

Milé čtenářky, milí čtenáři,

právě jste otevřeli nejnovější dvojčíslo časopisu Kvaternion. Dvojčíslo roku 2021, roku, který snad ještě má smysl pro trochu nadsázky a tolerantně snese připomenutí slov filozofa Rudolfa Kaehra: „Zůstalo-li ve světě, v němž žijeme, něco nedotčené a přirozené, pak to jsou přirozená čísla.“

Ano, třetí a čtvrtý článek letošního dvojčísla nás zavedou do klidného a nedotčeného světa, v němž se lidský duch už odpradávná pokouší odhalit zákonitosti mezi čísly. Převážná část časopisu je ale v jiném duchu: nabitá dynamikou. Redakce byla mile překvapena širokým spektrem témat, která autoři nabídli.

Prvním článkem dvojčísla je přehledná práce Lenky Příbylové nazvaná Aplikovaná nelineární dynamika, ve které autorka při výkladu o nelineárních a chaotických dynamických systémech provází čtenáře řadou zajímavých aplikací od kolapsu mostu Tacoma Narrows až po kapající vodovodní kohoutek. Vektorovou analýzu, důvěrně známou ve třech rozměrech, pak vybuduje v následujícím článku Marián Fecko elegantně i v dimenzi 2: jazyk diferenciálních forem se přitom ukáže jako mimořádně užitečný a aplikovatelný například v hydrodynamice. Po přepnutí do teorie čísel se seznámíme s novým důkazem Velké Fermatovy věty pro exponent 3 opírající se o Eisensteinova celá čísla, který nám představuje Petr Golán. V dalším článku nás Jiří Klaška seznamuje s Jakóbczykovou domněnkou o nedělitelnosti Mersennových čísel čtvercem prvočísla a s jejími zajímavými souvislostmi. Čtivým textem rozšiřující kurz diferenciálních rovnic je druhý díl popisu trajektorií autonomních rovnic od Jana Franců, tentokrát zaměřený na nelineární rovnice a soustavy.

Metodami separace statické a dynamické složky videa se zabývá Karolína Gebrtová. Petr Kamarýt poté představuje modelování mechanických soustav a metodu linearizace. Zajímavé vybrané úlohy z učebnice R. H. Wassermana připravil Dušan Navrátil, který se zaměřuje ve svém článku na úlohy z lineární algebry, jež mohou sehrát roli rozšiřujícího studijního textu. Teorii grafů aplikuje v dynamických systémech Radka Skácelová. V posledním článku, jehož autorkou je Viera Štoudková Růžičková, nás tradičně čekají zajímavé úlohy, kterými jsou vybrané příklady z internetové matematické olympiády. Znovu si zde můžeme promyslet známý Monty Hallův problém tří dveří: psychologové říkají, že řešení nám připadá divné, protože my lidé máme prý nebayesovské myšlení.

Nevím, zda Vám mám, milé čtenářky a milí čtenáři, popřát zbayesštění Vašeho myšlení. Ale rozhodně Vám přeji jménem celého redakčního kolektivu hodně zábavy a poučení s novým Kvaternionem.

Miroslav Kureš



## APLIKOVANÁ NELINEÁRNÍ DYNAMIKA

LENKA PŘIBYLOVÁ

**ABSTRAKT.** Článek se věnuje aplikacím nelineární dynamiky a jevům, které se objevují v různých oblastech a vědních oborech. Uvádí základní typy bifurkačních rovnováh a cyklů, spolu s typickými jevy, které vznikají v systémech procházejících těmito bifurkacemi. Zároveň ukazuje tyto jevy na jednoduchých modelech nebo odkazuje na vybrané články.

### 1. ÚVOD

Dynamicky se měnící svět kolem nás lze v mnoha případech docela dobře popisovat pomocí vzájemných vztahů mezi kvantifikovatelnými veličinami. Obecně lze definovat dynamický systém pomocí následující definice.

**Definice 1.1.** Dynamickým systémem rozumíme trojici  $\{T, \mathbf{X}, \varphi^t\}$ , kde  $T$  je číselná množina (čas),  $\mathbf{X}$  je metrický prostor, který nazýváme fázovým nebo stavovým prostorem, a  $\varphi^t$  je parametrický systém evolučních operátorů s parametrem  $t \in T$  definovaných jako zobrazení  $\varphi^t: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ , které zobrazuje počáteční stav  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}$  na nějaký stav  $\mathbf{x}_t = \varphi^t \mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}$ .

Pod takovou definici dynamického systému se schová téměř cokoli, co jsme schopni kvantifikovat a popsat. Chladnoucí šálek kávy na stole popsaný diferenciální rovnicí Newtonova zákona ochlazování, pohyby vesmírných těles popsané zákony gravitace, tvorba proteinu v buňce popsaná kinetickými chemickými rovnicemi, počet infikovaných osob v období epidemie COVID-19 popsaný systémem diferenciálních rovnic nebo pohyby cen na burze popsané stochastickými diferenciálními rovnicemi, to vše jsou příklady takových dynamických systémů.

Často se pro jednoduchost modelu sledovaného dynamického procesu pracuje s deterministickým systémem.

**Definice 1.2.** Deterministickým dynamickým systémem rozumíme dynamický systém  $\{T, \mathbf{X}, \varphi^t\}$  splňující podmínku

$$\varphi^0 = \text{id},$$

kde  $\text{id}$  je identita na  $\mathbf{X}$ , tj.  $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}: \text{id } \mathbf{x} = \mathbf{x}$ .

---

2010 *MSC*. Primární 34C23, 34C15, 37G10, 37G15.

*Klíčová slova.* Nelineární dynamika, bifurkace, atraktor, bistabilita.

Práce byla podporována projektem Matematické a statistické modelování 5 (MUNI/A/1615/2020).

Tato vlastnost říká, že systém spontánně nemění svůj stav. Ne vždy je takový model vhodný, ale v mnoha situacích ano. Pokud pracujeme s fyzikálními veličinami jako je model chladnoucí kávy nebo pohybu kosmických těles, jsou fyzikální zákony neúprosně deterministické, dokud nenarazíme např. na náhodně letící kometu nebo pravděpodobnosti u kvantové mechaniky. Náhodu ale můžeme často vynechat i u zcela náhodně se chovajících systémů. Pokud jde např. o systém s mnoha částicemi jako jsou molekuly účastnící se chemické reakce nebo lidé potkávající se v období epidemie, pak lze systém modelovat deterministicky jako celek, agregovaně.

V následujícím textu se ale chci věnovat ještě specifitějším deterministickým dynamickým systémům, tzv. autonomním systémům. Pro autonomní systémy se „zákony evoluce“ nemění během času. Zápis deterministického systému jako autonomního je spíše technickou záležitostí, kdy můžeme transformovat čas, nebo systém vnořit do vhodného nadprostoru.

**Definice 1.3.** Autonomním dynamickým systémem rozumíme deterministický systém  $\{T, \mathbf{X}, \varphi^t\}$  splňující podmínku

$$\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s,$$

tj.  $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}: \varphi^{t+s}\mathbf{x} = \varphi^t(\varphi^s\mathbf{x})$ , pokud jsou definovány obě strany rovnice.

Typickým příkladem autonomního systému je v čase spojitě měnící se stav  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^m$ , pro  $t \in \mathbb{R}$  podle systému obyčejných diferenciálních rovnic

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) \quad (1.1)$$

nebo v čase skokově měnící se stav (iterační proces, kde  $n \in \mathbb{N}$ , příp.  $n \in \mathbb{Z}$ )

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n, \boldsymbol{\varepsilon}), \quad (1.2)$$

kde  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  je dostatečně hladká funkce a  $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}^p$  jsou dané parametry. Jde tedy o dynamické systémy, kde závislost na čase není explicitní, pouze skrze měnící se stavové proměnné.

Zdálo by se, že takové restriktce na dynamické systémy budou příliš velké, aby mohly popisovat a vysvětlovat složitost světa kolem nás. Opak je ale pravdou. Nejenže je velké množství dynamických systémů v různých oblastech právě takto možné popsat, ale i samotná dynamika takových systémů je natolik rozmanitá, že typické dynamické jevy umožňuje modelovat velice dobře. Dokonce lze takovými systémy popisovat i jevy, kde je dynamika nepředvídatelná, tj. chaotická.

## 2. BIFURKACE ROVNOVÁH A S NIMI SOUVISEJÍCÍ JEVY

Nejjednodušší dynamikou, kterou umožňuje rovnice (1.1) resp. (1.2), je rovnovážná dynamika. Protože rovnováha splňuje

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}, \text{ resp. } \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{x},$$

je v prostoru  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$  stavových proměnných a parametrů zadaná implicitně. Obecně mluvíme o rovnovážné varietě. Na tomto místě je vhodné upozornit na rozdíl v definici variety („manifold“) a algebraické variety („variety“). V angličtině

se v teorii dynamických systémů používá pojmu „manifold“, přestože by lépe vyhovoval asi pojem „variety“. Čeština ovšem tyto názvy nerozlišuje. Např. afinní algebraická varieta je definována jako množina řešení systému polynomiálních rovnic nad komplexními čísly<sup>1</sup>. Varieta může obsahovat i singulární body, ve kterých nelze definovat tečný prostor (naproti tomu „manifold“ je regulární). Rovnovážná varieta systému (1.1) resp. (1.2) může také obsahovat singulární body. V takovém případě se ale nejčastěji mluví o větvích rovnováh ve stavově-parametrickém prostoru.

V tomto okamžiku se konečně dostáváme k pojmu bifurkace a postupně i ke slíbeným aplikacím.

Implicitně daná rovnováha totiž může být díky větě o implicitní funkci lokálně definována v okolí pevně dané hodnoty parametru  $\varepsilon_0$  jako funkce  $\varepsilon \mapsto \beta(\varepsilon)$ , která splňuje  $\beta(\varepsilon_0) = \mathbf{x}_0$  a  $\mathbf{f}(\beta(\varepsilon), \varepsilon) \equiv \mathbf{0}$ , resp.  $\mathbf{f}(\beta(\varepsilon), \varepsilon) \equiv \beta(\varepsilon)$ , tedy  $\beta(\varepsilon)$  odpovídá rovnovážnému bodu pro parametr  $\varepsilon$ .

Ovšem v případě, že má Jacobiho matice  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \varepsilon_0)$  nějakou vlastní hodnotu nulovou ve spojitém případě nebo rovnu 1 v diskrétním případě, není zaručena existence ani jednoznačnost rovnováhy  $\beta(\varepsilon)$ , tj. při perturbaci může dojít k zániku rovnovážného bodu (v každém okolí  $\varepsilon_0$ ), nebo k vzniku nové větve rovnovážných řešení (odtud vznikl název, rozvětvení = bifurkace) a samozřejmě při přechodu  $\varepsilon_0$  může dojít ke změně stability, tedy obecně k lokální kvalitativní změně chování systému.

**Definice 2.1.** Lokální bifurkací systému (1.1) resp. (1.2) v okolí rovnováhy  $\mathbf{x}_0 = \beta(\varepsilon_0)$  s kritickou hodnotou parametru  $\varepsilon = \varepsilon_0$  rozumíme kvalitativní změnu dynamiky v okolí kritické hodnoty  $\varepsilon_0$ , kdy fázové portréty v okolí rovnováhy  $\mathbf{x}_0$  při přechodu přes bifurkační parametr  $\varepsilon_0$  nejsou lokálně topologicky ekvivalentní, tj. neexistuje homeomorfismus, který by zobrazoval trajektorie okolí rovnováhy na sebe.

Obecněji je třeba poznamenat, že k lokální změně dynamiky (bifurkaci) může dojít v případě, kdy vlastní hodnota Jacobiho matice  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \varepsilon_0)$  má nulovou reálnou část ve spojitém případě nebo velikost rovnu 1 v diskrétním případě.

Je zřejmé, že právě lokální bifurkace budou mít významné postavení v aplikacích, protože přináší změnu dynamiky při drobné změně hodnoty parametru. Může jít o změnu v rychlosti chemické reakce, která způsobí, že buňka začne produkovat určitý protein, může jít o snížení průměrného počtu kontaktů mezi lidmi, která způsobí zánik exploze epidemie, může jít o drobné procentuální navýšení výlovu populace ryb, která způsobí jejich vyhynutí, nebo zvýšení průměrné teploty oceánu, která způsobí změnu v dynamice mořského proudění a v ekosystému Země.

---

<sup>1</sup>V aplikacích nás samozřejmě zajímá její reálná část, základní dynamické jevy se popisují právě pomocí systémů polynomiálních rovnic.

## 2.1. Ohyb variety rovnováh

Nejjednodušší lokální bifurkací je ohyb variety rovnováh, neboli fold bifurkace někdy nazývaná také bifurkace sedlo-uzel<sup>2</sup>. Jde o případ, kdy má Jacobiho matice  $Df(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\varepsilon}_0)$  právě jednu vlastní hodnotu  $\lambda$  s nulovou reálnou částí ve spojitém případě nebo s velikostí rovnou 1 v diskretním případě. V aplikacích pak jsou typicky ostatní vlastní hodnoty se zápornou reálnou částí ve spojitém případě nebo s velikostí menší než 1 v diskretním případě, jelikož v takovém případě jde o změnu stability – ze stabilní rovnováhy do nestabilní. Systém pak lze redukovat na tzv. centrální varietu, která v okolí rovnováhy vždy lokálně existuje a je to invariantní množina, ke které jsou blízké trajektorie přitahovány. Vzhledem k jednomu parametru pak lze pro spojitý případ využít následující větu. Analogicky lze pracovat i se systémem iterací (zobrazení) (1.2).

**Věta 2.2.** *Předpokládejme, že jednodimenzionální jednoparametrická rovnice*

$$\dot{x} = f(x, \varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

*kde  $f$  je hladká funkce, má pro  $\varepsilon = \varepsilon_0$  rovnovážný bod  $x = x_0$  a  $\lambda = f_x(x_0, \varepsilon_0) = 0$ . Předpokládejme, že jsou splněny podmínky*

$$\begin{aligned} f_{xx}(x_0, \varepsilon_0) &\neq 0 && \text{podmínka nedegenerovanosti,} \\ f_\varepsilon(x_0, \varepsilon_0) &\neq 0 && \text{podmínka transverzality.} \end{aligned}$$

*Pak je (2.1) v okolí rovnováhy lokálně topologicky ekvivalentní systému v normální formě fold bifurkace*

$$\dot{x} = \pm \varepsilon \pm x^2.$$

Uvádím pouze jeden příklad bifurkačního diagramu bifurkace typu fold pro případ (volba znamének)  $\dot{x} = \varepsilon - x^2$  na obr. 1. Kritický bod fold bifurkace se v bifurkačních diagramech označuje nejčastěji LP (limit point) a pro tuto normální formu jde o vrchol paraboly  $\varepsilon = x^2$ , tj. počátek parametricko-stavového prostoru.

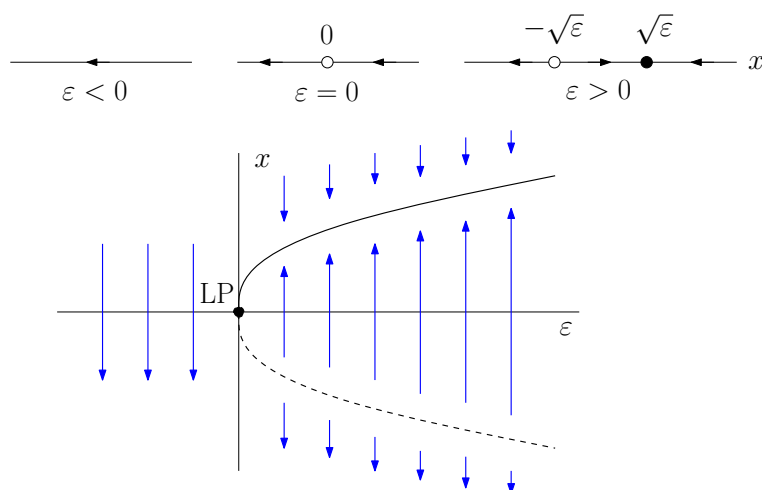
## 2.2. Přepínače a hysterese

Typickým příkladem skokové změny zapříčiněné fold bifurkací, tedy ohybem variety rovnováh, je biochemický přepínač. Modelová (tedy velmi zjednodušená) rovnice produkce genetického proteinu v buňce má tvar

$$\dot{g} = k_1 \frac{g^2}{1 + g^2} - k_2 g,$$

kde  $g$  kvantifikuje množství proteinu a  $k_1, k_2$  jsou kladné parametry související s rychlostmi probíhající chemických reakcí. První člen  $k_1 \frac{g^2}{1+g^2}$  odpovídá genové expresi probíhající skrze transkripci a translaci. Protein vzniká autokatalytickou reakcí, která zde není uvedena a popisuje ji tzv. Hillova funkce. Druhý člen  $k_2 g$  odpovídá rozkladu proteinu.

<sup>2</sup>Toto pojmenování vychází z časté situace, kdy v ohybu dochází ke splynutí sedla a uzlu, což ale není vždy nutné. Název ohybová ani dotyková nebo tečná bifurkace se v české terminologii nepoužívá a sedlo-uzel zase není matematicky korektní pojmenování.



**Obrázek 1.** Bifurkační diagram pro normální formu fold bifurkace.

Zavedením nové proměnné  $x(t) = g\left(\frac{t}{k_1}\right)$  a označením  $a = \frac{k_2}{k_1}$  dostáváme rovnici v ještě jednodušším tvaru

$$\dot{x} = \frac{x^2}{1+x^2} - ax. \quad (2.2)$$

Libovolná rovnováha proto splňuje

$$x \left( \frac{x}{1+x^2} - a \right) = 0.$$

Dostáváme tak dvě variety rovnováh (v závislosti na parametru  $a$ ): triviální rovnováhu a netriviální varietu

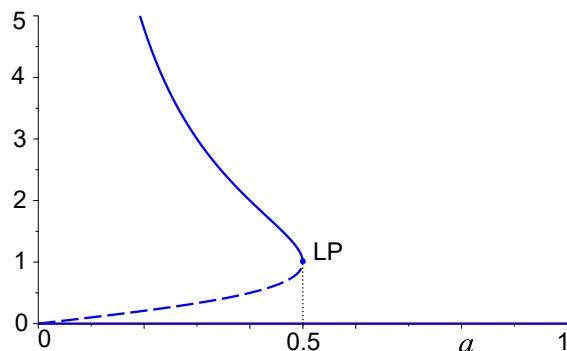
$$a = \frac{x}{1+x^2}.$$

Protože nás zajímají pouze kladné hodnoty koncentrace i parametru jako poměru rychlostí reakcí, vidíme, že bod  $[0, 0]$  je průsečíkem dvou větví rovnováh (tzv. transkritická bifurkace) a bod  $[a^*, x^*] = [\frac{1}{2}, 1]$  je limitním bodem, neboli ohybem variety rovnováh (ukazuje obr. 2). V tomto bodě dochází k fold bifurkaci, kdy horní část této větve rovnováh je stabilní a dolní nestabilní.

Překročí-li parametr  $a = \frac{k_2}{k_1}$  kritickou hodnotu  $\frac{1}{2}$ , gen se přestane produkovat a dojde k biochemickému přepnutí na nulovou větev rovnováhy.

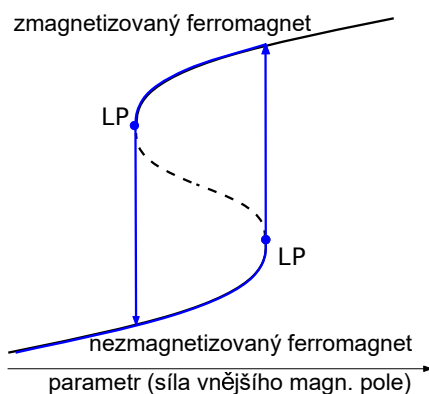
Velice často se v dynamických systémech objevují dva takové přepínače. Vzniká pak jev, kterému se říká hystereze. Systém s hysterezí vykazuje typicky jakési zpoždění či zabránění návratu do původního stavu. Známa je hystereze u feromagnetických materiálů (náčrt na obr. 3), které po vystavení magnetickému poli vykazují nějakou dobu magnetické vlastnosti, poté dojde k zániku vnitřního magnetického pole.

Tento jev se ale objevuje v aplikacích i v jiných oborech – biologii, medicíně, ekonomii apod. Ve skutečnosti jde o ohyb variety rovnováh v závislosti na dvou



**Obrázek 2.** Rovnovážné variety rovnice (2.2) v závislosti na parametru  $a$ .

parametrech. V teorii bifurkací se kritický bod této rovnovážné variety nazývá dvouparametrickou lokální bifurkací rovnováhy typu cusp (hrot, bod vratu).



**Obrázek 3.** Náčrt hysterese u ferromagnetického materiálu v závislosti na velikosti vnějšího magnetického pole.

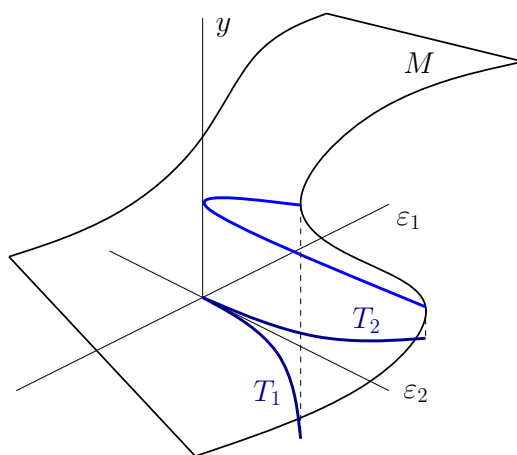
Systém lze v takovém případě redukovat v okolí takového bodu na centrální varietu a zapsat ve tvaru normální formy

$$\dot{y} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 y \pm y^3. \quad (2.3)$$

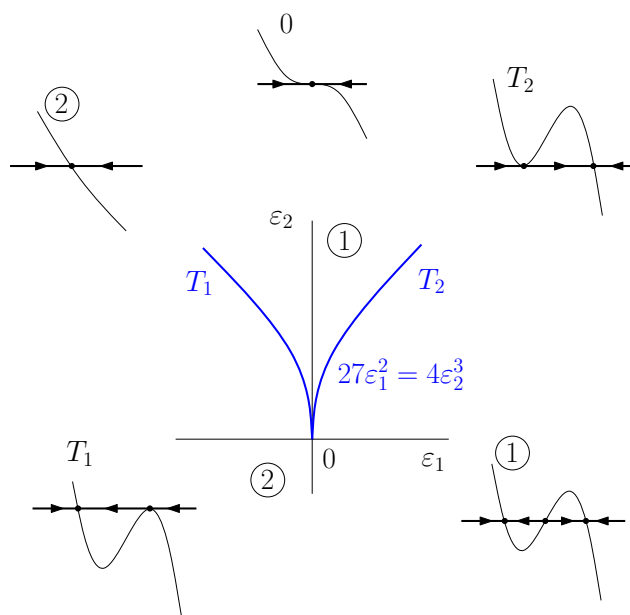
Rovnovážné body leží na varietě  $M : \varepsilon_1 + \varepsilon_2 y \pm y^3 = 0$ , která je zobrazena na obr. 4. Nulová první derivace podle  $y$ , tedy podmínka pro bifurkaci typu fold (ohyb), je na křivce splňující navíc  $\varepsilon_2 \pm 3y^2 = 0$ . Jednotlivé větve  $T_1, T_2$  odpovídají zánikům dvojice rovnovážných bodů v ohybech variety  $M$ , tedy jsou to bifurkační hranice bifurkace fold (LP). Pokud z těchto dvou rovnic vyloučíme  $y$ , dostaneme průmět ohybů do roviny parametrů  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ , kterým je křivka typického tvaru V s bodem vratu v počátku. Pro znaménko mínus ji ukazuje obr. 5 a je tvaru

$$27\varepsilon_1^2 - 4\varepsilon_2^3 = 0.$$





**Obrázek 4.** Rovnovážná varieta rovnice (2.3) závislá na dvou parametrech  $\varepsilon_1$  a  $\varepsilon_2$ .



**Obrázek 5.** Bifurkační diagram normální formy cusp bifurkace  $\dot{y} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 y - y^3$ .

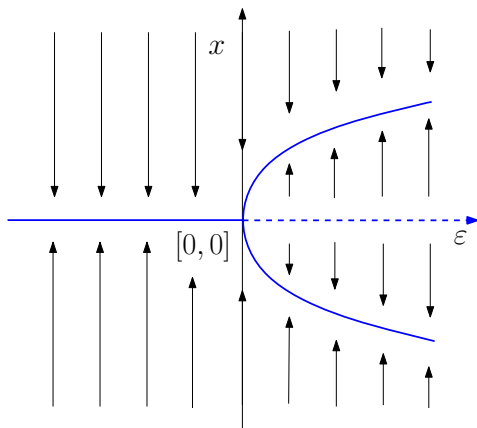
Oblasti označené 1 a 2 jsou strukturálně stabilní oblasti<sup>3</sup>, ve kterých má systém tři resp. jedinou stabilní rovnováhu. Variety  $T_1$  a  $T_2$  odpovídají jednoparametrické bifurkaci typu fold, jsou to hranice kodimenze 1 ve 2-rozměrném prostoru

<sup>3</sup>Strukturální stabilitou se rozumí zachování existence tří rovnováh resp. jediné stabilní rovnováhy i při malé změně parametrů.

parametrů. Jejich průnikem je bod vratu, který má dimenzi 0, tedy kodimenzi 2 v 2-rozměrném prostoru parametrů. Cusp bifurkace v bodě vratu se proto nazývá lokální dvouparametrickou bifurkací nebo bifurkací kodimenze 2. Tento typický jev nezávisí na tvaru rovnic a vzniká genericky v situaci, kdy dojde k dotyku dvou větví fold bifurkace. Existují samozřejmě exaktní podmínky (tzv. podmínky nedege-nerovanosti a transverzality podobné větě 2.2), za kterých obecný systém prochází cusp bifurkací, ale pro naše potřeby je daleko užitečnější geometrická představa průhybu variety rovnováh na obr. 4.

Hystereze se tak objevuje v situaci, kdy je přítomna nelinearita typu sigmoidy. Takové systémy jsou v přírodě velice časté. Příkladem mohou být populační modely, kdy charakter sigmoidy určují např. predační funkce nebo jiné funkce závislé na prostředí. Appetit predátora je zastropován nějakou horní hranicí, a i další funkce ovlivňující populaci kořisti mají často esovitý charakter právě díky dolní a horní hranici, která je dána naplněním kapacity prostředí nebo velikostí jiné interagující populace. V biochemii je to podobné. Právě u modelu biochemického přepínače jsou uvedené Hillovy funkce, které jsou sigmoidního charakteru. Takové funkce popisující kinetiku v chemických reakcích vznikají typicky právě pro autokatalytické reakce v živých buňkách, zatímco chemické reakce mimo živé organismy jsou naopak typicky bez sigmoid, takže vedou na rovnovážné stavy bez vzniku složitějších jevů.

Fold bifurkace a hystereze nejsou jedinými jevy, které souvisejí se singularitou variety rovnováh. Další generickou jednoparametrickou bifurkací je transkritická bifurkace (generický průsečík dvou větví rovnovážných variet) a vidličková bifurkace, která vykazuje jistou symetrii a její aplikace se objevují například v evolučních modelech větvení. U vidličkové bifurkace totiž dochází k průsečíku dvou větví rovnováh právě v ohybu jedné z větví. To v aplikacích umožňuje modelovat právě jevy větvení, kdy zaniká jedna stabilní rovnováha (a stává se nestabilní) a zároveň vznikají dvě další stabilní větve v jejím okolí, viz obr. 6.



**Obrázek 6.** Bifurkační diagram normální formy vidličkové (pitchfork) bifurkace  $\dot{x} = \varepsilon x - x^3$ .

## 3. BIFURKACE CYKLŮ A S NIMI SOUVISEJÍCÍ JEVY

Dá se jistě očekávat, že cykly, tedy oscilace, budou další významnou dynamikou se zajímavými aplikacemi. Kyvadla, elektromagnetické vlny, střídavý proud, aktivita srdečního svalu nebo pohyb planet, to všechno jsou příklady cyklické dynamiky. Je také velmi zajímavé, že jeden ze základních nelineárních jevů, tedy vznik oscilací, je spojen s lokální bifurkací uvedenou již v předchozím textu.

## 3.1. Vznik oscilací Hopfovou bifurkací

Pro jednoduchost se budeme zabývat pouze spjitým systémem (1.1). Pokud se dvě komplexně sdružená vlastní čísla Jacobiho matice  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \varepsilon_0)$  pro danou rovnováhu  $\mathbf{x}_0$  změní tak, že jejich reálné části při změně parametru přecházejí imaginární osu, varieta rovnováh je sice vzhledem k parametru  $\varepsilon$  dána jednoznačně, ale mění stabilitu. Genericky dochází k tzv. Hopfově bifurkaci, kdy se stabilní ohnisko mění v nestabilní ohnisko. Trajektorie blízké rovnováze tak vykazují tlumené nebo gradující oscilace. Lze ukázat, že v generickém případě (za splnění jistých podmínek nedegenerovanosti a transversality) je tato bifurkace nutně spojena se vznikem limitního cyklu. Asi lze vytušit, že cyklus může vznikat buď v okolí nestabilního ohniska (mluvíme o superkritické Hopfově bifurkaci), nebo v okolí stabilního ohniska (mluvíme o subkritické bifurkaci). Podobně jako v případě fold bifurkace je rozhodnutí o typu bifurkace dáno znaménkem jistého členu v normální formě. Ta se typicky zapisuje i v komplexním nebo v polárním tvaru, kde je popis cyklu jednodušší. Zde uvádím komplexní normální formu superkritické Hopfovy bifurkace

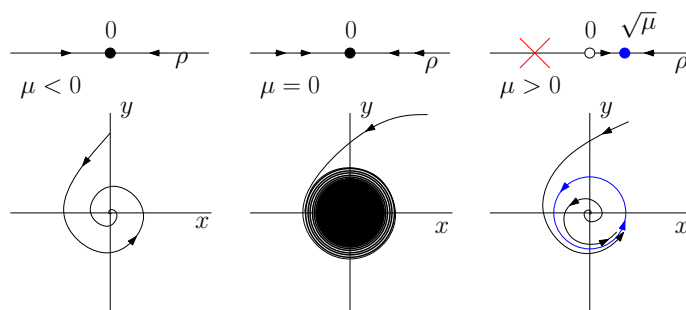
$$\dot{z} = (\mu + i)z - z|z|^2,$$

kde Eulerův tvar komplexního čísla  $z = \rho e^{i\varphi}$  pak dává polární tvar

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \rho(\mu - \rho^2), \\ \dot{\varphi} &= 1. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Rovnice (3.1) je normálním tvarem vidličkové bifurkace. Pro  $\mu \leq 0$  je tedy počátek jedinou stabilní rovnováhou. Pro  $\mu > 0$  vzniká další rovnovážný bod  $\rho = \sqrt{\mu}$  (zápornou hodnotu můžeme vynechat, nemá v této reprezentaci smysl, jde o vzdálenost). Počátek je v tomto případě pro  $\mu > 0$  nestabilní, rovnováha  $\rho = \sqrt{\mu}$  je stabilní. Tento bod odpovídá stabilnímu limitnímu cyklu v okolí počátku (viz obr. 7). Z komplexního zápisu je vidět, že komplexně sdružená vlastní čísla jsou  $\mu \pm i$ . Pro jednoduchost je zde parametr  $\varepsilon$  nahrazen přímo reálnou částí vlastního čísla  $\mu$ , která je původcem kvalitativní změny dynamiky.

Z hlediska aplikací jsou tyto dva typy Hopfovy bifurkace velice odlišné. Pokud si představíme superkritickou bifurkaci na nějakém reálném jevu, zjistíme, že nejde o nijak významnou změnu. V malém okolí kritické hodnoty parametru sice rovnováha ztrácí stabilitu, ale je nahrazena drobnými oscilacemi (amplituda oscilací roste s odmocninou parametru). Příkladem může být třeba vznik tónu při hře na flétnu nebo při pískotu konvice na čaj. Při nízké rychlosti vzduchu tón nevzniká, překročením určitého prahu vznikne, ale je velmi tichý. Výrazný tón (velká amplituda stejné frekvence) vzniká silným výdechem do dechového nástroje. Pískot



Obrázek 7. Superkritická Hopfova bifurkace.

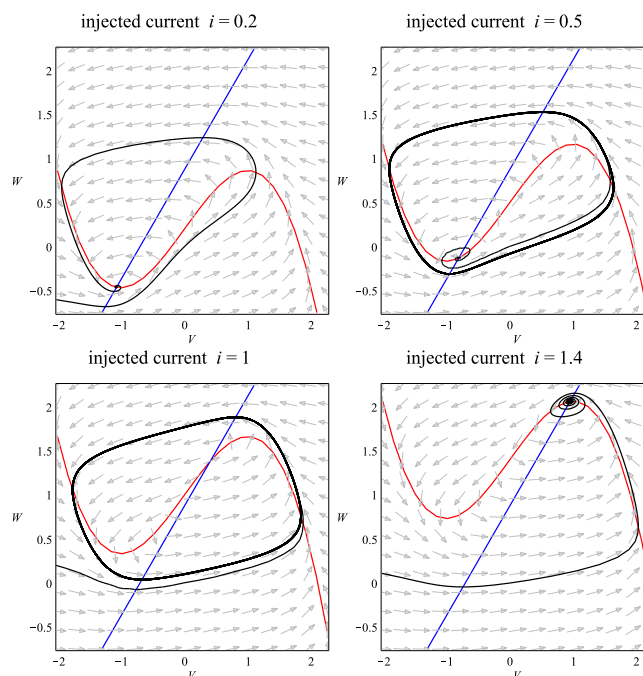
konvice, ve které začne vřít voda také začíná jemně a nabírá postupně na síle. Naopak subkritická bifurkace je spojena s často katastrofickými jevy jako je např. aeroelastický jev rozkmitání křídel letadla, která se mohou vlivem nárazového větru určité prahové hodnoty zlomit [13]. Podobně jsou známy případy pádu mostů [2] („nejslavnější“ je pravděpodobně kolaps Tacomského mostu), vznik vibrací motoru při vypínání turbín nebo při přistávání letadel [1]. Jde totiž o zánik stabilní rovnováhy (obklopené nestabilním cyklem) a rychlý vznik silných oscilací s velkou amplitudou.

V reálných aplikacích je tento jev podobný hysterezi a souvisí podobně s dvouparametrickou bifurkací, kdy vně nestabilního cyklu vzniká další stabilní cyklus. Jde také o bistabilitu, tedy současný vznik dvou stabilních atraktorů. Subkritická Hopfova bifurkace tak může být i nekatastrofickou. U neuronů jde o nejtýpější způsob vzniku oscilací. Při překročení prahové hodnoty totiž nevzniká cyklus s postupně se zvětšující amplitudou jako u superkritické bifurkace, ale systém skočí rovnou na stabilní větev vnějšího cyklu s velkou amplitudou. Jako příklad si uvedeme nejjednodušší Fitz-Hughův-Nagumův model neuronu.

$$\begin{aligned}\dot{V} &= V - \frac{1}{3}V^3 - W + i, \\ \dot{W} &= a(bV - cW + d),\end{aligned}$$

kde  $V$  je membránový potenciál,  $W$  je proměnná související s návratem,  $i$  je dodávaný proud a  $a, b, c, d$  jsou parametry. Všimněte si, že změna napětí  $V$  na membráně axonu popsaná první rovnicí má zase tvar esovité křivky. Ostatní parametry i stavová proměnná  $W$  vycházejí z popisu kinetiky chemických reakcí na membráně axonu (přenos signálu je zprostředkován změnami koncentrací iontů  $K^+$ ,  $Na^+$ ,  $Cl^-$  a anionty bílkovin),  $a, b, c > 0$ . Druhá rovnice je obnovovací, má pomalejší odezvu (proto je zde ponechán parametr  $a$ , který má malou hodnotu) a umožňuje vznik impulzu, který následně ukončí.

Obrázky 8 a 9 demonstrují, proč neuron odpovídá vysíláním oscilujícího signálu jen pro určité hodnoty dodávaného proudu  $i$ . Rovnováha zakreslená vzhledem

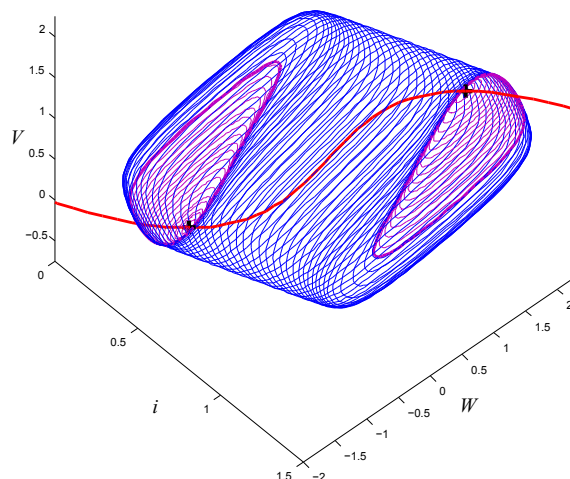


Obrázek 8. Fázové portréty pro  $a = 0.2$ ,  $b = 1$ ,  $c = 0.8$ ,  $d = 0.7$ , z [5].

k parametru  $i$  jako červená křivka  $[V(i), W(i)]$  prochází dvěma subkritickými Hopfovými bifurkacemi. Růžové cykly jsou ale nestabilní a systém se na nich neustaluje, nikdy je tedy nepozorujeme. Pozorujeme pouze výrazné oscilace odpovídající modrým cyklům, nebo rovnováhu. Dokud se nezvýší proud do dostatečné hodnoty, neuron nereaguje, pokud je proud příliš velký, také ne.

### 3.2. Zánik oscilací na sedle

Vznik limitních cyklů lze často pozorovat i v populačních modelech predátor-kořist. Systémy tohoto typu mají často v přípustné nezáporné oblasti stavového prostoru sedlový bod. Významné trajektorie, které se v blízkosti sedla rovnováže limitně přibližují pro  $t \rightarrow \pm\infty$ , mají důležité postavení i z hlediska aplikací, ať už jde o spojité nebo diskrétní systémy. Mohou totiž oddělovat části stavového prostoru a separovat tak oblasti, ve kterých mají trajektorie naprosto odlišné dynamické vlastnosti. Sedlová trajektorie také od toho získala jméno separatrix. Na separatrix sedla se tak může (a často musí) rozpadnout i limitní cyklus. Například u modelů typu predátor-kořist tak může znenadání dojít k zániku velkých oscilací a k významné změně ve velikosti populací, dokonce i k vymření některého druhu, přičemž roli v takové změně dynamiky může hrát množství faktorů od způsobu predace po evoluční tlak, a teorie bifurkací je schopna některé tyto vazby rozklíčovat.



**Obrázek 9.** Cykly vznikající na varietě rovnováh pro  $a = 0.2$ ,  $b = 1$ ,  $c = 0.8$ ,  $d = 0.7$ , z [5].

Z obrovského množství článků v této oblasti si zde dovoluji vložit několik odkazů na články, jejichž jsem autorkou nebo spoluautorkou [10, 11, 3, 9]. Studium takových globálních bifurkací je obtížnější a využívá většinou kontinuálních numerických metod. Vzhledem k jejich úzké souvislosti s lokálními bifurkacemi vyšší kodimenze ale existují i metody, které využívají analytický přístup např. pomocí využití Gröbnerových bazí [4]. Tento přístup umožňuje částečně zautomatizovat nalezení důležitých bifurkačních variet u systémů (1.1) a (1.2) s funkcí  $\mathbf{f}$  ve tvaru polynomu nebo racionální lomené funkce a umožnit provádět alespoň částečnou bifurkační analýzu dynamických systémů širšímu okruhu lidí, nikoliv pouze specializovaným matematikům. Ukazuje se totiž, že právě takové systémy vystupují v popisech biochemických reakcí v buňkách nebo ve zmíněných modelech populační biologie či neurovědy a pochopení závislosti změn dynamiky na změnách parametrů dynamického systému je pro ně klíčové.

### 3.3. Ohyb variety cyklů

Pravděpodobně jste si všimli, že v příkladu subkritické Hopfovy bifurkace u modelu neuronu došlo k ohybu variety, která příslušela limitním cyklům. Fakticky lze přejít od studia cyklů chytrým způsobem ke studiu rovnováh zobrazení. Pokud totiž provedeme transversální řez limitním cyklem (v prostoru stavových proměnných), můžeme se na trajektorie v jeho blízkosti dívat jako na iterace zobrazení, které je dáno průsečíkem trajektorie s tímto řezem. Tato úvaha je geniální a stejně geniální byl její autor Henri Poincaré. Ten ve studiu dynamických systémů předběhl dobu o mnoho desítek let.

Fakticky tak můžeme aplikovat lokální teorii pro pevné body (rovnováhy) zobrazení na cykly. Vznik nebo zánik dvojice stabilního a nestabilního pevného bodu

Poincarého zobrazení<sup>4</sup> generickou fold bifurkací (ohybem) tak dává vzniknout nebo zaniknout příslušnému stabilnímu a nestabilnímu cyklu přesně tak, jak to vidíme na obr. 9.

