N,1}}{\partial N_1} & & & \frac{\partial f_{N,1}}{\partial P_1} & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & \frac{\partial f_{N,n}}{\partial N_n} & & & \frac{\partial f_{N,n}}{\partial P_n} \\ \frac{\partial f_{P,1}}{\partial N_1} & & & \frac{\partial f_{P,1}}{\partial P_1} & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & \frac{\partial f_{P,n}}{\partial N_n} & & & \frac{\partial f_{P,n}}{\partial P_n} \end{pmatrix},$$

kde $f_{j,i}$ reprezentuje i -tou složku vektoru f_j , $j \in \{N, P\}$.

Po provedení několika úprav je možno dokázat, že vlastní čísla této matice jsou totožná s vlastními čísly matice, kterou lze vyjádřit jako

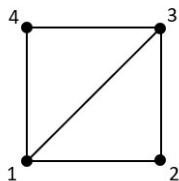
$$J(E_i) + \lambda \begin{pmatrix} -d_N & 0 \\ 0 & -d_P \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

kde $J(E_i)$ představuje Jacobiho matici klasického Lotkova-Volterrova modelu a λ je libovolné vlastní číslo Laplaceovy matice L .

Dosažením konkrétních předpisů $J(E_i)$ pro $i = 2, 3$, vypočtením a analyzováním získaných vlastních čísel se dá dané tvrzení dokázat.

Vidíme tedy, že stabilita homogenních stacionárních řešení je analogická ke stabilitě stacionárních řešení klasického Lotkova-Volterrova modelu s omezenou kapacitou prostředí (3.1).

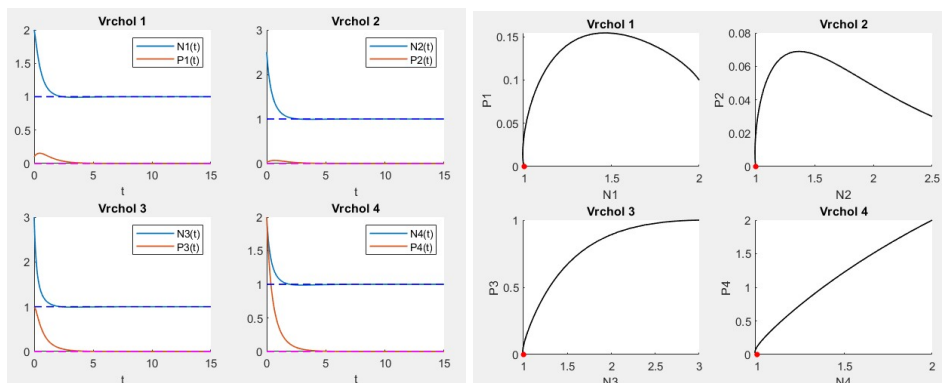
Ukázku chování pro konkrétní hodnoty a konkrétní graf na obrázku 2 můžeme vidět na obrázcích 3, 4.



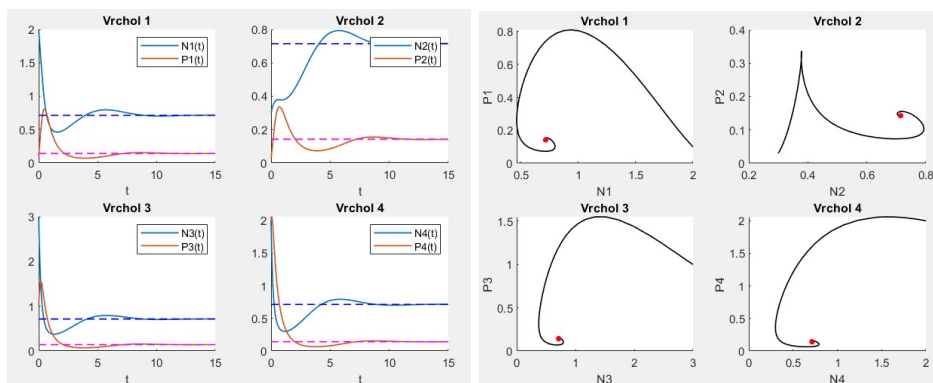
Obrázek 2. Souvislý graf se čtyřmi vrcholy a pěti hranami.