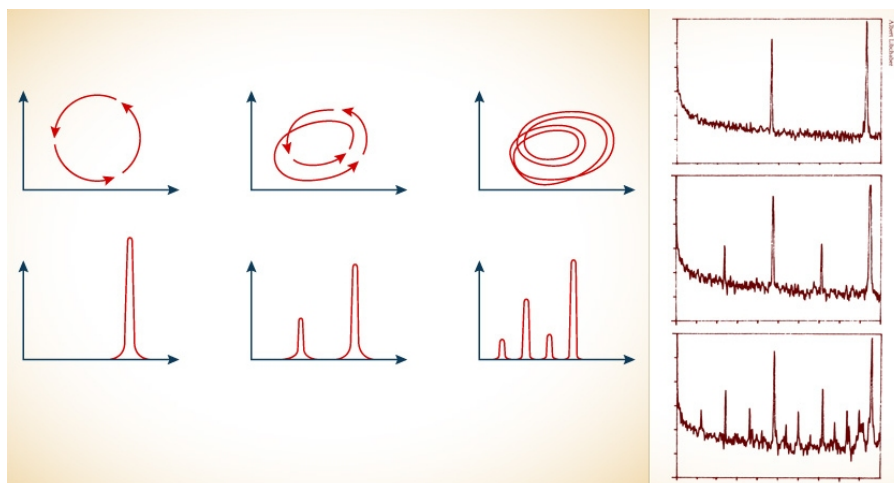
#### 4. CHAOTICKÁ DYNAMIKA

Poincarého zobrazení cyklu může ale procházet i jinými typy diskretních bifurkací. Výše uvedený ohyb odpovídá vlastnímu číslu 1 Poincarého zobrazení (mluvíme často o multiplikátoru cyklu), ale ke změnám dynamiky dochází i v jiných případech přechodu hranice jednotkového kruhu. Pokud vlastní číslo přejde přes hodnotu  $-1$ , vzniká tzv. flip bifurkace Poincarého zobrazení. Flip bifurkace zobrazení je lokální bifurkací pevného bodu, kdy vlastní číslo zobrazení je rovno jedné až po dvou iteracích. Vzniká proto cyklus zobrazení délky 2 z cyklu délky 1, jinak řečeno pevný bod zobrazení se rozpadne do oscilující dvojice bodů. Pokud studujeme spojitě oscilace pomocí Poincarého zobrazení, pak tento vznik 2 cyklu Poincarého zobrazení znamená, že i u limitního cyklu spojitě dynamického systému dochází ke zdvojení periody, přičemž z topologického pohledu je zdvojený cyklus hranicí Möbiova proužku. Generická flip bifurkace ale nekončí jedním zdvojením. Pokud při změně parametru dochází k přechodu přes  $-1$  zevnitř jednotkového kruhu ven, pak multiplikátor zdvojeného cyklu bude také snižovat svou hodnotu z hodnoty 1 a může zase přejít  $-1$  a vznikne 4-cyklus, pak 8-cyklus, a tímto způsobem postupně dojde ke zdvojování periody – k tzv. Feigenbaumově kaskádě bifurkací, která je velmi častou cestou ke vzniku chaotického nepředvídatelného chování u dynamických systémů závislých na parametrech. Chaotická dynamika je velice citlivá na počáteční podmínky. Malá změna v počátečních podmínkách totiž vede k exponenciálně rostoucí změně vzdáleností původní a perturbované trajektorie a pro tento jev se vžil označení „efekt motýlích křídel“. Tvůrce slavného modelu Edward Lorenz totiž na jedné své přednášce přiblížil tento jev v dynamice počasí při rovnířím, že zamávání křídel motýla v Brazílii může způsobit tornádo v Texasu. Je nutno dodat, že právě tento jev znemožňuje jak dlouhodobé předpovědi počasí, tak mnohé další predikce. Míru divergence blízkých trajektorií lze ovšem měřit tzv. maximálním Ljapunovovým exponentem a tak získat alespoň horizont prediktability, tedy časový úsek, ve kterém jsme ochotni chybu predikce akceptovat. Vznik deterministické chaotické dynamiky kaskádou zdvojování periody je typický a nalezneme jej v mnoha aplikacích.

Slavným a historicky velmi důležitým experimentem se stal pokus Alberta Libchabera (obr. 10). V roce 1977 vytvořil nerezový válec, do kterého vložil kapalné hélium a spodní plochu válce zahříval. Experimentálně pak ověřil, že turbulentní proudění, které vzniká v kapalném héliu poté, co se rozpadne základní konvekční oscilace, vytváří právě onu kaskádu zdvojování periody. V roce 1982 pak publikoval v [8] podobný pokus s rtutí, kde dokonce změřil odhad Feigenbaumem teoreticky odvozené konstanty, která nezávisí na tvaru systému a je pro všechny kaskády zdvojování periody totožná. V rotujících konvektivních proudech rtuti se

<sup>4</sup>Poincarého zobrazení je to výše popsané geniální zobrazení prvního návratu definované na transverzálním řezu cyklem.

totiž indukuje stejnosměrné magnetické pole, které bylo měřitelné pomocí tlumení elektrických oscilátorů principem frekvenční analýzy.



**Obrázek 10.** Zdvojování periody v experimentu z Libchaberova článku [8].

Za posledních pět dekad došlo díky objevu všudypřítomnosti chaosu k novému pohledu na mnoho oblastí. Naleznete třeba články o chaotické dynamice v neurovědě. Zdá se, že v mozku je chaos žádaný (!) a naopak stabilní periodická dynamika je nežádaný stav – epileptický záchvat [12]. Excitabilní buňky v srdečním svalu pracují synchronně periodicky a chaotická dynamika vede k fibrilaci srdce [14]. Chaotické dynamiky ve Vesmíru a Sluneční soustavě se s předstihem dotkl už sám Poincaré, ač netušil a nemohl ještě tušit její šíři. Dnes je popsána a vysvětlena chaotická rotace Saturnova měsíce Hyperionu a osy rotace Marsu, NASA pomocí znalosti chaotické dynamiky poslala sondu ISEE-3/ICE již v roce 1985 téměř bez paliva na cestu ke kometě, Saturnovy prstence se zkoumají pro jejich fraktální strukturu chaotického atraktoru [7], dokonce je spočten maximální Ljapunovův exponent pro Sluneční soustavu [6]. Na základě Ljapunovova exponentu pak lze odhadovat prediktabilitu systému: rotaci Hyperionu na 36 dní nebo vychýlení osy rotace Marsu a stabilitu Sluneční soustavy na 5 milionů let.

Pokud si chcete doma pohrát, můžete si vyzkoušet pokus s vodovodním kohoutkem. Není to úplně jednoduché, nehodí se k tomu páková baterie, ale naopak starý dobrý (ideálně dokonce i kapající) kohoutek je dostačujícím laboratorním vybavením. Pokud je kohoutek zavřený, ale lehce nedovírá, voda kape. Kap, ticho, kap, ticho, kap, ticho. Dokáže to být docela rušivý periodický zvuk. Stále stejné kap a ticho. Kap a ... to je cyklus (délky 1). Pokud budete dostatečně obratní a kohoutek maličko povolíte, bude kapat jinak. Kap kap ticho kap kap ticho. Pak snad dokážete nastavit i cyklus čtyř kapek ... Rychle totiž začne kapat aperiodicky. Právě vidíte a slyšíte chaotický atraktor, jestli nevěříte, podívejte se do [15].



## 5. ZÁVĚR

V článku bylo ilustrováno, jak lze vysvětlit různé dynamické nelineární jevy. Uvedené významné aplikace v různých oborech vědy snad dávají tušit, jak může být teorie bifurkací a chaosu prakticky využita. Aby nebyl čtenář zdrčen šíří tématu, chybí zde zcela vysvětlení vzniku dynamiky na invariantním toru Neimark-Sackerovou bifurkací, která úzce souvisí se synchronizacemi oscilací, vázanou rotací planet, cirkadiánními biorytmy, supravodivými Josephsonovými spoji nebo sítěmi spřažených neuronů. Tak třeba příště.

## REFERENCE

- [1] A. Chasalevris: *Stability and Hopf bifurcations in rotor-bearing-foundation systems of turbines and generators*, Tribology International, 145:106154, 2020.
- [2] S. Di Nino, A. Luongo: *Nonlinear aeroelastic in-plane behavior of suspension bridges under steady wind flow*, Applied Sciences, 10(5):1689, 2020.
- [3] V. Hajnová, L. Příbylová: *Two-parameter bifurcations in LPA model*, Journal of Mathematical Biology, 75(5):1235–1251, 2017.
- [4] V. Hajnová, L. Příbylová: *Bifurcation manifolds in predator-prey models computed by Gröbner basis method*, Mathematical Biosciences, 312:1–7, 2019.
- [5] V. Hajnová, L. Příbylová, et al: *Biological and physiological phenomena in view of applied bifurcation theory*, 2018.
- [6] J. Laskar: *Large scale chaos and marginal stability in the solar system*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 64(1):115–162, 1996.
- [7] J. Li, M. Ostojca-Starzewski: *Edges of Saturn's rings are fractal*, SpringerPlus, 4(1):1–8, 2015.
- [8] A Libchaber, C Laroche, and Stephan Fauve. Period doubling cascade in mercury, a quantitative measurement. *Journal de Physique Lettres*, 43(7):211–216, 1982.
- [9] L. Příbylová: *Regime shifts caused by adaptive dynamics in prey–predator models and their relationship with intraspecific competition*, Ecological Complexity, 36:48–56, 2018.
- [10] L. Příbylová, L. Berec: *Predator interference and stability of predator–prey dynamics*, Journal of Mathematical Biology, 71(2):301–323, 2015.
- [11] L. Příbylová, A. Peniašková: *Foraging facilitation among predators and its impact on the stability of predator–prey dynamics*, Ecological Complexity, 29:30–39, 2017.
- [12] S. J. Schiff, K. Jerger, D. H. Duong, T. Chang, M. L. Spano, W. L. Ditto: *Controlling chaos in the brain*, Nature, 370(6491):615–620, 1994.
- [13] H. Shukla, M. J. Patil: *Nonlinear state feedback control design to eliminate subcritical limit cycle oscillations in aeroelastic systems*, Nonlinear Dynamics, 88(3):1599–1614, 2017.
- [14] M. Small, D. Yu, R. G. Harrison: *Observation of a period doubling bifurcation during onset of human ventricular fibrillation*, International Journal of Bifurcation and Chaos, 13(03):743–754, 2003.
- [15] H. N. Núñez Yépez, A. L. Salas Brito, C. A. Vargas, L. A. Vicente: *Chaos in a dripping faucet*, European Journal of Physics, 10(2):99, 1989.

Lenka Příbylová, Ústav matematiky a statistiky, Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Koltářská 2, 611 37 Brno, Česká republika,  
e-mail: pribylova@math.muni.cz



## VEKTOROVÁ ANALÝZA V DVOCH ROZMEROCH

MARIÁN FECKO

ABSTRAKT. Vektorová analýza v trojrozmernom priestore patrí k základnej matematickej výbave pri aplikáciách matematiky vo fyzike a v technike. Jej dvojrozmerná verzia je ale známa málo. V tomto texte sa pozrieme práve na ňu. Necháme sa pritom viesť teóriou diferenciálnych foriem. Pre čitateľa, ktorý prácu s formami neovláda, budú síce odvodenia asi nejasné, ale výsledky vyjadríme aj v elementárnom jazyku.

### 1. ÚVOD

Žijeme v trojrozmernom svete. Preto je aj matematika, ktorá súvisí s trojrozmerným priestorom, obzvlášť dôležitá a prepracovaná.

Ukazuje sa, že *vektorová analýza* sa na stručné a jasné matematické uchopenie spústy dôležitých javov okolo nás (difúzia, šírenie tepla, elektrina, magnetizmus, gravitačné pole, ...) hodí priam ideálne (pozri napr. [1, 2, 3, 4, 5]). Sú v nej definované užitočné pojmy (napríklad tok vektorového poľa cez plochu) a pre tieto pojmy sú odvodené užitočné a netriviálne výsledky (ako napríklad Gaussova veta).

Podstatne menej známa je dvojrozmerná verzia vektorovej analýzy. Mala by hrať pre opis javov, na ktoré stačí rovina (alebo dvojrozmerná plocha) tú istú úlohu, akú hrá jej štandardná verzia v 3D. Ako presne sa ale menia matematické vzťahy pri prechode z 3D do 2D nemusí byť vždy celkom očividné.

V tomto texte si preto posvietime práve na tento problém: Ako vlastne vyzerá analógia trojrozmernej vektorovej analýzy, použiteľná v dvoch rozmeroch?

Dá sa k tomu pristupovať rôzne, pozri napr. [8, 9]. My sa skúsime nechať viesť logikou teórie *diferenciálnych foriem*. Pre čitateľa, ktorý s formami nemá žiadnu skúsenosť a túto teóriu vníma len ako „panské huncútsvo“, to možno vyzerá ako ísť kanónom na vrabce. Je ale známe (pozri napr. §8.5 v knihe [6]), že práve tento pohľad je v *trojrozmernom* prípade mimoriadne poučný a efektívny: Vyskočia z neho napríklad automaticky všetky dôležité *diferenciálne operátory* aj vzťahy medzi nimi (rot, grad aj div sú len zamaskované verzie *vonkajšej* derivácie foriem). A takisto aj *integrálne vety*, v ktorých tieto operátory vystupujú (ako špeciálne prejavy stále tej istej *Stokesovej* vety pre formy).

V tomto článku si ukážeme, že prístup cez diferenciálne formy nesklame ani tu.

Ak formy (a teda ani vektorovú analýzu v jazyku foriem) nepoznáme, odvodenia budú síce asi technicky nejasné, ale:

---

2010 MSC. Primárni 53A45, 58A10; Sekundárni 76Mxx.

Kľúčová slova. Vektorová analýza, rotácia, gradient, divergencia, diferenciálne formy.

1. *Výsledky* jasné budú, lebo ich vyjadríme aj v *elementárnom* jazyku, takže na pochopenie toho, *ako to celé dopadlo*, formy nepotrebujeme.

2. Navyše hrubá myšlienka sa hádam pochytiť predsa len bude dať, a tak nás možno tie formy napokon predsa len očaria, čo spôsobí, že si o nich možno skúsime niekedy v budúcnosti prečítať viac.

## 2. AKO TO FUNGUJE V TROCH ROZMEROCH

Vo vektorovej analýze často počuť slovné spojenia typu „integrvať vektorové pole po ploche“ (čím získame jeho tok (flux) cez tú plochu). Z teórie integrovania však vyplýva (pozri napr. 7. kapitolu v [6]), že

- integrujú sa vždy len diferenciálne *formy*,
- po  $p$ -rozmernej oblasti sa integruje  $p$ -forma.

Takže ak niečo integrujeme

- po krivke, musí to byť 1-forma,
- po ploche, musí to byť 2-forma a
- po objeme, musí to byť 3-forma.

Ako si potom ale máme vysvetliť fakt, že pod tým plošným integrálom, kde má byť správne 2-forma, býva výraz štruktúry  $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ , t.j. nevidieť tam to *vektorové pole*  $\mathbf{A}$  je ako zaprieť nos medzi očami? Odpoveď je, že to, čo tam naozaj vidíme, je *celok*  $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$  a ten je 2-forma. Je však *jednoznačne parametrizovaná* vektorovým poľom  $\mathbf{A}$ .

Celkovo to s tými parametrizáciami foriem v  $E^3$  (trojrozmernom euklidovskom priestore) vyzerá takto (pozri napr. ten spomínaný paragraf 8.5 v [6]): Existujú tam 0-formy, 1-formy, 2-formy a 3-formy (to je za samotnú trojrozmernosť priestoru) a na každom tomto stupni máme operáciu *vonkajšej derivácie*  $d$ , ktorá zvyšuje stupeň formy o 1 a v kvadráte dáva nulu (to existuje v ľubovoľne rozmernom priestore). Zodpovedá tomu diagram

$$\Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2 \xrightarrow{d} \Omega^3, \quad dd = 0. \quad (2.1)$$

(ide o *de Rhamov komplex*; priestor  $p$ -foriem v  $E^3$  tu označujeme  $\Omega^p$ ). Keďže na  $E^3$  máme aj (bežný euklidovský) *metrický tenzor*, na  $p$ -formách pribúda *Hodgeov operátor*. Je to všeobecne kanonický lineárny izomorfizmus (označuje sa hviezdíčkou) lineárnych priestorov  $p$ -foriem a  $(n-p)$ -foriem, ktorý v kvadráte dáva plus/mínus identitu. (V  $E^3$  na každom stupni plus. Pritom  $n$  je rozmer uvažovaného priestoru.)

V trojrozmernom priestore to teda dáva tieto dva kanonické izomorfizmy:

$$\Omega^0 \xleftrightarrow{*} \Omega^3 \quad \Omega^1 \xleftrightarrow{*} \Omega^2 \quad *^{-1} = * \quad (2.2)$$

Umožňujú nám „stotožniť“ 2-formy s 1-formami a tiež 3-formy s 0-formami. (Ak niekde potrebujeme 2-formu  $\beta$ , môžeme ju *parametrizovať* 1-formou  $\alpha$ , t.j. zapísať v tvare  $*\alpha$ , kde  $\alpha$  je jednoznačná 1-forma:  $\alpha = *\beta$ .) „Naozaj“ teda potrebujeme už len 0-formy (čo sú *funkcie*; ich lineárny priestor označíme  $\mathcal{F}$ ) a 1-formy (ostatné si už parametrizujeme cez ne).

Metrický tenzor ale dáva ešte ďalšie dva dôležité kanonické izomorfizmy, a to (navzájom inverzné) operácie *dvíhania a spúšťania indexov* (označujú sa  $\sharp$  a  $\flat$ , čo je inšpirované zo zápisu  $\hat{n}^t$ ). Robia vektorové pole z 1-formy ( $\sharp$ ) a naopak ( $\flat$ ). Ak označíme lineárny priestor vektorových polí v  $E^3$  ako  $\mathfrak{X}$ , máme

$$\Omega^1 \begin{matrix} \xrightarrow{\sharp} \\ \xleftarrow{\flat} \end{matrix} \mathfrak{X}, \quad \sharp^{-1} = \flat, \quad \flat^{-1} = \sharp. \quad (2.3)$$

Vďaka tomu môžeme zabudnúť aj na 1-formy a úplne si vystačíme<sup>1</sup> len s *funkciami a vektorovými poľami*! Diferenciálne formy v priestore  $E^3$  teda *akoby* úplne vypadli z hry! Vyjadříme to (komutatívnym) diagramom:

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega^0 & \xrightarrow{d} & \Omega^1 & \xrightarrow{d} & \Omega^2 & \xrightarrow{d} & \Omega^3 \\ id \downarrow & & \downarrow \sharp & & \downarrow \sharp * & & \downarrow * \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{a_0} & \mathfrak{X} & \xrightarrow{a_1} & \mathfrak{X} & \xrightarrow{a_2} & \mathcal{F} \end{array} \quad (2.4)$$

Zvislé šípky označujú kanonické izomorfizmy jednotlivých stupňov foriem (horný riadok) na skalárne polia  $\mathcal{F}$  a vektorové polia  $\mathfrak{X}$ . Ak ich obrátíme, dostaneme ekvivalentný diagram:

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega^0 & \xrightarrow{d} & \Omega^1 & \xrightarrow{d} & \Omega^2 & \xrightarrow{d} & \Omega^3 \\ id \uparrow & & \uparrow \flat & & \uparrow * \flat & & \uparrow * \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{a_0} & \mathfrak{X} & \xrightarrow{a_1} & \mathfrak{X} & \xrightarrow{a_2} & \mathcal{F} \end{array} \quad (2.5)$$

Aplikáciou týchto šípiek (smerom hore) na skalárne a vektorové polia (na  $f$  a  $\mathbf{A}$ ) dostaneme práve štandardné objekty, ktoré vidáme pod integrálmi (pozri paragraf 8.5 v [6])

$$f \in \Omega^0, \quad \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \in \Omega^1, \quad \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \in \Omega^2, \quad fdV \in \Omega^3. \quad (2.6)$$

Šípky  $a_0, a_1, a_2$  v spodnom riadku oboch diagramov sú *efektívne* operácie (zloženie zodpovedajúcich troch šípiek - hore, doprava a dolu) na objektoch v spodnom riadku, ktoré „nahrádzajú“ operáciu vonkajšej derivácie (šípiek  $d$ ), ktorá sa tam „naozaj“ deje na formách v hornom riadku. Z diagramov vidíme, že

$$a_0 = \sharp d, \quad a_1 = \sharp * d \flat, \quad a_2 = * d * \flat. \quad (2.7)$$

Ide zjavne o *diferenciálne* operátory *prvého* rádu, lebo obsahujú jedno  $d$ . Ak ich zrátame v kartézskych súradniciach v  $E^3$ , zistíme, že sú to akurát známe operátory

<sup>1</sup>Funkcie a vektorové polia tak pripomínajú *esenciálne* aminokyseliny vo výžive: Všetkých aminokyselín je síce cca 20, ale stačí, keď máme v strave dost esenciálnych (tých je len zhruba polovica), zvyšné si už dokáže telo vyrobiť z nich. V trojrozmernom euklidovskom priestore si dokážeme vyrobiť *akékoľvek* formy z funkcií alebo vektorových polí.

grad, rot a div, takže diagram (2.4) v skutočnosti vyzerá:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \Omega^0 & \xrightarrow{d} & \Omega^1 & \xrightarrow{d} & \Omega^2 & \xrightarrow{d} & \Omega^3 \\
 \text{id} \downarrow & & \downarrow \# & & \downarrow \#* & & \downarrow * \\
 \mathcal{F} & \xrightarrow{\text{grad}} & \mathfrak{X} & \xrightarrow{\text{rot}} & \mathfrak{X} & \xrightarrow{\text{div}} & \mathcal{F}
 \end{array} \tag{2.8}$$

Z faktu  $dd = 0$  (pozri (2.1)) a komutativity diagramu okamžite dostávame známe identity

$$\text{rot grad} = 0, \quad \text{div rot} = 0. \tag{2.9}$$

(zloženie susedných šípok hore dáva nulu, tak to musí platiť aj pre spodné).

Z troch susedných štvorcov diagramu (2.8) a parametrizácie (2.6) sa dajú poskladať aj tieto tri užitočné diferenciálne vzťahy

$$df = \text{grad } f \cdot d\mathbf{r}, \quad d(\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}) = (\text{rot } \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}, \quad d(\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}) = (\text{div } \mathbf{A})dV. \tag{2.10}$$

Aby sme z nich dostali integrálne vety, odvoláme sa na všeobecnú *Stokesovu vetu* (pozri paragraf 7.5 v [6]) z teórie diferenciálnych foriem: Ak  $\alpha$  je  $p$ -forma,  $D$  je  $(p+1)$ -rozmerná oblasť a  $\partial D$  jej  $p$ -rozmerná hranica, tak platí

$$\int_D d\alpha = \int_{\partial D} \alpha. \tag{2.11}$$

Pre tri výrazy  $d\alpha$  z (2.10) dostaneme tri základné integrálne vety vektorovej analýzy:

$$\text{veta o gradiente} \quad \int_c \text{grad } f \cdot d\mathbf{r} := f(B) - f(A) \tag{2.12}$$

$$\text{Stokesova veta} \quad \int_S (\text{rot } \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} := \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \tag{2.13}$$

$$\text{Gaussova veta} \quad \int_V (\text{div } \mathbf{A})dV := \oint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \tag{2.14}$$

### 3. AKO TO FUNGUJE V 2D

De Rhamov komplex, teda analóg (2.1), sa v dvojrozmernom prípade zjednodušuje na

$$\Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2, \quad dd = 0. \tag{3.1}$$

Kľúčový rozdiel je v pôsobení Hodgeovej hviezdičky:

$$\Omega^0 \xleftrightarrow{*} \Omega^2 \quad \Omega^1 \xleftrightarrow{*} \Omega^1 \tag{3.2}$$

Ľavý vzťah je prirodzeným analógom ľavého vzťahu v (2.2), stotožňuje okrajové stupne foriem; explicitne:

$$*f = fdS \quad *(fdS) = f \quad dS \equiv dx \wedge dy = \text{2-forma plochy} \tag{3.3}$$

To umožňuje zabudnúť na 2-formy a vyjadrovať ich cez 0-formy, teda cez funkcie (skalárne polia).

Pravý vzťah je ale úplne iný: Zatiaľ čo (2.2) je izomorfizmom *dvoch rôznych* priestorov, v (3.2) je to izomorfizmus *jedného* priestoru (priestoru 1-foriem) *na seba* (rôzny od identity). Explicitne, v bežných kartézskych súradniciach  $(x, y)$  v rovine

$$*dx = dy, \quad *dy = -dx. \quad (3.4)$$

To neznamená, že nemôžeme zabudnúť na 1-formy. Znamená to, že v 2D máme až *dva kanonické* spôsoby, ako môžeme 1-formy nahradiť vektorovými poľami! Jeden je taký, ako sa to robilo v 3D, teda operácia  $\sharp$  (dvihnutie indexu). Vyzerá:

$$\begin{array}{ccccc} \Omega^0 & \xrightarrow{d} & \Omega^1 & \xrightarrow{d} & \Omega^2 \\ id \downarrow & & \downarrow \sharp & & \downarrow * \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{a_0} & \mathfrak{X} & \xrightarrow{a_1} & \mathcal{F} \end{array} \quad (3.5)$$

Aplikáciou týchto šípiek (smerom hore) na skalárne a vektorové polia (na  $f$  a  $\mathbf{A}$ ) dostaneme opäť štandardné objekty, ktoré vidáme pod integrálmi:

$$f \in \Omega^0 \quad \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \equiv A_x dx + A_y dy \in \Omega^1 \quad f dS \in \Omega^2 \quad (3.6)$$

Pribudol však druhý – najprv aplikujeme hviezdičku (po čom máme stále 1-formu) a až potom dvihneme index. Máme teda *dva rôzne* analógy diagramu (2.4):

$$\begin{array}{ccccc} \Omega^0 & \xrightarrow{d} & \Omega^1 & \xrightarrow{d} & \Omega^2 \\ id \downarrow & & \downarrow \sharp & & \downarrow * \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{a_0} & \mathfrak{X} & \xrightarrow{a_1} & \mathcal{F} \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} \Omega^0 & \xrightarrow{d} & \Omega^1 & \xrightarrow{d} & \Omega^2 \\ id \downarrow & & \downarrow \sharp * & & \downarrow * \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{b_0} & \mathfrak{X} & \xrightarrow{b_1} & \mathcal{F} \end{array} \quad (3.7)$$

Vidíme, že aj v 2D-vektorovej analýze vystačíme s *vektorovými a skalárnymi* poľami (dolné riadky). Z diagramov poskladáme vyjadrenia spodných (efektívnych) šípiek:

$$a_0 = \sharp d, \quad a_1 = *db, \quad b_0 = \sharp * d, \quad b_1 = *d *^{-1} b. \quad (3.8)$$

Ak tieto (diferenciálne) operátory zrátame v (kartézskych) súradniciach  $(x, y)$ , zistíme, že dva z nich sú prirodzené analógy situácie v 3D (gradient a divergencia), zvyšné dva sú „nové“, špecifické pre 2D:

$$\begin{array}{ccccc} \Omega^0 & \xrightarrow{d} & \Omega^1 & \xrightarrow{d} & \Omega^2 \\ id \downarrow & & \downarrow \sharp & & \downarrow * \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{\text{grad}} & \mathfrak{X} & \xrightarrow{\text{rot}_3} & \mathcal{F} \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} \Omega^0 & \xrightarrow{d} & \Omega^1 & \xrightarrow{d} & \Omega^2 \\ id \downarrow & & \downarrow \sharp * & & \downarrow * \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{\text{Ham}} & \mathfrak{X} & \xrightarrow{-\text{div}} & \mathcal{F} \end{array} \quad (3.9)$$

(Označenie  $b_0 = \text{Ham}$  zdôvodníme v paragrafe 4 a  $a_1 = \text{rot}_3$  v paragrafe 5.) Abstraktne teda máme

$$\text{grad} = \sharp d, \quad \text{rot}_3 = *db, \quad \text{Ham} = \sharp * d, \quad \text{div} = - * d *^{-1} b. \quad (3.10)$$

a ich pôsobenie vyzerá

$$\text{grad}: f \mapsto (\partial_x f, \partial_y f), \quad (3.11)$$

$$\text{rot}_3: (A_x, A_y) \mapsto (\partial_x A_y - \partial_y A_x), \quad (3.12)$$

$$\text{Ham}: f \mapsto (-\partial_y f, \partial_x f), \quad (3.13)$$

$$\text{div}: (A_x, A_y) \mapsto (\partial_x A_x + \partial_y A_y). \quad (3.14)$$

Ľahko overíme aj nulový výsledok zloženia spodných šípok (v oboch diagramoch)

$$\text{rot}_3 \circ \text{grad} = 0, \quad \text{div} \circ \text{Ham} = 0. \quad (3.15)$$

Naozaj,

$$\text{rot}_3 \circ \text{grad}: f \mapsto \text{rot}_3(\partial_x f, \partial_y f) = (\partial_x \partial_y f - \partial_y \partial_x f) = 0, \quad (3.16)$$

$$\text{div} \circ \text{Ham}: f \mapsto \text{div}(-\partial_y f, \partial_x f) = (-\partial_x \partial_y f + \partial_y \partial_x f) = 0. \quad (3.17)$$

Je to analóg (2.9). Všimnime si, že tu máme tiež dve identity, ale nie preto, že uplatníme  $dd = 0$  na rôznych stupňoch v jednom diagrame, ale na rovnakých stupňoch v dvoch rôznych diagramoch.

Stojí tiež za povšimnutie, že keď zložíme šípky z rôznych diagramov, dostaneme (v oboch prípadoch) ďalší známy operátor, *Laplaceov* operátor  $\Delta$ ,

$$\text{div} \circ \text{grad} = \Delta, \quad \text{rot}_3 \circ \text{Ham} = \Delta. \quad (3.18)$$

Naozaj,

$$\text{div} \circ \text{grad}: f \mapsto \text{div}(\partial_x f, \partial_y f) = (\partial_x^2 + \partial_y^2)f \equiv \Delta f, \quad (3.19)$$

$$\text{rot}_3 \circ \text{Ham}: f \mapsto \text{rot}_3(-\partial_y f, \partial_x f) = (\partial_x^2 + \partial_y^2)f \equiv \Delta f. \quad (3.20)$$

#### 4. HAMILTONOVSKÉ POLIA

Označenie  $\text{Ham } f$  v (3.13) je skratka pre *hamiltonovské pole* generované funkciou  $f$ . Je to kľúčový objekt v teórii hamiltonovských sústav (detaily pozri napr. v 14. kapitole v [6]). Ako sa to objavilo tu?

Ukazuje sa, že naša *plošná* forma  $\omega \equiv dS$  spomínaná v (3.3) je zároveň *symplektická* forma (vyhovuje jej definícii; všeobecne to je „uzavretá a nedegenerovaná 2-forma“). A všade tam, kde máme symplektickú formu, máme aj predpis na konštrukciu hamiltonovských (vektorových) polí:

$$f \mapsto \text{Ham } f \quad i_{\text{Ham } f} \omega := -df \quad (4.1)$$

Ak zrátame, ako funguje (4.1) tu, dostaneme presne (3.13).

To vrhá nové svetlo aj na druhý výsledok v (3.15). Fakt, že divergencia hamiltonovského poľa (generovaného hocijakou funkciou) je nulová je ekvivalentný dobre známej *Liouvilovej vete* z klasickej mechaniky (pozri 14.3.7 v [6]). Tá hovorí, že sa pri časovom vývoji zachováva *objem* (tu plocha) vo *fázovom* priestore (tu našom 2D priestore).



## 5. POMOCNÝ TRETÍ ROZMER

Čitateľ sa môže ľahko presvedčiť, že:

1. Ak urobíme z funkcie  $f(x, y)$  v 2D rovine pomocné vektorové pole v 3D priestore

$$\mathbf{u} = (0, 0, -f(x, y)) \quad (5.1)$$

(skúste opísať, ako vyzerá), tak jeho rotácia dopadne takto:

$$\text{rot } \mathbf{u} = (-\partial_y f, \partial_x f, 0) \equiv (\text{Ham } f, 0) \quad (5.2)$$

2. Ak urobíme z vektorového poľa  $\mathbf{A}$  v 2D rovine pomocné vektorové pole v 3D priestore

$$\mathcal{A} = (\mathbf{A}, 0) \equiv (A_x(x, y), A_y(x, y), 0) \quad (5.3)$$

(skúste opísať, ako vyzerá), tak jeho rotácia dopadne takto:

$$\text{rot } \mathcal{A} = (0, 0, \partial_x A_y - \partial_y A_x) \equiv (0, 0, \text{rot}_3 \mathbf{A}) \quad (5.4)$$

Čo tieto dva jednoduché výpočty odhaľujú?

Po prvé to, že naše dve „nové“ operácie 2D vektorovej analýzy,  $a_1 \equiv \text{rot}_3$  a  $b_0 \equiv \text{Ham}$ , sa dajú nájsť aj skryté na špeciálnych miestach výstupov špeciálne zvolených vstupov 3D vektorovej analýzy. Prístup opisovaný v tomto článku nachádza ich tvar a vlastnosti „vnútorne“, bez odkazu na dodatočné rozmery.

A po druhé vidíme motiváciu pre označenie operácie  $\text{rot}_3$ . Teda hlavne na ten index 3 (menovite že  $\text{rot}_3 \mathbf{A} = (\text{rot } \mathcal{A})_3$ ). Motivácia na samotné označenie  $\text{rot}$  (čo by malo súvisieť s nejakým *krútením sa*) sa rieši už v 3D vektorovej analýze (súvisí napríklad s *vírovým* tečením kvapaliny; pozri pár slov o tom v odseku 9.2).

## 6. INTEGRÁLNE IDENTITY A GREENOVA VETA

Integrálne vety pre 2D-vektorovú analýzu získame opäť z univerzálnej Stokesovej vety (2.11) pre formy. Technika je rovnaká, aká sa použila na konci paragrafu 2 pre 3D prípad.

Keďže v dvoch diagramoch v (3.9) máme až *štyri* základné štvorce (s hornou šípkou d), očakávame štyri integrálne vety.

Najprv si poskladáme príslušné štyri diferenciálne identity (analógy výrazov (2.10)). Z jednotlivých štvorcov postupne dostávame:

$$df = \text{grad } f \cdot d\mathbf{r} \quad df = - * (\text{Ham } f \cdot d\mathbf{r}) \quad (6.1)$$

$$d(\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}) = (\text{rot}_3 \mathbf{A})dS \quad d * (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}) = (\text{div } \mathbf{A})dS \quad (6.2)$$

Ich preintegrovanie a nasadenie Stokesovej vety (2.11) dáva:

$$\int_C \text{grad } f \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A) \quad \int_C * (\text{Ham } f \cdot d\mathbf{r}) = f(A) - f(B) \quad (6.3)$$

$$\int_S (\text{rot}_3 \mathbf{A})dS = \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad \int_S (\text{div } \mathbf{A})dS = \oint * (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}) \quad (6.4)$$

Ak si podintegrálne výrazy explicitne vyjadríme (pomocou (3.4) a (3.11)–(3.14)), zistíme, že obe identity v (6.3) hovoria to isté a podobne obe identity v (6.4)

hovorí to isté. Dostali sme teda *len dve* navzájom rôzne integrálne identity. Po vhodnom premenovaní premenných vyzerajú takto:

$$\text{veta o gradiente} \quad \int_c (\partial_x f) dx + (\partial_y f) dy := f(B) - f(A) \quad (6.5)$$

$$\text{Greenova veta} \quad \int_S (\partial_x g - \partial_y f) dx dy := \oint_{\partial S} f dx + g dy \quad (6.6)$$

Prvou je 2D verzia vety o gradiente. Tá je dobre známa a platí v každom rozmere. Dáva do súvisu integrál po krivke  $c$  s „integrálom“ po jej hranici  $\partial c$  (čo sú dva body,  $A$ , jej začiatok a  $B$ , jej koniec).

Druhou je Greenova veta. Tá je tiež dobre známa a je špecifická pre dvojrozmerný priestor. Dáva do súvisu integrál po ploche  $S$  s integrálom po jej hranici (čo je uzavretá krivka  $\partial S$ ). (Venuje sa jej aj pekný článok [7] publikovaný v tomto časopise.)

## 7. KOLMÉ VEKTOROVÉ POLE

Ako sme už spomínali v paragrafe 3, špecifikom dvoch rozmerov je fakt, že Hodgeova hviezdička zobrazuje 1-formy opäť na seba (pozri (3.2)). Tie sú však v bijekcii s vektorovými poľami (cez  $\sharp$  a  $\flat$ ), takže efektívne hviezdička indukuje aj kanonický izomorfizmus *vektorových poľí* na seba

$$\sharp * \flat : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}. \quad (7.1)$$

Výpočet dáva

$$\sharp * \flat : (A_x, A_y) \mapsto (-A_y, A_x), \quad \text{t.j.} \quad \mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}_{\pi/2}. \quad (7.2)$$

Výsledok označujeme  $\mathbf{A}_{\pi/2}$ , lebo z komponent je zrejmé, že v každom bode vzniká vektor nového poľa *otočením* vektora pôvodného poľa o  $\pi/2$  v kladnom zmysle, t.j. proti smeru hodinových ručičiek. (Je to kompatibilné s faktom, že na 1-formách je *kvadrát* hviezdičky *minus* identita, pozri (3.4)).

Zobrazenie (7.2) je ekvivalentné praktickému vzorčeku:

$$* (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}) =: \mathbf{A}_{\pi/2} \cdot d\mathbf{r} \quad (7.3)$$

Potom kombináciou s (6.1) dostávame pre vzťah gradientu a hamiltonovského poľa toto

$$\text{Ham } f = (\text{grad } f)_{\pi/2} \quad (7.4)$$

čo je zrejmé aj z vyjadrení (3.11) a (3.13). Ak  $f(x, y)$  opisuje výšku kopca niekde v teréne, vieme, že vektorové pole  $\text{grad } f$  ukazuje v každom bode smer najprudšieho stúpania (a  $-\text{grad } f$  smer najprudšieho klesania). Potom vektorové pole  $\text{Ham } f$  ukazuje v každom bode smer nulového stúpania, čiže smer *pozdĺž vrstevníc*.

## 8. POINCARÉHO LEMA

Pripomeňme na úvod, čo táto užitočná lema tvrdí.

Fakt  $dd = 0$  hovorí, že ak je forma  $\alpha$  exaktná (t.j.  $\alpha = d\beta$ ), tak je aj uzavretá ( $d\alpha = 0$ ). Opačná implikácia všeobecne neplatí, ale Poincarého lema zaručuje, že

v oblasti *stiahnuteľnej do bodu* (napríklad v oblasti, kde fungujú jedny súradnice) predsa len platí.

V 3D vektorovej analýze to dáva často používané a užitočné tvrdenia (obrátenia implikácií v (2.9))

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0 \Rightarrow \mathbf{a} = \operatorname{grad} f, \quad \operatorname{div} \mathbf{a} = 0 \Rightarrow \mathbf{a} = \operatorname{rot} \mathbf{b}. \quad (8.1)$$

V jazyku diagramu (2.8) to hovorí, že ak nejaká šípka v dolnom riadku dáva nulu, vstup je výstupom predchádzajúcej šípky.

A čo dá táto dedukcia v 2D vektorovej analýze, t.j. pre diagramy (3.9)? Toto:

$$\operatorname{rot}_3 \mathbf{a} = 0 \Rightarrow \mathbf{a} = \operatorname{grad} f, \quad \operatorname{div} \mathbf{a} = 0 \Rightarrow \mathbf{a} = \operatorname{Ham} f. \quad (8.2)$$

S jedným použitím týchto faktov sa stretneme v paragrafe 9.

## 9. 2D VEKTOROVÁ ANALÝZA V 2D HYDRODYNAMIKE

2D vektorová analýza môže byť užitočná napríklad pri opise 2D tečenia v hydrodynamike. Takéto tečenie sa opisuje *rýchlostným poľom*  $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ . Z rovnice kontinuity (ktorá vyjadruje zachovanie hmotnosti pri tečení) vyplýva, že ak je hustota hmotnosti  $\rho$  konštantná, rýchlostné pole má nulovú divergenciu:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{nestlačiteľná kvapalina} \quad (9.1)$$

### 9.1. Nestlačiteľná kvapalina a prúdová funkcia

Porovnajme druhé implikácie v (8.1) a (8.2). Vidíme, že ak má nejaké vektorové pole v 2D nulovú divergenciu, nie je rotáciou iného (ľubovoľného) vektorového poľa, ako to poznáme z 3D, ale je *hamiltonovským* poľom generovaným ľubovoľnou funkciou  $f(x, y)$ :

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = \operatorname{Ham} f, \quad \text{t.j.} \quad (v_x, v_y) = (-\partial_y f, \partial_x f). \quad (9.2)$$

Dá sa povedať, že toto rýchlostné pole je *potenciálové* v zmysle, že komponenty poľa sa počítajú ako derivácie akejkoľvek veličiny, tu funkcie (potenciálu)  $f$ . Ale to pole sa nepočíta ako zvyčajný gradient potenciálu (ako to je napríklad pre elektrické pole v elektrostatike), ale inou kombináciou parciálnych derivácií. Konkrétne nám vyšlo, že z  $f$  treba urobiť hamiltonovské pole.

Aký je fyzikálny význam funkcie  $f$ ?

Po prvé, ľahko sa overí, že derivácia funkcie  $f$  v smere *prúdnic* daného tečenia je nulová:

$$\dot{f} \equiv \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t)) = \dot{x}(\partial_x f) + \dot{y}(\partial_y f) = \dot{x}v_y - \dot{y}v_x = 0 \quad (9.3)$$

lebo na prúdnici  $\mathbf{r}(t) \equiv (x(t), y(t))$  je  $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y})$ .

Funkcia  $f$  je teda *konštantná* na prúdniciach. Ak by sa nám ju podarilo nájsť, z podmienky

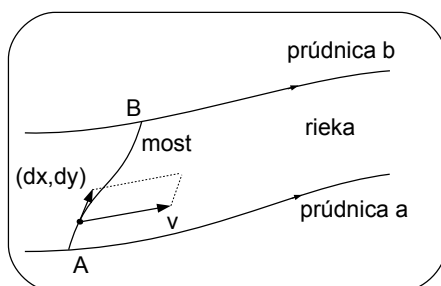
$$f(x, y) = \text{const.} \quad (9.4)$$

získame *tvár prúdnic*, čiže obrázok nášho 2D tečenia.<sup>2</sup> Preto sa funkcia  $f$  volá *prúdová funkcia* (stream function).