4.2. Heterogenní stacionární řešení

V této sekci se pokusíme zjistit, zda mohou existovat stacionární heterogenní řešení s nezápornými složkami.



Obrázek 3. Vlevo vývoj v čase populace kořisti a dravce pro graf zobrazený na obrázku 2. Přerušovanými čarami vyznačen stacionární bod \mathbf{E}_2 . Zvolené koeficienty: $a = 0.5, b = 1, c = 2, d_N = 0.8, d_P = 0.1$. Vpravo odpovídající fázové trajektorie. Vykresleno v prostředí MATLAB.



Obrázek 4. Vlevo vývoj v čase populace kořisti a dravce pro graf zobrazený na obrázku 2. Přerušovanými čarami vyznačen stacionární bod \mathbf{E}_3 . Zvolené koeficienty: $a = 2, b = 3, c = 2, d_N = 0.03, d_P = 0.5$. Vpravo odpovídající fázové trajektorie. Vykresleno v prostředí MATLAB.

Stacionární řešení modelu získáme řešením algebraické soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 0 &= d_N \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (N_j - N_i) + N_i(1 - N_i - aP_i), \quad i \in V, \\ 0 &= d_P \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (P_j - P_i) + P_i(-c + bN_i - P_i), \quad i \in V. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Z jejího tvaru plyne, že pro nulové hodnoty difuzních koeficientů d_N, d_P se model rozpadne na n nezávislých klasických modelů. Stacionární řešení jsou pak tvaru $[N_1, P_1, \dots, N_n, P_n]$, kde jednotlivé dvojice $[N_i, P_i]$ představují stacionární body klasického modelu dravec-kořist (3.1). Konkrétně se jedná o body E_0, E_1, E_2, E_3 , jejichž tvar nalezneme v (4.1). Počet všech řešení je 4^n , z toho 4 jsou homogenní a $4^n - 4$ heterogenních.

Nyní předpokládejme kladné hodnoty difuzních koeficientů d_N, d_P . Pro tento případ bylo provedeno několik numerických experimentů, a to pro $n = 2, 3$. Žádný z nich existenci heterogenních rovnováh s nezápornými složkami neprokázal. Všechny experimenty vykazovaly podobné závěry jako následující příklad.

Příklad 4.2. *Volíme $a = 1, b = 1, c = 2$ a $d_n = d_P = 0.01$. V obou případech $n = 2, 3$ (zde volíme úplný graf) jsou jediná nezáporná řešení soustavy (4.3) homogenní rovnováhy, a to $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$. Pro volbu $a = 1, b = 2, c = 1$ navíc přibývá homogenní rovnováha \mathbf{E}_3 jako další řešení soustavy (4.3). V každém jiném řešení se nachází alespoň jedna záporná složka.*

Při volbě větších difuzních koeficientů, konkrétně $d_N = d_P \geq 1$, jsou závěry obdobné jako pro případ malých difuzních koeficientů. Rozdíl je v tom, že odpovídající homogenní rovnováhy představují jediná reálná řešení soustavy (4.3) (neexistují tedy již žádné heterogenní rovnováhy, ani s některými zápornými složkami).

Celkově lze tedy formulovat hypotézu, že při problému existence heterogenních rovnováh s nezápornými složkami pro grafový model dravec-kořist stačí rozlišovat, zda jsou difuzní koeficienty nulové, či nikoliv. Při jejich nulovosti pak dostáváme x^n nezáporných řešení, kde n představuje počet vrcholů grafu a $x = 2$ pro volbu koeficientů takovou, že $b < c$, v opačném případě $x = 3$. Při volbě nenulových difuzních koeficientů jsou pak jediná nezáporná řešení homogenní stacionární řešení odpovídající příslušným nezáporným stacionárním bodům.

5. ROZŠÍŘUJÍCÍ ÚVAHY

Získané výsledky nás mohou vést na dvě zajímavé otázky. Za prvé, při analýze homogenních řešení modelu dravec-kořist se zjistilo, že stabilita klasického stacionárního řešení implikuje stabilitu homogenního řešení jím generovaného. Je tomu tak vždy? A za druhé, když neexistuje heterogenní rovnováha s kladnými složkami v modelu dravec-kořist, znamená to, že neexistuje ani v jiných modelech, nebo jsou tu modely takové, kde ji nalézt můžeme? V této kapitole se pokusíme přiblížit odpovědi na tyto otázky.

5.1. Porušení stability grafovým rozšířením

Odpověď na první otázku je pro planární modely podrobněji vypracována v [1]. Zde se omezíme převážně na výsledné vztahy.

Myšlenka spočívá v tom, že vezmeme obecný planární systém

$$\begin{aligned} N'(t) &= f_N(N(t), P(t)), \\ P'(t) &= f_P(N(t), P(t)), \end{aligned} \tag{5.1}$$

kde $f_N, f_P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a analýzou Jacobiho matic klasického i příslušného grafového modelu získáme hledané vztahy.

Jacobiho matici $J(E)$ planárního klasického modelu uvažujeme tvaru

$$J(E) = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix},$$

kde $p, q, r, s \in \mathbb{R}$.

Pro grafový model lze Jacobiho matici přepsat opět na tvar (4.2). Spektrum této matice (tj. množina všech jejích vlastních čísel) je přitom rovna sjednocení spekter matic tvaru

$$\widetilde{J(E)}_\lambda = J(E) + \lambda \begin{pmatrix} -d_N & 0 \\ 0 & -d_P \end{pmatrix},$$

kde za λ postupně dosazujeme všechna vlastní čísla Laplaceovy matice L .

Analýzou vlastních čísel získáme dvě tvrzení.

Tvrzení 5.1. *Rovnováha E soustavy (5.1) bez grafového rozšíření a homogenní rovnováha \mathbf{E} příslušné grafové soustavy jsou současně asymptoticky stabilní právě tehdy, když pro prvky Jacobiho matice $J(E)$ platí podmínky*

$$p + s < 0, \quad ps - qr > 0$$

a

$$ps - qr + \lambda^2 d_N d_P - \lambda(pd_P + sd_N) > 0,$$

kde λ je libovolné vlastní číslo Laplaceovy matice L příslušné grafovému modelu.

Jak model dravec-kořist, tak model konkurence tyto podmínky splňují, a proto nedošlo ke změně stability řešení při rozšíření na grafový model. Nyní uvedeme podmínky, které musí být splněny, aby bylo homogenní řešení grafové soustavy nestabilní, i když je stabilní řešení příslušné soustavy bez grafového rozšíření.

Tvrzení 5.2. *Rovnováha E soustavy (5.1) je asymptoticky stabilní a současně homogenní rovnováha \mathbf{E} grafového modelu není asymptoticky stabilní právě tehdy, když pro prvky Jacobiho matice $J(E)$ platí podmínky*

$$\lambda d_N d_P < pd_P + sd_N, \quad p + s < 0 \quad (5.2)$$

a

$$ps + \lambda^2 d_N d_P - \lambda(pd_P + sd_N) \leq r < ps, \quad (5.3)$$

kde λ je nějaké vlastní číslo Laplaceovy matice L příslušné grafovému modelu.

Na základě zachování platnosti vztahů (5.2) a (5.3) můžeme určit hodnoty parametrů p, q, r, s, d_N , a d_P , přičemž jedinou neurčitost zde představuje vlastní číslo λ Laplaceovy matice L . Z (5.2) vyplývá, že se stačí omezit na nejmenší kladné z nich, jelikož pak tato podmínka představuje nejmenší možné omezení. Pro speciální typy grafů jsme dokonce schopni toto nejmenší kladné číslo určit.