Po druhé, uvedomíme si, že samotná *hodnota* funkcie  $f$  v bode  $A$  nemôže mať priamy fyzikálny význam, keďže je zrejmé, že  $f$  má vôľu v aditívnej konštante. Význam ale môže mať *rozdiel* hodnôt v dvoch bodoch  $A$  a  $B$ , t.j.  $f(B) - f(A)$ . V elektrostatičke, kde je (elektrické) pole (mínus) gradientom potenciálu, tak dostaneme *napätie*. Čo dostaneme tu, kde je (rýchlostné) pole hamiltonovským poľom zodpovedajúcim tomuto „potenciálu“?

Ukazuje sa, že to dáva celkový *prietok* tekutiny za jednotku času cez (ľubovoľnú) krivku, ktorá spája tieto dva body. Ak teda nakreslíme dve prúdnice, ktoré prechádzajú cez tieto dva body, ide o celkový prietok popod (ľubovoľný) most ponad rieku, ktorá tečie medzi týmito dvoma prúdnicami.

Dá sa to nahliadnuť aj na obrázku (pozri obr. 1) a zrátať „na prstoch“.



**Obrázok 1.** Cez bod  $A$  prechádza prúdnic  $a$ , cez bod  $B$  prúdnic  $b$ . Prúdnic medzi nimi tvoria „rieku“. Z bodu  $A$  do bodu  $B$  ide ponad rieku most. Plocha kosodĺžnika je prietok rieky (za jednotku času) popod malý kúsok  $(dx, dy)$  mosta..

Druhá identita v (6.1) nám dáva

$$df = - * (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}) = - * (v_x dx + v_y dy) = v_y dx - v_x dy, \quad (9.5)$$

kde sme použili (3.4). Ak teda pokročíme (po tej spojnic bodov  $A$  a  $B$ ) o malý vektor  $(dx, dy)$ , funkčná hodnota funkcie  $f$  sa zmení o  $df = v_y dx - v_x dy$ . To vpravo je však veľkosť *plôšky kosodĺžnika* s hranami  $(dx, dy)$  a  $(v_x, v_y)$ . No a to je presne prietok tekutiny s rýchlosťou  $(v_x, v_y)$  cez malý kúsok  $(dx, dy)$  tej spojnice, t.j. *plocha*, ktorá týmto kúskom pretečie za jednotku času. (V 3D situácii to bol *objem* tekutiny, ktorý pretečie cez plôšku  $d\mathbf{S}$  a výraz preň bol  $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ .) Celková zmena  $f$  na trase medzi  $A$  a  $B$  je potom zodpovedajúci *integrál* po tej ceste, čo dáva *celkový prietok* cez celú spojnicu.

<sup>2</sup>Nevidno z neho *smer* tečenia ani *veľkosť rýchlosti* toho tečenia. Tento obrázok by zároveň ukazoval *vrstevnice* kopca s výškou  $f(x, y)$ , spomínané na konci paragrafu 7. Ak by sme prúdovú funkciu použili na opis výšky fiktívneho kopca, kvapalina by na príslušnej turistickej mape tiekla pozdĺž vrstevníc.

## 9.2. Nevírové prúdenie a jeho potenciál

Teraz sa venujme prvej implikácii v (8.2). Vidíme, že ak má nejaké vektorové pole v 2D nulovú hodnotu  $\text{rot}_3 \mathbf{a}$ , je *gradientom* nejakej funkcie  $g(x, y)$ . Pre rýchlostné pole  $\mathbf{v}$  tak

$$\text{rot}_3 \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = \text{grad } g, \quad \text{t.j. } (v_x, v_y) = (\partial_x g, \partial_y g). \quad (9.6)$$

Čo ale *fyzikálne* hovorí fakt  $\text{rot}_3 \mathbf{v} = 0$ ?

V 3D prípade sa *vektorové* pole  $\text{rot } \mathbf{v}$  volá *vírovosť* (vorticity). Ukazuje sa, že v danom bode je to dvojnásobok (vektora) uhlovej rýchlosti, ktorou sa točí „kvapka“ so stredom v danom bode.

*Skalárna* funkcia  $\text{rot}_3 \mathbf{v}$  je 2D verzia vírovosti tečenia. (Volá sa tiež vírovosť.) Ak by sme položili niekam na hladinu daného 2D tečenia malé teliesko z korku, točilo by sa uhlovou rýchlosťou  $2 \text{rot}_3 \mathbf{v}$ .

Podmienka  $\text{rot}_3 \mathbf{v} = 0$  teda opisuje *nevírové* prúdenie. Ako vidíme z (9.6), takéto prúdenie je tiež „potenciálové“, tentokrát navyše v tom bežnom zmysle (že vektorové pole sa počíta ako gradient potenciálu).

## 9.3. Odkiaľ sem príde komplexná analýza

Predstavme si, že opisujeme 2D tečenie, ktoré je *súčasne* „nestlačiteľné“ a nevírové. Potom podľa (9.2) a (9.6) platí

$$\mathbf{v} = \text{Ham } f = \text{grad } g, \quad \text{t.j. } (v_x, v_y) = (-\partial_y f, \partial_x f) = (\partial_x g, \partial_y g). \quad (9.7)$$

Posledné znamienko rovnosti v (9.7) však vyjadruje presne *Cauchyho-Riemannove vzťahy*; hovoria, že funkcia komplexnej premennej

$$h(z), \quad h = f + ig, \quad z = x + iy \quad (9.8)$$

je analytická. Ľahko sa zráta, že rýchlostné pole je ukryté v jej derivácii

$$h'(z) = v_y + iv_x. \quad (9.9)$$

Naozaj,

$$2\partial_z h(z) = (\partial_x - i\partial_y)(f + ig) = 2(v_y + iv_x). \quad (9.10)$$

Viac sa dá o tom dočítať v knihách o hydrodynamike, napr. [10].

## 10. ZÁVER

V tomto článku sme sa pozreli na 2D analóg vektorovej analýzy. Prístup bol založený na využití diferenciálnych foriem. Spočíval v zopakovaní logiky, ktorá vedie k lepšiemu pochopeniu štandardnej 3D vektorovej analýzy. Tento postup je „vnútorný“, nevyužíva sa vnorenie 2D priestoru do pomocného 3D priestoru. Ukazuje sa, aké diferenciálne operátory tu figurujú (analógy grad, rot a div z 3D), aké sú medzi nimi vzťahy a do akých integrálnych identít vstupujú. Výsledky sú prezentované aj v štandardnom jazyku (t.j. bez foriem).

## LITERATÚRA

- [1] J. Garaj: *Základy vektorového počtu*, SVTL, Bratislava, 1963.
- [2] B. Spain: *Vector Analysis*, D. Van Nostrand Company, 1975.
- [3] J. E. Marsden: *Vector Calculus*, W. H. Freeman & Company, 1976.
- [4] H. M. Schey: *Div, Grad, Curl, and All That: An Informal Text on Vector Calculus*, W. W. Norton & Company, 2004.
- [5] D. Fleisch: *A Student's Guide to Maxwell's Equations*, CUP, Cambridge, 2008.
- [6] M. Fecko: *Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov*, Iris, Bratislava, 2004, 2009, 2018; CUP, Cambridge, 2006, 2011.
- [7] R. Mařík: *Greenova věta a její aplikace*, Kvaternion (2018), No. 1–2, 15–24.
- [8] P. Olver: *Vector Calculus in Two Dimensions*, online <https://www-users.math.umn.edu/~olver/lnc/vc2.pdf>.
- [9] Khan Academy: *Formal definition of curl in two dimensions*, online <https://www.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/greens-theorem-and-stokes-theorem/formal-definitions-of-divergence-and-curl/a/defining-curl>.
- [10] L. D. Landau, E. M. Lifshitz: *Fluid Mechanics*, Pergamon Press (Second Edition), 1987.

Marián Fecko, Katedra teoretickej fyziky, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského v Bratislave, Mlynská dolina F2, 84248 Bratislava, Slovenská republika,  
e-mail: [marian.fecko@fmph.uniba.sk](mailto:marian.fecko@fmph.uniba.sk)

## DŮKAZ VELKÉ FERMATOVY VĚTY PRO EXPONENT 3

PETR GOLAN

*Tuto práci bych rád věnoval památce bývalého děkana Elektrotechnické fakulty ČVUT profesora Ing. Jana Hlavičky, DrSc., který byl mým školitelem a přítelem v době našeho společného působení ve Výzkumném ústavu matematických strojů. Od jeho předčasné smrti uplynulo letos v září 19 let.*

ABSTRAKT. V článku je prezentován nový netradiční důkaz Fermatova tvrzení, že neexistují přirozená čísla, jež by vyhovovala diofantické rovnici  $x^3 + y^3 = z^3$ . Důkaz je založen na tom, že tuto rovnici lze převést do ekvivalentního součinného tvaru  $(3k)^3 = (x + y - z)^3 = 3(x + y)(z - x)(z - y)$ , kde  $x + y$ ,  $z - x$ ,  $z - y$  jsou po dvou nesoudělná čísla. Pokud  $3 \mid z$ , tak  $z - y = x - 3k = X^3$ ,  $z - x = y - 3k = Y^3$  a  $x + y = z + 3k = 9Z^3$ . Odtud lze odvodit podmínku  $Y^3(Y^2 + 3ZX)^3 = (z - x)(z^2 + zx + x^2)$  a  $(Y^2 + 3ZX)^3 = x^2 + xz + z^2$ . Použitím substituce  $Y^2 + 3ZX = a^2 + ab + b^2 = (a - b)^2 + 3ab$ ,  $x = a^3 + 3a^2b - b^3$ ,  $z = b^3 + 3ab - a^3$  pak obdržíme identitu. Porovnáním podmínek pro  $x$  a  $z$  dostaneme  $X^3 + 3XYZ = a^3 + 3a^2b - b^3$  a  $3Z(3Z^2 - XY) = b^3 + 3ab^2 - a^3$ , odkud plyne, že  $3 \mid (b^3 - a^3)$  a  $3 \mid X$ . To je ale ve sporu s výchozím předpokladem  $3 \nmid z$  a s nesoudělností čísel  $x$  a  $z$ . K obdobnému sporu dojdeme i v případě  $3 \mid x$  nebo  $3 \mid y$ . To, že ani další možné substituce nevedou k řešení, je dokázáno pomocí rozkladu  $x^2 + xz + z^2$  v oboru Eisensteinových čísel. Článek je doplněn některými důsledky, jako jsou např. různé typy iracionálních identit nebo řada neřešitelných diofantických rovnic, jejichž neřešitelnost plyne z Velké Fermatovy věty pro  $p = 3$ .

### 1. ÚVOD

Velká Fermatova věta (Fermat's Last Theorem, dále jen FLT) byla po více než tři a půl století výzvou pro matematiky celého světa. Fermat sám dokázal svou domněnku pro  $n = 4$  v roce 1637 a, jak známo, v Diofantově knize *Arithmetica* zanechal na okraji jedné stránky ručně psanou poznámku, která naznačovala, že znal i obecný důkaz. Ten však nikdy nepublikoval, zůstává proto otevřenou otázkou, zda takový důkaz skutečně objevil nebo se mýlil. Kompletní důkaz se podařil teprve prof. A. Wilesovi, který jej publikoval v roce 1995 na více než 100 stránkách [5, 4]. Před ním byla publikována řada dílčích důkazů pro různé hodnoty exponentů  $n$  včetně exponentu 3. Jejich přehled je uveden např. v Ribenoimově knize [3]. Pokusy o jednodušší a elegantnější důkaz FLT pokračují i v dnešní době – viz např. [1].

2010 MSC. Primární 11D25; Sekundární 11D61, 11J72, 97F50.

*Klíčová slova.* Velká Fermatova věta, diofantická rovnice, Eisensteinova čísla, iracionální čísla.

Shrňme nejprve několik známých základních faktů. Velká Fermatova věta tvrdí, že pro přirozený exponent  $n > 2$  žádná trojice čísel  $x, y, z \in \mathbb{N}$ , kde  $\mathbb{N}$  značí množinu přirozených (kladných celých) čísel, nevyhovuje diofantické rovnici

$$x^n + y^n = z^n. \quad (1.1)$$

Lze ukázat, že stačí uvažovat vzájemně nesoudělná čísla  $x, y, z$ . Kdyby totiž např. platilo, že  $\gcd(A, B) = D$ , tj.  $D$  je největší společný dělitel  $A$  a  $B$ , pak lze  $D^n$  z čísla  $A^n + B^n = C^n$  vytknout a platí

$$A^n + B^n = D^n x^n + D^n y^n = D^n(x^n + y^n) = C^n = D^n z^n,$$

čili  $D$  by muselo být faktorem i  $C$ , takže místo  $A^n + B^n = C^n$  stačí vyšetřovat  $x^n + y^n = z^n$ . FLT stačí dokazovat pro exponenty  $n = p$ , kde  $p$  je liché prvočíslo, a samostatně ještě pro první složené sudé číslo 4. Pro všechna ostatní složená čísla totiž platí, že jsou buď násobkem nějakého lichého prvočísla nebo mocninou dvojky. A pokud neexistuje řešení  $x^q + y^q - z^q = 0$  pro  $q$ , které je rovno prvočíslu nebo číslu 4, neexistuje řešení ani pro složené exponenty, neboť  $A^{tq} + B^{tq} - C^{tq} = (A^t)^q + (B^t)^q - (C^t)^q$ . Příklad  $q = 2$  nevede vždy k neexistenci řešení (1.1), jelikož existují trojice celých čísel  $x, y, z$  (tzv. pythagorejské triplety), jež vyhovují rovnici (1.1) s  $n = 2$ . Proto pro exponenty, jež jsou mocninami čísla 2, je potřeba vycházet v důkazu FLT z nejmenší hodnoty exponentu  $q = 2^2$  a nikoli  $q = 2$ .

Z Fermatovy rovnice (1.1) je zřejmé, že pro každé liché prvočíslo  $p$  platí nerovnosti  $x^p < z^p = x^p + y^p < (x + y)^p$  a  $y^p < z^p = x^p + y^p < (x + y)^p$ . Bez újmy na obecnosti proto můžeme vzhledem k symetrii (1.1) vůči  $x$  a  $y$  předpokládat, že pro čísla, jež mají splňovat Fermatovu rovnici (1.1), platí ostré nerovnosti  $0 < y < x < z < x + y$ . Příklad  $x = y$  nemůže být řešením (1.1), neboť  $2x^p = z^p$  nemá v oboru přirozených čísel řešení.

## 2. FERMATOVA VĚTA PRO EXPONENT 3

K důkazu budeme potřebovat čtyři pomocná tvrzení. Nutno ještě poznamenat, že symboly  $x, y, z$  značíme pro jednoduchost jak čísla, tak neznámé v rovnicích. Z kontextu je zřejmé, jakou roli v daném případě konkrétní symbol zastává.

**Lemma 2.1.** *Fermatova rovnice v součtovém tvaru  $x^3 + y^3 = z^3$  je ekvivalentní rovnici v součinnovém tvaru*

$$(x + y - z)^3 = 3(x + y)(z - x)(z - y). \quad (2.1)$$

*Důkaz.* Přímým ověřením. □

Číslo  $x + y - z$  je tedy násobkem čísla 3, můžeme proto místo (2.1) psát také

$$(3k)^3 = 3(z + 3k)(y - 3k)(x - 3k), \quad (2.2)$$

kde  $k$  je přirozené číslo takové, že  $3k = x + y - z$ , a tedy

$$x + y = z + 3k. \quad (2.3)$$

**Lemma 2.2.** *Jsou-li  $x, y, z$  přirozená čísla z Fermatovy rovnice  $x^3 + y^3 = z^3$ , pak čísla  $x + y = z + 3k$ ,  $z - x = y - 3k$ ,  $z - y = x - 3k$ , kde  $3k = x + y - z$  jsou po dvou nesoudělná.*



*Důkaz.* Předpokládejme naopak, že  $q \mid z + 3k$  i  $q \mid y - 3k$  pro nějaké prvočíslo  $q$ . Jelikož platí (2.2), tak  $q \mid (3k)^3$  a  $q \mid 3k$ . Pak ale  $q \mid z$  a  $q \mid y$ , což je spor s předpokladem nesoudělnosti  $z$  a  $y$ . Stejným způsobem dospějeme ke sporu pro dvojici čísel  $z + 3k$ ,  $x - 3k$  a dvojici čísel  $x - 3k$ ,  $y - 3k$ . Čísla  $x + y$ ,  $z - x$ ,  $z - y$  tedy nemají žádného společného dělitele a jsou po dvou nesoudělná.  $\square$

**Lemma 2.3.** *Pro všechna reálná čísla  $a, b$  platí identita*

$$(a-b)(2a+b)(a+2b)(a^2+ab+b^2)^3 = (a^3+3a^2b-b^3)^3 - (-a^3+3ab^2+b^3)^3. \quad (2.4)$$

*Důkaz.* Příмым ověřením.  $\square$

Pro  $b \neq a$ ,  $b \neq -2a$  a  $a \neq -2b$  můžeme vydělit celou rovnicí (2.4) číslem  $(a-b)(2a+b)(a+2b) = 2a^3+3a^2b-3ab^2-2b^3 = (a^3+3a^2b-b^3) - (-a^3+3ab^2+b^3)$ , a tak z (2.4) pomocí vzorce pro rozdíl třetích mocnin  $(R^3 - S^3)/(R - S) = R^2 + RS + S^2$ ,  $R \neq S$ , dostaneme

$$\begin{aligned} (a^2 + ab + b^2)^3 &= \frac{(a^3 + 3a^2b - b^3)^3 - (-a^3 + 3ab^2 + b^3)^3}{(a^3 + 3a^2b - b^3) - (-a^3 + 3ab^2 + b^3)} \\ &= (a^3 + 3a^2b - b^3)^2 + (a^3 + 3a^2b - b^3)(-a^3 + 3ab^2 + b^3) \\ &\quad + (-a^3 + 3ab^2 + b^3)^2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

**Lemma 2.4.** *Pro všechna reálná čísla  $a, b$  platí identity*

$$\begin{aligned} (3a^2b + 3ab^2)^2 + (3a^2b + 3ab^2)(a^3 - 3ab^2 - b^3) \\ = (a^3 + 3a^2b - b^3)^2 - (a^3 + 3a^2b - b^3)(a^3 - 3ab^2 - b^3), \end{aligned} \quad (2.6)$$

*a*

$$\begin{aligned} (3a^2b + 3ab^2)^2 + (3a^2b + 3ab^2)(a^3 - 3ab^2 - b^3) + (a^3 - 3ab^2 - b^3)^2 \\ = (a^3 + 3a^2b - b^3)^2 + (a^3 + 3a^2b - b^3)(-a^3 + 3ab^2 + b^3) \\ + (-a^3 + 3ab^2 + b^3)^2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

*Důkaz.* Příмым ověřením.  $\square$

**Věta 2.5** (Velká Fermatova věta pro  $p = 3$ ). *Diofantická rovnice*

$$x^3 + y^3 = z^3 \quad (2.8)$$

*nemá řešení v oboru přirozených čísel.*

*Důkaz.* Jak bylo ukázáno v úvodu, stačí uvažovat jen vzájemně nesoudělná přirozená čísla  $x, y, z$ . Z (2.2) plyne, že buď  $x$  nebo  $y$  nebo  $z$  musí mít faktor 3, takže  $3 \mid xyz$ . Předpokládejme nejprve, že  $3 \mid z$ , neboli  $z = 3z_1$ . Číslo  $x + y$ , které lze z  $x^3 + y^3$  vytknout, musí mít proto faktor 3. Zapišeme-li levou stranu (2.8) ve formě součinu dvou nesoudělných čísel

$$3(x+y) \left[ (x+y) \frac{(x+y)}{3} - xy \right] = (3z_1)^3$$

je ihned patrné, že  $x + y$  má faktor dokonce  $3^2$ , neboť  $3 \nmid xy$ . Potom z rovnic (2.1), (2.2) a Lemmatu 2.2 plyne, že čísla  $3(z + 3k) = 3(x + y)$ ,  $y - 3k = z - x$  a  $x - 3k = z - y$  musí být třetí mocniny, takže můžeme zavést takovéto značení:

$$x - 3k = z - y = X^3, \quad (2.9)$$

$$y - 3k = z - x = Y^3, \quad (2.10)$$

$$z + 3k = x + y = 9Z^3 = X^3 + Y^3 + 6k, \quad (2.11)$$

$$3k = x + y - z = 3XYZ. \quad (2.12)$$

Z (2.9) až (2.12) můžeme vyjádřit  $x$ ,  $y$ ,  $z$  pomocí čísel  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ :

$$x = X^3 + 3XYZ = X(X^2 + 3YZ), \quad (2.13)$$

$$y = Y^3 + 3XYZ = Y(Y^2 + 3XZ), \quad (2.14)$$

$$z = 9Z^3 - 3XYZ = 3Z(3Z^2 - XY) = X^3 + Y^3 + 3XYZ. \quad (2.15)$$

Z (2.13), (2.14) a (2.15) je patrné, že čísla  $X$ ,  $Y$ ,  $3Z$  jsou po dvou nesoudělná, neboť  $X \mid x$ ,  $Y \mid y$  a  $3Z \mid z$  a  $x$ ,  $y$ ,  $z$  jsou po dvou nesoudělná čísla. Ze součiny těchto rovnic je také vidět, že  $3k$  musí dělit číslo  $xyz$ . Dále je z (2.15) zřejmé, že  $X^3 + Y^3$  musí mít faktor 3. A protože platí  $X^3 + Y^3 = (X + Y)[(X + Y)^2 - 3XY]$  a  $3 \nmid XY$ , tak  $3 \mid (X + Y)$ ,  $3 \mid [(X + Y)^2 - 3XY]$ ,  $9 \mid (X^3 + Y^3)$ ,  $3 \mid Z$  a  $9 \mid z$ .

Fermatovu rovnici (2.8) můžeme přepsat do tvaru

$$y^3 = z^3 - x^3 = (z - x)(x^2 + xz + z^2). \quad (2.16)$$

S využitím (2.14) dostaneme

$$y^3 = Y^3(Y^2 + 3ZX)^3 = Y^3(x^2 + xz + z^2), \quad (2.17)$$

odkud pak plyne

$$(Y^2 + 3ZX)^3 = x^2 + xz + z^2. \quad (2.18)$$

Položme  $A = Y^2 + 3ZX$ . Ukážeme nejprve, že diofantická rovnice tvaru

$$A^3 = x^2 + xz + z^2 \quad (2.19)$$

má nekonečně mnoho řešení, jako např.  $(A, x, z) = (3, 3, 3)$ ,  $(12, 24, 24)$ ,  $(19, 17, 73)$  atd. Jedna množina řešení se nabízí hned, a to  $(A, aA, bA)$ , jako např.  $(7, 7, 14)$ ,  $(13, 13, 39)$ ,  $(19, 38, 57)$ ,  $\dots$ , neboť substituce

$$A = a^2 + ab + b^2, \quad a, b \in \mathbb{Z}, \quad (2.20)$$

$$x = aA = a^3 + a^2b + ab^2, \quad (2.21)$$

$$z = bA = a^2b + ab^2 + b^3 \quad (2.22)$$

mění (2.19) na identitu  $A^3 = (aA)^2 + abA^2 + (bA)^2 = A^2(a^2 + ab + b^2)$ . Takováto řešení rovnice (2.19) však můžeme předem vyloučit, protože vyžadujeme nesoudělnost  $x$ ,  $z$ . Díky Lemmatu 2.3 lze (2.19) parametrizovat pomocí substitucí

$$A = a^2 + ab + b^2, \quad (2.23)$$

$$x = -a^3 + 3ab^2 + b^3, \quad (2.23)$$

$$z = a^3 + 3a^2b - b^3, \quad (2.24)$$

protože po dosazení do (2.19) dostaneme

$$(a^2 + ab + b^2)^3 = (a^3 + 3a^2b - b^3)^2 + (a^3 + 3a^2b - b^3)(-a^3 + 3ab^2 + b^3) + (-a^3 + 3ab^2 + b^3)^2,$$

což je identita (2.5). Za povšimnutí stojí, že parametrizací (2.23), (2.24) dostáváme některá řešení, jako např. (3, 3, 3), (12, 24, 24), shodná s řešeními, jež lze získat parametrizací (2.21), (2.22). To nastává v případech, když  $x = z$ , a tedy  $a = b$ .

Libovolný výběr celých čísel  $a, b$  tedy vede k řešení rovnice (2.19), podobně jako Euklidova parametrizace  $x = a^2 - b^2$ ,  $y = 2ab$ ,  $z = a^2 + b^2$ ,  $(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2$  řeší problém pythagorejských tripletů, jež jsou celočíselným řešením Pythagorovy diofantické rovnice  $z^2 = x^2 + y^2$ .

V případě parametrizace vzorce (2.18) musí být ovšem splněny ještě podmínky (2.13) až (2.15), jež ukazují požadovanou vnitřní strukturu hledaného řešení. Porovnáním (2.13) s (2.23) a (2.15) s (2.24) tak dostáváme

$$X^3 + 3XYZ = -a^3 + 3ab^2 + b^3, \quad (2.25)$$

$$3Z(3Z^2 - XY) = a^3 + 3a^2b - b^3. \quad (2.26)$$

Z (2.26) je vidět, že  $3 \mid (a^3 - b^3)$ . Z (2.25) pak plyne, že 3 musí dělit  $X^3$ , což je ale ve sporu s nesoudělností  $X$  a  $Z$ , resp.  $x$  a  $z$ .

Díky identitě (2.6) lze k řešení rovnice (2.18) použít také substituce

$$A = a^2 + ab + b^2, \quad (2.27)$$

$$x = a^3 - 3ab^2 - b^3, \quad (2.27)$$

$$z = 3a^2b + 3ab^2 = 3ab(a + b), \quad (2.28)$$

protože z (2.7) a (2.5) je vidět, že platí také identita

$$(a^2 + ab + b^2)^3 = (a^3 - 3ab^2 - b^3)^2 + 3ab(a + b)(a^3 - 3ab^2 - b^3) + (3ab)^2(a + b)^2,$$

jež je rovněž parametrizací rovnice (2.19). Takováto substituce též vyhovuje podmínce  $3 \mid z$ ,  $3 \nmid x$ . Navíc musí čísla  $a, b$  v (2.28) splňovat podmínku  $3 \mid ab(a + b)$ , neboť  $9 \mid z$ . Tato substituce poskytuje řešení rovnice (2.19) např.  $(A, x, z) = (7, 1, 18), (13, 17, 36), (21, 51, 60), \dots$ . Existence této další parametrizace znamená, že je potřeba rozšířit důkaz neřešitelnosti diofantické rovnice (2.18) i na substituce (2.20), (2.27), (2.28), případně i jiné substituce, pokud existují.

Substituci (2.20) můžeme zapsat ekvivalentním způsobem

$$A = a^2 + ab + b^2 = (a - b)^2 + 3ab,$$

takže pro všechny substituce, jež řeší diofantickou rovnici (2.18), resp. (2.19), musí být číslo  $(a - b)^2 + 3ab$  vyjádřitelné ve tvaru

$$Y^2 + 3XZ = A = (a - b)^2 + 3ab.$$

Ze všech dvojic  $a, b$  jsou proto v substitucích (2.20), (2.27), (2.28) využitelné jen takové, pro něž platí

$$a - b = Y, ab = XZ, \quad (2.29)$$

$$3ab(a - b) = 3XZY. \quad (2.30)$$

Sečtením (2.28) a (2.30) dostaneme  $6a^2b = 6aXZ = z + 3XYZ$ , což je ale spor, protože díky nesoudělnosti  $x, z$  platí, že  $X \nmid z$ . Takže ani substituce (2.20), (2.27), (2.28) neřeší rovnici (2.18).

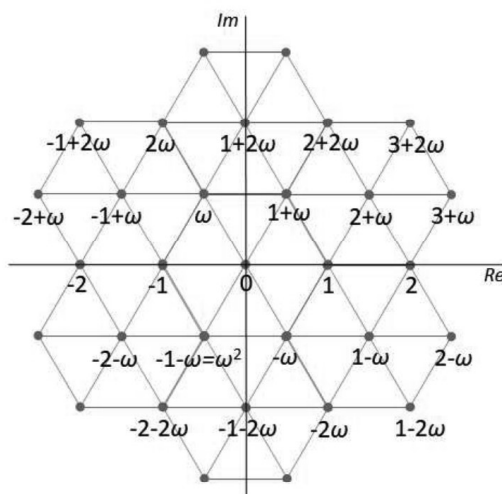
Aby byl důkaz neřešitelnosti Fermatovy rovnice (2.8) úplný, je potřeba zjistit, zda náhodou neexistují ještě jiné substituce pro řešení rovnice  $A^3 = x^2 + xz + z^2$ , a pokud ano, dokázat spor s podmínkami řešitelnosti Fermatovy rovnice (2.15), (2.16), (2.17) pro každou z nich. K tomu již s elementární matematikou nevystačíme.

K nalezení úplné množiny substitucí pro nesoudělná čísla  $x, z$  použijeme vlastností Eisensteinových čísel [3]. Profesionálním matematikům jsou Eisensteinova čísla a jejich vlastnosti dobře známy z teorie čísel. Pro čtenáře např. z řad studentů, kteří se ještě s Eisensteinovými čísly nesetkali, uvedeme stručně přehled základních vlastností těchto čísel.

Množina  $a + b\omega$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$ , kde  $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  je komplexní třetí odmocnina z jedné, tvoří podobor oboru komplexních čísel  $\mathbb{C}$ . Tento obor se nazývá Eisensteinova celá čísla.

Obor Eisensteinových čísel má šest jednotkových prvků  $\pm 1, \pm\omega, \pm\omega^2$  a pro  $\omega$  platí, že  $\omega = e^{(2\pi/3)i}$ . A díky tomu také musí platit  $\omega\omega^2 = \omega^3 = (e^{(2\pi/3)i})^3 = e^{2\pi i} = 1$  a  $\omega + \omega^2 = e^{(2\pi/3)i} + e^{(4\pi/3)i} = e^{(2\pi/3)i} + e^{-(2\pi/3)i} = -1$ , čili  $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ .

Rozložení Eisensteinových čísel v komplexní rovině ukazuje obrázek 1.



**Obrázek 1.** Eisensteinova čísla v komplexní rovině.

Čísla ve vzorci (2.19) tvaru  $x^2 + xz + z^2$  jsou tzv. Lösschova čísla [2], jež mají řadu praktických aplikací, včetně např. využití při různých optimalizacích využívajících hexagonálních sítí.

Pokud na výraz  $x^2 + xz + z^2$  budeme na chvíli pohlížet jako na trojčlen s neurčitou  $x$ , jež je sestaven nad nějakým oborem integrity, pak jej pomocí

Viětových vzorců můžeme rozložit na součin kořenových dvojčlenů

$$x^2 + xz + z^2 = (x - z\omega_1)(x - z\omega_2) = x^2 + x(-z\omega_1 - z\omega_2) + z^2\omega_1\omega_2,$$

kde  $z\omega_1, z\omega_2$  jsou kořeny tohoto trojčlenu a musí pro ně platit  $z\omega_1 + z\omega_2 = -z$ ,  $z\omega_1z\omega_2 = z^2$ , čili (při  $z \neq 0$ )  $\omega_1 + \omega_2 = -1$  a  $\omega_1\omega_2 = 1$ . Když tedy položíme  $\omega_1 = \omega$  a  $\omega_2 = \omega^2$ , kde  $\omega$  je jednotkový prvek v oboru Eisensteinových čísel, je vidět, že v tomto oboru platí rozklad  $x^2 + xz + z^2 = (x - z\omega)(x - z\omega^2)$ .

Díky tomu, že  $1 + \omega + \omega^2 = 0$ , můžeme při násobení nebo umocňování Eisensteinových čísel vyjádřit vyšší mocniny  $\omega^j$  prostřednictvím nulté a první mocniny  $\omega$ , protože pomocí vzorce  $\omega^2 = -1 - \omega$  můžeme podle potřeby opakovaně snižovat vyšší hodnoty exponentu o jedničku.

V oboru Eisensteinových čísel je stejně jako v  $\mathbb{C}$  definována norma vzorcem

$$N(\alpha) = |\alpha|^2 = \alpha\alpha^* = (a + b\omega)(a + b\omega^2),$$

kde  $\alpha^* = (a + b\omega^2)$  je tzv. konjugované číslo, což je obdoba komplexně sdruženého čísla v  $\mathbb{C}$ . Platí  $N(\alpha) = (a + b\omega)[a - b(1 + \omega)] = (a + b\omega)(a - b - b\omega)$ . Eisensteinovo číslo  $(x - z\omega)$  má tedy normu

$$N(x - z\omega) = (x - z\omega)(x - z\omega^2) = x^2 + xz + z^2,$$

což je výše zmínené Löschovo číslo, jež se vyskytuje ve zkoumané diofantické rovnici (2.19). Norma je také Eisensteinovo číslo, neboť do oboru Eisensteinových čísel patří rovněž všechna celá čísla. Z definice normy je patrné, že Eisensteinova čísla a čísla k nim konjugovaná mají stejnou normu. Jelikož norma je vzhledem k  $x, z$  symetrická, musí také platit  $N(x - z\omega) = N(z - x\omega) = x^2 + xz + z^2$ . Platí také, že norma součinu se rovná součinu norem. Norma všech šesti jednotkových prvků Eisensteinova oboru má hodnotu 1, tudíž také všech šest jednotkových násobků Eisensteinova čísla  $x - z\omega$  a šest k nim konjugovaných Eisensteinových čísel má stejnou normu  $x^2 + xz + z^2$ . A vzhledem k symetrii této normy vůči  $x, z$  bude mít stejnou normu ještě dalších dvanáct Eisensteinových čísel s prohozenými čísly  $x, z$  u souřadnic v komplexní rovině a žádné jiné.

Eisensteinova čísla tvoří dokonce Euklidovský obor (funguje tam Euklidův algoritmus), takže rozklad každého Eisensteinova čísla na prvočinitele je až na volbu jednotkového prvku jednoznačný. Tyto prvočinitele nazýváme Eisensteinova prvočísla. Vyznačují se tím, že mají prvočíselnou normu. Platí také, že když Eisensteinovo číslo  $\alpha$  dělí Eisensteinovo číslo  $\beta$ , tak  $N(\alpha) | N(\beta)$ . Lze ukázat, že  $(x - z\omega)$  a  $(x - z\omega^2)$  jsou nesoudělná Eisensteinova čísla. Označme největší společný dělitel čísel  $(x - z\omega)$  a  $(x - z\omega^2)$  jako  $\delta$ . Součet a rozdíl těchto dvou Eisensteinových čísel musí být dělitelný číslem  $\delta$ . Platí  $(x - z\omega) + (x - z\omega^2) = (x - z\omega) + x + z + z\omega = 2x + z$  a  $(x - z\omega) - (x - z\omega^2) = (x - z\omega) - (x + z + z\omega) = -z - 2z\omega = -z(1 + 2\omega)$ . Číslo  $2x + z$  leží na reálné číselné ose  $\text{Re}$ , číslo  $-z(1 + 2\omega)$  leží na imaginární ose  $\text{Im}$  (viz obr. 1). Čísla  $x, z$  jsou podle předpokladu nesoudělná, takže  $\delta = \text{gcd}(1 + 2\omega, 2x + z)$ . Číslo  $1 + 2\omega$  má prvočíselnou normu  $N(1 + 2\omega) = 3$ , je to tedy Eisensteinovo prvočíslo, a má-li být soudělné s přirozeným číslem  $2x + z$ , musí platit  $(1 + 2\omega) | (2x + z)$  a norma čísla  $2x + z$  musí být násobkem čísla 3. Ale podle předpokladu platí  $3 \nmid x$ ,

$3 \mid z$ , takže  $3 \nmid (2x + z)$  a  $\gcd(1 + 2\omega, 2x + z) = 1$ .  $\delta$  proto musí být jednotkový prvek Eisensteinova oboru. Čísla  $(x - z\omega)$  a  $(x - z\omega^2)$  jsou tudíž nesoudělná.

Má-li platit  $(x - z\omega)(x - z\omega^2) = A^3$ , musí existovat celá čísla  $a, b$  taková, že činitelé  $(x - z\omega)$  a  $(x - z\omega^2)$  jsou v oboru Eisensteinových čísel třetími mocninami, tj.  $A^3 = (a - b\omega)^3(a - b\omega^2)^3$ . Pro  $x - z\omega = (a - b\omega)^3$  obdržíme po umocnění  $a^3 - 3a^2b\omega + 3ab^2\omega^2 - b^3 = (a^3 - 3ab^2 - b^3) - (3a^2b + 3ab^2)\omega$ , odkud  $x = a^3 - 3ab^2 - b^3$  a  $z = 3a^2b + 3ab^2$ . To odpovídá substitucím (2.27), (2.28). Dosazením různých hodnot  $a, b$  se můžeme přesvědčit, že tyto substituce generují jiná řešení rovnice (2.19) než substituce (2.23), (2.24). Ukážeme výčtem všech možností, že další substituce, vyplývající z rozkladu trojčlenu  $x^2 + xz + z^2$  v oboru Eisensteinových čísel, poskytují (až na případná opačná znaménka) stejné hodnoty  $x$  a  $z$  jako vztahy (2.23), (2.24) a (2.28).

Pokud vypíšeme do tabulky 1 všech 24 možných tvarů Eisensteinových čísel

	Parametrizovaná Eisensteinova čísla $x - z\omega$ s normou $x^2 + xz + z^2$ :	
1	$(a - b\omega)^3 = (a^3 - 3ab^2 - b^3) - (3a^2b + 3ab^2)\omega = -(b - a\omega^2)^3$	20
2	$-(a - b\omega)^3 = -(a^3 - 3ab^2 - b^3) + (3a^2b + 3ab^2)\omega = (b - a\omega^2)^3$	19
3	$\omega(a - b\omega)^3 = (3a^2b + 3ab^2) + (a^3 + 3a^2b - b^3)\omega = -\omega(b - a\omega^2)^3$	22
4	$-\omega(a - b\omega)^3 = -(3a^2b + 3ab^2) - (a^3 + 3a^2b - b^3)\omega = \omega(b - a\omega^2)^3$	21
5	$\omega^2(a - b\omega)^3 = -(a^3 + 3a^2b - b^3) - (a^3 - 3ab^2 - b^3)\omega = -\omega^2(b - a\omega^2)^3$	24
6	$-\omega^2(a - b\omega)^3 = (a^3 + 3a^2b - b^3) + (a^3 - 3ab^2 - b^3)\omega = \omega^2(b - a\omega^2)^3$	23
7	$(a - b\omega^2)^3 = (a^3 + 3a^2b - b^3) + (3a^2b + 3ab^2)\omega = -(b - a\omega)^3$	14
8	$-(a - b\omega^2)^3 = -(a^3 + 3a^2b - b^3) - (3a^2b + 3ab^2)\omega = (b - a\omega)^3$	13
9	$\omega(a - b\omega^2)^3 = -(3a^2b + 3ab^2) + (a^3 - 3ab^2 - b^3)\omega = -\omega(b - a\omega)^3$	16
10	$-\omega(a - b\omega^2)^3 = (3a^2b + 3ab^2) - (a^3 - 3ab^2 - b^3)\omega = \omega(b - a\omega)^3$	15
11	$\omega^2(a - b\omega^2)^3 = -(a^3 - 3ab^2 - b^3) - (a^3 + 3a^2b - b^3)\omega = -\omega^2(b - a\omega)^3$	18
12	$-\omega^2(a - b\omega^2)^3 = (a^3 - 3ab^2 - b^3) + (a^3 + 3a^2b - b^3)\omega = \omega^2(b - a\omega)^3$	17
	Parametrizovaná Eisensteinova čísla $z - x\omega$ s normou $x^2 + xz + z^2$ :	
13	$(b - a\omega)^3 = (b^3 - 3ba^2 - a^3) - (3b^2a + 3ba^2)\omega = -(a - b\omega^2)^3$	8
14	$-(b - a\omega)^3 = -(b^3 - 3ba^2 - a^3) + (3b^2a + 3ba^2)\omega = (a - b\omega^2)^3$	7
15	$\omega(b - a\omega)^3 = (3b^2a + 3ba^2) + (b^3 + 3b^2a - a^3)\omega = -\omega(a - b\omega^2)^3$	10
16	$-\omega(b - a\omega)^3 = -(3b^2a + 3ba^2) - (b^3 + 3b^2a - a^3)\omega = \omega(a - b\omega^2)^3$	9
17	$\omega^2(b - a\omega)^3 = -(b^3 + 3b^2a - a^3) - (b^3 - 3ba^2 - a^3)\omega = -\omega^2(a - b\omega^2)^3$	12
18	$-\omega^2(b - a\omega)^3 = (b^3 + 3b^2a - a^3) + (b^3 - 3ba^2 - a^3)\omega = \omega^2(a - b\omega^2)^3$	11
19	$(b - a\omega^2)^3 = (b^3 + 3b^2a - a^3) + (3b^2a + 3ba^2)\omega = -(a - b\omega)^3$	2
20	$-(b - a\omega^2)^3 = -(b^3 + 3b^2a - a^3) - (3b^2a + 3ba^2)\omega = (a - b\omega)^3$	1
21	$\omega(b - a\omega^2)^3 = -(3b^2a + 3ba^2) + (b^3 - 3ba^2 - a^3)\omega = -\omega(a - b\omega)^3$	4
22	$-\omega(b - a\omega^2)^3 = (3b^2a + 3ba^2) - (b^3 - 3ba^2 - a^3)\omega = \omega(a - b\omega)^3$	3
23	$\omega^2(b - a\omega^2)^3 = -(b^3 - 3ba^2 - a^3) - (b^3 + 3b^2a - a^3)\omega = -\omega^2(a - b\omega)^3$	6
24	$-\omega^2(b - a\omega^2)^3 = (b^3 - 3ba^2 - a^3) + (b^3 + 3b^2a - a^3)\omega = \omega^2(a - b\omega)^3$	5

**Tabulka 1.** Seznam Eisensteinových čísel s normou  $x^2 + xz + z^2$ . Nejsou zahrnuta čísla  $(a^3 + a^2b + ab^2) - (a^2b + ab^2 + b^3)\omega$  a jejich jednotkové násobky z vyloučených substitucí (2.21), (2.22).

s normou  $x^2 + xz + z^2$  s výjimkou takových, jež vzniknou pomocí (2.21), (2.22),

obdržíme dvanáct různých substitucí (čísla řádků 1 až 12), které v oboru Eisensteinových čísel řeší rovnici  $A^3 = x^2 + xz + z^2$  (čísla v pravém krajním sloupci tabulky ukazují, s kterým jiným pořadovým číslem řádku nastává shoda).

Jak je vidět z tabulky, čtyři substituce, konkrétně č. 3, 4, 9 a 10, kde  $x = \pm(3b^2a + 3ba^2)$ , jsou ve sporu s předpokladem  $3 \nmid x$ . Zbýlých osm substitucí je založeno (až na případné znaménko) na vzorcích (2.23), (2.24) a (2.28), u nichž jsme došli ke sporu s podmínkami řešitelnosti Fermatovy rovnice (2.8). Rovnice (2.18) je proto v oboru přirozených čísel při podmínkách (2.13), (2.14), (2.15) neřešitelná, jelikož jiné parametrizace rovnice (2.18) neexistují. Z toho pak vyplývá neřešitelnost rovnice (2.8).

Zbývá případ  $3 \mid x$  a  $3 \mid y$ . Vzhledem k symetrii (2.8) vůči  $x$  a  $y$  stačí uvažovat např. jen případ  $3 \mid y$ . Budou platit obdobné rovnice jako v případě  $3 \mid z$ , jen faktor 3 bude nyní obsažen v čísle  $y$  a faktor 9 bude svázán s  $Y^3$ . Rovnice (2.9) až (2.15) se změni na

$$\begin{aligned} x - 3k &= z - y = X^3, \\ y - 3k &= z - x = 9Y^3, \\ z + 3k &= x + y = Z^3 = X^3 + 9Y^3 + 6k, \\ 3k &= x + y - z = 3XYZ. \end{aligned}$$

Odtud vyjádříme  $x, y, z$  pomocí  $X, Y, Z$  a z toho pak plyne obdoba rovnice (2.18), tj.

$$(3Y^2 + ZX)^3 = x^2 + xz + z^2. \quad (2.31)$$

K řešení diofantické rovnice (2.31) použijeme zase substituce (2.23), (2.24) a z jejich rozdílu obdržíme

$$\begin{aligned} z - x &= 2a^3 + 3a^2b - 3ab^2 - 2b^3, \\ 9Y^3 &= 2(a^3 - b^3) + 3ab(a - b). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Ale ze substitucí (2.23), (2.24) a podmínek  $3 \nmid x$ ,  $3 \nmid z$  plyne, že  $3 \nmid (a^3 - b^3)$ , takže levá strana (2.32) nemůže mít faktor 3. Dospěli jsme tedy opět ke sporu. Jiné substituce k řešení (2.31) nelze použít, protože použitím substituční rovnice (2.28) by číslo  $x$  nebo  $z$  obsahovalo faktor 3, což se neslučuje s podmínkou  $3 \mid y$ . Diofantická rovnice (2.31) proto nemá řešení.

Tím je Fermatova věta pro exponent  $p=3$  dokázána.  $\square$

### 3. NĚKOLIK DALŠÍCH DŮSLEDKŮ FERMATOVY VĚTY

Rovnici (2.3) lze pomocí (2.1) a (2.2) přepsat také do tvaru identity

$$x + y = \sqrt[3]{x^3 + y^3} + \sqrt[3]{3(x+y)(\sqrt[3]{x^3 + y^3} - x)(\sqrt[3]{x^3 + y^3} - y)}. \quad (3.1)$$

Z této identity je vidět, že každé přirozené číslo větší než 1 lze zapsat jako součet odmocnin tvaru (3.1). A jelikož platí Fermatova věta, tak dílčí odmocniny ve vzorci (3.1) jsou vždy iracionálními čísly. Použijeme-li např. k vyjádření čísla 9

dvou různých součtů  $5+4$  a  $8+1$ , pak při využití (3.1) dostaneme

$$\begin{aligned} 9 &= \sqrt[3]{5^3 + 4^3} + \sqrt[3]{3(5+4)(\sqrt[3]{5^3 + 4^3} - 5)(\sqrt[3]{5^3 + 4^3} - 4)}, \\ 9 &= \sqrt[3]{8^3 + 1^3} + \sqrt[3]{3(8+1)(\sqrt[3]{8^3 + 1^3} - 8)(\sqrt[3]{8^3 + 1^3} - 1)}, \end{aligned}$$

odkud porovnáním a po další úpravě obdržíme rovnost

$$\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{(\sqrt[3]{189} - 5)(\sqrt[3]{189} - 4)} = \sqrt[3]{19} + \sqrt[3]{(\sqrt[3]{513} - 8)(\sqrt[3]{513} - 1)}.$$

To otvírá možnost generovat takovéto rovnosti třeba pro důkazové úlohy matematických olympiád. Zmíňme ještě, že díky identitám (2.1) a (2.2) platí

$$3(x+y)(z-x)(z-y) = 3(x+y)[xy + z^2 - z(x+y)] = 3(x+y)(xy - 3kz),$$

odkud

$$xy = 3kz + (z-x)(z-y). \quad (3.2)$$

Díky tomu lze součin celých čísel  $xy$ ,  $x \neq -y$ , vyjádřit pomocí součtu součinů iracionálních čísel zase takovouto identitou:

$$\begin{aligned} xy &= \sqrt[3]{3(x+y)(\sqrt[3]{x^3 + y^3} - x)(\sqrt[3]{x^3 + y^3} - y)} \cdot \sqrt[3]{x^3 + y^3} \\ &\quad + (\sqrt[3]{x^3 + y^3} - x)(\sqrt[3]{x^3 + y^3} - y). \end{aligned}$$

Tak můžeme třeba pro číslo  $-20$  obdržet rovnosti

$$\begin{aligned} -1 \cdot 20 &= \sqrt[3]{57(\sqrt[3]{7999} - 20)(\sqrt[3]{7999} + 1)} \cdot \sqrt[3]{7999} + (\sqrt[3]{7999} - 20)(\sqrt[3]{7999} + 1) \\ &= 5 \cdot (-4) = \sqrt[3]{3(\sqrt[3]{61} - 5)(\sqrt[3]{61} + 4)} \cdot \sqrt[3]{61} + (\sqrt[3]{61} - 5)(\sqrt[3]{61} + 4) \\ &= 4 \cdot (-5) = 4 \cdot \left[ \sqrt[3]{-12(\sqrt[3]{-124} + 5)(\sqrt[3]{-124} - 1)} \cdot \sqrt[3]{-124} \right. \\ &\quad \left. + (\sqrt[3]{-124} + 5)(\sqrt[3]{-124} - 1) \right] \\ &= -4 \cdot 5 = -4 \cdot \left[ \sqrt[3]{18(\sqrt[3]{126} - 5)(\sqrt[3]{126} - 1)} \cdot \sqrt[3]{126} \right. \\ &\quad \left. + (\sqrt[3]{126} - 5)(\sqrt[3]{126} - 1) \right], \end{aligned}$$

odkud vidíme, jak odlišné může být vyjádření téhož celého čísla pomocí iracionálních čísel.

Rovnici (3.2) lze díky (2.9) a (2.10) také zapsat ve tvaru  $xy - 3kz = X^3Y^3$ . Za povšimnutí rovněž stojí, že součin  $xy$  musí být vyjádřitelný ve formě rozdílu třetích mocnin

$$xy = (3Z^2)^3 - (3Z^2 - XY)^3, \quad (3.3)$$

což lze odvodit např. z identity  $3xy(x+y) = (x+y)^3 - (x^3 + y^3)$  dosazením  $9Z^3$  za  $x+y$  a  $z^3$  za  $x^3 + y^3$ . Proto  $x$  a  $y$  musí být podle Viětových vzorců kořeny kvadratické rovnice

$$t^2 - 9Z^3t + [(3Z^2)^3 - (3Z^2 - XY)^3] = 0, \quad (3.4)$$



neboť  $(t-x)(t-y) = t^2 - (x+y)t + xy = 0$ .

Z (3.2) a (3.3) také plyne, že  $3kz = (3Z^2)^3 - (3Z^2 - XY)^3 - (XY)^3$ , což odpovídá tomu, že  $3(3Z^2)(3Z^2 - XY)(XY) = (3Z^2)^3 - (3Z^2 - XY)^3 - (XY)^3$  je identita. A protože má podle (2.11) platit  $3k + z = 9Z^3$ , musí být  $3k$  a  $z$  kořeny kvadratické rovnice

$$t^2 - 9Z^3t + [(3Z^2)^3 - (3Z^2 - XY)^3 - (XY)^3] = 0, \quad (3.5)$$

neboť  $(t-3k)(t-z) = t^2 - (3k+z)t + 3kz = 0$ .

Paraboly (3.4) a (3.5) se tedy liší jen vertikálním posunem o  $(XY)^3$ . Pokud bychom znali správné hodnoty  $X$  a  $Y$ , mohli bychom díky tomuto poznatku určit správnou hodnotu  $Z$  graficky. Na vodorovné souřadnicové ose  $t$  vyneseme úsečku délky  $X^3 + Y^3$ , v koncových bodech vztyčíme kolmice délky  $X^3Y^3$  a sestrojíme obdélník - v obrázku 2 naznačený čárkovaně. Vrcholem  $[3k, X^3Y^3]$  a vrcholem  $[z, X^3Y^3]$  tohoto obdélníka vedeme přímky  $r$  a  $s$  osově souměrné podle společné vertikální osy čárkovaného obdélníka a paraboly (3.4). Otáčení přímek  $r$  a  $s$  kolem vrcholů  $[3k, X^3Y^3]$ ,  $[z, X^3Y^3]$  umožňuje najít na vertikální ose bod  $[(9Z^3)/2, 3(XYZ)^2/2]$  a na horizontální ose  $t$  body  $[0, 0]$  a  $[9Z^3, 0] = [X^3 + Y^3 + 6XYZ, 0]$ . Pro směrnici přímek pak bude platit  $\tan \alpha = \pm(X^3Y^3)/3XYZ = \pm(3(XYZ)^2)/(9Z^3) = \pm(X^2Y^2)/(3Z)$ . Existuje jen jedna poloha přímek  $r$  a  $s$ , kde to platí, protože při otáčení se zmenšováním úhlu  $\alpha$  úsek vyřatý přímkami  $r$  a  $s$  na vodorovné ose  $t$  prodlužuje, jinými slovy k hodnotě  $3XYZ$  se při otáčení přímky  $s$  blížíme zdola, zatímco vertikální souřadnice průsečíku s osou obdélníka se zmenšuje, čili k hodnotě  $3(XYZ)^2/2$  se blížíme shora. Tím je možné graficky určit hodnoty  $3XYZ$ ,  $9Z^3$ , a tudíž i  $Z$ . Bohužel tím, ale není nikterak garantováno, že  $Z$  je celé číslo. Obr. 2 nám ale může posloužit k lepší představě o tom, s jak velkými čísly máme při řešení FLT do činění.

Jak již bylo ukázáno, když  $3 \mid z$ , tak z (2.15) plyne, že  $3 \mid Z$ . Proto  $x + y = 3k + z = 9Z^3$  je násobkem čísla  $3^5 = 243$ . Z tabulek goniometrických funkcí lze zase vyčíst, že  $\tan(89^\circ 50') \doteq 343,7731$ . Stačí tedy, aby poměr  $(X^2Y^2)/3Z$  byl větší než tato hodnota a sklon přímek  $r$  a  $s$  se bude velmi blížit k  $90^\circ$ .

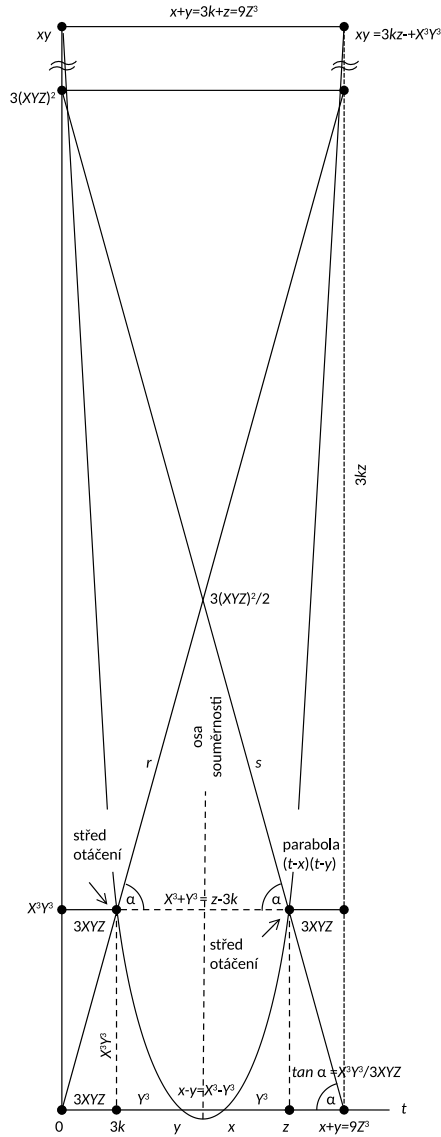
Dalším důsledkem platnosti Fermatovy věty je např. to, že diofantické rovnice

$$\begin{aligned} (3XYZ + X^3)^3 + (3XYZ + Y^3)^3 &= (3XYZ + X^3 + Y^3)^3 \\ &= (9Z^3 - 3XYZ)^3, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$(z - X^3)^3 + (z - Y^3)^3 = z^3 \quad (3.7)$$

nemají v oboru přirozených čísel řešení. Rovnice (3.6) vyplývá z (2.13), (2.14) a (2.15), rovnice (3.7) vznikne dosazením ze vztahů (2.9) a (2.10) do (2.8).

Důsledkem platnosti Fermatovy věty je také to, že k sečně  $s_1$  křivky  $f(t) = t^3$ , jež prochází body s celočíselnými souřadnicemi  $[z, z^3]$ ,  $[x, x^3]$ , nemůže existovat rovnoběžná sečna  $s_2$ , procházející body  $[y, y^3]$ ,  $[3k, 0]$ . Plyne to z (2.10) a (2.14), protože směrnice takové sečny je  $\tan \beta = (z^3 - x^3)/(z - x) = z^2 + zx + x^2 = y^3/(y - 3k) = y^3/Y^3 = (Y^2 + 3XZ)^3$ . A o rovnici (2.18) jsme dokázali, že v oboru přirozených čísel nemá řešení. Rovnici (2.18) lze zapsat s využitím (2.10) také ve tvaru  $3xz = (Y^2 + 3XZ)^3 - (Y^2)^3$  nebo po dosazení z (2.13) a (2.15) ve tvaru  $9XZ(X^2 + 3YZ)(3Z^2 - XY) = (Y^2 + 3XZ)^3 - (Y^2)^3$ . Součin  $xz$  lze též



**Obrázek 2.** Grafické určení hodnoty  $Z$ .

nahradit výrazy  $xz = ((z+x)/2)^2 - ((z-x)/2)^2 = ((9Z^3 + X^3)/2)^2 - (Y^3/2)^2$  nebo  $xz = ((3XZ + (X^2 + 3YZ)(3Z^2 - XY))/2)^2 - ((3XZ - (X^2 + 3YZ)(3Z^2 - XY))/2)^2$ , odkud bychom dostali další neřešitelné diofantické rovnice.

Existuje celá řada jiných diofantických rovnic, jež jsou ekvivalentní s Fermatovou rovnicí (2.8), a nemají tudíž řešení. Např. rovnice  $(z^3)^3 - (x^3)^3 - (y^3)^3 =$

$3(xyz)^3$ , která by v případě platnosti  $z^3 = x^3 + y^3$  byla identitou. S Fermatovou rovnicí  $z^3 = x^3 + y^3$  jsou ekvivalentní také např. rovnice

$$\begin{aligned}(x+y)^3 - (z-x)^3 - (z-y)^3 - (x+y-z)^3 &= 6xyz, \\ (x+y)^3 - (z-x)^3 - (z-y)^3 &= 6xyz + 3(x+y)(z-x)(z-y), \\ (z-x)[(z-x)^2 + 3(z+x)^2] &= 4y^3,\end{aligned}$$

jak lze ověřit výpočtem. Podobně není řešitelná žádná diofantická rovnice ekvivalentní s rovnicí

$$9Z^3 - 6XYZ = X^3 + Y^3, \quad (3.8)$$

kteřou dostaneme z (2.15). Kdybychom pomocí vzorce pro kubické rovnice separovali v (3.8) např. proměnnou  $Z$ , obdržíme

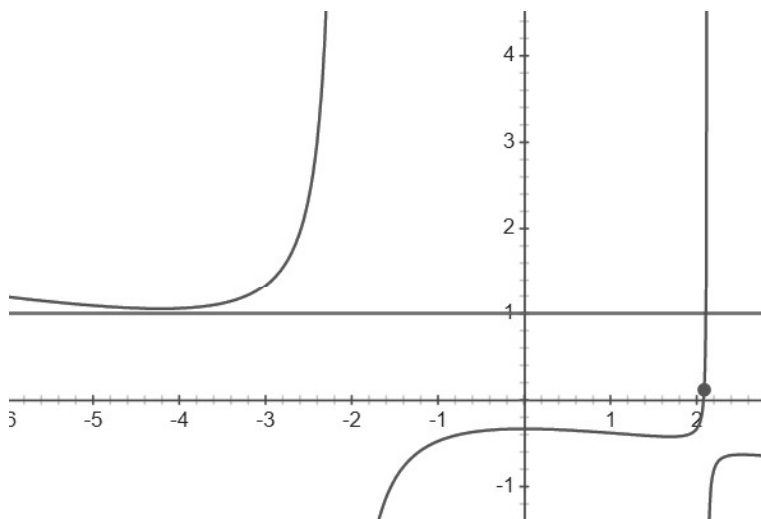
$$Z = \frac{4\sqrt[3]{2XY} + \sqrt[3]{4\sqrt[3]{(3X^3 + \sqrt{(9X^6 - 14X^3Y^3 + 9Y^6)} + 3Y^3)^2}}}{6\sqrt[3]{3X^3 + \sqrt{(9X^6 - 14X^3Y^3 + 9Y^6)} + 3Y^3}}, \quad (3.9)$$

jak lze pohodlně ověřit pomocí webu <http://www.wolframalpha.com>.

Substitucí  $Z = (X+Y)/r$ ,  $r \in \mathbb{R}^+$ , lze rovnici (3.9) zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned}9((X+Y)/r)^3 - [(X+Y)^3 - 3XY(X+Y)] - 6XY((X+Y)/r) &= 0, \\ 9(X+Y)^2(1/r)^3 - [(X+Y)^2 - 3XY] - 6XY(1/r) &= 0, \\ 9(X+Y)^2 - [(X+Y)^2 - 3XY]r^3 - 6XYr^2 &= 0, \\ (r^3 - 6r^2 + 18)XY - (r^3 - 9)(X^2 + Y^2) &= 0, \\ -(6r^2 - 27)XY - (r^3 - 9)(X^2 + Y^2 - XY) &= 0, \\ (9 - r^3)/(6r^2 - 27) = XY/(X^2 + Y^2 - XY). &\quad (3.10)\end{aligned}$$

Díky nerovnosti  $(X-Y)^2 > 0$  platí vždy  $X^2 + Y^2 - XY > XY$ . Zlomek  $XY/(X^2 + Y^2 - XY)$  na pravé straně (3.10) bude proto vždy menší než 1. Zajímá nás, pro jaké hodnoty  $r$  je zlomek  $(9 - r^3)/(6r^2 - 27)$  na levé straně (3.10) kladný, ale menší než 1, aby se obě strany (3.10) mohly rovnat. To snadno zjistíme vyšetřením průběhu funkce  $f(r) = (9 - r^3)/(6r^2 - 27)$ . Předně je vidět, že  $f(r)$  má dva body nespojitosti, kde funkce není definována. Jsou to body odpovídající kořenům kvadratické rovnice  $6r^2 - 27 = 0$ , čili  $r = \pm 3/\sqrt{2} \doteq \pm 2,121320$ . Pro všechna  $r > 3/\sqrt{2}$  je jmenovatel zlomku  $(9 - r^3)/(6r^2 - 27)$  kladné číslo, zatímco číselník je záporný. Funkce  $f(r)$  tudíž v této oblasti nesplňuje požadovanou podmínku  $0 < f(r) < 1$ , protože je pro  $r > 3/\sqrt{2}$  záporná. Funkce  $f(r) = (9 - r^3)/(6r^2 - 27)$  je nulová, když  $9 - r^3 = 0$ , neboli pro  $r = \sqrt[3]{9} \doteq 2,080083$ . Pro  $r \in (0, \sqrt[3]{9})$  je jmenovatel zlomku  $(9 - r^3)/(6r^2 - 27)$  kladný a číselník záporný, jak lze ověřit dosazením. Funkce  $f(r)$  je tudíž na tomto intervalu záporná. Podmínka  $0 < f(r) < 1$  lze proto při  $r \in \mathbb{R}^+$  vyhovět jen pro  $r$  z intervalu  $(\sqrt[3]{9}, 3/\sqrt{2}) \doteq (2,08, 2,12)$ . Dostáváme tak podmínku řešitelnosti rovnice (3.9) ve tvaru  $\sqrt[3]{9} < (X+Y)/Z < 3/\sqrt{2}$ . Graf průběhu funkce  $f(r)$  je pro ilustraci zachycen na obrázku 3, kde je vyznačen také přípustný interval funkčních hodnot mezi nulou a jedničkou.



**Obrázek 3.** Graf funkce  $f(r) = (9 - r^3)/(6r^2 - 27)$ .

Uved'me na závěr bez odvozování řadu ekvivalentních diofantických rovnic, jež na množině kladných čísel mají stejné řešení (3.9):

$$\begin{aligned}
3((3Z^3)/2)^2 + ((X^3 - Y^3)/2)^2 &= (3Z^2 - XY)^3, \\
(9Z^3)^3 - (X^3)^3 - (Y^3)^3 &= 3XYZ \left[ 6(3Z^2 - XY)(X^2 + 3YZ)(Y^2 + 3XZ) \right. \\
&\quad \left. + (3XYZ)^2 \right], \\
(9Z^3)^2 + (X^3)^2 + (Y^3)^2 &= 3(3Z^2 - XY)(X^2 + 3YZ)(Y^2 + 3XZ) \\
&\quad + X^3Y^3 - 9Z^3(X^3 + Y^3), \\
(9Z^3)^2 + (X^3)^2 + (Y^3)^2 &= 9XYZ(9Z^3 - X^3 - Y^3 - 2XYZ) \\
&\quad - 2X^3Y^3 + 18Z^3(X^3 + Y^3), \\
(Y^2 + 3XZ)^3 &= (9Z^3 - 3XYZ)^2 + (9Z^3 - 3XYZ)(X^3 + 3XYZ) \\
&\quad + (X^3 + 3XYZ)^2, \\
(3Z^3)^2 + 3Z^3 \frac{X^3 - Y^3 - 3Z^3}{2} \\
&\quad + \left( \frac{X^3 - Y^3 - 3Z^3}{2} \right)^2 = \frac{(X^3 + 3XYZ)^3 + (Y^3 + 3XYZ)^3}{(3Z)^3}, \\
[(X + Y)^3 - (2Z)^3 - Z^3][3Z(X + Y - Z) - XY] &= XY(3Z - X - Y)^3, \\
(9Z^3 - X^3 + Y^3)(9Z^3 + X^3 - Y^3) &= 4XY(X^2 + 3YZ)(Y^2 + 3XZ), \\
3XY(X + Y - 2Z) &= (X + Y)^3 - (2Z)^3 - Z^3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 3(X + Y - 2Z)[3Z(X + Y - Z) - XY] = (3Z - X - Y)^3, \\
& [X + Y - 2Z][(X + Y)^2 + (X + Y)2Z + (2Z)^2 - 3XY] = Z^3, \\
& [X + Y - 2Z][(X - Y)^2 - (X - Y)(2Z + X) + (2Z + X)^2] = Z^3, \\
& [X + Y - 2Z][(X - Y)^3 + (2Z + X)^3] = (2X - Y + 2Z)Z^3, \\
& 3(X + Y - 2Z)(X - Z)(Y - Z) = (X + Y - 2Z)^3 + (X + Y)^3 \\
& \quad - (X + Y - Z)^3 - (2Z)^3, \\
& (X + Y - Z)^3 - 3(X + Y)(Z - X)(Z - Y) = (2Z)^3 - 6XYZ, \\
& 16Z^3 - 6XYZ = (X + Y)^3 - (Z - X)^3 \\
& \quad - (Z - Y)^3 - 3(X + Y)(Z - X)(Z - Y), \\
& 3(X + Y)(Z - X)(Z - Y) = (X + Y)^3 - (Z - X)^3 \\
& \quad - (Z - Y)^3 - 7Z^3 - X^3 - Y^3, \\
& [(Y^3)^2 + 3(9Z^3 + X^3)^2] = 4(Y^2 + 3XZ)^3, \\
& [X + Y - 2Z][(Y - 2Z - 2X)^2 + 3(Y + 2Z)^2] = 4Z^3, \\
& Z[3((2X + 2Y - Z)/2)^2 + (Z/2)^2] = (2Z)^3 + (Z - X)^3 + (Z - Y)^3, \\
& Z\left[(2X + 2Y - Z)^2 - (2X + 2Y - Z)(X + Y - Z) + (X + Y - Z)^2\right] \\
& \quad = (2Z)^3 + (Z - X)^3 + (Z - Y)^3, \\
& (3Z^2 - XY)(X^2 + 3YZ) - Y(Y^3 + 3XYZ) = 3X^2Z^2, \\
& (X^2 + 3YZ)(Y^2 + 3XZ) = 3Z(9Z^3 - 3XYZ) + X^2Y^2, \\
& XY(X^2 + 3YZ)(Y^2 + 3XZ) = (3Z^2)^3 - (3Z^2 - XY)^3, \\
& 9XZ(X^2 + 3YZ)(3Z^2 - XY) = (Y^2 + 3ZX)^3 - (Y^2)^3, \\
& (9Z^3 + X^3 - Y^3)(9Z^3 - X^3 + Y^3) = 4[(3Z^2)^3 - (3Z^2 - XY)^3], \\
& (9Z^3 + X^3 - Y^3)^3 + (9Z^3 - X^3 + Y^3)^3 = (9Z^3 + X^3 + Y^3)^3, \\
& (3Z)^3[(3Z^2 - XY)^2]^3 = X^3[Y(Y^3 + 3XYZ) + 3Z^2X^2]^3 \\
& \quad + Y^3[X(X^3 + 3XYZ) + 3Z^2Y^2]^3, \\
& (X + Y)^3 - (2Z)^3 = (X + Y - Z)^3 + (Z - X)^3 + (Z - Y)^3, \\
& (9Z^3 + X^3 + Y^3)^3 + (6XYZ)^3 = (9Z^3 + X^3 - Y^3)^3 \\
& \quad + (9Z^3 - X^3 + Y^3)^3 + (9Z^3 - X^3 - Y^3)^3, \\
& (9Z^3 - 6XYZ)^3 = (X^3)^3 + 3(X^2Y)^3 + 3(XY^2)^3 + (Y^3)^3, \\
& 3([(3Z^2)^3 - (3Z^2 - XY)^3])(X^3 - Y^3) = (X^3 + 3XYZ)^3 \\
& \quad - (Y^3 + 3XYZ)^3 - (X^3 - Y^3)^3.
\end{aligned}$$

Přímý důkaz neřešitelnosti kterékoli z těchto rovnic bude proto znamenat další nový důkaz FLT pro  $p = 3$ . Speciálně první rovnice  $3\left(\frac{3Z^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{X^3 - Y^3}{2}\right)^2 =$

$(3Z^2 - XY)^3$ , která se ve tvaru  $3v^2 + u^2 = s^3$  vyskytuje v klasických důkazech neřešitelnosti Fermatovy rovnice (2.8), nabízí díky dodatečným podmínkám, jež vyplývají ze znalosti potřebné vnitřní struktury  $v$ ,  $u$ ,  $s$ , snazší a kratší důkaz bez nutnosti použití důkazové metody nekonečného sestupu.

#### 4. ZÁVĚR

Fermatovu rovnici v součtovém tvaru (1.1) lze převést do součinnového tvaru i pro libovolný jiný prvočíselný exponent  $p > 3$ . Na rozdíl od případu  $p = 3$  však bude součinnový tvar kromě  $p(x+y)(z-x)(z-y)$  ještě obsahovat dalšího činitele  $W = (x+y-z)^p / [p(x+y)(z-x)(z-y)]$ , takže  $(pk)^p = p(x+y)(z-x)(z-y)W$ , a rovnice (3.8) změní svůj tvar na  $p^{(p-1)}Z^p - 2pXYZW = X^p + Y^p$ . Důkaz neřešitelnosti této rovnice by znamenal nalezení důkazu Fermatovy věty pro libovolný exponent.

#### PODEĚKOVÁNÍ

Děkuji touto cestou profesoru RNDr. Michalu Křížkovi, DrSc. z Matematického ústavu AV ČR a profesoru RNDr. Aleši Drápalovi, CSc., DSc. z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy za podnětné připomínky. Velký dík patří také profesoru Ing. Miroslavu Valachovi, CSc. ze San José State University, California, díky němuž jsem se problematice důkazu Velké Fermatovy věty začal před časem věnovat. Oba posledně jmenovaní jsou stejně jako já bývalými pracovníky již zaniklého Výzkumného ústavu matematických strojů (VÚMS) založeného světoznámým počítačovým odborníkem profesorem Dr. Ing. Antonínem Svobodou. Můj dík patří také mému synovi RNDr. Martinu Golanovi, Ph.D. za pomoc při převodu textu z formátu LyX do formátu LaTeX.

#### REFERENCE

- [1] N. F. Benschop: *Additive structure of the group of units mod  $pk$  with core and carry concepts for extension to integers*, Acta Math. Univ. Comenian. **74** (2005), No. 2, 169–184.
- [2] A. Lósch: *The Economics of Location*, Yale University Press, 1954.
- [3] P. Ribenboim: *Fermat's Last Theorem for Amateurs*, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [4] R. Taylor, A. Wiles: *Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras*, Ann. of Math. **141** (1995), 553–572.
- [5] A. Wiles: *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*, Ann. of Math. **141** (1995), 443–551.

Petr Golan, Praha; autor je bývalý vědecký pracovník Výzkumného ústavu matematických strojů v Praze, následně byl jednatelem společnosti VUMS Computers, APOGEE.CZ a Apogee Software, nyní je v důchodu,  
e-mail: [petrgolan@volny.cz](mailto:petrgolan@volny.cz)

## HYPOTÉZA FRANCISZKA JAKÓBCZYKA O MERSENNOVÝCH ČÍSLECH

JIŘÍ KLAŠKA

ABSTRAKT. Před 70-ti lety formuloval polský kněz a matematik Franciszek Jakóbczyk zajímavý a obtížný problém týkající se Mersennových čísel. Do dnešní doby zůstává problém nevyřešen. Následující článek poskytne čtenáři základní přehled o problematice Mersennových čísel, Jakóbczykově hypotéze a její souvislosti s Wieferichovými prvočíslly.

### 1. MARINE MERSENNE A JEHO PRVOČÍSLA

Přirozené číslo  $m$  nazýváme dokonalé, je-li rovno součtu všech svých dělitelů menších než  $m$ . Například čísla 6, 28, 496, 8128 jsou dokonalá, protože platí:

$$6 = 1 + 2 + 3,$$

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14,$$

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248,$$

$$8128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064.$$

Kolem roku 300 př. n. l. dokázal řecký matematik Euklides (Základy, Kniha IX, Tvrzení 36) následující implikaci:

$$\text{Je-li } 2^n - 1 \text{ prvočíslo, pak číslo } 2^{n-1}(2^n - 1) \text{ je dokonalé.} \quad (1)$$

Původní formulaci Euklidova tvrzení (1) a jeho důkaz může čtenář nalézt v českém překladu Základů z roku 1907 od Františka Servíta (1848–1923). Viz [46, str. 154–155]. Téměř o dva tisíce let později, v roce 1640, dokázal francouzský matematik Pierre de Fermat (1601–1665) následující tři tvrzení [10, str. 12], která považoval za základní objevy týkající se dokonalých čísel.

**Věta 1.1** (Fermat, 1640). *Platí:*

- (i) *Je-li  $n \in \mathbb{N}$  složené číslo, pak je složené také číslo  $2^n - 1$ .*
- (ii) *Je-li  $n \in \mathbb{N}$  prvočíslo, pak  $2n$  dělí  $2^n - 2$ .*
- (iii) *Je-li  $n \in \mathbb{N}$  prvočíslo, pak  $2^n - 1$  je dělitelné pouze prvočísly tvaru  $2kn + 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .*

Tvrzení (i) Věty 1.1 bývá častěji formulováno v ekvivalentním tvaru (iv), který je obměnou implikace (i):

---

2010 MSC. Primární 11A41, 11A07, 11-02.

Klíčová slova. Mersennova čísla, Franciszek Jakóbczyk, Wieferichova prvočísla.

(iv) *Je-li číslo  $2^n - 1$  prvočíslo, pak  $n$  je prvočíslo.*

Více informací o dokonalých číslech a jejich historii je možno nalézt v prvním dílu knihy *History of the Theory of Numbers* [10] od Leonarda Eugena Dicksona (1874–1954) a také v článcích [41] a [51]. Přibližně v polovině roku 1640 zaslal Fermat dopis Marinu Mersennovi (1588–1648), ve kterém ho seznámil se svými výsledky uvedenými ve Větě 1.1. V roce 1644 pak Mersenne vyslovil v úvodu knihy *Cogitata Physica - Mathematica* [37] tvrzení, že jedinými prvočísly mezi čísly  $2^n - 1$ , kde  $n \leq 257$ , jsou čísla mající exponenty

$$n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257. \quad (2)$$

Pro zajímavost uvedeme, že již v roce 1591 Petrus Bungus v knize *Numerorum Mysteria* [7], sestavil seznam 28 čísel, která považoval za dokonalá. Mersenne však prohlásil, že pouze 8 čísel z Bungusova seznamu je uvedeno správně a navíc k těmto osmi číslům přidal další tři hodnoty. Tak vznikl seznam (2), obsahující celkem jedenáct čísel [10, str. 12–13]. Čísla  $M_n = 2^n - 1$ , kde  $n \in \mathbb{N}$ , dnes nazýváme Mersennova čísla. Mersennovým prvočíslem pak rozumíme číslo  $M_n$ , které je prvočíslo. V průběhu let se začalo ukazovat, že také Mersennův seznam není správný. Ve skutečnosti v (2) chybí čísla  $n = 61, 89, 107$ , pro která je  $M_n$  prvočíslo. Naopak, čísla  $n = 67$  a  $257$  do seznamu (2) nepatří, protože jsou složená. Opravený Mersennův seznam má tedy tvar

$$n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127. \quad (3)$$

Čtenáře možná překvapí, že vytvořit správný seznam (3), se všemi detaily, trvalo dalších 303 let, tedy až do roku 1947. Důvod, proč ověření správnosti trvalo tak dlouhou dobu, souvisí s nesmírně obtížným problémem faktorizace přirozených čísel. Je vhodné zde připomenout, že problém zjistit zda dané přirozené číslo je prvočíslo, je mnohem lehčí než nalézt jeho prvočíselný rozklad.

Vlastnosti dělitelů Mersennových čísel byly zkoumány řadou autorů. Jedno z důležitých tvrzení o tvarech prvočíselných dělitelů Mersennových čísel objevil v roce 1750 Leonhard Euler (1707–1783) a v roce 1775 dokázal Joseph Louis Lagrange (1736–1813).

**Věta 1.2** (Euler, 1750). *Je-li  $p$  prvočíslo,  $p \equiv 3 \pmod{4}$ , pak  $2p + 1$  dělí  $M_p$  právě tehdy, když  $2p + 1$  je prvočíslo. V důsledku, jsou-li  $p \equiv 3 \pmod{4}$  a  $2p + 1$  prvočíslo, pak  $p = 3$  nebo  $M_p$  je složené číslo.*

Euler rovněž dokázal opačnou implikaci k tvrzení (1). Jeho objev byl však publikován až v roce 1849, tedy 66 let po Eulerově smrti:

$$\begin{aligned} \text{Každé sudé dokonalé číslo má tvar } & 2^{n-1}(2^n - 1), \\ \text{kde } n > 1 \text{ a } 2^n - 1 \text{ je prvočíslo.} & \end{aligned} \quad (4)$$

Tvrzení (1) spolu s tvrzením (4) dokazují platnost Euklidovy–Eulerovy věty.

**Věta 1.3** (Euklides, Euler). *Sudé přirozené číslo je dokonalé právě tehdy, když je tvaru  $2^{n-1}(2^n - 1)$ , kde  $2^n - 1$  je prvočíslo.*



Z Euklidovy–Eulerovy věty plyne existence vzájemně jednoznačné korespondence mezi sudými dokonalými čísly a Mersennovými prvočísly. Existuje domněnka, že existuje nekonečně mnoho Mersennových prvočísel. Tato domněnka však nebyla do dnešní doby dokázána. Rovněž není známo, zda existují lichá dokonalá čísla.

V roce 1876 objevil François Édouard Anatole Lucas (1842–1891) test prvočíselnosti Mersennových čísel [35, str. 316], který později zjednodušil a dokázal Derric Henry Lehmer (1905–1991). Lehmerovy výsledky byly publikovány v článcích [28] a [29]. Lucasův–Lehmerův test prvočíselnosti Mersennových čísel lze formulovat následovně.

**Věta 1.4** (Lucas, Lehmer). *Nechť  $S_1 = 4$  a  $S_{k+1} = S_k^2 - 2$  pro  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Je-li  $p$  liché prvočíslo, pak  $M_p$  je prvočíslo právě tehdy, když  $M_p$  dělí  $S_{p-1}$ .*

Lucasův–Lehmerův výsledek je používán k testování prvočíselnosti Mersennových čísel i v současné době. Další zajímavá vlastnost čísel  $M_n$  byla dokázána v [43, str. 91]:

$$\text{Pokud } n \text{ dělí } M_p, \text{ pak } n \equiv \pm 1 \pmod{8} \text{ a } n \equiv 1 \pmod{p}.$$

Náročnost problému rozložit Mersennova čísla na součin prvočísel přiblížíme čtenáři na příkladech exponentů  $n = 67$  a  $n = 257$ . V roce 1903 Frank Nelson Cole (1861–1926) rozložil na zasedání Americké matematické společnosti v New Yorku číslo  $M_{67}$  na součin dvou prvočísel [16, str. 17] a tím dokázal, že číslo  $M_{67}$  je složené:

$$2^{67} - 1 = 147573952589676412927 = 193707721 \times 761838257287.$$

Důkaz, že číslo  $M_{257}$  je složené, objevil Lehmer v roce 1927. Kompletní rozklad čísla  $M_{257}$  na součin tří prvočísel byl nalezen teprve v roce 1980 [16, str. 27]. Číslo  $M_{257}$  tvoří 78 cifer a jeho prvočíselný rozklad má tvar:

$$\begin{aligned} M_{257} &= 23158417847463239084714197001737581570653996933128112807891516 \\ &\quad 8015826259279871 \\ &= 535006138814359 \times 1155685395246619182673033 \times \\ &\quad \times 374550598501810936581776630096313181393. \end{aligned}$$

Podrobnosti o objevech týkajících se Mersennových čísel do roku 1935, včetně kompletní bibliografie, lze nalézt v článku [2], jehož autorem je Raymond Clare Archibald (1875–1955). Čtenáři lze rovněž doporučit historické pojednání [52] z roku 1952, které sepsal Horace Scudder Uhler (1872–1956). Chronologický vývoj jednotlivých objevů týkajících se faktorizace Mersennových čísel až do roku 1990 lze nalézt ve velmi obsáhlé práci [16], jejímž autorem je Haworth Guy.

V roce 1996 založil George Woltman projekt GIMPS [15] (Great Internet Mersenne Prime Search), jehož cílem je hledání dalších Mersennových prvočísel. Do dnešní doby (září 2021), je známo 51 Mersennových prvočísel. Seznam (3), který

vznikal v období let 1644–1947 má následující, aktuální pokračování:

$$\begin{aligned}
 &521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213, 19937, 21701, \\
 &23209, 44497, 86243, 110503, 132049, 216091, 756839, 859433, 1257787, \\
 &1398269, 2976221, 3021377, 6972593, 13466917, 20996011, 24036583, \quad (5) \\
 &25964951, 30402457, 32582657, 37156667, 42643801, 43112609, 57885161, \\
 &74207281, 77232917, 82589933.
 \end{aligned}$$

V letech 1948–2021 tedy bylo nalezeno dalších 39 Mersennových prvočísel. Největší v současnosti známé Mersennovo prvočíslo  $M_n$  bylo objeveno v roce 2018 a má exponent  $n = 82589933$ . Zda je však seznam (5) mezi hodnotami  $n = 43112609$  a  $n = 82589933$  kompletní, není prozatím ověřeno. Je tedy možné, že mezi uvedenými hodnotami existují další, prozatím neznámá, Mersennova prvočísla. Aktuální informace o vývoji problematiky lze sledovat na internetové stránce GIMPS [15].

Mersennova čísla jsou v současnosti studována především v souvislosti s aplikacemi velkých prvočísel v teorii kódování. Strategický význam tohoto oboru matematiky pro přenos utajovaných zpráv, bankovních transakcí a bezpečnost internetu vyvolává intenzivní snahu pochopit hlubší zákonitosti světa prvočísel.