Z toho plyne, že opravdu existují i soustavy diferenciálních rovnic, pro které je stabilita řešení při grafovém rozšíření porušena.

5.2. Existence heterogenních řešení s nezápornými složkami

Při zodpovězení druhé otázky nám pomůže článek [2], který diskutuje grafové rozšíření modelu konkurence, tj. modelu představeným v sekci 3.2. Tento článek potvrzuje existenci heterogenních řešení s nezápornými složkami. To je zajímavé zejména z toho hlediska, že se modely dravec-kořist a konkurence liší před dimenzionální analýzou pouze v jednom znaménku.

Pro tvrzení, které bude následovat, je třeba nejprve uvést, že klasický model konkurence má čtyři stacionární řešení, jejichž tvar je

$$E_0 = [0, 0], \quad E_1 = [1, 0], \quad E_2 = [0, 1], \quad E_3 = \left[\frac{1 - \alpha}{1 - \alpha\beta}, \frac{1 - \beta}{1 - \alpha\beta} \right],$$

přičemž pro existenci bodu E_3 je nutné, aby $\alpha\beta \neq 1$. Navíc, aby tento bod ležel v prvním kvadrantu musí platit $\alpha > 1$ a $\beta > 1$ nebo $\alpha < 1$ a $\beta < 1$.

Dále je třeba zavést označení řešení $\mathbf{E}_{\sigma(i)}$, kde $\sigma(i) \in \{0, 1, 2, 3\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$. To jsou taková řešení, kdy na každém z n vrcholů nastane jedna z rovnováh klasického modelu E_0, E_1, E_2, E_3 . Nyní se již můžeme přesunout k samotnému tvrzení.

V článku [2] je ukázáno, že pro každou dvojici $\alpha, \beta > 1$ existuje číslo $\varepsilon > 0$ takové, že pro $d_N = d_P \in [0, \varepsilon]$ a pro každou volbu bodu $\mathbf{E}_{\sigma(i)}$, kde $\sigma(i) \in \{1, 2, 3\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, existuje heterogenní stacionární řešení s nezápornými složkami $[N_1, P_1, \dots, N_n, P_n]$, kde bod $[N_i, P_i]$ je blízko bodu $E_{\sigma(i)}$. Dané heterogenní řešení je pak lokálně stabilní, právě když $\sigma(i) \in \{1, 2\}$ pro všechna $i \in \{1, \dots, n\}$.

Z daného tvrzení pak vyplývá, že systém (3.4) má při slabé difuzi (tj. při hodnotách d_N, d_P blízkých 0) $3^n - 3$ nezáporných heterogenních stacionárních řešení, přičemž $2^n - 2$ z nich je lokálně stabilních.

Při zkoumání grafových rozšíření má proto smysl zkoumat také existenci a stabilitu heterogenních řešení.

REFERENCE

- [1] R. Skácelová: *Lotkuv-Volterrův model soutěže na grafech*, Bakalářská práce, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Brno, 2020.
- [2] A. Slavík: *Lotka-Volterra competition model on graphs*, SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, **19**(2), 725–762, 2020.
- [3] J. Kalas, Z. Pospíšil: *Spojité modely v biologii*, Masarykova univerzita, Brno, 2001.
- [4] R. Quinlan: *Spectral Graph Theory MA500-1: Lecture Notes*, School of Mathematics, Statistics and Applied Mathematics, NUI Galway, 2017, on-line: <http://www.maths.nuigalway.ie/~rquinlan/teaching/spectralgraphtheory.pdf>.
- [5] R. B. Bapat: *Graphs and matrices*, New Delhi: Hindustan Book Agency, 2010, Universitext.

Radka Skácelová, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: 199996@vutbr.cz