## 2. JAKÓBCZYKOVA HYPOTÉZA

V roce 1951 publikoval polský kněz a matematik Franciszek Jakóbczyk (1905–1992) následující zajímavou hypotézu [20, str. 127] týkající se dělitelů Mersennových čísel s prvočíselnými exponenty.

**Hypotéza 2.1.** *Bud'  $p$  libovolné prvočíslo. Pak Mersennovo číslo  $M_p$  není dělitelné čtvercem žádného prvočísla.*

Jinak formulováno, je-li  $p$  prvočíslo, pak prvočíselný rozklad Mersennova čísla  $M_p$  má tvar  $M_p = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_k$ , kde  $k \in \mathbb{N}$  a  $p_1, p_2, \dots, p_k$  jsou navzájem různá lichá prvočísla. Na Jakóbczykovu hypotézu upozorňuje rovněž Waclaw Sierpiński (1882–1969) v knize *Co wiemy a czego nie wiemy o liczbach pierwszych* [47, str. 70], která vyšla ve Varšavě v roce 1961. Ruský překlad knihy [47] vyšel v Moskvě v roce 1963. Jakóbczykovo jméno se v souvislosti s Hypotézou 2.1 vyskytuje rovněž v Sierpińského knize *A Selection of Problems in the Theory of Numbers* [48, str. 92], která vyšla v New Yorku v roce 1964. Ve skutečnosti druhá část knihy [48, str. 25–97] obsahuje anglický překlad polského vydání [47]. Český překlad knihy [47] pak vyšel v roce 1966.

V kontextu uvedených informací je zarážející, že v současné době Jakóbczykovo jméno jako autora Hypotézy 2.1 není vůbec zmiňováno a je prakticky zapomenuto. Podrobnosti o životě a díle Franciszka Jakóbczyka může čtenář nalézt v článku [40].

Pro zajímavost uveďme, že ani Richard Kenneth Guy (1916–2020), autor známé knihy *Unsolved Problems in Number Theory* [17] se o Jakóbczykově práci nezmiňuje. Stojí ale za povšimnutí, že Guy zaujímá k Jakóbczykově hypotéze velmi vyhraněný a odmítavý postoj. Píše, cituji [17, str. 7]: *If  $p$  is a prime, is  $2^p - 1$  always squarefree? This seems to be another unanswerable question. It is safe to*

conjecture that the answer is "No!" This could be settled by computer if you were lucky.

V knize [48, str. 102], část *One hundred elementary but difficult problems in arithmetic*, položil polský matematik Andrzej Schinzel následující otázku  $P_{10}^2$ .

**Problém 2.2** (Schinzel, 1964). Existuje nekonečně mnoho Mesenových čísel která nejsou dělitelná čtvercem žádného přirozeného čísla většího než 1?

Je zřejmé, že pravdivost Jakóbczykovy Hypotézy 2.1 implikuje kladnou odpověď na Schinzelovu otázku formulovanou v Problému 2.2. Zda je však odpověď na Schinzelovu otázku kladná nebo záporná není do dnešní doby známo.

### 3. EULERŮV A FERMATŮV KVOCIENT

V této kapitole připomeneme několik základních tvrzení a pojmů z teorie čísel, které souvisí s naší problematikou. Pro libovolné  $m \in \mathbb{N}$  nechť  $\varphi(m)$  označuje počet všech  $k \in \mathbb{N}$ , kde  $1 \leq k \leq m$ , která jsou nesoudělná s  $m$ . Funkci  $\varphi(m)$  zavedl již v roce 1763 švýcarský matematik Leonhard Euler (1707–1783), který rovněž dokázal, že

$$\varphi(m) = m \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p}\right), \quad (6)$$

přičemž součin v (6) probíhá přes všechna různá prvočísla  $p$ , která dělí  $m$ . Funkce  $\varphi(m)$  se nazývá Eulerova funkce. Speciálně, pokud  $m = p^n$ , kde  $p$  je prvočíslo a  $n$  je libovolné přirozené číslo, pak  $\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1}$ . Euler rovněž dokázal, že pro libovolná nesoudělná čísla  $a, m \in \mathbb{Z}$ ,  $m > 1$  platí

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}. \quad (7)$$

Z (7) ihned plyne, že číslo  $q_m(a)$  definované vztahem

$$q_m(a) = \frac{a^{\varphi(m)} - 1}{m} \quad (8)$$

je vždy celé číslo. V roce 1997 navrhla trojice autorů Takashi Agoh, Karl Dilcher a Ladislav Skula [1, str. 31] používat pro číslo (8) název Eulerův kvocient čísla  $m$  se základem  $a$ .

Speciálním případem Eulerova kvocientu, pro  $m = p$ , kde  $p$  je prvočíslo, je Fermatův kvocient

$$q_p(a) = \frac{a^{p-1} - 1}{p}. \quad (9)$$

Název Fermatův kvocient použil poprvé v roce 1861 James Joseph Sylvester (1814–1897) v *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* [50, str. 161]. Pojmenování, které Sylvester pro podíl (9) použil, má připomínat skutečnost, že podle malé Fermatovy věty je  $q_p(a)$  celé číslo. Aritmetické vlastnosti čísel  $q_p(a)$  byly od roku 1828 detailně studovány celou řadou autorů. Podrobnosti o dosažených výsledcích může čtenář nalézt v [10, str. 105–112] nebo též v publikaci Karla Lepky [31, str. 29–73]. Je vhodné zmínit, že některé důležité vlastnosti Fermatova kvocientu objevil v letech 1905–1906 český matematik Matyáš Lerch (1860–1922) v článcích [32] a [33].

Vlastnosti Eulerova kvocientu byly pak podrobně studovány v [1]. Eulerova funkce  $\varphi(m)$  úzce souvisí s teorií konečných cyklických grup. Pro potřeby tohoto článku však bude stačit připomenout pouze několik základních skutečností. Pro libovolné prvočíslo  $p$  a pro libovolné  $n \in \mathbb{N}$  nechť  $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$  označuje multiplikační grupu jednotek okruhu  $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ . Grupa  $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$  je konečná a má  $\varphi(p^n)$  prvků. Je-li  $p$  liché prvočíslo, pak  $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$  je cyklická. Je-li  $p = 2$ , pak  $(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^\times$  je cyklická právě tehdy, když  $n = 1$  nebo  $n = 2$ . Dále, pro libovolné  $a \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$  označme  $\text{ord}_{p^n}(a)$  řád prvku  $a$  v grupě  $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$ , tj. nejmenší přirozené číslo  $k$  takové, že  $a^k \equiv 1 \pmod{p^n}$ . Uvedené pojmy budou užitečné již v následující kapitole.

#### 4. WIEFERICHOVA PRVOČÍSLA

V roce 1909 dokázal německý matematik Arthur Wieferich (1884–1954) pozoruhodné tvrzení, týkající se prvního případu velké Fermatovy věty [54].

**Věta 4.1** (Wieferich, 1909). *Nechť  $p$  je liché prvočíslo a nechť  $x, y, z$  jsou celá čísla nedělitelná  $p$ , vyhovující rovnici  $x^p + y^p = z^p$ . Pak  $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$ .*

Na počest Wieferichova objevu jsou prvočísla  $p$  splňující kongruenci  $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$  nazývána Wieferichova prvočísla. Pomocí pojmů zavedených v předchozí kapitole je snadné dokázat, že následující podmínky jsou ekvivalentní:

- (i)  $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$ ,
- (ii)  $q_p(2) \equiv 0 \pmod{p}$ ,
- (iii)  $\text{ord}_{p^2}(2) = \text{ord}_p(2)$ .

Z historického hlediska je zajímavé zmínit, že v době publikace Wieferichovy věty nebylo známo žádné prvočíslo splňující (10). Již v roce 1910 Waldemar Meissner (1852–1928) prozkoumal všechna prvočísla  $p \leq 1000$  ale žádné, které by mělo vlastnost (10), nenalezl. Ke stejnému závěru dospěl také ukrajinský matematik Dmitry Grawe (1863–1939). V roce 1913 došlo k prvnímu důležitému objevu. Meissner rozšířil svoje předchozí výpočty pro všechna prvočísla  $p \leq 2000$  a našel první Wieferichovo prvočíslo  $w_1 = 1093$ . Svůj výsledek publikoval v článku [36]. Ke druhému objevu došlo v roce 1922. Holandský matematik Nicolas Beeger (1884–1965) prozkoumal všechna prvočísla  $p \leq 3700$  a našel druhé Wieferichovo prvočíslo  $w_2 = 3511$ . Objev publikoval v článku [3]. V roce 1927 Robert Hausner (1863–1948) provedl výpočty pro všechna prvočísla  $p \leq 10000$ , ale žádné další Wieferichovo prvočíslo neobjevil [18]. Již o dva roky dříve Nicolas Beeger [4] informoval, že bez úspěchu prohledal všechna prvočísla po hranici  $p \leq 14000$ . Beeger pokračoval v hledání třetího Wieferichova prvočísla až do začátku druhé světové války. V roce 1939 publikoval závěr [5], že ani pro  $p \leq 16000$  neexistuje žádné další Wieferichovo prvočíslo.

V [5, str. 52] vyslovuje Beeger zajímavý názor, že kromě nalezených Wieferichových prvočísel 1093 a 3511 již žádné další neexistuje. Dokázat tuto domněnku by však v důsledku znamenalo nalézt důkaz prvního případu velké Fermatovy věty. Možná bude zajímavé uvést přesné znění Beegerova názoru z roku 1939: *The fact that there are only 2 primes  $< 16000$  satisfying  $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$  and that there*

*is no such prime between 3511 and 16000 may give rise to the conjecture that others do not exist and that the first case of Fermat's last theorem can be proved in showing that  $(2^{p-1} - 1) : p^2$  is, for large values of  $p$ , not a whole number.*

Výrazný pokrok v hledání Wieferichových prvočísel nastal s příchodem počítačů po druhé světové válce. V roce 1958 Carl Erik Fröberg [13] rozšířil hledání pro  $p \leq 50000$ , ale žádné nové Wieferichovo prvočíslo neobjevil. Sidney Kravitz [25] v roce 1960 zjistil, že ani pro  $p \leq 100000$  žádné další Wieferichovo prvočíslo neexistuje. Neúspěšné byly rovněž výpočty, které v roce 1964 provedli Erna H. Pearson [39] pro  $p \leq 200183$  a Hans Riesel [44] pro  $p \leq 500000$ . V roce 1963 Melvin Hausner a David Sachs [19] dospěli s využitím počítače IBM 7090 k výsledku, že jedinými Wieferichovými prvočísly  $p < 10^6$  jsou 1093 a 3511. Další pokroky v pátrání po třetím Wieferichovu prvočíslu souvisí zejména s technologickým rozvojem počítačů a konstrukcí efektivnějších algoritmů. Připomeňme alespoň některé.

Již v roce 1968 Fröberg [14, str. 84–88] podstatným způsobem rozšířil svůj výsledek z roku 1958. Avšak ani pro  $p \leq 3 \times 10^7$  další Wieferichovo prvočíslo nenalezl. V roce 1971 trojice autorů Brillhart, Tonascia a Weinberger [6, str. 213–222] podala zprávu, že pro  $p \leq 3 \times 10^9$  žádné další Wieferichovo prvočíslo neexistuje. V roce 1981 Lehmer [30] informoval, že ani pro  $p \leq 6 \times 10^9$  nebylo další Wieferichovo prvočíslo objeveno. O 17 let později, v roce 1997, Richard Crandall, Karl Dilcher a Carl Pomerance publikovali závěr [9], že pro  $p \leq 4 \times 10^{12}$  žádné nové Wieferichovo prvočíslo neexistuje. V roce 2005 pokračovali v hledání Wieferichových prvočísel Joshua Knauer a Jörg Richstein. Podle jejich výsledku prezentovaného v článku [24] neexistuje žádné další Wieferichovo prvočíslo pro  $p \leq 1,25 \times 10^{15}$ .

Novou nadějí na nalezení třetího Wieferichova prvočísla se stala metoda založená na nečekaném objevu Larryho Washingtona [21, str. 198]. Pokud obě známá Wieferichova prvočísla 1093 a 3511 zmenšíme o jedničku, pak binární rozvoj vzniklých čísel je periodický:

$$1092 = 0100\ 0100\ 0100_2 = 444_{16} \quad \text{a} \quad 3510 = 110\ 110\ 110\ 110\ 110_2 = 6666_8. \quad (11)$$

Dolní indexy 2, 8 a 16 ve vztahu (11) znamenají vyjádření čísla ve dvojkové, osmičkové a šestnáctkové číselné soustavě. Tento objev se stal inspirací pro hledání třetího Wieferichova prvočísla ve tvaru s periodickým binárním rozvojem. Podrobnosti může čtenář nalézt v článku Miroslava Kureše a Jana Dobeše [11]. Projekt Wieferich@Home založený na této myšlence probíhal v letech 2007–2016. Objev třetího Wieferichova prvočísla však nepřinesl.

V roce 2011 Francois G. Dorais a Dominic Klyve [12] publikovali výsledek, že ani pro  $p \leq 6 \times 10^{15}$  neexistuje žádné další Wieferichovo prvočíslo. Od roku 2011, nezávisle na projektu Wieferich@Home, probíhal také jiný projekt pro hledání Wieferichových prvočísel s názvem PrimeGrid. Tento projekt dosáhl v roce 2017 hranice  $p \leq 10^{17}$  a byl ukončen aniž by našel třetí Wieferichovo prvočíslo.

Konečně v roce 2020 byl zahájen nový projekt PrimeGrid [42], který spojil hledání Wieferichových prvočísel s hledáním Fibonacci–Wieferichových prvočísel [23]. Současný stav (září 2021) dosažený v rámci tohoto projektu můžeme formulovat jako tvrzení, které shrnuje 112 let výzkumu Wieferichových prvočísel: *V intervalu  $[2, 3 \times 10^{18}]$  existují pouze dvě Wieferichova prvočísla: 1093 a 3511.*

Je vhodné poznamenat, že intenzivní snaha nalézt třetí Wieferichovo prvočíslo byla od roku 1997 podporována domněnkou, že množina všech Wieferichových prvočísel je nekonečná a že počet Wieferichových prvočísel ležících v intervalu  $[x, y]$  je přibližně roven číslu

$$\sum_{p \in [x, y]} \frac{1}{p} \approx \ln \left( \frac{\ln(y)}{\ln(x)} \right). \quad (12)$$

Tato domněnka je založena na statistických argumentech prezentovaných v [9, str. 446]. Otázkou zůstává, zda vztah (12) opravdu platí, protože podle (12) by se měla v intervalu  $[2, 3 \times 10^{18}]$  vyskytovat aspoň čtyři Wieferichova prvočísla. Tato předpověď se ale v období následujících let 1997–2021 nepotvrdila. Do dnešní doby není známo, zda množina všech Wieferichových prvočísel je konečná nebo nekonečná množina.

Je naprosto fascinující si uvědomit, že za posledních 57 let (1964–2021) vzrostly výpočetní schopnosti počítačů o více než 12 řádů. Výrazného zrychlení výpočtů bylo po roce 1997 dosaženo také díky využití internetu a strategii distribuovaných výpočtů. Základní myšlenkou distribuovaných výpočtů je rozložit rozsáhlý výpočetní problém na mnoho různých částí. Jednotlivé části jsou pak prostřednictvím internetu přiděleny různým počítačům po celém světě a ty dílčí úlohy zpracují.

Na závěr kapitoly ještě poznamenejme, že hledání Wieferichových prvočísel je často spojováno s řešením obecnějšího problému, totiž určit prvočísla  $p$  splňující podmínku  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$ , kde  $a \geq 2$  je dané přirozené číslo. Tato problematika je studována například v článcích [22, 34, 38, 44].

## 5. SOUVISLOST JAKÓBCZYKOVY HYPOTÉZY S WIEFERICHOVÝMI PRVOČÍSLY

První souvislost mezi Wieferichovými prvočísly a Mersennovými čísly objevil v roce 1965 polský matematik Andrzej Rotkiewicz (1931–2016). V článku [45] dokázal Rotkiewicz následující čtyři tvrzení.

**Věta 5.1** (Rotkiewicz, 1965). *Platí:*

- (i) *Nechť existuje nekonečně mnoho Mersennových čísel  $M_q$ , kde  $q$  je prvočíslo, které nemají čtvercové dělitele větší než 1. Pak existuje nekonečně mnoho prvočísel  $p$  s vlastností  $2^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2}$ .*
- (ii) *Nechť existuje pouze konečně mnoho prvočísel  $p$  s vlastností  $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$ . Pak pro libovolné, dostatečně velké prvočíslo  $q$  a libovolné přirozené číslo  $n$  nemá Mersennovo číslo  $M_{q^n}$  čtvercové dělitele větší než 1.*
- (iii) *Nekonečně mnoho přirozených čísel  $n$  s vlastností  $n^2 | 2^n - 2$  existuje právě tehdy, když existuje nekonečně mnoho prvočísel  $p$  s vlastností  $p^2 | 2^{p-1} - 1$ .*
- (iv) *Nekonečně mnoho přirozených čísel  $n^2 > 1$  s vlastností  $n^2 | 2^{n^2} - 2$  existuje právě tehdy, když existuje nekonečně mnoho prvočísel  $p$  s vlastností  $p^2 | 2^{p-1} - 1$ .*

Je zřejmé, že tvrzení (i) Věty 5.1 dává částečnou odpověď na Schinzelovu otázku  $P_{10}^2$  uvedenou ve druhé kapitole. Tvrzení (iii) pak dává částečnou odpověď na

otázku  $P_{43}^2$  v [48, str. 109]:

*Existuje nekonečně mnoho přirozených čísel  $n$ , pro která  $2^n - 2$  je dělitelné  $n^2$ ?*

V roce 1967 Le Roy J. Warren a Henry G. Bray [53] dokázali následující implikaci.

**Věta 5.2** (Warren, Bray, 1967). *Bud'te  $p, q$  libovolná lichá prvočísla.*

$$\text{Jestliže } p \text{ dělí } M_q, \text{ pak } 2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{M_q}.$$

Z Věty 5.2 bezprostředně plyne následující důsledek.

**Důsledek 5.3.** *Bud'te  $p, q$  libovolná lichá prvočísla.*

$$\text{Jestliže } p^2 \text{ dělí } M_q, \text{ pak } 2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}.$$

Jinak formulováno, existuje-li Mersennovo číslo s prvočíselným exponentem, které je dělitelné čtvercem prvočísla  $p$ , pak  $p$  je Wieferichovo prvočísla. Alternativní důkaz tvrzení Věty 5.2 předložil Chris K. Caldwell [8]. Existují-li pouze dvě Wieferichova prvočísla, 1093 a 3511, pak tato skutečnost spolu s Větou 5.2 implikuje správnost Jakóbczykovy hypotézy.

V roce 2019 publikoval Ladislav Skula článek [49], v němž studoval Wieferichova prvočísla vyšších řádů a jejich souvislost s Mersennovými čísly. Bude vhodné připomenout definici [49, str. 2]: Řekneme, že Wieferichovo prvočísla  $p$  je řádu  $n \in \mathbb{N}$ , když

$$q_{p^n}(2) \equiv 0 \pmod{p^n}, \quad \text{nebo ekvivalentně, } 2^{p^{n-1}(p-1)} \equiv 1 \pmod{p^{2n}}.$$

Důkaz následující věty využívá některých výsledků dosažených v [1, str. 44–47].

**Věta 5.4** (Skula, 2019). *Nechť  $p$  a  $q$  jsou libovolná prvočísla,  $n \in \mathbb{N}$  a nechť  $p^n$  dělí Mersennovo číslo  $M_q$ . Pak následující jsou tvrzení ekvivalentní:*

- (i)  $p^{n+1}$  dělí  $M_q$ ,
- (ii)  $p$  je Wieferichovo prvočísla řádu  $n$ ,
- (iii)  $\text{ord}_{p^{n+1}}(2) = q$ ,
- (iv)  $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^{n+1}}$ ,
- (v)  $\text{ord}_p(q_p(2)) \geq n$ .

Studii o Mersennových číslech a Jakóbczykově hypotéze zakončíme krátkou poznámkou.

*Poznámka 5.5.* Franciszek Jakóbczyk [20, str. 127] vyslovil rovněž analogickou hypotézu k Hypotéze 2.1, která se týká Fermatových čísel. Základní informace o Fermatových číslech může čtenář nalézt v [26] a [27]. Jakóbczykova hypotéza o Fermatových číslech zasluhuje podobnou pozornost jako Hypotéza 2.1 a je vhodným námětem pro volné pokračování tohoto článku. Konečně problémem podobného typu jako Hypotéza 2.1 je také otázka existence Fibonacci–Wieferichových prvočísel, kterou v roce 1960 formuloval americký matematik Donald Dines Wall (1921–2000). Podrobnosti o tomto problému lze nalézt v autorově článku [23].

## REFERENCE

- [1] T. Agoh, K. Dilcher, L. Skula: *Fermat quotients for composite moduli*, Journal of number theory **66** (1997), 29–50.
- [2] R. C. Archibald: *Mersenne's numbers*, Scripta Mathematica **3** (1935), 112–119.
- [3] N. Beeger: *On a new case of the congruence  $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$* , Messenger of Mathematics **51** (1922), 149–150.
- [4] N. Beeger: *On the congruence  $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$  and Fermat's last theorem*, Messenger of Mathematics **55** (1925), 17–26.
- [5] N. Beeger: *On the congruence  $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$  and Fermat's last theorem*, Nieuw Archief Voor Wiskunde **20** (1939), 51–54.
- [6] J. Brillhart, J. Tonascia, P. Weinberger: *On the Fermat quotient*, Computers in Number Theory (1971), 213–222.
- [7] P. Bungus: *Numerorum Mysteria*, Bergamo, 1591.
- [8] Ch. K. Caldwell: *Proof that all prime-squared Mersenne divisors are Wieferich*, online <https://primes.utm.edu/notes/proofs/SquareMerDiv.html>.
- [9] R. E. Crandall, K. Dilcher, C. Pomerance: *A search for Wieferich and Wilson primes*, Mathematics of Computation **66** (1997), 433–449.
- [10] L. E. Dickson: *History of the Theory of Numbers, Vol. I*, Dover Publications, Mineola, 2005.
- [11] J. Dobeš, M. Kureš: *Search for Wieferich primes through the use of periodic binary strings*, Serdica Journal of Computing **4** (2010), 293–300.
- [12] F. G. Dorais, D. Klyve: *A Wieferich prime search up to  $6.7 \times 10^{15}$* , Journal of Integer Sequences **14** (2011), Article 11.9.2.
- [13] C. E. Fröberg: *Some computations of Wilson and Fermat remainders*, Mathematics of Computation **12** (1958), 281.
- [14] C. E. Fröberg: *On some number-theoretical problems treated with computers*, Computers in Mathematical Research, Amsterdam, 1968.
- [15] GIMPS, online <https://www.mersenne.org>.
- [16] H. Guy: *Mersenne numbers*, Berkshire, 1990.
- [17] R. K. Guy, *Unsolved Problems in Number Theory*, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [18] R. Haußner: *Über numerische Lösungen der Kongruenz  $u^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p^2}$* , Journal für die Reine und Angewandte Mathematik **156** (1927), 223–226.
- [19] M. Hausner, D. Sachs: *On the congruence  $2^p \equiv 2 \pmod{p^2}$* , American Mathematical Monthly **70** (1963), 996.
- [20] F. Jakóbczyk: *Les applications de la fonction  $\lambda_g(n)$  à l'étude des fractions périodiques et de la congruence chinoise  $2^n - 2 \equiv 0 \pmod{n}$* , Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska **5** (1951), 97–138.
- [21] W. Johnson: *On the nonvanishing of Fermat quotients  $\pmod{p}$* , Journal für die Reine und Angewandte Mathematik **292** (1977), 196–200.
- [22] W. Keller, J. Richstein: *Solutions of the congruence  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^r}$* , Mathematics of Computation **74** (2005), 927–936.
- [23] J. Klaška: *Donald Dines Wall's conjecture*, The Fibonacci Quarterly **56** (2018), No. 1, 43–51.
- [24] J. Knauer, J. Richstein: *The continuing search for Wieferich primes*, Mathematics of Computation **74** (2005), 1559–1563.
- [25] S. Kravitz: *The congruence  $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$  for  $p < 100,000$* , Mathematics of Computation **14** (1960), 378.
- [26] M. Křížek: *O Fermatových číslech*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie **40** (1995), No. 5, 243–253.
- [27] M. Křížek, F. Luca, L. Somer: *17 Lectures on Fermat Numbers, From Number Theory to Geometry*, Canadian Mathematical Society, Springer, 2001.
- [28] D. H. Lehmer: *An extended theory of Lucas function*, Annals of Mathematics **31** (1930), 419–448.



- [29] D. H. Lehmer: *On Lucas' test for the primality of Mersenne's numbers*, Journal of the London Mathematical Society **10** (1935), 162–165.
- [30] D. H. Lehmer: *On Fermat's quotient, base two*, Mathematics of Computation **36** (1981), 289–290.
- [31] K. Lepka: *Historie Fermatových kvocientů*, Prometheus, Praha, 2000.
- [32] M. Lerch: *Zur Theorie des Fermatschen Quotienten  $(a^{p-1} - 1)/p = q(a)$* , Mathematische Annalen **60** (1905), 471–490.
- [33] M. Lerch: *Sur les théorèmes de Sylvester concernant le quotient de Fermat*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **142** (1906), 35–38.
- [34] P. Ležák: *Hledání Wieferichových prvočíslel*, Kvaternion **2** (2013), 103–109.
- [35] E. Lucas: *Théorie des fonctions numériques simplement périodiques*, American Journal of Mathematics **1** (1878), 184–240, 289–321.
- [36] W. Meissner: *Über die Teilbarkeit von  $2^p - 2$  durch das Quadrat der Primzahl  $p = 1093$* , Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften, Berlin, 1913, 663–667.
- [37] E. M. Mersenne: *Cogitata Physico - Mathematica, in quibustam naturae quam artis effectus admirandi certissimis demonstrationibus explicantur, Praefatio Generalis XIX*, Bertier, Paris, 1644.
- [38] P. L. Montgomery: *New solutions of  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$* , Mathematics of Computation **61** (1993), 361–363.
- [39] E. H. Pearson: *On the congruences  $(p-1)! \equiv -1$  and  $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$* , Mathematics of Computation **17** (1963), 194–195.
- [40] H. Piersa: *Šp. Ksiądz dr Franciszek Jakóbczyk (9 X 1905 - 3 VI 1992)*, Roczniki Filozoficzne **39–40** (1991–1992), spis 3, 5–7.
- [41] Š. Porubský: *Fermat a teorie čísel aneb problematika dělitelů a dokonalá čísla*, Cahiers du CEFRES (2002), 49–86.
- [42] PrimeGrid, online <https://www.primegrid.com>.
- [43] P. Ribenboim: *The new Book of Prime Number Records*, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [44] H. Riesel: *Note on the congruence  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$* , Mathematics of Computation **18** (1964), 149–150.
- [45] A. Rotkiewicz: *Sur les nombres de Mersenne depourves de diviseurs carres et sur les nombres naturels  $n$ , tels que  $n^2 | 2^2 - 2$* , Matematičeski vestnik **17** (1965), No. 2, 78–80.
- [46] F. Servít: *Eukleidovy Základy (Elementa)*, Jednota českých matematiků, Praha, 1907.
- [47] W. Sierpiński: *Co wiemy, a czego nie wiemy o liczbach pierwszych*, Warszawa, 1961.
- [48] W. Sierpiński: *A Selection of Problems in the Theory of Numbers*, New York, 1964.
- [49] L. Skula: *Prime power divisors of Mersenne numbers and Wieferich primes of higher order*, Integers, Electronic Journal of Combinatorial Number Theory **19** (2019).
- [50] J. J. Sylvester: *Sur une propriété des nombres premiers qui se rattache au théorème de Fermat*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **52** (1861), 161–163.
- [51] T. Šalát: *O dokonalých číslach*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie **9** (1964), No. 1, 1–13.
- [52] H. S. Uhler: *A brief history of the investigations on Mersenne's numbers and the latest immense primes*, Scripta Mathematica **18** (1952), 121–131.
- [53] L. R. Warren, H. G. Bray: *On the squar-freeness of Fermat and Mersenne numbers*, Pacific Journal of Mathematics **22** (1967), 563–564.
- [54] A. Wieferich: *Zum letzten Fermat'schen Theorem*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik **136** (1909), 293–302.



## TRAJEKTORIE AUTONOMNÍCH ROVNIC V ROVINĚ II. NELINEÁRNÍ ROVNICE A SOUSTAVY

JAN FRANCŮ

ABSTRAKT. Příspěvek navazuje na práci J. Franců: *Trajektorie autonomních rovnic v rovině I.*, která se zabývá trajektoriemi řešení lineárních autonomních soustav dvou rovnic a rovnicemi druhého řádu. V této práci uvedeme několik příkladů konkrétních nelineárních rovnic a soustav, které mají zajímavé trajektorie.

V mechanice je to nelineární rovnice matematického kyvadla a popis trajektorií jeho netlumených i tlumených kmitů. V matematické biologii jsou to modely soužití dvou populací: symbióza, slabá a silná konkurence, dominance a vztah predátor-kořist. Trajektorie konkrétních příkladů jsou vykresleny.

### ÚVOD

Obyčejné diferenciální rovnice se využívají při modelování řady jevů ve fyzice, mechanice, biologii, ekonomii i dalších oblastech. V případě řešení autonomní soustavy dvou rovnic  $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$  nebo jedné rovnice druhého řádu  $y'' = f(y, y')$  chování řešení dobře znázorňují trajektorie.

Trajektorie je průmět grafu řešení do prostoru hodnot řešení. V případě autonomních rovnic  $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ ,  $y'' = f(y, y')$  s lipchitzovskými funkcemi  $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ ,  $f(y, y')$  trajektorie řešení vytváří systém disjunktních křivek nebo bodů v rovině. V okolí trajektorie nekonstantního řešení jsou to „rovnoběžné“ a stejně orientované křivky.

V okolí singulárního bodu, tj. trajektorie konstantního řešení, je situace složitější, trajektorie se mohou chovat různě. Možné situace jsou studovány v článku [3], kde jsou podrobně studovány singulární body lineárních soustav i rovnic, včetně konkrétních příkladů s náčrty trajektorií – tzv. fázových portrétů.

V tomto článku se budeme zabývat trajektoriemi vybraných nelineárních rovnic a soustav modelujících reálné jevy ve dvou oblastech. První je mechanika, rovnice druhého řádu popisující netlumené i tlumené kmity matematického kyvadla.

Druhou oblastí je matematická biologie. Soustava dvou rovnic prvního řádu popisuje vývoj počtu dvou populací, které se navzájem ovlivňují. Rozebereme několik typů tohoto vztahu: symbióza, tři stupně konkurence a vztah predátor-kořist.

---

2010 MSC. Primární 34A34; Sekundární 70B05, 92D25.

*Klíčová slova.* Autonomní diferenciální rovnice, autonomní systém diferenciálních rovnic, trajektorie, singulární body, matematické kyvadlo, modelování vývoje populací.

Práce byla podporována Vysokým učením technickým v Brně projektem *Specifický výzkum* č. FSI-S-20-6187.

## 1. TRAJEKTORIE ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ A ROVNIC

Připomeňme pojmy a výsledky z článku [3], ve kterém jsme studovali trajektorie lineárních soustavy dvou rovnic a lineárních rovnic druhého řádu.

**Autonomní soustava dvou rovnic**

Autonomní soustavu dvou obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu pro neznámé funkce  $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), y_2(x))$  lze zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(y_1, y_2), \\ y_2' &= f_2(y_1, y_2), \end{aligned} \quad \text{vektorově} \quad \mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(\mathbf{y}). \quad (1.1)$$

Budeme předpokládat, že funkce  $\mathbf{f}(\mathbf{y})$  je lokálně lipschitzovská v oblasti  $G$ , tj.

$$|\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{y}})| \leq L |\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}|, \quad \forall \mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}} \in K, \quad (L = L(K) > 0)$$

pro každou kompaktní podmnožinu  $K \subseteq G$ . Díky Picardově větě řešení soustavy (1.1) s počáteční podmínkou  $\mathbf{y}(x_0) = \boldsymbol{\gamma}_0$  existuje a je jednoznačné.

Trajektorie  $\langle \mathbf{y} \rangle$  řešení  $\mathbf{y}$  na intervalu  $I$  je průmět grafu řešení v prostoru  $I \times \mathbb{R}^2$  do prostoru hodnot řešení, do tzv. *fázového prostoru*, kterým je rovina  $\mathbb{R}^2$ . Tedy

$$\langle \mathbf{y} \rangle := \{ \mathbf{y}(x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I \} \subset G.$$

Pokud trajektorie je křivka, orientujeme ji podle rostoucího  $x$ . Trajektorie konstantního řešení je bod, zvaný *singulární bod*. Budeme se zabývat jen trajektoriemi úplných řešení, tj. řešení, které už nelze prodloužit na větší interval. Připomeňme vlastnosti trajektorií, viz [3].

**Věta 1.1.** *Trajektorie úplných řešení soustavy rovnic (1.1) splňují:*

- (a) *Je-li  $\mathbf{y}(x)$  řešení na intervalu  $(a, b)$ , potom  $\mathbf{y}_c(x) = \mathbf{y}(x - c)$  pro  $c \in \mathbb{R}$  je řešení na posunutém intervalu  $(a + c, b + c)$  a má stejnou trajektorii.*
- (b) *Dvě řešení mají disjunktní nebo totožné trajektorie.*
- (c) *Každým bodem fázového prostoru  $G$  prochází právě jedna trajektorie.*
- (d) *Existují tři druhy trajektorií úplných řešení:*  
singulární bod: *trajektorie konstantního řešení,*  
uzavřená neprotínající se křivka: *trajektorie periodického řešení,*  
otevřená neprotínající se křivka: *ostatní trajektorie.*

**Autonomní rovnice druhého řádu**

Počáteční úlohu pro autonomní rovnici druhého řádu lze zapsat ve tvaru

$$y'' = f(y, y'), \quad y(x_0) = \gamma_0, \quad y'(x_0) = \gamma_1. \quad (1.2)$$

Jestliže funkce  $f(\xi, \eta)$  je lokálně lipschitzovská v oblasti  $G \subseteq \mathbb{R}^2$ , potom pro každé  $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$  úloha (1.2) má právě jedno řešení. Každou rovnici druhého řádu lze převést na soustavu dvou rovnic prvního řádu

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = f(y_1, y_2), \quad (1.3)$$

přičemž nové neznámé jsou  $y_1 = y$ ,  $y_2 = y'$  a počáteční podmínky přejdou na  $y_1(x_0) = \gamma_0$ ,  $y_2(x_0) = \gamma_1$ . Trajektorie řešení rovnice (1.2) jsou trajektorie řešení

odpovídající soustavy rovnic (1.3). Jsou to křivky, případně body v rovině, jejichž „vodorovnou“ souřadnicí je hodnota řešení  $y(x)$  a „svislou“ hodnoty derivace  $y'(x)$ . Tedy

$$\langle y \rangle := \{(y(x), y'(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I\} \subset G.$$

Kromě uvedených vlastností trajektorií soustavy rovnic, trajektorie řešení rovnice splňují navíc vlastnost, které nám usnadní zjistit orientaci trajektorií.

**Věta 1.2.** *Trajektorie úplných řešení rovnice druhého řádu splňují:*

- Všechny singulární body leží na ose  $y$ , protože  $y' = 0$ .*
- Trajektorie nad osou  $y$  mají kladnou souřadnici  $y'$ , a proto jsou orientovány v kladném směru, tj. vpravo, zatímco trajektorie pod osou  $y$  mají zápornou souřadnici  $y'$  a jsou proto orientovány v záporném směru, tj. vlevo.*
- Hladké trajektorie protínají osu  $y$  s tečnou kolmou na osu  $y$ .*

### Klasifikace singulárních bodů

Bodem  $\mathbf{y}^*$ , který není singulární, tj.  $\mathbf{f}(\mathbf{y}^*) \neq \mathbf{0}$ , prochází křivka, která je trajektorií nekonstantního řešení. Okolí tohoto bodu je vyplněné „rovnoběžnými“ stejně orientovanými trajektoriemi. V okolí singulárního bodu  $\mathbf{y}^*$  je situace odlišná. Podle chování trajektorií v *ryzím* okolí singulárního bodu (tj. okolím bodu bez tohoto bodu) rozlišujeme následující typy singulárních bodů.

**Definice 1.3.** Necht  $\mathbf{y}^*$  je izolovaný singulární bod soustavy rovnic  $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$  nebo rovnice  $y'' = f(y, y')$ , tj. izolované řešení soustavy rovnic  $\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$  nebo rovnice druhého řádu  $f(y, 0) = 0$ . Bod  $\mathbf{y}^*$  nazveme:

- střed*, pokud existuje ryzí okolí  $U$  bodu  $\mathbf{y}^*$ , ve kterém každým bodem  $\mathbf{y} \in U$  prochází uzavřená trajektorie obsahující ve svém vnitřku bod  $\mathbf{y}^*$ .
- atraktivní uzel*, pokud existuje jeho ryzí okolí, ve kterém jsou jen trajektorie směřující do tohoto bodu, přičemž směrový vektor tečny trajektorie má limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{y}(x) = \mathbf{y}^* \quad \text{a existuje limita} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{y}'(x)}{\|\mathbf{y}'(x)\|}.$$

- neatraktivní uzel*, pokud existuje ryzí okolí, ve kterém jsou jen trajektorie vycházející z tohoto bodu, přičemž směrový vektor tečny trajektorie má limitu

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{y}(x) = \mathbf{y}^* \quad \text{a existuje limita} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\mathbf{y}'(x)}{\|\mathbf{y}'(x)\|}.$$

- atraktivní ohnisko*, pokud existuje jeho ryzí okolí, ve kterém jsou jen trajektorie blížící se k tomuto bodu, ale směrový vektor tečny trajektorie nemá limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{y}(x) = \mathbf{y}^* \quad \text{a neexistuje limita} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{y}'(x)}{\|\mathbf{y}'(x)\|}.$$

- neatraktivní ohnisko*, pokud existuje ryzí okolí, ve kterém jsou jen trajektorie vycházející z tohoto bodu a směrový vektor tečny trajektorie nemá limitu

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{y}(x) = \mathbf{y}^* \quad \text{a neexistuje limita} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\mathbf{y}'(x)}{\|\mathbf{y}'(x)\|}.$$

- (f) *sedlo*, pokud existuje jeho ryzí okolí, ve kterém existují jak trajektorie, které se k němu blíží, tak trajektorie, které se od něj vzdalují, tj. existují řešení  $\mathbf{y}_1(x)$  a  $\mathbf{y}_2(x)$  takové, že

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{y}_1(x) = \mathbf{y}^*, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{y}_2(x) = \mathbf{y}^*.$$

*Poznámka 1.4.*

- (a) Izolované singulární body v rovině, tj. soustavy dvou rovnic nebo rovnice druhého řádu, mohou být jen uvedených typů: střed, uzel, ohnisko a sedlo.  
 (b) Zatím jsme se zabývali izolovanými singulárními body. V případě, kdy singulární body v rovině tvoří křivku, mohou nastat tyto případy:  
 (α) Body křivky jsou atraktivní uzly, tj. ke každému bodu se blíží po jedné trajektorii z obou stran.  
 (β) Body křivky jsou neatraktivní uzly, tj. z každého bodu vychází po jedné trajektorii na obě strany.  
 (γ) Trajektorie v okolí křivky singulárních bodů vedou „rovnoběžně“ podél křivky.  
 (c) Singulární body mohou zaplnit plochu, například soustava  $y'_1 = 0$ ,  $y'_2 = 0$  má jen konstantní řešení, singulární body zaplňují celou rovinu.  
 (d) Existují autonomní soustavy rovnic, které nemají žádný singulární bod, například  $y'_1 = 1$ ,  $y'_2 = 2$ .

### Linearizace nelineární soustavy dvou rovnic

V předchozím odstavci jsme klasifikovali singulární bod  $\mathbf{y}^*$  soustavy nelineárních rovnic (1.1) podle chování trajektorií v jeho okolí. Abychom zjistili typ singulárního bodu, budeme nelineární funkce  $f_1(y_1, y_2)$ ,  $f_2(y_1, y_2)$  v okolí singulárního bodu  $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*)$  linearizovat pomocí Taylorova polynomu prvního řádu. Díky rovnosti  $\mathbf{f}(\mathbf{y}^*) = \mathbf{0}$  funkce  $\mathbf{f}(\mathbf{y}) = (f_1(y_1, y_2), f_2(y_1, y_2))$  aproximujeme

$$f_1(\mathbf{y}) \approx A_{11}(y_1 - y_1^*) + A_{12}(y_2 - y_2^*), \quad f_2(\mathbf{y}) \approx A_{21}(y_1 - y_1^*) + A_{22}(y_2 - y_2^*), \quad (1.4)$$

kde konstanty  $A_{ij}$  jsou parciální derivace funkcí  $f_1, f_2$  v singulárním bodě:

$$A_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\mathbf{y}^*), \quad A_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(\mathbf{y}^*), \quad A_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(\mathbf{y}^*), \quad A_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(\mathbf{y}^*). \quad (1.5)$$

Tímto způsobem můžeme posuzovat typ singulárního bodu  $\mathbf{y}^*$  nelineární soustavy  $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$  pomocí přidružené homogenní soustavy lineárních diferenciálních rovnic  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$  s maticí koeficientů  $\mathbf{A} = (A_{ij})$ . Její charakteristický polynom je

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (A_{11} + A_{22})\lambda + (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}). \quad (1.6)$$

Tento polynom umožňuje určit typ singulárního bodu pomocí svých kořenů.

### Linearizace nelineární rovnice druhého řádu

Odvodíme charakteristický polynom  $P(\lambda)$  nelineární rovnice  $y'' = f(y, y')$ . Rovnici převedeme na soustavu rovnic (1.3) s funkcemi  $f_1(y_1, y_2) = y_2 \approx y'$ ,  $f_2(y_1, y_2) =$

$f(y_1, y_2) \approx f(y, y')$ . Souřadnice singulárního bodu  $\mathbf{y}^*$  jsou  $(y^*, 0)$ , kde  $y^*$  splňuje rovnost  $f(y^*, 0) = 0$ . Příslušné parciální derivace – koeficienty  $A_{ij}$  jsou

$$A_{11} = 0, \quad A_{12} = 1, \quad A_{21} = \frac{\partial f}{\partial y}(y^*, 0), \quad A_{22} = \frac{\partial f}{\partial y'}(y^*, 0)$$

a příslušný charakteristický polynom je

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \frac{\partial f}{\partial y'}(y^*, 0) \cdot \lambda - \frac{\partial f}{\partial y}(y^*, 0). \quad (1.7)$$

### Určení typu singulárního bodu

Pomocí kořenů charakteristického polynomu můžeme určit typ singulárního bodu jako v lineárním případě. Využijeme přitom následující věty.

**Věta 1.5.** *Nechť  $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*)$  je izolovaný singulární bod soustavy rovnic (1.1) s charakteristickým polynomem (1.6) nebo izolovaný singulární bod  $\mathbf{y}^* = (y^*, 0)$  rovnice (1.2) s charakteristickým polynomem (1.7). Nechť polynom  $P(\lambda)$  má nenulové kořeny  $\lambda_1, \lambda_2$ . Potom izolovaný singulární bod  $\mathbf{y}^*$  je:*

- neatraktivní uzel, pokud oba kořeny jsou reálné a kladné, tj.  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$ ,
- atraktivní uzel, pokud oba kořeny jsou reálné a záporné, tj.  $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$ ,
- sedlo, pokud jeden kořen je kladný a druhý záporný, tj.  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ ,
- neatraktivní ohnisko, pokud kořeny jsou komplexně sdružené s kladnou reálnou částí, tj.  $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\nu$ , ( $\mu > 0$ ,  $\nu \neq 0$ ),
- atraktivní ohnisko, pokud kořeny jsou komplexně sdružené se zápornou reálnou částí, tj.  $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\nu$ , ( $\mu < 0$ ,  $\nu \neq 0$ ).

*Poznámka 1.6.* V případě komplexně sdružených kořenů s nulovou reálnou částí, tj.  $\lambda_{1,2} = \pm i\nu$ , ( $\nu \neq 0$ ), singulární bod nemusí být střed jako v lineárním případě. Body s kořeny  $\lambda = \mu \pm i\nu$  s  $\mu \neq 0$  se nazývají také *hyperbolické*.

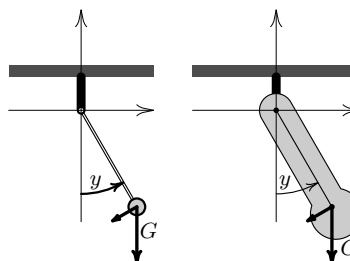
## 2. MATEMATICKÉ KYVADLO

Nelineární rovnice druhého řádu, která modeluje jednoduchý mechanický jev *kmitání matematického kyvadla*, má zajímavé trajektorie.

### Fyzikální formulace úlohy

Ve svislé rovině uvažujeme hmotný bod o hmotnosti  $m$  upevněný na konci tuhé nehmotné tyče délky  $\ell$ , jejíž druhý konec se může volně otáčet okolo počátku  $(0, 0)$ . Na hmotný bod působí gravitační síla  $G = mg$  svisle dolů.

Označme  $y(x)$  orientovaný úhel (v radiánech proti směru pohybu hodinových ručiček), který v čase  $x$  svírá tyč s dolní svislou poloosou, viz Obr. 1. Hledáme závislost úhlu  $y$  na čase  $x$ .



**Obrázek 1.** Matematické a fyzické kyvadlo.

*Poznámka 2.1.* Tento jev se nazývá kmitání *matematického kyvadla*. Obecnější úlohou je kmitání *fyzického kyvadla*, kdy místo hmotného bodu a nehmotné tyče uvažujeme hmotné těleso v prostoru  $\mathbb{R}^3$ , které se může volně otáčet okolo vodorovné osy, která neprochází těžištěm, viz Obr. 1. Dříve užívaný název fyzikální kyvadlo není správný. Matematické kyvadlo je idealizace reálného objektu – fyzického tělesa, není na něm nic fyzikálního, [2].

### Odvození diferenciální rovnice

Hmotný bod se může pohybovat po kružnici se středem v počátku a poloměrem  $\ell$ . Působí na něj svisle dolů stálá gravitační síla  $G = mg$ , která se rozkládá na normálovou  $F_n$  a tečnou složku  $F_t$ . Normálová složka je v rovnováze se silou, kterou působí tyč na hmotný bod, tečná složka  $F_t$  způsobí zrychlení kyvadla.

Pomocí úhlu  $y(x)$  v čase  $x$  tečnou složku síly  $G$  vyjádříme jako  $F_t = -\sin(y)mg$ , viz Obr. 2.

Derivací funkce  $y(x)$  dostáváme úhlovou rychlost  $\omega(x) = y'(x)$  a úhlové zrychlení  $\alpha(x) = y''(x)$ . Při pohybu po kružnici o poloměru  $\ell$  dráhová rychlost je  $v(x) = \ell y'(x)$  a dráhové zrychlení  $a(x) = \ell y''(x)$ .

Podle Newtonova zákona  $F = ma$  platí rovnice  $-mg \sin(y) = m \ell y''$ . Hmotností bodu  $m$  rovnici vydělíme a po úpravě dostáváme

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{g}{\ell} \sin(y) = 0. \quad (2.1)$$

Označme  $a = \sqrt{g/\ell}$  ( $g, \ell > 0$ ). Dostáváme tak obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu pro neznámou funkci  $y$  proměnné  $x$ :

$$y'' + a^2 \sin(y) = 0. \quad (2.2)$$

Rovnici doplníme počátečními podmínkami v čase  $x_0$ :  $y(x_0) = y_0$ ,  $y'(x_0) = y_1$ , kde  $y_0$  je počáteční úhlová výchylka a  $y_1$  počáteční úhlová rychlost kyvadla.

V okolí  $y = 0$ , tj. pro malé hodnoty  $y$ , platí  $\sin(y) \approx y$ . Nahradíme-li  $\sin(y)$  neznámou  $y$  dostáváme lineární aproximaci rovnice (2.2) tvaru

$$y'' + a^2 y = 0. \quad (2.3)$$

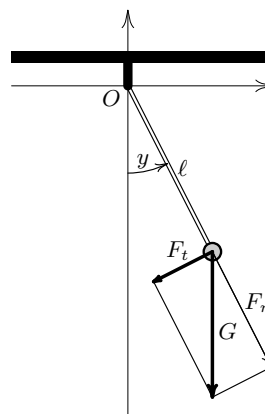
### Řešení linearizované úlohy

Budeme studovat obě úlohy. Začneme jednodušší linearizovanou rovnicí.

**Příklad 2.2.** Určete trajektorie řešení rovnice  $y'' + a^2 y = 0$ .

*Řešení:* Charakteristický polynom  $P(\lambda) = \lambda^2 + a^2$  lineární rovnice (2.3) má jediné řešení: dvojici komplexně sdružených kořenů  $\lambda_{1,2} = \pm i a$ . Rovnice má proto jediný singularní bod, který odpovídá konstantnímu nulovému řešení  $y(x) = 0$ . Protože rovnice je lineární, typ tohoto singularního bodu je *střed*.

Ověřme výsledek výpočtem. Obecné řešení je  $y(x) = c_1 \cos(ax) + c_2 \sin(ax)$ , kde konstanty  $c_1, c_2$  jsou určeny hodnotami počátečních podmínek  $y_0, y_1$ . Dokažme, že



Obrázek 2. Matematické kyvadlo.



trajektorie jsou elipsy. Derivace řešení je  $y'(x) = -c_1 a \sin(ax) + c_2 a \cos(ax)$ . Dosazením do výrazu elipsy  $a^2 y^2 + (y')^2$  po úpravě dostáváme

$$\frac{y^2}{c_1^2 + c_2^2} + \frac{(y')^2}{a^2(c_1^2 + c_2^2)} = 1,$$

což je rovnice elipsy s „vodorovnou“ poloosou  $\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$  a „svislou“ poloosou  $a\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ . Trajektorie v souřadnicovém systému  $y, y'$  jsou koncentrické elipsy se středem v počátku, viz Obr. 3. Singulární bod  $(0, 0)$  je proto *střed*.  $\square$

Trajektorie řešení lze určit také přímo integrací. Rovnici (2.3) vynásobíme  $y'$ . Získanou rovnost  $y' y'' + a^2 y y' = 0$  integrujeme na  $\frac{1}{2}(y')^2 + \frac{1}{2}a^2 y^2 = K$ .

Z počátečních podmínek  $y(0) = y_0, y'(0) = 0$  plyne  $K = \frac{1}{2}a^2 y_0^2$ . Rovnice dává

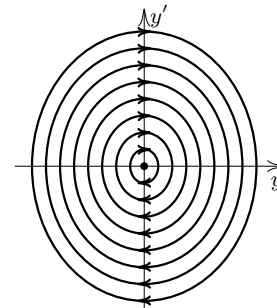
$$y' = \pm a \sqrt{y_0^2 - y^2}, \quad y \in \langle -y_0, y_0 \rangle.$$

Jak zjistit orientaci trajektorií? Podle Věty 1.2 trajektorie nad osou  $y$  jsou orientovány vpravo, pod osou vlevo a osu  $y$  protínají „kolmo“. Elipsy jsou proto orientované ve směru pohybu hodinových ručiček, tj. v záporném smyslu.

Všechna řešení jsou periodická. Jaká je perioda? Funkce kosinus má periodu  $2\pi$ , proto délka periody  $T$  podle rovnice  $aT = 2\pi$  je

$$T = 2\pi/a = 2\pi\sqrt{\ell/g}. \quad (2.4)$$

Délka periody tedy nezávisí na rozkmitu, roste s odmocninou délky kyvadla  $\ell$ , tj. čím delší je kyvadlo, tím kmitá pomaleji, a klesá s odmocninou gravitační konstanty  $g$ , na Měsíci s menší gravitační konstantou  $g$  stejné kyvadlo kmitá pomaleji než na Zemi. Perioda  $T$  (kyv tam a zpět) kyvadla dlouhého  $\ell = 1\text{m}$  na rovníku Země, kde  $g = 9,807\text{ m s}^{-2}$ , je  $T = 2\pi\sqrt{1/9,807} = 2,006$  sekundy, zatímco na Měsíci, kde  $g = 1,62\text{ m s}^{-2}$ , je perioda  $T = 4,94$  sekundy.



**Obrázek 3.** Trajektorie linearizované rovnice kyvadla pro  $a = 1,2$ .

### Nelineární rovnice matematického kyvadla

**Příklad 2.3.** Určete trajektorie řešení nelineární rovnice  $y'' + a^2 \sin(y) = 0$ .

*Řešení:* Určeme singulární body. Jsou to řešení rovnice  $f(y, 0) \equiv a^2 \sin(y) = 0$ , která má řešení  $y^* = n\pi$ , pro celá čísla  $n$ , singulární body jsou  $\mathbf{y}^* = (n\pi, 0)$ . Příslušný charakteristický polynom je  $P(\lambda) = \lambda^2 + a^2 \cos(y^*)$ .

Pro liché  $n = 2k + 1$  polynom  $P(\lambda) = \lambda^2 - a^2$  má dva reálné kořeny  $\lambda_{1,2} = \pm a$  s opačnými znaménky, singulární bod  $\mathbf{y}^* = (2k\pi + \pi, 0)$  je podle Věty 1.5 *sedlo*.

Pro sudé  $n = 2k \in \mathbb{Z}$  polynom  $P(\lambda) = \lambda^2 + a^2$  má dva komplexně sdružené kořeny  $\lambda_{1,2} = \pm i a$ . Typ singulárního bodu  $\mathbf{y}^* = (2k\pi, 0)$  určíme výpočtem a charakterizací jednotlivých typů trajektorií, protože v nelineárním případě singulární bod nemusí být *střed*. Rovnici  $y'' + a^2 \sin(y)$  vynásobíme  $y'$ , čímž získáme rovnici

$y'y'' + a^2 \sin(y)y' = 0$ . Integrace dává rovnost

$$\frac{1}{2}(y')^2 - a^2 \cos(y) = K. \quad (2.5)$$

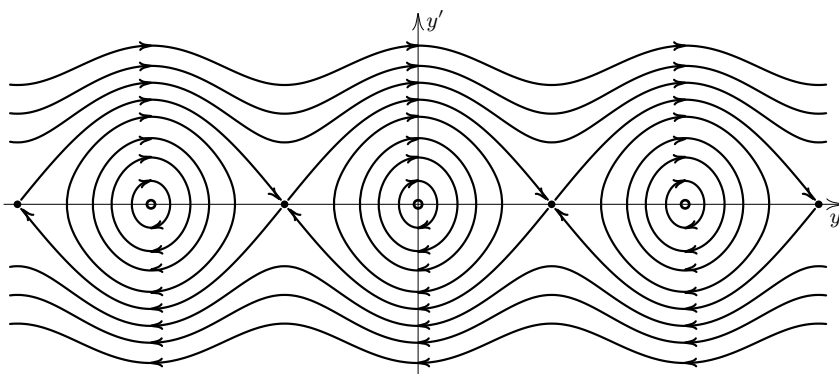
Určeme trajektorie řešení. Z rovnice (2.5) plyne  $|y'| = \sqrt{2(K + a^2 \cos y)}$ . Odmocnina na pravé straně je definována pro

$$K + a^2 \cos y \geq 0. \quad (2.6)$$

Protože funkce kosinus nabývá hodnoty z intervalu  $\langle -1, 1 \rangle$ , rozlišíme případy:

- Jestliže  $K = -a^2$ , potom z (2.6) plyne  $\cos(y) = 1$ , tedy  $y = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  a  $y' = 0$ . Dostáváme tak spočetně mnoho singulárních bodů  $(y, y') = (2k\pi, 0)$  pro  $k \in \mathbb{Z}$ . Jsou to situace, kdy kyvadlo je v klidu ve stabilní dolní poloze.
- Jestliže  $K \in (-a^2, a^2)$ , potom (2.6) platí v základní periodě  $(-\pi, \pi)$  pro hodnoty  $y \in \langle -y_0, y_0 \rangle$ , kde  $y_0 = \arccos(-K/a^2) > 0$ . Jsou to případy, kdy kyvadlo z krajní polohy  $y = y_0$  ( $|y_0| < \pi$ ) přechází do opačné polohy  $y = -y_0$  a pak obráceně. Analogická situace je v intervalech  $y \in (2k\pi - \pi, 2k\pi + \pi)$ .
- Jestliže  $K = a^2$  a přitom  $y' = 0$ , potom pro  $y = (2k + 1)\pi$  dostaneme singulární body, kdy kyvadlo je opět v klidu ale v horní nestabilní poloze.
- Jestliže  $K = a^2$  a  $y' \neq 0$ , potom v základní periodě  $y$  probíhá interval  $(-\pi, \pi)$ . Je to situace, kdy kyvadlo se z limitní polohy  $\pi$  v čase  $x \rightarrow -\infty$  pohybuje v záporném směru do polohy  $y \rightarrow \pi$  v čase  $x \rightarrow \infty$ , nebo obráceně: z polohy  $y \rightarrow -\pi$  do polohy  $y = \pi$  v kladném směru. Analogická situace je v intervalech  $y \in (2k\pi - \pi, 2k\pi + \pi)$ .
- Jestliže  $K > a^2$ , potom  $K + a^2 \cos y$  je kladné pro všechna  $y \in \mathbb{R}$  a kyvadlo se točí stále v kladném směru nebo stále v záporném směru.

Jaká je klasifikace singulárních bodů? Podle fázového portréту a definice, singulární body  $(2k\pi, 0)$  – dolní stabilní polohy kyvadla – jsou body typu *střed* a body  $(2k\pi + \pi, 0)$  – horní nestabilní polohy – mají typ *sedlo*, viz Obr.4, což je v souladu s analýzou pomocí charakteristického polynomu  $P(\lambda)$ .  $\square$



**Obrázek 4.** Trajektorie nelineární rovnice kyvadla s  $a = 1, 2$ , singulární body jsou *střed*y a *sedla*.

*Poznámka 2.4.*

- (a) Rovnice (2.5) je (až na násobek hmotnosti  $m$ ) zákon zachování energie. Kinetická energie bodu o hmotnosti  $m$  pohybující se rychlostí  $v = \ell y'$  je  $E_{\text{kin}}(x) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\ell y')^2$ . Potenciální energie bodu o hmotnosti  $m$  v gravitačním poli ve výšce  $h = -\ell \cos(y)$  je  $E_{\text{pot}} = mgh = -mg\ell \cos(y)$ . Zákon zachování mechanické energie tak lze zapsat ve tvaru

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}m\ell^2(y')^2 - mg\ell \cos(y) = Km = \text{konst.}$$

- (b) Linearizovaná rovnice (2.3) je aproximací nelineární rovnice (2.2) v okolí bodu  $\mathbf{y} = (0, 0)$ . Při zvětšování rozkmitu  $y_0$  se chyba zvětšuje, situace (c)–(e) už linearizovaná rovnice nedovede popsat.
- (c) Fyzické kyvadlo vede na stejnou rovnici. Na těleso kyvadla o objemu  $V$  v jeho těžišti  $T$  působí stejná gravitační síla  $G = mg$ , kde  $m$  je hmotnost celého kyvadla, její tečná složka je opět  $F_t = -mg \sin(y)$ . Protože body kyvadla mají různou vzdálenost od závěsu, Newtonův zákon  $F = ma$  pro dráhové zrychlení  $a$  nahradíme vztahem  $M = J\alpha$  mezi momentem síly  $M = F_t \ell$ , kde  $\ell$  je rameno síly, tj. vzdálenost těžiště  $T$  od osy otáčení, a úhlovým zrychlením  $\alpha = y''$ , kde  $J$  je moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose otáčení. Moment setrvačnosti lze spočítat integrací součinu hustoty  $\rho(x)$  a čtverce vzdálenosti bodu kyvadla od osy otáčení. Při popisu kyvadla o objemu  $V \subset \mathbb{R}^3$  v kartézských souřadnicích  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  otáčející se okolo osy  $x_1$  lze moment setrvačnosti spočítat integrálem

$$J = \int_V (x_2^2 + x_3^2) \rho(x) \, dx.$$

Dostáváme rovnici  $Jy'' + mg\ell \sin(y) = 0$ . Označení  $a^2 = mg\ell/J$  vede na stejnou rovnici  $y'' + a^2 \sin(y) = 0$ .

- (d) Perioda kyvů (čas kyvu tam a zpět) v lineárním modelu je  $T = 2\pi/a$  a nezávisí na rozkmitu  $y_0$ . Protože pro malé kladné  $y$  je  $\sin y < y$ , tj. síla způsobující pohyb kyvadla je menší než v linearizované rovnici, zrychlení kyvadla je (v absolutní hodnotě) menší. Kyvadlo se proto kýve pomaleji, délka periody  $T$  kyvadla se s rozkmitem zvětšuje.
- (e) Jaká je perioda kyvu  $T$  v nelineárním případě? Naznačme metodu výpočtu. Při rozkmitu, tj. maximální výchylce  $y_0$ , je rychlost  $y' = 0$ . Z rovnice (2.5) dostaneme  $K = -a^2 \cos(y_0)$ . Pro rostoucí část kyvu  $y' \geq 0$  z rovnice (2.5) po dosazení za  $K$  plyne  $y' = a\sqrt{2(\cos(y) - \cos(y_0))}$ .

Zaměňme roli závislé a nezávislé proměnné: místo  $y(x)$  uvažujme neznámou  $x(y)$ . Derivace vztahu  $y(x(y)) = y$  podle  $y$  dává  $y'(x(y))x'(y) = 1$ , odkud dostáváme  $x'(y) = 1/y'(x(y))$ . Inverzní neznámá  $x(y)$  proto splňuje

$$\frac{dx}{dy}(y) = \frac{1}{a\sqrt{2(\cos(y) - \cos(y_0))}}.$$

Perioda kyvu kyvadla  $T$  je čtyřnásobek času mezi polohou  $y = 0$  a rozkmitem  $y_0 \in (0, \pi)$ . Získáme ji integrací

$$T = 4 \frac{1}{a\sqrt{2}} \int_0^{y_0} \frac{dy}{\sqrt{\cos(y) - \cos(y_0)}} = 4 \left( \frac{\ell}{2g} \right)^{1/2} \int_0^{y_0} \frac{dy}{\sqrt{\cos(y) - \cos(y_0)}}.$$

Jde o tzv. eliptický integrál, primitivní funkci nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí. Pro zvětšující se počáteční výchylku se perioda kyvu prodlužuje, pro  $y_0 \rightarrow \pi -$  čas  $T$  roste do nekonečna.

### Tlumené kmity kyvadla

Uvažujme kyvadlo pohybující se v prostředí, které brzdí pohyb kyvadla, např. kyvadlo ponořené v kapalině. Tlumení pohyb brzdí, tlumící síla  $T_t$  je orientována proti směru pohybu. Předpokládejme, že tlumící síla je přímo úměrná rychlosti  $y'(x)$  pohybu, tj.  $T_t(x) = -b y'(x)$ , kde  $b$  je kladná konstanta. Dostáváme tak

$$y'' = -a^2 \sin(y) - b y'. \quad (2.7)$$

**Příklad 2.5.** Určete typ singulárních bodů rovnice (2.7) kyvadla s tlumením.

*Řešení:* Rovnice  $f(y, 0) = -\sin(y) = 0$  dává opět singulární body  $\mathbf{y}_n^* = (y_n^*, 0)$ , kde  $y_n^* = n\pi$  pro celá  $n \in \mathbb{Z}$  jako v případě rovnice bez tlumení. Příslušný charakteristický polynom podle (1.7) je

$$P(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + a^2 \cos(y^*).$$

Rozlišíme základní dva případy:  $n$  sudé a  $n$  liché, které vedou na kvadratický polynom se záporným a kladným diskriminantem  $D = b^2 - 4a^2 \cos(y^*)$ .

**Případ  $n = 2k + 1$  liché.** Singulární bod  $\mathbf{y}^* = (2k\pi + \pi, 0)$  odpovídá situaci, kdy kyvadlo „stojí“ v labilní poloze nad osou otáčení. Protože  $\cos(y^*) = -1$ , charakteristický polynom  $P(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda - a^2$  má kladný diskriminant  $D = b^2 + 4a^2$  a dva reálné kořeny  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-b \pm \sqrt{D})$ . Protože  $\sqrt{D} > b$ , kořeny mají opačná znaménka a singulární bod je opět *sedlo* jako v případě kmitů bez tlumení.

**Případ  $n = 2k$  sudé.** Singulární bod  $\mathbf{y}^* = (2k\pi, 0)$  odpovídá situaci, kdy kyvadlo „visí“ ve stabilní poloze pod osou otáčení. Protože  $\cos(y^*) = 1$ , charakteristický polynom  $P(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + a^2$  má diskriminant  $D = b^2 - 4a^2$ . V závislosti na velikosti tlumení určeném parametrem  $b$  rozlišujeme tři případy podle znaménka diskriminantu  $D$ :

(a)  $D = b^2 - 4a^2$  je záporný, tj.  $b < 2a$ . Potom charakteristický polynom má dvojici komplexně sdružených kořenů  $\lambda_{1,2} = -b/2 \pm i\nu$ , kde  $\nu = \sqrt{a^2 - b^2/4}$ , se zápornou reálnou částí. Podle Věty 1.5 singulární bod je *atraktivní ohnisko*. V okolí singulárního bodu trajektorie obecného řešení linearizované rovnice

$$y(x) = 2k\pi + [c_1 \cos(\nu x) + c_2 \sin(\nu x)] e^{-bx/2}$$

mají tvar spirál, které se blíží k bodu  $\mathbf{y}^* = (n\pi, 0)$ , přičemž nekonečně mnohokrát obíhají bod  $\mathbf{y}^*$  ve směru pohybu hodinových ručiček, viz Obr.5.

Hodnota  $\nu$ , která určuje dobu oscilací pomocí (2.4), je menší než  $a$ , a proto perioda tlumeného kyvu  $T_b = 2\pi/\nu$  je delší než v netlumeném případě. Pro  $b \rightarrow 0+$

platí  $\nu \rightarrow a$  a perioda  $T_b$  klesá k periodě  $T$  netlumeného kmitu. Tato situace se nazývá *podkritické tlumení*, také *podtlumené* nebo *kvaziperiodické* kmitání.

(b) Diskriminant  $D = b^2 - 4a^2$  je nulový, tj.  $b = 2a$ . Potom charakteristický polynom má dvojnásobný záporný kořen  $\lambda_{1,2} = -a$  a podle Věty 1.5 singulární bod je *atraktivní uzel*. V okolí singulárního bodu  $\mathbf{y}^* = (2k\pi, 0)$  je obecné řešení linearizované rovnice

$$y(x) = 2k\pi + (c_1 + c_2x)e^{-ax}.$$

Trajektorie řešení  $y(x)$  s  $c_2 = 0$  jsou polopřímky  $y' = 2k\pi - ay$  orientované pro  $x \rightarrow \infty$  k singulárnímu bodu. Jak vypadají ostatní trajektorie v okolí singulárního bodu? Trajektorie nad přímkou  $y = 2k\pi - ax$  nad osou  $y$  jdou JV směrem, osu  $y$  protínají J směrem a stáčí se doprava, k singulárnímu bodu se blíží ve směru  $(-1, a)$ . Trajektorie pod přímkou  $y = 2k\pi - ax$  pod osou  $y$  jdou SZ směrem, osu  $y$  protínají S směrem, stáčí se doprava s k singulárnímu bodu přicházejí ve směru se směrnici  $(1, -a)$ , viz Obr. 6. Situace se nazývá *kritické tlumení*.

(c)  $D = b^2 - 4a^2 > 0$ , tj.  $b > 2a$ . Potom charakteristický polynom má dva různé záporné kořeny  $\lambda_{1,2} = -b/2 \pm \nu$ , kde  $\nu = \sqrt{D}/2 = \sqrt{b^2/4 - a^2}$ . Podle Věty 1.5 singulární bod je opět *atraktivní uzel*. V okolí bodu  $\mathbf{y}^* = (2k\pi, 0)$  máme

$$y(x) = 2k\pi + c_1 e^{(-b/2+\nu)x} + c_2 e^{(-b/2-\nu)x},$$

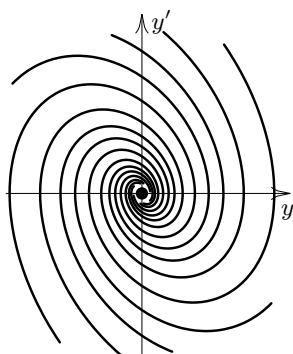
kteří dává dvě dvojice trajektorií tvaru polopřímek se směrnici  $-b/2 \pm \nu$ . Ostatní trajektorie se blíží k singulárnímu řešení s tečným vektorem  $\pm(1, -b/2+\nu)$ . Situace se nazývá *nadkritické tlumení*.  $\square$

*Poznámka 2.6.* Uvažujme nyní pohyb kyvadla s počátečními podmínkami blízkými singulárním bodům  $(2k\pi, 0)$ . Co plyne z výše odvozených vzorců?

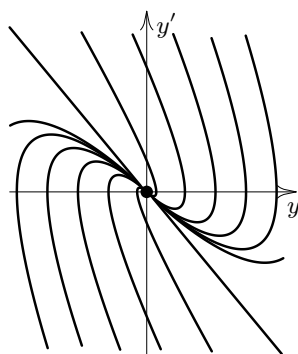
- Ve všech případech s časem  $x \rightarrow \infty$  výchylka kyvadla konverguje k  $2k\pi$ . Ale tato limita bude dosažena až v „nekonečném čase“. Jaký je rozdíl mezi jednotlivými případy? V podtlumeném případě kyvadlo prochází nulovou polohou nekonečně mnohokrát s periodou trochu delší než v netlumeném případě. V případě kritického i nadkritického tlumení kyvadlo už přejde limitní polohou  $2k\pi$  nejvýše jednou a potom už jen klesá k ní.
- Ve kterém případě tlumení klesá výchylka nejrychleji? Poznáme to podle exponenciální části řešení, tj. podle exponentu  $\mu$  exponenciálního členu  $e^{-\mu x}$  řešení. V podkritickém případě je  $\mu = b/2$ , přičemž  $\mu < a$ . V kritickém případě je  $\mu = b/2 = a$ . V nadkritickém případě je řešení součtem dvou exponenciálních funkcí kromě případu  $c_i = 0$ . Rychlost určuje k nule pomaleji jdoucí exponenciála  $e^{-\mu x}$  s  $\mu = b/2 - \sqrt{b^2/4 - a^2}$ , což je pomalejší exponenciální funkce, než v případě kritického tlumení. Je to překvapivý fakt, že zvýšení tlumící síly nad kritickou hodnotu tlumení kmitů zpomalí.
- Porovnejme konkrétní příklady s konstantou  $a = 1.2$  (stejnou jako v netlumeném případě, Příklad 2.2) a různým stupněm tlumení  $\alpha = b/a$ : s nulovým  $\alpha = 0$ , podkritickým  $\alpha < 2$ , kritickým  $\alpha = 2$  a nadkritickým  $\alpha > 2$  stupněm tlumením  $\alpha$  a sledujme rychlost kmitání a amplitudu kmitů.

- *Netlumené kmity:*  $\alpha = 0$ ,  $b = 0$ . Diskriminant  $D = -4a^2 = -2,4^2$ . Perioda malých kmitů je  $T_0 = 2\pi/a = 2\pi/1,2 = 5,236$ , amplituda kmitů se nemění.
  - *Podtlumené kmity:*  $\alpha = 0,56$ ,  $b = \alpha a = 0,672$ . Diskriminant má hodnotu  $D = b^2 - 4a^2 = -2,304^2$ ,  $\lambda_{1,2} = -0,336 \pm i1,152$ . Perioda malých kmitů je  $T = 2\pi/\nu = 2\pi/1,152 = 5,454$ . Amplituda oscilací řešení klesá jako  $e^{-0,336x}$ , viz Obr. 5.
  - *Kritické tlumení:*  $\alpha = 2$ ,  $b = \alpha a = 2,4$ . Diskriminant je  $D = 0$ , kořeny  $\lambda_{1,2} = -1,2$ . Výchylka klesá jako  $e^{-1,2x}$ , viz Obr. 6.
  - *Nadkritické tlumení:*  $\alpha = 2,5$ ,  $b = \alpha a = 3$ . Diskriminant  $D = b^2 - 4a^2 = 1,8^2$ ,  $\lambda_1 = -0,6$ ,  $\lambda_2 = -2,4$ . Výchylka klesá jako  $e^{-0,6x}$ , viz Obr. 7. Všimněte si dva páry polopřímek: jedné strmější – to je to výjimečné „nejrychlejší“ tlumení, a druhé pozvolnější, ke které se všech ostatní „zakřivené“ trajektorie blíží – ty znázorňují to nadkritické tlumení, které je „pomalejší“ než menší tlumení kritické.
- (d) Obrázky 5–7 zobrazují trajektorie linearizované rovnice, která modeluje přibližné trajektorie nelineární rovnice v okolí singulárního bodu. Všechny trajektorie jsou orientovány do počátku, orientace však není vyznačena.
- (e) V celém fázovém prostoru trajektorie úplných řešení nelineární rovnice s tlumením začínající vlevo nad osou  $y$  jdou doprava, mají tvar „vln“ z Obr. 4, ale klesajících do okamžiku, kdy protnou osu  $y$ , a začnou se blížit k singulárnímu bodu jedním ze způsobů popsaným v Příkladě 2.5 body (a)–(c).

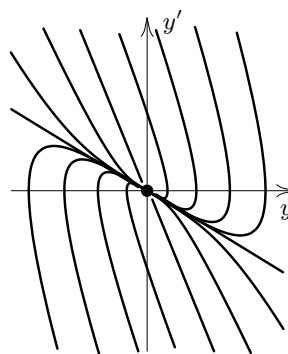
Trajektorie začínajících vpravo pod osou  $y$  jdou zprava doleva ve tvaru rostoucích „vln“ z Obr. 4 až do okamžiku, kdy protnou osu  $y$ . Tlumené kyvadlo tedy rotuje v kladném nebo záporném směru až do okamžiku, kdy už horní polohu nepřekoná a začne se „kývat tam a zpět“ se zmenšujícím se rozkmitem, jeho trajektorie obíhá singulární bod. V případě kritického a nadkritického tlumení trajektorie singulární bod „neobíhá“.



Obrázek 5. Podkritické tlumení ( $a = 1,2$ ,  $b = 0,672$ ).



Obrázek 6. Kritické tlumení ( $a = 1,2$ ,  $b = 2,4$ ).



Obrázek 7. Nadkritické tlumení ( $a = 1,2$ ,  $b = 3$ ).

## 3. PŘÍKLADY Z POPULAČNÍ BIOLOGIE

Spojité matematické modely v biologii, popisující vývoj populací vedou, viz [4], na rovnice a soustavy obyčejných diferenciálních rovnic. Pokud se vnější podmínky v čase nemění, rovnice i soustavy jsou autonomní. Uvedeme několik příkladů.

Naproti předchozímu fyzikálnímu jevu matematického a fyzického kyvadla, který je ve své idealizované podobě zcela přesný, modely v biologii přinášejí řadu aproximací: jedince tvořící populaci považujeme za identické: nerozlišujeme jejich věk, pohlaví, velikost ani jiné individuální charakteristiky. Jejich počet, což je ve skutečnosti nezáporné celé číslo, nahrazujeme nezáporným reálným číslem, v reálné populaci přírůstek nastává s jistým časovým zpožděním, atd.

Přes tato a další zjednodušení, modely dávají zajímavé výsledky, které vysvětlují některé skutečnosti. Omezíme se jen na deterministické modely.

**Modely dynamiky jedné populace**

Místo označení užívaného v matematické biologii zachováme naše označení z ODR z předchozích částí s nezávislou proměnnou  $x$ , která hraje roli času, a závislou proměnnou  $y$ , která popisuje počet jedinců v čase  $x$ . Bude to nezáporná reálná funkce  $y(x)$ . Vývoj počtu populace bude záviset jen na velikosti populace a nebude záviset přímo na času  $x$ . Obecný model tak vede na autonomní diferenciální rovnici prvního řádu

$$y' = f(y) = \mu(y)y, \quad y(0) = y_0 \geq 0$$

s *parametrem růstu*  $\mu(y)$ , který udává počet  $\mu\Delta x$  nově vzniklých jedinců na každého jedince za časový úsek  $\Delta x$ . V nejstarším *Malthusově modelu*  $y' = ay$  je parametr růstu konstantní  $\mu(y) = a$ ; parametr  $a$  je rozdíl *porodnosti* a *úmrtnosti*, tj. rozdíl počtu narozených a zemřelých vztažený na jednoho jedince a jednotku času. Úloha má jediné řešení  $y(x) = y_0 e^{ax}$ . Podle tohoto modelu pro kladné  $a$  počet jedinců roste exponenciálně do nekonečna.

Model odpovídá skutečnosti jen v situaci, kdy počet jedinců je malý a zdroje potravy jsou dostatečné. Kromě nulového řešení všechna řešení jsou rostoucí, nulové řešení  $y(x) = 0$  je tedy *neatraktivní uzel*. Doplňme, že pro  $a = 0$  je počet jedinců konstantní a pro  $a < 0$  populace vymírá, nulové řešení je *atraktivní uzel*.

Protože v reálném světě zdroje potravy jsou omezené, při zvětšování množství jedinců  $y$  nastává snižování parametru růstu. Lineární závislost dává  $\mu(y) = a - by$ . K parametru růstu  $a$  jsme přidali parametr  $b$  zvaný *zpomalení růstu*. Rovnice

$$y' = (a - by)y$$

s kladnými parametry  $a, b$  vedle řešení  $y(x) = 0$ , které dává *neatraktivní uzel*, má také konstantní řešení  $y(x) = y^* = a/b$ . Je to „rovnovážný“ počet jedinců: pro počáteční podmínku  $y(0) < y^*$  řešení  $y(x)$  stoupá k  $y^*$  a pro  $y(0) > y^*$  řešení  $y(x)$  klesá k  $y^*$ . Trajektorie singulárního řešení  $y(x) = y^*$  je *atraktivní uzel*, protože všechna nenulová řešení se blíží k rovnovážnému a „udržitelnému“ řešení  $y^*$ .

### Modely dvou populací

Uvažujme dvě různé populace obývající stejný prostor. Počet jejich jedinců v čase  $x$  budou popisovat dvě nezáporné reálné funkce  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ , přičemž vývoj jejich počtu bude záviset jen na okamžitém počtu jedinců obou populací. Model vede na autonomní soustavu dvou obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu

$$y_1' = f_1(y_1, y_2) = \mu_1(y_1, y_2)y_1, \quad y_2' = f_2(y_1, y_2) = \mu_2(y_1, y_2)y_2$$

se spojitými funkcemi  $\mu_1(y_1, y_2)$ ,  $\mu_2(y_1, y_2)$ . Soustavu doplníme počátečními podmínkami  $y_1(x_0) = \gamma_1$ ,  $y_2(x_0) = \gamma_2$ , kde  $\gamma_i \geq 0$ , obvykle předpokládáme, že  $\gamma_i$  jsou kladné. Pro jednoduchost místo obecných spojitých funkcí  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  se obvykle uvažují jednoduché lineární závislosti s konstantními parametry, které popisují jednotlivé vlivy. K rovnicím  $y_i' = (a_i - b_i y_i)y_i$  přidáme členy  $c_i y_1 y_2$  popisující vliv druhé populace:

$$y_1' = (a_1 - b_1 y_1 + c_1 y_2)y_1, \quad y_2' = (a_2 - b_2 y_2 + c_2 y_1)y_2. \quad (3.1)$$

Pro  $c_1 > 0$  populace  $y_2$  zvyšuje růst populace  $y_1$ , zatímco pro  $c_1 < 0$  populace  $y_2$  snižuje růst populace  $y_1$ . Význam parametru  $c_2$  je analogický.

Podle znamének parametrů  $c_1$ ,  $c_2$  rozlišíme tři základní situace:

- (A) oba parametry  $c_1$ ,  $c_2$  jsou kladné, jde o případ *mutualismu*, také *symbiózy*, kdy se obě populace navzájem podporují,
- (B) oba parametry  $c_1$ ,  $c_2$  jsou záporné, jde o *konkurenci*, kdy populace mezi sebou o potravu soutěží,
- (C) parametry  $c_1$ ,  $c_2$  mají opačná znaménka:  $c_1 < 0$ ,  $c_2 > 0$  jde o *predaci*, kdy *predátor*  $y_2$  se živí *kořistí*  $y_1$ . V případě  $c_1 > 0$ ,  $c_2 < 0$  jde jen o výměnu rolí.

### Pomocné výsledky

Při zkoumání trajektorií budeme využívat pojem *nulkliny*, viz [4]. V našem případě dvou proměnných *první nulklina* je množina bodů ve fázovém prostoru, ve kterých je první složka tečného vektoru  $(y_1', y_2')$  řešení nulová, tj.  $y_1' = 0$ . Jsou to tedy body fázového prostoru splňující  $f_1(y_1, y_2) = 0$ . V těchto bodech je tečna řešení rovnoběžná s osou  $y_2$ . Analogicky *druhou nulklinu* tvoří body fázového prostoru, ve kterých je druhá složka tečného vektoru nulová, tj.  $y_2' = 0$ . Jsou to body, kde  $f_2(y_1, y_2) = 0$ , v těchto bodech má tečný vektor směr osy  $y_1$ . Singulární body jsou průsečíky nulklin prvního a druhého druhu.

Typ singulárního bodu nelineární soustavy diferenciálních rovnic určíme pomocí kořenů charakteristického polynomu příslušné *linearizované soustavy* v tomto bodě vztahy (1.4)–(1.5). Pokud tyto kořeny mají nenulovou reálnou část, jsou nenulové i v okolí a řešení nelineární a linearizované rovnice mají stejný charakter.

Charakteristický polynom (1.6) má tvar

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + \det(A), \quad (3.2)$$

kde  $\text{Tr}(A) = A_{11} + A_{22}$  je *stopa* matice  $A$  a  $\det(A) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$  je *determinant* matice  $A = (A_{ij})$  parciálních derivací  $(\partial f_i / \partial y_j)$ .



Teorie kvadratických rovnic dává následující tvrzení, které nám umožní určit typ kořenů reálného polynomu (3.2) a pomocí Věty 1.5 typ singulárního bodu.

**Věta 3.1** (Kořeny kvadratického polynomu). *Uvažujme kvadratický polynom  $P(\lambda) = \lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + \det(A)$  a jeho diskriminant*

$$D = (\text{Tr}(A))^2 - 4\det(A) = (A_{11} - A_{22})^2 + 4A_{12}A_{21}. \quad (3.3)$$

Potom platí:

- (a) *Kořeny  $\lambda_1, \lambda_2$  splňují rovnosti  $\text{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$  a  $\det(A) = \lambda_1\lambda_2$ .*
- (b) *Pokud  $\det(A) < 0$ , diskriminant  $D$  je kladný a polynom má dva reálné nenulové kořeny  $\lambda_1, \lambda_2$  s opačnými znaménky.*
- (c) *Pokud  $\det(A) \geq 0$  a diskriminant  $D \geq 0$ , polynom má dva reálné kořeny ne nutně různé. Jestliže  $\text{Tr}(A) > 0$ , kořeny jsou kladné. Jestliže  $\text{Tr}(A) < 0$ , kořeny jsou záporné.*
- (d) *Pokud  $\det(A) \geq 0$  a  $D < 0$ , polynom má dva komplexně sdružené kořeny.*

Zkoumejme soustavu rovnic (3.1). Předpokládejme, že parametry  $a_i, b_i, c_i$  jsou nenulové. Rovnice  $f_1(y_1, y_2) \equiv y_1(a_1 - b_1y_1 + c_1y_2) = 0$  dává dvě první nulkliny

$$y_1 = 0, \quad a_1 - b_1y_1 + c_1y_2 = 0.$$

Je to osa  $y_2$  a přímka  $p_2$  s ní různoběžná.

Rovnice  $f_2(y_1, y_2) \equiv y_2(a_2 - b_2y_2 + c_2y_1) = 0$  dává dvě druhé nulkliny

$$y_2 = 0, \quad a_2 - b_2y_2 + c_2y_1 = 0.$$

Je to osa  $y_1$  a přímka  $p_1$  s ní různoběžná. Průsečíky prvních nulklin s druhými jsou singulární body. Jsou to vždy tři body  $S_0 = (0, 0)$ ,  $S_1 = (a_1/b_1, 0)$ ,  $S_2 = (0, a_2/b_2)$ . Pokud „šikmé“ nulkliny nejsou rovnoběžné, tj.  $d = b_1b_2 - c_1c_2 \neq 0$ , jejich průsečík je čtvrtý singulární bod, který označíme  $S_{12}$ . Jednoduchý výpočet dává

$$S_{12} = (y_1^*, y_2^*) = \left( \frac{a_1b_2 + a_2c_1}{b_1b_2 - c_1c_2}, \frac{a_2b_1 + a_1c_2}{b_1b_2 - c_1c_2} \right) \equiv \left( \frac{B_1}{d}, \frac{B_2}{d} \right), \quad (3.4)$$

kde

$$d = b_1b_2 - c_1c_2, \quad B_1 = a_1b_2 + a_2c_1, \quad B_2 = a_2b_1 + a_1c_2.$$

Záleží ještě na tom, zda průsečík  $S_{12}$  leží v prvním kvadrantu.

Vyčíslíme nyní parametry linearizované soustavy v singulárních bodech. Matice  $A$  koeficientů (1.5) linearizované soustavy v případě (1.4) má složky

$$A_{11} = a_1 - 2b_1y_1^* + c_1y_2^*, \quad A_{12} = c_1y_1^*, \quad A_{21} = c_2y_2^*, \quad A_{22} = a_2 + c_2y_1^* - 2b_2y_2^*.$$

V bodě  $S_0 = (0, 0)$  platí  $A_{11} = a_1$ ,  $A_{12} = A_{21} = 0$ ,  $A_{22} = a_2$ . Charakteristický polynom

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (a_1 + a_2)\lambda + a_1a_2 \quad (3.5)$$

má dva ne nutně různé reálné kořeny  $a_1, a_2$ . Podle Věty 1.5 je  $S_0$  *neatraktivní uzel*.

V bodě  $S_1 = (a_1/b_1, 0)$  čísla  $A_{ij}$  jsou  $A_{11} = -a_1$ ,  $A_{12} = a_1c_1/b_1$ ,  $A_{21} = 0$ ,  $A_{22} = a_2 + a_1c_2/b_1$ . Charakteristický polynom  $P(\lambda)$  a jeho diskriminant  $D$  je

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \left( \frac{B_2}{b_1} - a_1 \right) \lambda - a_1 \frac{B_2}{b_1}, \quad D = \left( \frac{B_2}{b_1} + a_1 \right)^2. \quad (3.6)$$

Podobně v bodě  $S_2 = (0, a_2/b_2)$  je  $A_{11} = a_1 + a_2c_1/b_2$ ,  $A_{12} = 0$ ,  $A_{21} = a_2c_2/b_2$ ,  $A_{22} = -a_2$  a charakteristický polynom  $P(\lambda)$  a jeho diskriminant  $D$  vyjde

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \left(\frac{B_1}{b_2} - a_2\right)\lambda - a_2\frac{B_1}{b_2}, \quad D = \left(\frac{B_1}{b_2} + a_2\right)^2. \quad (3.7)$$

Pokud  $d = b_1b_2 - c_1c_2 \neq 0$ , existuje i čtvrtý singulární bod  $S_{12} = (B_1/d, B_2/d)$ . Spočítejme koeficienty matice  $A$  v tomto singulárním bodu

$$A_{11} = -\frac{b_1B_1}{d}, \quad A_{12} = \frac{c_1B_1}{d}, \quad A_{21} = \frac{c_2B_2}{d}, \quad A_{22} = -\frac{b_2B_2}{d}.$$

Koeficienty dávají charakteristický polynom  $P(\lambda)$  a jeho diskriminant  $D$

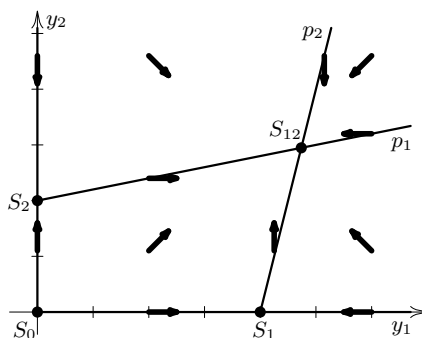
$$P(\lambda) = \lambda^2 + \frac{b_1B_1 + b_2B_2}{d}\lambda + \frac{B_1B_2}{d}, \quad D = \frac{(b_1B_1 - b_2B_2)^2}{d^2} + 4\frac{c_1c_2B_1B_2}{d^2}. \quad (3.8)$$

Proberme jednotlivé případy podle znamének  $c_1$ ,  $c_2$ , které určují situaci.

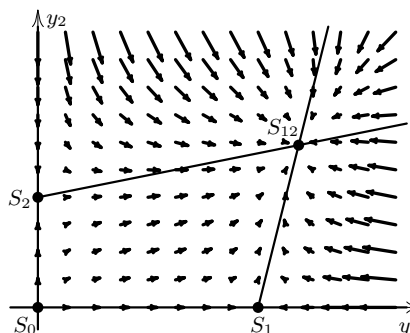
#### (A) Mutualismus, symbióza – kladné $c_1, c_2$

Nechť všechny parametry  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$  jsou kladné. Potom  $B_1, B_2$  jsou také kladné. Navíc předpokládejme, že  $d = b_1b_2 - c_1c_2$  je kladné. Kdyby  $d$  bylo záporné, „šikmé“ nulkliny by se neprotínaly v prvním kvadrantu a obě populace by v limitě rostly nade všechny meze, což by vedlo k destrukci prostředí a následnému vyhytnutí obou populací. Z předchozího víme, že první nulkliny  $y'_1 = 0$  jsou dvě přímky:  $y_1 = 0$ , tj. osa  $y_2$ , a přímka  $p_2: a_1 - b_1y_1 + c_1y_2 = 0$ , která vychází ze singulárního bodu  $S_1 = (a_1/b_1, 0)$  s kladnou směrnici  $b_1/c_1$ , viz Obr. 8.

V bodech prvního kvadrantu mezi polopřímkami  $y_2$  a  $p_2$  je hodnota funkce  $y'_1 = f_1(y_1, y_2)$  kladná, proto první složka  $y'_1$  tečného vektoru je kladná. V bodech vpravo od pravé nulkliny  $p_2$  je první složka tečného vektoru záporná.



**Obrázek 8.** Symbióza: nulkliny a singulární body ( $a_1 = 4$ ,  $b_1 = 1$ ,  $c_1 = 0,25$ ,  $a_2 = 2$ ,  $b_2 = 1$ ,  $c_2 = 0,2$ ).



**Obrázek 9.** Symbióza: tečné vektory trajektorií ( $a_1 = 4$ ,  $b_1 = 1$ ,  $c_1 = 0,25$ ,  $a_2 = 2, b_2 = 1$ ,  $c_2 = 0,2$ ).

Analogicky vyšetříme druhé nulkliny  $y'_2 = 0$ . Jsou to opět dvě přímky:  $y_2 = 0$ , tj. osa  $y_1$  a přímka  $p_1: a_2 - b_2y_2 + c_2y_1 = 0$  vycházející ze bodu  $S_2 = (0, a_2/b_2)$  s kladnou směrnici  $c_2/b_2$ , viz Obr. 8. V bodech prvního kvadrantu mezi oběma

přímkami je hodnota  $y_2' = f_2(y_1, y_2)$  kladná, proto druhá složka tečného vektoru  $y_2'$  je kladná, a v bodech nad horní nulklínou je složka tečného vektoru záporná.

Protože  $d > 0$ , „šikmé“ nulklíny, přímky  $p_1, p_2$ , se protínají v prvním kvadrantu v bodě  $S_{12}$  a rozdělují tak první kvadrant na čtyři oblasti. Podle znamének složek tečného vektoru v Obr. 8 je zakreslena „orientace“ tečných vektorů, tj. ve kterém kvadrantu nebo na které poloose je tečný vektor, protože v jednotlivých oblastech a na nulklínách je tato orientace konstantní. V Obr. 9 jsou zakresleny skutečné tečné vektory. Podle Věty 1.5 a podsekcce *Pomocné výsledky* v souladu s Obr.8, 9 bod  $S_0$  je *neatraktivní uzel*, body  $S_1, S_2$  *sedla* a  $S_{12}$  *atraktivní uzel*.

Všimněte si efektu symbiózy: singulární bod  $S_{12}$  přitahuje všechna řešení (kromě poloos  $y_1, y_2$ ) a dává vyšší „rovnovážné hodnoty“ pro obě populace, než jsou rovnovážné hodnoty  $a_i/b_i$  u obou populací bez vzájemného vlivu. Tento stav je proto stabilní a „udržitelný“. Je to *atraktivní uzel*.

### (B) Konkurence — záporné $c_1, c_2$

Nechť všechny parametry  $a_1, a_2, b_1, b_2$  jsou kladné a parametry  $c_1, c_2$  záporné. Stejně jako v případě symbiózy první nulklíny  $y_1' = 0$  jsou dvě přímky:  $y_1 = 0$ , tj. osa  $y_2$ , a „šikmá“ přímka  $p_2: a_1 - b_1y_1 + c_1y_2 = 0$ , která vychází ze singulárního bodu  $S_1 = (a_1/b_1, 0)$  se zápornou směrnici  $b_1/c_1 < 0$ . Druhé nulklíny  $y_2' = 0$  jsou také dvě přímky:  $y_2 = 0$ , tj. osa  $y_1$  a „šikmá“ přímka  $p_1: a_2 - b_2y_2 + c_2y_1 = 0$ , která vychází ze singulárního bodu  $S_2 = (0, a_2/b_2)$  se zápornou směrnici  $c_2/b_2 < 0$ .

V případě konkurence se první nulklíny navíc protínají v prvním kvadrantu na kladné poloose  $y_2$  v průsečíku  $P_1 = (0, -a_1/c_1)$  a druhé nulklíny se protínají na kladné poloose  $y_1$  v bodě  $P_2 = (-a_2/c_2, 0)$ . Pozor, tyto průsečíky ovšem nejsou singulárními body, protínají se zde dvě první nebo dvě druhé nulklíny. Navíc, pokud koeficient  $d = b_1b_2 - c_1c_2$  je nenulový, šikmé nulklíny se protínají.

Jaké je pořadí bodů  $S_1$  a  $P_2$  na poloose  $y_1$ ? Jestliže  $B_2 = a_2b_1 + a_1c_2 > 0$ , potom  $a_2b_1 > -a_1c_2 > 0$ , odkud plyne  $-a_2/c_2 > a_1/b_1$ , tedy průsečík  $P_2$  leží vpravo za singulárním bodem  $S_1$ . V opačném případě  $B_2 < 0$  průsečík  $P_2$  leží vlevo před  $S_1$ . Podobně v případě  $B_1 = a_1b_2 + a_2c_1 > 0$  na poloose  $y_2$  průsečík  $P_1$  leží nad bodem  $S_2$ , pro  $B_1 < 0$  bod  $P_1$  leží pod bodem  $S_2$ . V případě  $B_1 = 0$  nebo  $B_2 = 0$  body  $P_1, S_2$  nebo  $P_2, S_1$  splývají.

Rozlišíme jednotlivé situace podle znamének parametrů  $B_1, B_2$ .

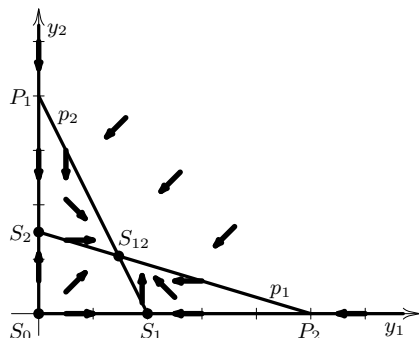
### (Ba) „Slabá konkurence“ – kladné $B_1, B_2$

V tomto případě na poloose  $y_1$  bod  $P_2$  leží za bodem  $S_1$  a na poloose  $y_2$  bod  $P_1$  leží nad bodem  $S_2$ , viz Obr. 10.

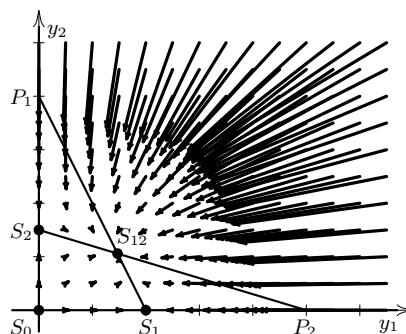
Jaké je  $d$ ? Z podmínky  $B_1 > 0$  plyne  $b_2/a_2 > -c_1/a_1 > 0$ , podmínka  $B_2 > 0$  dává  $b_1/a_1 > -c_2/a_2 > 0$ . Součin obou nerovností po vynásobení  $a_1a_2 > 0$  dává  $b_1b_2 > c_1c_2$ , proto  $d > 0$ . To potvrzuje skutečnost, že průsečík  $S_{12}$ , leží v prvním kvadrantu, jeho souřadnice, viz (3.4), jsou kladné.

Nulklíny protínající se v singulárním bodě  $S_{12}$  rozdělují první kvadrant na čtyři části. Podle znamének  $f_1(y_1, y_2), f_2(y_1, y_2)$  v nich vykreslíme „orientaci“ příslušných tečných vektorů  $(y_1', y_2')$ , viz Obr. 10.

Vyšetřeme singulární body. Podle Věty 1.5 a výsledků podsekcce *Pomocné výsledky* v souladu s Obr.10, 11 bod  $S_0$  je *neatraktivní uzel*. Podle (3.6) a (3.7) charakteristické polynomy v bodech  $S_1$  a  $S_2$  mají záporný absolutní člen  $\det(A)$ , mají proto reálné kořeny s opačnými znaménky a body  $S_1, S_2$  jsou tudíž *sedla*.



**Obrázek 10.** Slabá konkurence: nulkliny, singulární body ( $a_1 = 4, b_1 = 2, c_1 = -1, a_2 = 3, b_2 = 1, c_2 = -0,6$ ).



**Obrázek 11.** Slabá konkurence: tečné vektory ( $a_1 = 4, b_1 = 2, c_1 = -1, a_2 = 3, b_2 = 1, c_2 = -0,6$ ).

Ve čtvrtém singulárním bodě  $S_{12}$  podle (3.8) je  $\det(A) = B_1 B_2 / d$  kladný, diskriminant  $D$  kladný a stopa  $\text{Tr}(A)$  je záporná. Podle Věty 3.1 kořeny jsou záporné. Podle Věty 1.5 bod  $S_{12}$  je *atraktivní uzel*. Pro kontrolu vykresleme směrové vektory v Obr.11, potvrzují typy singulárních bodů.

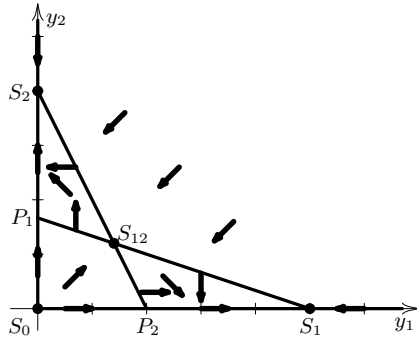
Jaké je hodnocení situace? Všechny trajektorie (kromě bodů na poloosách  $y_1$  a  $y_2$ ) směřují do atraktivního bodu  $S_{12}$ , který dává oběma druhům rovnovážný stabilní stav. Tento stav je sice menší než v případě samotné první nebo druhé populace, ale oba druhy přežívají.

### (Bb) „Silná konkurence“ – záporné $B_1, B_2$

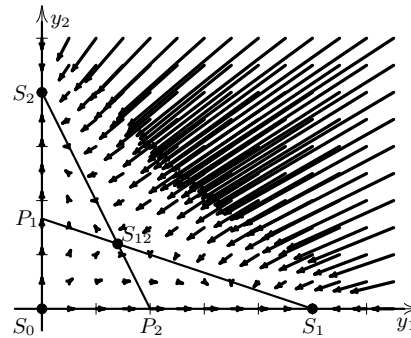
V tomto případě na poloose  $y_1$  bod  $P_2$  leží před bodem  $S_1$  a na poloose  $y_2$  bod  $P_1$  před bodem  $S_2$ , viz Obr. 12. Záporné  $B_1, B_2$  dávají  $0 < b_2/a_2 < -c_1/a_1, 0 < b_1/a_1 < -c_2/a_2$ , součin nerovností pak  $b_1 b_2 < c_1 c_2$ . Proto  $d < 0$  a v (3.4) souřadnice bodu  $S_{12}$  jsou kladné. Nulkliny se protínají v singulárním bodě  $S_{12}$  a rozdělují první kvadrant na čtyři části. Podle znamének  $f_1(y_1, y_2), f_2(y_1, y_2)$  je v Obr.12 vykreslena orientace příslušných tečných vektorů  $(y'_1, y'_2)$ .

Určíme typy singulárních bodů. Z Věty 1.5 s (3.5) plyne, že bod  $S_0$  je *neatraktivní uzel*. Podle (3.6) v bodě  $S_1$  charakteristický polynom (3.6) má díky  $B_2 < 0$  zápornou stopu  $\text{Tr}(A)$  a nezáporný diskriminant  $D$ . Kořeny  $\lambda_1, \lambda_2$  jsou proto záporné a podle Věty 1.5 singulární bod  $S_1$  je *atraktivní uzel*. Analogickým výpočtem lze zjistit, že singulární bod  $S_2$  je také *atraktivní uzel*.

V singulárním bodě  $S_{12}$  je  $\det(A) = B_1 B_2 / d$  záporný, protože  $B_1, B_2, d$  jsou záporné. Charakteristický polynom  $P(\lambda)$  má kladný diskriminant, viz (3.8). Podle Věty 3.1 polynom  $P(\lambda)$  má proto reálné kořeny s opačnými znaménky a Věta 1.5 dává, že singulární bod  $S_{12}$  je *sedlo*. Směrové vektory v Obr. 12 to potvrzují.



**Obrázek 12.** Silná konkurence: nulklíny, singulární body ( $a_1 = 5, b_1 = 1, c_1 = -3, a_2 = 4, b_2 = 1, c_2 = -2$ ).

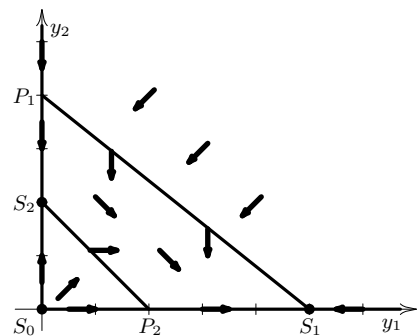


**Obrázek 13.** Silná konkurence: tečné vektory ( $a_1 = 5, b_1 = 1, c_1 = -3, a_2 = 4, b_2 = 1, c_2 = -2$ ).

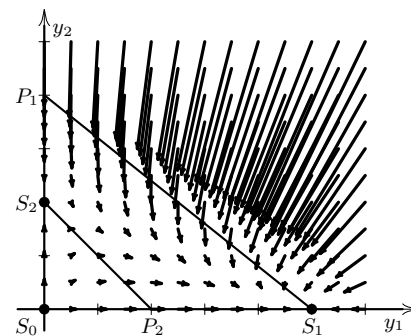
Jaké je hodnocení situace? Narozdíl od slabé konkurence, kdy body  $S_1$  a  $S_2$  byla sedla a  $S_{12}$  atraktivní uzel, v případě silné konkurence stavy  $S_1$  a  $S_2$  jsou atraktivní uzly a  $S_{12}$  sedlo. Téměř všechny trajektorie proto jdou buď do bodu  $S_1$  nebo  $S_2$ , tedy buď jedna nebo druhá populace vyhyne, záleží na počátečních hodnotách populací.

**(Bc) „Dominance“ první populace –  $B_1$  kladné a  $B_2$  záporné**

V tomto případě na poloose  $y_1$  bod  $P_2$  leží před bodem  $S_1$  a na poloose  $y_2$  bod  $P_1$  nad bodem  $S_2$ , viz Obr. 14. Nulklíny se v prvním kvadrantu neprotínají, rozdělují ho proto jen na tři části, průsečík  $S_{12}$  „šikmých“ nulklin není v prvním kvadrantu nebo neexistuje. Podle znamének hodnot  $f_1(y_1, y_2), f_2(y_1, y_2)$  vykresleme v jednotlivých oblastech „orientaci“ tečných vektorů  $(y'_1, y'_2)$ , viz Obr. 14.



**Obrázek 14.** Dominance: nulklíny a singulární body ( $a_1 = 5, b_1 = 1, c_1 = -1,25, a_2 = 4, b_2 = 2, c_2 = -2$ ).



**Obrázek 15.** Dominance: tečné vektory trajektorií ( $a_1 = 5, b_1 = 1, c_1 = -1,25, a_2 = 4, b_2 = 2, c_2 = -2$ ).

Jakého typu jsou singulární body? Opět (3.5) dává, že bod  $S_0$  je *neatraktivní uzel*. Charakteristický polynom (3.6) má v bodě  $S_1$  díky (3.6) a  $B_2 < 0$  zápornou

stopu  $\text{Tr}(A)$  a nezáporný diskriminant  $D$ . Kořeny  $\lambda_1, \lambda_2$  jsou proto záporné a z Věty 1.5 plyne, že singulární bod  $S_1$  je *atraktivní uzel*.

V singulárním bodě  $S_2 = (0, a_2/b_2)$  je situace odlišná. Podle (3.7) determinant  $\det(A)$  je záporný, a z Věty 3.1 plyne, že polynom  $P(\lambda)$  má dva reálné kořeny s opačnými znaménky. Věta 1.5 potom dává, že singulární bod  $S_2$  je *sedlo*.

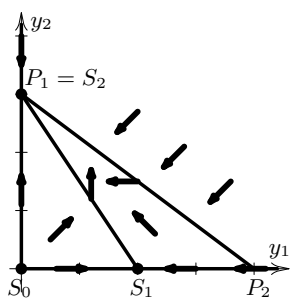
Jaké je hodnocení situace? V tomto případě je situace pro „slabší“ druh ještě horší než v případě silné konkurence. Kromě výjimečné situace  $y_1 = 0$ , kdy první druh neexistuje, populace  $y_2$  vždy vyhyne. První druh se ustálí na stejné hodnotě, jako v případě, kdy druhý druh neexistuje.

**(Bd) „Dominance“ druhé populace –  $B_1$  záporné a  $B_2$  kladné**

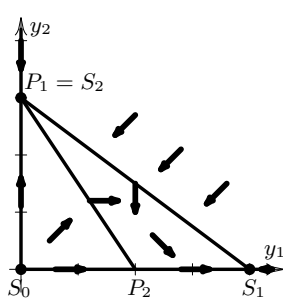
V případě  $B_1 < 0$  a  $B_2 > 0$  je situace opačná,  $S_2$  je *atraktivní uzel*,  $S_1$  je *sedlo*, první druh vyhyne a druhý se ustálí na hodnotě, jako když první druh neexistuje.

**(Be) Mezní situace:  $B_1$  nebo  $B_2$  nulové**

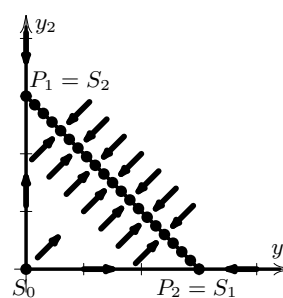
V dalším stručně analyzujeme „mezní situace“, kdy  $B_1$  nebo  $B_2$  je nulové. Opět parametry  $a_1, a_2, b_1, b_2$  jsou kladné a  $c_1, c_2$  záporné. Jestliže  $B_1 = a_1 b_2 + a_2 c_1 = 0$ , potom  $c_1 = -a_1 b_2 / a_2$  body  $P_1, S_2$  a  $S_{12}$  splynou. V dalším rozlišíme znaménko  $B_2$ , které určuje, zda průsečík  $P_2$  je před nebo za singulárním bodem  $S_1$ .



**Obrázek 16.**  $B_1 = 0$ ,  
 $B_2 > 0$  ( $a_1 = 3, b_1 = 2$ ,  
 $c_1 = -1, a_2 = 3,6, b_2 = 1,2$ ,  
 $c_2 = -1,2$ ).



**Obrázek 17.**  $B_1 = 0$ ,  
 $B_2 < 0$  ( $a_1 = 3, b_1 = 2$ ,  
 $c_1 = -1, a_2 = 3,6, b_2 = 1,2$ ,  
 $c_2 = -1,2$ ).



**Obrázek 18.**  $B_1 = 0, B_2 = 0$   
( $a_1 = 3, b_1 = 1, c_1 = -1$ ,  
 $a_2 = 3, b_2 = 1, c_2 = -1$ ).

- (i)  **$B_1$  nulové,  $B_2$  kladné:** Protože  $B_2 \equiv a_2 b_1 + a_1 c_2 > 0$ , průsečík  $P_2$  leží na ose  $y_1$  za singulárním bodem  $S_1$  a soustava má tři singulární body, viz Obr. 16. Bod  $S_0$  je ve všech případech *neatraktivní uzel*, viz (3.5). Podle (3.6) v bodě  $S_1$  charakteristický polynom má dva různé reálné kořeny s opačnými znaménky, bod  $S_1$  je *sedlo* v souladu s Obr. 16.

V bodě  $S_2$  vztah (3.7) dává charakteristický polynom  $P(\lambda) = \lambda^2 + a_2 \lambda$ , který má nulový a záporný kořen, což v našem případě nelineární soustavy typ bodu nedává. Podle orientace tečných vektorů v okolí izolovaného singulárního bodu  $S_2$ , viz Obr. 16, všechny trajektorie do bodu  $S_2$  směřují, proto bod  $S_2$  je *atraktivní uzel*.

Jaké je hodnocení situace? Narozdíl od případu (Ba) slabé konkurence populace  $y_1$  vyhyne, (kromě případu  $y_2 = 0$ ) stejně jako v případě (Bd) dominance druhé populace.

- (ii)  $B_1$  **nulové**,  $B_2$  **záporné**: Protože  $B_2$  je záporné, průsečík  $P_2$  leží před singulárním bodem  $S_1$ , viz Obr. 17. Bod  $S_0$  je neatraktivní uzel. V bodě  $S_1$  charakteristický polynom (3.6) má kladný lineární i absolutní člen, proto má záporné kořeny a bod  $S_1$  je *atraktivní uzel*.

V bodě  $S_2$  vztah (3.7) dává charakteristický polynom  $P(\lambda) = \lambda^2 + a_2\lambda$ , který má nulový a záporný kořen, což typ bodu nedává. Podle orientace tečných vektorů v jeho okolí, viz Obr. 17, existují trajektorie, které do bodu směřují, i trajektorie, které se od něj vzdalují, bod  $S_2$  je proto *sedlo*.

Jaké je hodnocení situace? V tomto případě populace  $y_2$  vyhyne (kromě případu  $y_1 = 0$ ) stejně jako v případě (Bc) dominance první populace.

- (iii)  $B_1$  i  $B_2$  **nulové**: V tomto případě také body  $P_2$  a  $S_1$  splynuly, viz Obr. 18. První a druhá šikmá nulklina splynuly, singulární body proto tvoří celou úsečku  $\overline{S_1S_2}$ . Bod  $S_0$  zůstává neatraktivním uzlem. Podle Obr. 18. všechny trajektorie v okolí všech bodů úsečky  $\overline{S_1S_2}$  k singulárním bodům směřují.

Jaké je hodnocení situace? V tomto nestabilním případě se obě populace ustálí v některém bodě úsečky  $\overline{S_1S_2}$  v závislosti na počátečním stavu.

- (iv)  $B_2$  **nulové**: Záměnou populací  $y_1$  a  $y_2$  pro  $B_1 > 0$ , dostáváme případ (i) a pro  $B_1 < 0$  případ (ii) s přehozenými rolemi populací.

### (C) Modely predátor - kořist — záporné $c_1$ a kladné $c_2$

Tyto modely popisují situaci dvou populací: první  $y_1$  se nazývá kořist, druhá  $y_2$  predátor nebo dravec, která se kořistí živí. Například kořistí je sněžný králík a predátorem rys. Dalšími příklady jsou kapři a štiky v rybníku, losi a vlci.

Predátor se živí kořistí, snižuje populaci kořisti, parametr  $c_1$  je proto záporný. Množství kořisti umožňuje množení predátora, proto parametr  $c_2$  je kladný.

Uvedeme zjednodušený model, který nese jména dvou autorů. Model navrhl Alfred J. Lotka v roce 1910 pro chemické reakce, v roce 1925 model aplikoval na systém predátor-kořist ve své knize o biomatematice. Nezávisle stejné rovnice publikoval Vito Volterra 1926, aby vysvětlil periodické chování počtu vylovených ryb v Jaderském moři. Model byl inspirován periodickým vývojem počtu vykoupených koček sněžných králíků a rysů v severní Kanadě v letech 1845–1935, viz např. [5].

### Klasický Lotkûv-Volterrûv model

Model je popsán např. v [4]. Abychom mohli využít pro model výsledky ze subsekcce *Pomocné výsledky*, využijeme označení parametrů z předchozích částí. Pro kořist  $y_1$  necháme parametr  $a_1$  kladný, omezení zdroji potravy zanedbáme, tj. položíme  $b_1 = 0$ . Predátor se živí kořistí, čímž snižuje populaci kořisti, tj. parametr  $c_1$  je záporný. Predátor bez kořisti vymírá, proto parametr  $a_2$  je záporný. Omezení prostředím zanedbáme, tj.  $b_2 = 0$ , množství potravy kořisti umožňuje přírůstek

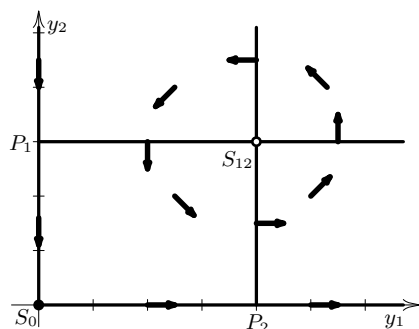
predátora, proto je  $c_2 > 0$ . Soustava rovnic (3.1) se tedy redukuje na

$$\begin{aligned} y_1' &= a_1 y_1 + c_1 y_1 y_2 = (a_1 + c_1 y_2) y_1, \\ y_2' &= a_2 y_2 + c_2 y_1 y_2 = (a_2 + c_2 y_1) y_2, \end{aligned} \quad (3.9)$$

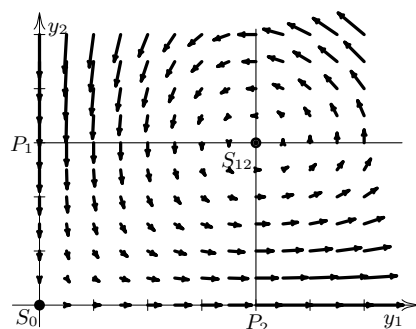
přičemž parametry  $a_1, c_2$  jsou kladné a  $a_2, c_1$  záporné.

První nulkliny jsou dvě na sebe kolmé přímky:  $y_1 = 0$ , tj. osa  $y_2$ , a přímka  $p_2 : a_1 + c_1 y_2 = 0$  vycházející z bodu  $(-a_1/c_1, 0)$  kolmá na osu  $y_1$ . Druhé nulkliny jsou také dvě na sebe kolmé přímky:  $y_2 = 0$ , tj. osa  $y_1$ , a přímka  $p_1 : a_2 + c_2 y_1 = 0$  vycházející z bodu  $(0, -a_2/c_2)$  kolmá na osu  $y_2$ , viz Obr. 19.

Nulkliny se protínají ve čtyřech bodech: singulární body jsou však pouze dva  $S_0 = (0, 0)$ ,  $S_{12} = (-a_2/c_2, -a_1/c_1)$ , protože bod  $P_1 = (0, -a_1/c_1)$  je průsečík prvních nulklin a bod  $P_2 = (-a_2/c_2, 0)$  průsečík druhých nulklin, ne dvou různých nulklin. Nulkliny rozdělují první kvadrant na čtyři části. Vykresleme v Obr. 19 nulkliny a směr tečen trajektorií v příslušných oblastech.



**Obrázek 19.** Predátor-kořist: nulkliny a body ( $a_1 = 3, c_1 = -1, a_2 = -4, c_2 = 1$ ).



**Obrázek 20.** Predátor-kořist: tečné vektory ( $a_1 = 3, c_1 = -1, a_2 = -4, c_2 = 1$ ).

Pro určení typu singulárních bodů určíme koeficienty  $A_{ij}$  příslušné linearizované rovnice:  $A_{11} = a_1 + c_1 y_2^*$ ,  $A_{12} = c_1 y_1^*$ ,  $A_{21} = c_2 y_2^*$ ,  $A_{22} = a_2 + c_2 y_1^*$  a charakteristický polynom nabude tvar

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (a_1 + a_2 + c_1 y_2^* + c_2 y_1^*)\lambda + (a_1 + c_1 y_2^*)(a_2 + c_2 y_1^*).$$

V bodě  $S_0 = (0, 0)$  charakteristický polynom  $P(\lambda) = \lambda^2 - (a_1 + a_2)\lambda + a_1 a_2$  má kořeny  $\lambda_1 = a_1 > 0$ ,  $\lambda_2 = a_2 < 0$ , tj. s opačnými znaménky. Podle Věty 1.5 bod  $S_0$  je *sedlo*.

V bodě  $S_{12} = (-a_2/c_2, -a_1/c_1)$  je  $A_{11} = A_{22} = 0$ , což dává  $\text{Tr}(A) = 0$ . Dále  $A_{12} = -c_1 a_2/c_2$ ,  $A_{21} = -c_2 a_1/c_1$  odkud  $\det(A) = -A_{12} A_{21} = -a_1 a_2 > 0$ . V bodě  $S_{12}$  tedy polynom  $P(\lambda) = \lambda^2 - a_1 a_2$  má nulovou stopou a záporný diskriminant  $D = 4a_1 a_2 < 0$ , má tedy dvojici komplexně sdružených kořenů s nulovou reálnou částí. Protože soustava rovnic je nelineární, z Věty 1.5 neplatí, že singulární bod  $S_{12}$  je střed. Obecně by se mohlo jednat o ohnisko nebo bod rotace.



V našem případě však lze spočítat trajektorie jako „vrstevnice“ funkce dané vztahem  $F(y_1, y_2) = \text{const}$ , viz [4]. Z rovnic (3.9) plyne

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{(a_1 + c_1 y_2)y_1}{(a_2 + c_2 y_1)y_2}.$$

V rovnosti proměnné  $y_1, y_2$  lze separovat

$$\left(\frac{a_2}{y_1} + c_2\right) dy_1 = \left(\frac{a_1}{y_2} + c_1\right) dy_2$$

a integrací získáváme  $a_2 \ln(y_1) + c_2 y_1 = a_1 \ln(y_2) + c_1 y_2 + \text{const}$ , což dává implicitní rovnice pro trajektorie

$$F(y_1, y_2) \equiv a_2 \ln(y_1) + c_2 y_1 - a_1 \ln(y_2) - c_1 y_2 = \text{const}.$$

Funkce  $F$  má v bodě  $S_{12} = (-a_2/c_2, -a_1/c_1)$  obě první parciální derivace nulové. Protože  $a_1, c_2$  jsou kladné a  $a_2, c_1$  záporné, druhé derivace v bodě  $S_{12}$  jsou

$$F''_{y_1 y_1}(S_{12}) = -a_2/y_1^2 > 0, \quad F''_{y_1 y_2}(S_{12}) = 0, \quad F''_{y_2 y_2}(S_{12}) = a_1/y_2^2 > 0.$$

Proto v bodě  $S_{12}$  funkce  $F(y_1, y_2)$  má ostré lokální minimum. Trajektorie v okolí bodu  $S_{12}$  – vrstevnice funkce  $F(y_1, y_2)$  – jsou tudíž uzavřené křivky a singulární bod  $S_{12}$  je *střed*.

Jaké je hodnocení situace? Pokud je kořist nulová  $y_1 = 0$ , predátor vyhyne. Pokud neexistuje predátor  $y_2 = 0$ , kořist se množí neomezeně. V singulárním bodě  $S_{12}$  je stav kořisti i predátorů neměnný. Mimo tyto případy jde o periodický jev, vývoj probíhá v cyklu, kdy se postupně periodicky opakují čtyři situace:

- (a) predátorů je málo, kořist se množí,
- (b) kořisti je mnoho, roste počet predátorů,
- (c) predátorů je mnoho, klesá počet kořisti,
- (d) kořisti je málo, klesá počet predátorů.

#### ZÁVĚREČNÉ POZNÁMKY

Prozkoumali jsme chování matematického kyvadla. Nelineární rovnice přinesla další druhy reálného chování, které linearizovaný model nedokázal popsat. Vyskytly se zde singulární body *střed* a *sedlo*. Přidáním tlumení se singulární bod *střed* změnil na atraktivní ohnisko nebo atraktivní uzel podle velikosti tlumení. Zajímavé je také studovat případy tlumení, které závisejí na rychlosti nelineárně, a které mohou přinést utlumení pohybu v konečném čase.

Kyvadlo je jedním z případů periodických jevů v mechanice. Podobný jev je periodický pohyb kuličky po dráze tvaru písmene U, tj. rovinné křivky v  $\mathbb{R}^3$  dané vztahy  $x_3 = \varphi(x_2)$ ,  $x_1 = 0$ . Perioda pohybu kuličky po dráze závisí na tvaru dráhy, tj. funkci  $\varphi$ . Obvykle perioda kmitů závisí na velikosti „rozkmitu“, v případě dráhy tvaru cykloidy, tj. funkce hyperbolický kosinus, perioda kmitání na rozkmitu nezávisí, více např. [1].

Modelům populační dynamiky je věnována např. monografie [4]. V případě dvou populací jsme rozlišili tři základní vztahy: symbióza, konkurence a predace. Získali jsme tak singulární body typu atraktivního i neatraktivního uzlu, sedla i středu.

Zajímavým výsledkem je rozlišení tří různých stupňů konkurence. Ve speciálním případě konkurence vzniklo nekonečně mnoho rovnovážných stavů.

Vztah predace jsme uvedli jen v zjednodušeném tvaru. Složitější modely mohou vést i k typu atraktivního ohniska, případně k atraktivnímu cyklu.

#### REFERENCE

- [1] J. Bajer: *Mechanika 3*, chlupek.net, Olomouc 2012.
- [2] P. Dub: Osobní sdělení.
- [3] J. Franců: *Trajektorie autonomních rovnic v rovině I. Lineární rovnice a soustavy*, Kvaternion, 1–2/2020, 57–78.
- [4] J. Kalas, Z. Pospíšil: *Spojité modely v biologii*, Masarykova univerzita, Brno 2001.
- [5] J. Krempaský a kolektiv: *Synergetika*, Veda, SAV, Bratislava 1988.

Jan Franců, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně,  
Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,  
e-mail: francu@fme.vutbr.cz

## SEPARACE DYNAMICKÉ A STATICKÉ SLOŽKY V SÉRII OBRAZŮ

KAROLÍNA GEBRTOVÁ

**ABSTRAKT.** Článek se zabývá metodami separace statické a dynamické složky videa, respektive oddělení pohybujících se objektů od pozadí v sérii obrazů. První metoda je založena na použití mediánu, druhá metoda je formulována jako konvexní minimalizační úloha. Součástí článku je i předzpracování videa a vykreslení konečných výsledků, které může být problematické. Nakonec jsou metody porovnány dle jejich přesnosti separace a výpočetní náročnosti a dané výsledky jsou ilustrovány na reálných videích.

### 1. ÚVOD

Separace statické a dynamické složky v sérii obrazů se v dnešní době těší velkému množství užití. Aplikace nalezneme především v oblasti monitorovacích video-systémů, protože použitím těchto metod jsme schopni ve videu i přes nepřehledné pozadí detekovat jednotlivé objekty. Další aplikace leží v oblasti rozpoznávání obličejů, kde jsme díky separaci schopni odstranit stíny i jiná zkreslení (dynamickou složku) a získat tak čistý obraz obličeje [1].

Sérii obrazů můžeme reprezentovat jako video a problém separace ilustrovat na příkladu kamery snímající dálnici. Vozovka, svodidla a dopravní cedule zůstávají v průběhu času na stejném místě. Tvoří tedy v případě neměnných osvětlovacích podmínek pozadí reprezentující statickou složku. Projíždějící auta nebo letící ptáci svoji polohu s časem mění, reprezentují tedy dynamickou složku.

Tento článek bude zaměřen na metodu mediánového filtru, která je význačná svoji jednoduchostí implementace a rychlostí výpočtu, a metodu PCP (Principal Component Pursuit). Jedná se o konvexní úlohu založenou na minimalizaci vážené kombinace nukleární normy a  $\ell_1$  normy.

---

2010 MSC. Primární 47Nxx.

*Klíčová slova.* Série obrazů, separace pozadí, statická a dynamická složka, řídké reprezentace, nízkohodnostní struktura, singulární rozklad, mediánový filtr, principal component pursuit, robustní analýza hlavních komponent.

Článek vznikl na základě bakalářské práce autorky v oboru Matematické inženýrství na FSI VUT v Brně. Vedoucím práce byl Pavel Rajmic z Ústavu telekomunikací FEKT VUT v Brně.

## 2. ZÁKLADNÍ MATEMATICKÉ POJMY

Jednotlivé snímky videa se dají reprezentovat jako matice, bude tedy potřeba umět používat známé normy pro vektory i na matice. Toho lze docílit vektorizací matice: Jednotlivé sloupce matice „poskládáme pod sebe“ a získáme jeden dlouhý sloupcový vektor. Poté lze normu matice vypočítat jako  $\|\mathbf{X}\| = \|\text{vec } \mathbf{X}\|$ .

## 2.1. Řídké reprezentace

Nejprve zadefinujeme tzv.  $l_0$  normu vektoru, i když se dle definice o normu nejedná.

**Definice 2.1.**  $l_0$  normou vektoru  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$  rozumíme číslo udávající počet nenulových složek daného vektoru.

Vhodným uspořádáním jednotlivých pixelů lze zjistit, že se pozadí chová jako nízkohodnostní struktura, jejíž jedinou změnu působí dynamická složka. Pokud jsou objekty dynamické složky malé a není jich příliš mnoho, je tato změna navíc řídká. Řídkost definujeme následovně.

**Definice 2.2.** Vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$  pro  $k \in \mathbb{N}$  nazveme  $k$ -řídkým, platí-li

$$\|\mathbf{x}\|_0 \leq k.$$

Tedy  $k$ -řídký vektor má maximálně  $k$  nenulových složek. Analogicky pomocí vektorizace definujeme  $k$ -řídkou matici.

## 2.2. Singulární rozklad

**Definice 2.3** ([6]). Nechť  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$  je obecná matice. Singulárním rozkladem (SVD rozkladem) matice  $\mathbf{A}$  rozumíme rozklad

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^*,$$

kde  $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$  je diagonální matice, jejíž diagonální prvky jsou tzv. singulární čísla  $\sigma_i$ . Tato čísla jsou nezáporná a seřazena podle velikosti od největšího. Tedy  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k \geq 0$ , kde  $k = \min(m, n)$ . A matice  $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{m \times m}$ ,  $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  jsou unitární matice tzv. levých a pravých singulárních vektorů,  $\mathbf{V}^*$  je hermitovská transpozice matice  $\mathbf{V}$ .

Singulární rozklad je velmi užitečný pro práci s nízkohodnostními strukturami, protože existují tvrzení (viz [3]) zajišťující, že singulární rozklad existuje pro každou matici  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$  a zejména že počet nenulových singulárních čísel odpovídá hodnotě této matice.

## 3. METODY SEPARACE

Před uvedením použitých metod je nutné zmínit, v jaké formě jsou očekávána vstupní data.

### 3.1. Předzpracování dat

Vstupní data jsou očekávána ve formátu videa nebo jako série  $m \in \mathbb{N}$  po sobě jdoucích obrazů. V tomto článku se omezíme pouze na data ve stupních šedi.

Každý digitální obraz lze reprezentovat jako matici s rozměry odpovídajícími jeho rozlišení (počtu pixelů). Matici prvního snímku označíme  $\mathbf{M}_1$  a provedeme její vektorizaci. Výsledkem je jeden dlouhý sloupcový vektor reprezentující první snímek. Vektorizujeme i ostatní obrazy a získáme výslednou matici  $\mathbf{M}$ , jejíž sloupce tvoří vektory jednotlivých obrazů  $\mathbf{M} = [\text{vec } \mathbf{M}_1, \text{vec } \mathbf{M}_2, \dots, \text{vec } \mathbf{M}_m]$ .

Pro ilustraci úlohy separace si představme sérii obrazů se stále stejným pozadím a pohybující se malou kuličkou, která jako jediná působí změnu. Vytvoříme-li z daných obrazů matici  $\mathbf{M}$ , zjistíme, že jednotlivé sloupce  $\mathbf{M}$  jsou skoro stejné a liší se pouze v několika málo místech. Tento výsledek je očekávatelný, protože jednotlivé obrazy jsou až na posouvající se kuličku identické. Konkrétní polohu kuličky zjistíme z míst, kde se hodnota na daném řádku liší od většiny ostatních. Z tohoto příkladu můžeme rovnou odvodit formulaci úlohy separace.

Matici  $\mathbf{M}$  chceme vyjádřit jako součet matice  $\mathbf{L}$  s maticí  $\mathbf{S}$ , přičemž  $\mathbf{L}$  má všechny sloupce identické, tzn. každý sloupec reprezentuje statické pozadí a  $\mathbf{S}$  má nenulové hodnoty pouze v místech, kde se hodnota na daném řádku liší od většiny ostatních, tzn. v místech, kde se pohybuje kulička (dynamická složka).

Následující metody představují návod, jak původní matici  $\mathbf{M}$  vhodně rozdělit na matice  $\mathbf{L}$  a  $\mathbf{S}$ .

### 3.2. Mediánový filtr

Mediánový filtr je jednou z nejstarších a nejjednodušších metod pro separaci pozadí z videa [2]. Výhodou této metody je především snadná implementace a nízká výpočetní náročnost i pro videa s vysokým rozlišením. Nevýhodou je, že metoda může selhávat při větším množství pohybujících se objektů.

Medián je hodnota, která dělí konečnou množinu reálných vzestupně seřazených dat na dvě stejně početné poloviny a je předpokládáno, že sloupce matice  $\mathbf{M}$  jsou si podobné a liší se pouze v několika místech odpovídajících složce  $\mathbf{S}$ . Tedy obsahuje-li nadpoloviční počet sloupců na příslušném řádku hodnotu odpovídající hodnotě původního pozadí, medián daného řádku bude odpovídat právě této hodnotě. Obraz, který získáme výpočtem mediánu hodnot všech obrazů, považujeme za dostatečně dobrý model pozadí. Dynamickou složku spočítáme jako rozdíl jednotlivých obrazů a pozadí.

Tedy vezmeme matici vstupních dat  $\mathbf{M}$  a spočítáme  $\mathbf{n}$  mediánů pro jednotlivé řádky. Pokud se některá hodnota liší od daného řádkového mediánu, tuto hodnotu jím nahradíme. Např. vypadá-li první řádek  $\mathbf{M}$  takto  $[5, 1, 5, 5, 5, 25, 103, 5, 5, 0, 5]$ , mediánem tohoto řádku je číslo pět. První řádek matice  $\mathbf{L}$  získaný pomocí mediánového filtru bude stejné délky jako první řádek matice  $\mathbf{M}$ , ale bude obsahovat pouze pětky.

Aplikujeme-li tento postup na všechny řádky, získáme matici pozadí  $\mathbf{L}$ . Matici dynamické složky  $\mathbf{S}$  dostaneme odečtením pozadí od původního obrázku, tj.  $\mathbf{S} = \mathbf{M} - \mathbf{L}$ .

### 3.3. Principal component pursuit

Již novější metodou je Principal Component Pursuit (může být také označována jako Robust Principal Component Analysis RPCA – robustní analýza hlavních komponent). Jak už název napovídá, princip metody je založen na nalezení „hlavních komponent“, které nejvíc ovlivňují daty popsaný jev. Navíc RPCA na rozdíl od klasického PCA dokáže dobře pracovat i s daty obsahujícími chyby a další nepřesnosti způsobené měřením [1].

Jak už bylo naznačeno v části předzpracování, matice  $\mathbf{S}$  má nenulové hodnoty pouze na několika málo místech, je tedy řídká. Matice  $\mathbf{L}$  má všechny sloupce identické, v ideálním případě tedy platí  $\text{rank } \mathbf{L} = 1$ . V reálném případě bude hodnota sice vyšší, ale stále bude poměrně malá. Z tohoto důvodu budeme matici  $\mathbf{L}$  nazývat nízkohodnostní. Cílem je tyto dvě složky odseparovat. Zapišeme-li daný problém formálně, získáme optimalizační úlohu

$$\min_{\mathbf{L}, \mathbf{S}} \text{rank}(\mathbf{L}) + \|\mathbf{S}\|_0 \quad \text{za podmínky} \quad \mathbf{L} + \mathbf{S} = \mathbf{M}. \quad (3.1)$$

Hodnosti matice odpovídá počet nenulových singulárních čísel. Tudíž chceme-li, aby matice  $\mathbf{L}$  měla co nejmenší hodnotu, musíme minimalizovat počet nenulových singulárních čísel dané matice. Toho lze ve většině případů dosáhnout pomocí nukleární normy, protože nukleární norma určuje hodnotu součtu singulárních čísel dané matice.

Pro získání řídké matice je vhodné minimalizovat její  $\ell_0$  normu, která odpovídá počtu nenulových prvků dané matice. Bohužel minimalizace  $\ell_0$  normy je NP-těžký problém. Za jistých podmínek je možné nahradit  $\ell_0$  normu konvexní  $\ell_1$  normou, která již není NP-těžká (viz [4]). Proto se pokusíme úlohu (3.1) přeformulovat pomocí  $\ell_1$  normy a výše zmíněné nukleární normy na již konvexní problém (viz [1])

$$\min_{\mathbf{L}, \mathbf{S}} \|\mathbf{L}\|_* + \lambda \|\mathbf{S}\|_1 \quad \text{za podmínky} \quad \mathbf{L} + \mathbf{S} = \mathbf{M}. \quad (3.2)$$

Díky [1] zjišťujeme, že pro zajištění přesné dekompozice stačí, aby  $\mathbf{M}$  nebyla nízkohodnostní a řídká zároveň. Tedy potřebujeme zajistit, aby nízkohodnostní prvek  $\mathbf{L}$  nebyl zároveň řídký, což se dá zaručit splněním několika jednoduchých podmínek s parametrem.

Další problém může nastat, pokud řídká matice  $\mathbf{S}$  bude nízkohodnostní. Proto budeme po řídké matici požadovat, aby její nenulové prvky byly rozmístěné náhodně.

Jsou-li výše zmíněné podmínky splněny, tak existuje tvrzení (viz [1]) zaručující, že je řešení úlohy PCP (3.2) s parametrem  $\lambda = 1/\sqrt{n}$  přesné s pravděpodobností téměř jedna. Nejen, že již je zaručena přesnost dekompozice, ale také je z tohoto tvrzení získán návod jak univerzálně volit parametr  $\lambda$ . Toto univerzální  $\lambda$  sice není pro jednotlivé případy ideální, ale bude fungovat ve všech přípustných případech.

Nyní už je potřeba pouze odvodit algoritmus metody PCP. Odvození se provede pomocí metody ADMM (viz [3]) a tzv. rozšířeného Lagrangianu (viz [1]) pro náš

daný problém (3.2) a jsou z něj získány následující iterativní předpisy pro  $\mathbf{L}$  a  $\mathbf{S}$ :

$$\mathbf{L}^{(i+1)} = \text{svt}_{\frac{\lambda}{\mu}} \left( \mathbf{M} - \mathbf{S}^{(i)} + \mathbf{Y}^{(i)} / \mu \right), \quad (3.3)$$

$$\mathbf{S}^{(i+1)} = \text{soft}_{\frac{\lambda}{\mu}} \left( \mathbf{M} - \mathbf{L}^{(i+1)} + \mathbf{Y}^{(i)} / \mu \right), \quad (3.4)$$

kde operátor

$$\text{soft}_{\lambda}(x_i) = \frac{x_i}{|x_i|} \max(|x_i| - \lambda, 0)$$

je tzv. *měkké prahování* (viz [4]), které je aplikováno na matici po složkách a každou hodnotu v absolutní hodnotě menší než parametr  $\lambda$  zobrazí na nulu. Tedy je to výhodný operátor pro hledání řídké matice, protože všechny malé „chybové“ hodnoty zruší a ponechá pouze ty význačné.

Druhý použitý operátor je tzv. *singular value thresholding* odpovídající měkkému prahování singulárních čísel

$$\text{svt}_{\lambda}(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n \text{soft}_{\lambda}(\sigma_i) \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^*.$$

Tento operátor je vhodný pro hledání nízkohodnostní matice, protože zmenšuje počet nenulových singulárních čísel, tedy zmenšuje hodnotu matice.

Spojením rovnic (3.3) a (3.4) s maticí Lagrangeových multiplikátorů  $\mathbf{Y}$  získáváme výsledný algoritmus pro PCP.

---

**Algoritmus 1:** Principal Component Pursuit (PCP)

---

inicializace:  $\mathbf{S}_0 = \mathbf{Y}_0$ ,  $\mu > 0$ ;  
**while**  $\|\mathbf{M} - \mathbf{L}_{i+1} - \mathbf{S}_{i+1}\|_F > \delta \|\mathbf{M}\|_F$  **do**  
     $\mathbf{L}_{i+1} = \text{svt}_{\frac{\lambda}{\mu}}(\mathbf{M} - \mathbf{S}_i + \mathbf{Y}_i / \mu)$ ;  
     $\mathbf{S}_{i+1} = \text{soft}_{\frac{\lambda}{\mu}}(\mathbf{M} - \mathbf{L}_{i+1} + \mathbf{Y}_i / \mu)$ ;  
     $\mathbf{Y}_{i+1} = \mathbf{Y}_i + \mu(\mathbf{M} - \mathbf{L}_{i+1} - \mathbf{S}_{i+1})$ ;  
**end**  
**Výsledek:**  $\mathbf{L}, \mathbf{S}$

---

#### 4. UKÁZKY VÝSLEDKŮ

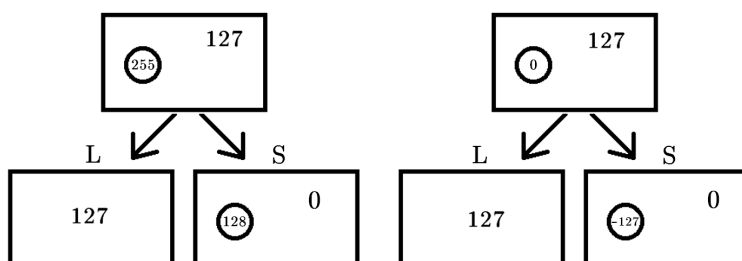
Než přejdeme k samotným ukázkám výsledků, je třeba rozebrat problém vznikající při vykreslování výsledků.

##### 4.1. Vykreslení

Separaci provádíme na klasických 8-bitových obrazech, tedy jednotlivé pixely nabývají hodnot mezi nulou a číslem 255, kde nula odpovídá černé barvě a 255 odpovídá bílé barvě. V důsledku separace bude dynamická složka ve většině případů vykreslena v tmavších odstínech, než byl originál. Dokonce se může stát, že výsledná složka bude v záporných číslech. Jelikož snímky převádíme z formátu *double*

na formát `uint8`, budou všechna záporná čísla zaokrouhlena na nulu. Tato situace může způsobit „zmizení“ celé složky, protože je zobrazována na černém pozadí, tedy na pozadí s hodnotou nula.

Popsaný problém ilustruje obrázek 1. Na levém obrázku je našimi vstupními daty bílá (255) kulička pohybující se po šedém (127) pozadí. Po provedení separace bude barva pozadí zachována, ale barva kuličky ztmavne na šedou (128). To není velký problém, protože kulička je pouze tmavší, ale stále jasně viditelná. Může ale také nastat situace ilustrovaná vpravo. Vstupem je černá (0) kulička na šedém (127) pozadí. Výstupem ze separace je opět správné pozadí, ale kulička bude mít barvu (-127). Pokud snímek převedeme do formátu `uint8`, bude číslo zaokrouhleno na nulu, tedy kulička nebude při vykreslení složky **S** viditelná. Abychom



**Obrázek 1.** Ilustrace ztmavení dynamické složky v důsledku separace.

takovému problému předešli, musíme složku **S** před vykreslením upravit.

Jednou z možností úpravy je přeskálování každého ze snímků zvlášť tak, aby nejmenší hodnota odpovídala nule a největší hodnota odpovídala číslu 255. Tato úprava je vhodná pouze pro data bez barevně rozmanitého pozadí, jako je např. video dálnice. Pro videa, kde se dynamická složka pohybuje přes barevně rozmanitá pozadí, vzniká v důsledku různého ztmavení dynamické složky na jednotlivých snímcích nepříjemný jev „blikání“.

Další možností je přičtení pozadí k nenulovým hodnotám dynamické složky. Tím získáme přesné barvy, ale bohužel budou zvýrazněny i chyby, které vytvoří šum v okolí jednotlivých objektů. Jako nejlepší možnost vyhlazení tohoto šumu se jeví použití adaptivního lineárního filtru, jako je např. Wienerův filtr [7] a následného morfologického uzavření, které vyhledá v dynamické složce „díry“ vzniklé filtrací. Tento způsob se osvědčil i pro obrazy s různorodým pozadím a dynamickou složkou nepravidelného tvaru.

#### 4.2. Porovnání metod na simulovaných datech

Nejprve budou metody porovnány na simulovaných datech obsahujících 90 různých snímků s rozlišením  $160 \times 120$  px. Výpočty probíhají na notebooku s procesorem Intel Core i7-8550U, 1,80 GHz a 8 GB RAM. Výsledky vidíme v tabulce 1, kde *max rozdíl* značí největší rozdíl výsledného a originálního pozadí získaný pomocí



Frobeniovy normy, *prům. rozdíl* značí průměrný rozdíl získaný Frobeniovou normou, *min SSIM* označuje nejmenší naměřený SSIM index<sup>1</sup> a *prům. SSIM* označuje průměrný SSIM index mezi jednotlivými výsledky a originálním pozadím.

Výsledky pro 90 různých snímků					
	čas [s]	max rozdíl	prům. rozdíl	min SSIM	prům. SSIM
Mediánový filtr	0,03	78,82	78,82	0,9987	0,9987
PCP	2,76	78,82	78,82	0,9987	0,9987

**Tabulka 1.** Porovnání metod na simulovaných datech obsahujících 90 různých snímků. Výsledné snímky pozadí jsou porovnány s originálním pozadím a podobnost je zhodnocena pomocí Frobeniovy normy, SSIM indexu a časové náročnosti.

Z tabulky 1 je patrné, že obě metody pozadí oddělily téměř dokonale. Lze vidět že PCP metoda je časově náročnější než mediánový filtr, to je způsobeno počítáním výpočetně náročného singulárního rozkladu v každé iteraci.

Obě metody si dokáží dobře poradit i s objekty dynamické složky, které jsou po část videa statické. To lze pozorovat v tabulce 2.

Výsledky pro 130 snímků se 40 stejnými					
	čas [s]	max rozdíl	prům. rozdíl	min SSIM	prům. SSIM
Mediánový filtr	0,04	78,82	78,82	0,9987	0,9987
PCP	10,21	134,48	98,33	0,9956	0,9976

**Tabulka 2.** Porovnání metod na simulovaných datech obsahujících 130 různých snímků, z nichž 40 je identických. Výsledné snímky pozadí jsou porovnány s originálním pozadím a podobnost je zhodnocena pomocí Frobeniovy normy, SSIM indexu a časové náročnosti.

### 4.3. Výsledky na reálných datech

Nyní metody otestujeme na reálných datech. K tomu bude využito video<sup>2</sup> dálnice, protože obsahuje jak statickou složku (dálnice, tráva, světla), tak dynamickou složku (vozidla na dálnici a vozidla projíždějící v pozadí). Video obsahuje 380 snímků a jeho rozlišení je  $256 \times 144$  px.

Separace pomocí mediánového filtru trvala pouze 0,27 s, zatímco separace pomocí PCP trvala 364,43 s, tedy je již velmi znatelný rozdíl v časové náročnosti obou metod způsobený náročností SVD rozkladu. Tento problém PCP metody je ale vyvážen mnohem lepší kvalitou dynamické složky, u mediánového filtru je tato složka poměrně zašuměná.

Na obrázku 2 je snímek z daného videa dálnice. V pravém horním rohu je vyobrazeno v dále projíždějící vozidlo. Na tomto snímku můžeme otestovat, zdali jsou

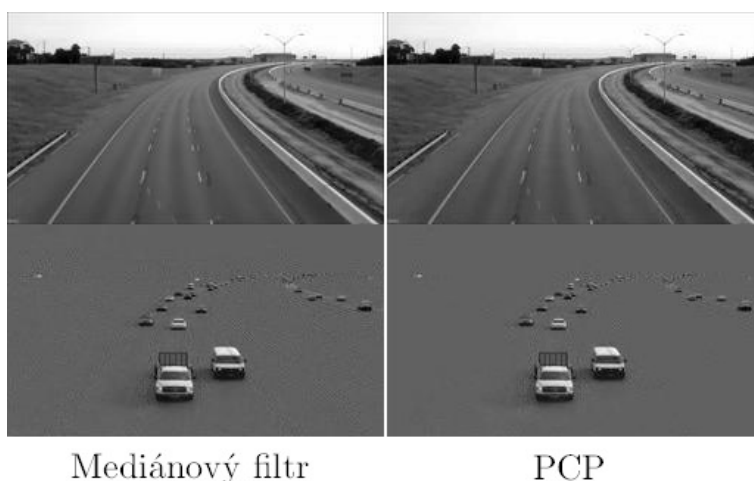
<sup>1</sup>Jedná se o index vyjadřující podobnost obrazů. Může nabývat hodnot z intervalu  $(-1, 1)$ , kde hodnota 1 značí dva zcela identické obrazy a hodnota 0 značí nulovou strukturální podobnost [5].

<sup>2</sup>Dostupné z <https://www.youtube.com/watch?v=PJ5xXXcfuTc>.



**Obrázek 2.** Snímek z videa dálnice. V levém horním rohu je zeleně vyznačeno projíždějící vozidlo.

metody schopny rozpoznat i takto malý pohybující se objekt. Jelikož se vozidla pohybují po téměř stále stejném pozadí, volíme jako způsob vykreslení první způsob škálování. Z obrázku 3 je patrné, že obě metody oddělily dynamickou složku skvěle



**Obrázek 3.** Porovnání škálovaně vykreslených výsledků separace jednotlivých metod. Na horním snímku je znázorněna statická složka a na spodním snímku vidíme dynamickou složku.

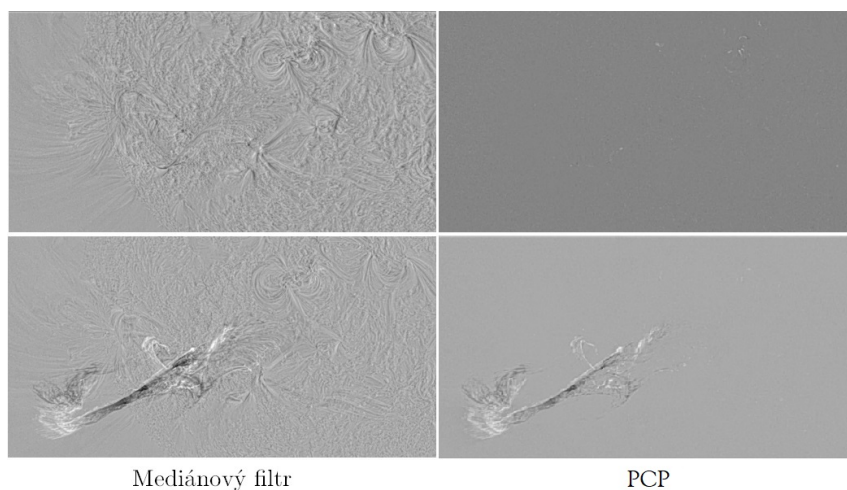
včetně v dálce projíždějícího vozidla.

Dále jsme otestovali obě metody na videu<sup>3</sup>. sluneční koróny prof. Druckmüllera. Video obsahuje 565 snímků o rozlišení  $2560 \times 1440$  px, jedná se tedy o obrovská data. Z tohoto důvodu výpočty probíhají na počítači s procesorem Intel Xeon CPU E7-4820, 2 GHz a 128 GB RAM.

Na takto velkých datech se ukazuje, že PCP metoda je opravdu časově příliš náročná. Výpočet mediánového filtru trval necelou minutu, zatímco výpočet PCP metody, při kterém proběhlo 2363 iterací, trval 6,5 dne.

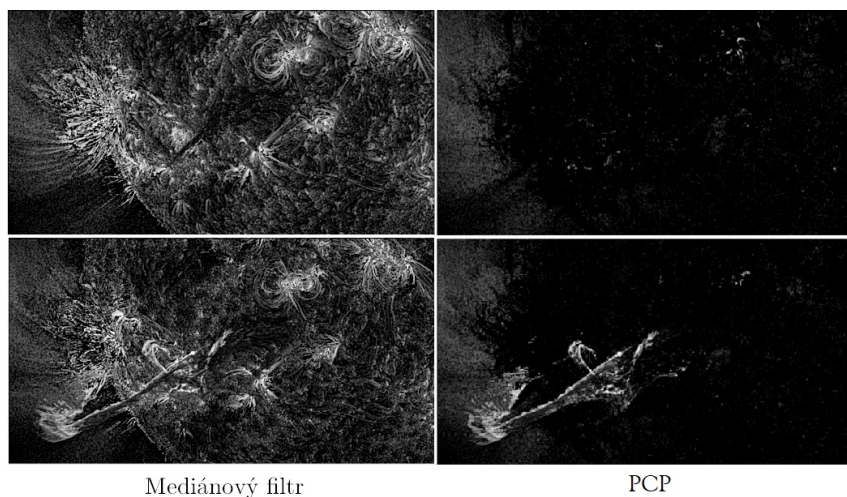
<sup>3</sup>Dostupné z [http://www.zam.fme.vutbr.cz/~druck/SD0/Pm-nafe/2012\\_08\\_31/0-info.htm](http://www.zam.fme.vutbr.cz/~druck/SD0/Pm-nafe/2012_08_31/0-info.htm).

Poté výsledky vykreslíme nejprve pomocí škálování. Již ze škálovaného vykreslení (obrázek 4) je patrné, že mediánový filtr do dynamické složky zařadil i značné



**Obrázek 4.** Porovnání výsledků separace videa slunce získaných mediánovým filtrem a PCP metodou. Jsou zde škálovaně vykresleny dva snímky dynamické složky výsledku.

množství statické složky, zatímco PCP metoda zvládla pozadí velmi dobře oddělit. Podíváme-li se na vykreslení s použitím filtru (obrázek 5), je tento výsledek ještě zřetelnější.



**Obrázek 5.** Porovnání výsledků separace videa slunce získaných mediánovým filtrem a PCP metodou. Jsou zde filtrovaně vykresleny dva snímky dynamické složky výsledku. Jako filtr je použit pouze Wienerův filtr.

## 5. ZÁVĚR

Představili jsme dvě metody pro separaci dynamické a statické složky ve videu. Z výsledků se ukazuje, že metoda mediánového filtru je velmi rychlá, ale není vhodná pro videa s velkým množstvím šumu jako je sluneční koróna. PCP metoda má velmi přesné výsledky i pro videa tohoto typu, ale její výpočetní náročnost je natolik velká, že je vhodná pouze pro práci, při které požadujeme velmi vysokou přesnost výsledků.

## REFERENCE

- [1] E. J. Candès, X. Li, Y. Ma, J. Wright: *Robust principal component analysis?*, Journal of the ACM **58** (2011), No. 3, Article 11, 1–37.
- [2] R. Cucchiara, M. Piccardi, A. Prati: *Detecting moving objects, ghosts, and shadows in video streams*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence **25** (2003), No. 10, 1337–1442.
- [3] K. Gebrtová: *Separace dynamické a statické složky v sérii obrazů*, Bakalářská práce, Fakulta strojního inženýrství Vysoké učení technické v Brně, Brno, 2020.
- [4] P. Rajmic: *Řídké a nízkohodnostní reprezentace signálů s aplikacemi*, Habilitační práce, Vysoké učení technické v Brně, Brno, 2014.
- [5] *Structural similarity*, Wikipedia: the free encyclopedia, San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001 [cit. 2021-7-22], online [https://en.wikipedia.org/wiki/Structural\\_similarity](https://en.wikipedia.org/wiki/Structural_similarity).
- [6] L. N. Trefethen, D. Bau: *Numerical linear algebra*, Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997.
- [7] *Wiener2*, The MathWorks [cit. 2020-6-14], online <https://www.mathworks.com/help/images/ref/wiener2.html>.

Karolína Gebrtová, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,  
*e-mail*: 200875@vutbr.cz

## MATEMATICKÉ MODELOVÁNÍ MECHANICKÝCH SOUSTAV

PETR KAMARÝT

ABSTRAKT. Tento článek se zabývá matematickým modelováním mechanických soustav. Jsou odvozeny pohybové rovnice dvojitého kyvadla, dále je analyzován aproximativní systém a některé jeho speciální případy.

### 1. LAGRANGEOVA FORMULACE KLASICKÉ MECHANIKY

Dříve než odvodíme pohybové rovnice vybrané mechanické soustavy, stručně zmíníme základy Lagrangeovy formulace mechaniky. Z Hamiltonova principu lze odvodit Eulerovy-Lagrangeovy rovnice, které jsou v kartézských souřadnicích ekvivalentní rovnicím získaným z Newtonova druhého pohybového zákona, avšak na rozdíl od nich platí i pro jiné souřadnice. Navíc místo vektorové síly se pracuje se skalární energií. Nejprve definujme některé fyzikální pojmy, které budeme potřebovat; viz [3, 4] pro detaily.

*Mechanickou soustavou* rozumíme jakoukoliv soustavu částic nebo těles, jejíž pohyb chceme popisovat. V tomto článku se budeme zabývat pouze *nedisipativními soustavami*, tj. soustavami, ve kterých nedochází k tepelným ztrátám, např. třením.

*Zobecněnými souřadnicemi* nazýváme jakékoliv parametry mechanické soustavy, které popisují její pohyb. Mohou to být vzdálenosti, úhly, aj. Budeme je označovat  $q_1, q_2, \dots$ . Zobecněné souřadnice jsou většinou funkcemi času, tj.  $q_1 = q_1(t)$ ,  $q_2 = q_2(t)$ , atd. Počet nezávislých zobecněných souřadnic, které zcela popisují pohyb mechanické soustavy označíme  $f$ . Například pro jednoduché kyvadlo je  $f = 1$ , pro dvojitě kyvadlo je  $f = 2$ , v případě hmotného bodu v prostoru máme  $f = 3$ .

**Hamiltonův princip (princip nejmenší akce).** Trajektorie částice bude taková, pro kterou má funkcionál

$$S(t_A, t_B) = \int_{t_A}^{t_B} L(t, q_1(t), q_2(t), \dots, q_f(t), \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_f(t)) dt \quad (1.1)$$

---

2010 MSC. Primární 34A05, 37N05.

*Klíčová slova.* matematické modelování, mechanické soustavy, dvojitě kyvadlo, autonomní systémy ODR.

Článek vznikl na základě bakalářské práce autorky v oboru Matematické inženýrství na FSI VUT v Brně. Vedoucím práce byl Jiří Šremr z Ústavu matematiky FSI VUT v Brně.

minimální (přesněji stacionární) hodnotu. Funkci  $L$  nazýváme *Lagrangeovou funkcí* (nebo také *lagrangian*) a integrál  $S(t_A, t_B)$  *akce*. Hamiltonův princip tedy říká, že ze všech možných trajektorií částice bude realizována ta, pro kterou je akce nejmenší.

**Eulerovy-Lagrangeovy rovnice.** Z variačního počtu je známo následující tvrzení. Nechť funkcionál (1.1) nabývá stacionární hodnoty, pak platí

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}, \quad k = 1, 2, \dots, f. \quad (1.2)$$

Rovnice (1.2) se nazývají *Eulerovy-Lagrangeovy rovnice*. Jedná se o systém  $f$  diferenciálních rovnic druhého řádu, k jejich vyřešení stačí zadat  $2f$  počátečních podmínek (např. počátečních poloh a rychlostí). Splnění Eulerových-Lagrangeových rovnic je nutnou podmínkou pro stacionaritu funkcionálu (1.1). V mechanice bereme lagrangian tvaru  $L = T - V$ , kde  $T$  je kinetická energie a  $V$  je potenciální energie soustavy.

## 2. POMOCNÁ TVRZENÍ

V této části uvedeme některá pomocná matematická tvrzení, která budou využita v dalších kapitolách. Jejich důkazy lze nalézt v [2].

**Tvrzení 2.1.** Nechť  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$  je reálná matice a  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Pak  $\lambda$  je vlastní číslo matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

právě tehdy, když  $\lambda^2$  je vlastní číslo matice  $\mathbf{B}$ .

**Věta 2.2.** Nechť  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$  je reálná matice a  $\lambda \in \mathbb{C}$  je vlastní číslo matice  $\mathbf{A}$  dané vztahem (2.1). Potom platí:

1. Je-li  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$  vlastní vektor matice  $\mathbf{A}$  příslušný vlastnímu číslu  $\lambda$ , pak  $u_3 = \lambda u_1$ ,  $u_4 = \lambda u_2$  a  $\mathbf{v} = (u_1, u_2)^T$  je vlastní vektor matice  $\mathbf{B}$  příslušný vlastnímu číslu  $\lambda^2$ .
2. Je-li  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$  vlastní vektor matice  $\mathbf{B}$  příslušný vlastnímu číslu  $\lambda^2$ , pak  $\mathbf{u} = (v_1, v_2, \lambda v_1, \lambda v_2)^T$  je vlastní vektor matice  $\mathbf{A}$  příslušný vlastnímu číslu  $\lambda$ .

**Věta 2.3.** Nechť  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$  je reálná matice a  $\mu$  je jednonásobné vlastní číslo matice  $\mathbf{B}$ . Potom platí:

1. Jestliže  $b_{11} - \mu \neq 0$ , pak vlastní vektor matice  $\mathbf{B}$  je tvaru

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -\frac{b_{12}}{b_{11} - \mu} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Jestliže  $b_{22} - \mu \neq 0$ , pak vlastní vektor matice  $\mathbf{B}$  je tvaru

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{b_{21}}{b_{22}-\mu} \end{pmatrix}.$$

*Poznámka 2.4.* Všimněme si, že v předešlé větě jsou zahrnuty všechny případy, které mohou pro jednonásobné vlastní číslo  $\mu$  nastat. Vskutku, jestliže  $b_{11} - \mu = 0$  a zároveň  $b_{22} - \mu = 0$ , pak  $b_{12} = 0$  nebo  $b_{21} = 0$  a  $\mu = b_{11} = b_{22}$ , což znamená, že  $\mu$  nemůže být jednonásobné vlastní číslo.

### 3. DVOJITÉ KYVADLO

Pro mechanickou soustavu na obrázku 1 lze pomocí postupu uvedeného v první části vcelku snadno odvodit její pohybové rovnice. Uvažujme matematické kyvadlo s délkou závěsu  $l_1$  a hmotností  $m_1$ , na jehož konci visí druhé matematické kyvadlo s délkou závěsu  $l_2$  o hmotnosti  $m_2$  (viz obrázek 1). Předpokládejme, že pohyb probíhá pouze v rovině obrázku a že gravitační síla působí v opačném směru než je orientována osa  $y$ . Výchylku prvního bodu, respektive druhého bodu ze svislé polohy označíme  $\varphi_1$ , respektive  $\varphi_2$ , přičemž výchylka proti směru hodinových ručiček je kladná – získáme tak dvě zobecněné souřadnice. Najdeme vztahy mezi zobecněnými souřadnicemi  $\varphi_1, \varphi_2$  a kartézskými souřadnicemi  $x_1, y_1, x_2, y_2$ . Dále určíme kinetickou a potenciální energii soustavy; v kartézských souřadnicích jsou dány výrazy

$$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

a

$$V = m_1 g y_1 + m_2 g y_2.$$

Použijeme transformační vztahy mezi kartézskými a zobecněnými souřadnicemi, a získáme tak lagrangián soustavy  $L = T - V$ . Dosazením do Eulerových-Lagrangových rovnic (1.2) dostaneme rovnice

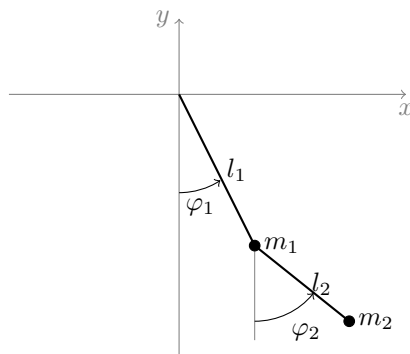
$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \frac{m_2 l_2}{(m_1 + m_2) l_1} \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ + \frac{m_2 l_2}{(m_1 + m_2) l_1} \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{g}{l_1} \sin \varphi_1 = 0, \quad (3.1) \\ l_1 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + l_2 \ddot{\varphi}_2 - l_1 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + g \sin \varphi_2 = 0. \end{aligned}$$

Jedná se o autonomní systém dvou nelineárních obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu, který popisuje pohyb dvojitého matematického kyvadla.

Aproximací nelinearit<sup>1</sup> systému (3.1) vznikne systém

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) l_1 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_2 \ddot{\varphi}_2 + (m_1 + m_2) g \varphi_1 = 0, \\ l_1 \ddot{\varphi}_1 + l_2 \ddot{\varphi}_2 + g \varphi_2 = 0. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Předpokládáme-li malé hodnoty výchylek, pak lze sinus nahradit jeho argumentem, kosinus jedničkou a druhé mocniny prvních derivací lze zanedbat.



Obrázek 1. Dvojité kyvadlo.

Tento systém rovnic je lineární vzhledem k  $\varphi_1, \varphi_2$ , lze ho tedy zapsat v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{(m_1+m_2)g}{m_1 l_1} & \frac{m_2 g}{m_1 l_1} \\ \frac{(m_1+m_2)g}{m_1 l_2} & -\frac{(m_1+m_2)g}{m_1 l_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}.$$

Označíme-li  $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ ,  $\ddot{\varphi} = \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{pmatrix}$  a

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\frac{(m_1+m_2)g}{m_1 l_1} & \frac{m_2 g}{m_1 l_1} \\ \frac{(m_1+m_2)g}{m_1 l_2} & -\frac{(m_1+m_2)g}{m_1 l_2} \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

dostaneme

$$\ddot{\varphi} = \mathbf{B}\varphi. \quad (3.3)$$

Přímým výpočtem zjistíme, že vlastní čísla matice  $\mathbf{B}$  dané vztahem (3.2) jsou tvaru

$$\mu_{1,2} = -\frac{g}{2m_1 l_1 l_2} \left( (m_1+m_2)(l_1+l_2) \pm \sqrt{(m_1+m_2)(m_1(l_1-l_2)^2 + m_2(l_1+l_2)^2)} \right). \quad (3.4)$$

Odtud je okamžitě vidět, že výraz pod odmocninou je kladný, dostaneme tedy  $\mu_1, \mu_2$  reálná různá. Dále lze dokázat, že platí  $\mu_{1,2} < 0$  (pro důkaz viz [2]) Nyní již můžeme přistoupit k důkazu věty o tvaru obecného řešení systému (3.3).

**Věta 3.1.** *Obecné řešení systému (3.3) lze psát ve tvaru*

$$\varphi(t) = A_1 \mathbf{v}_1 \sin(\sqrt{|\mu_1|}t + \alpha_1) + A_2 \mathbf{v}_2 \sin(\sqrt{|\mu_2|}t + \alpha_2), \quad (3.5)$$

kde  $A_1, A_2 \in \langle 0, \infty \rangle$ ,  $\alpha_1, \alpha_2 \in \langle 0, 2\pi \rangle$ ,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{m_2 g}{(m_1+m_2)g + \mu_1 m_1 l_1} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{m_2 g}{(m_1+m_2)g + \mu_2 m_1 l_1} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

a  $\mu_1, \mu_2$  jsou vlastní čísla matice  $\mathbf{B}$  daná vztahem (3.4).



*Důkaz.* Z teorie obyčejných diferenciálních rovnic víme, že systém (3.3) lze převést<sup>2</sup> na systém čtyř obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu tvaru

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}, \quad (3.7)$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{(m_1+m_2)g}{m_1l_1} & \frac{m_2g}{m_1l_1} & 0 & 0 \\ \frac{(m_1+m_2)g}{m_1l_2} & -\frac{(m_1+m_2)g}{m_1l_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Obecné řešení tohoto systému je tvaru

$$\mathbf{y}(t) = C_1\boldsymbol{\psi}_1(t) + C_2\boldsymbol{\psi}_2(t) + C_3\boldsymbol{\psi}_3(t) + C_4\boldsymbol{\psi}_4(t), \quad (3.9)$$

kde funkce  $\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \boldsymbol{\psi}_3, \boldsymbol{\psi}_4$  tvoří fundamentální systém řešení soustavy (3.7) a  $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$ . Z tvrzení 2.1 a faktu  $\mu_{1,2} < 0$  plyne, že matice  $\mathbf{A}$  má dvě dvojice komplexně sdružených vlastních čísel  $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{|\mu_1|}$ ,  $\lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{|\mu_2|}$ . Z věty 2.2 plyne, že vlastní vektory příslušné těmto vlastním číslům jsou také komplexně sdružené  $\mathbf{u}_{1,2} = \mathbf{a}_1 \pm i\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{u}_{3,4} = \mathbf{a}_2 \pm i\mathbf{b}_2$ . Získáme tak fundamentální systém řešení systému (3.7) ve tvaru

$$\boldsymbol{\psi}_{1,2}^*(t) = (\mathbf{a}_1 \pm i\mathbf{b}_1)e^{\pm i\sqrt{|\mu_1|}t},$$

$$\boldsymbol{\psi}_{3,4}^*(t) = (\mathbf{a}_2 \pm i\mathbf{b}_2)e^{\pm i\sqrt{|\mu_2|}t}.$$

Tato řešení upravíme pomocí Eulerova vzorce a obdržíme

$$\boldsymbol{\psi}_{1,2}^*(t) = (\mathbf{a}_1 \cos \sqrt{|\mu_1|}t - \mathbf{b}_1 \sin \sqrt{|\mu_1|}t) \pm i(\mathbf{a}_1 \sin \sqrt{|\mu_1|}t + \mathbf{b}_1 \cos \sqrt{|\mu_1|}t),$$

$$\boldsymbol{\psi}_{3,4}^*(t) = (\mathbf{a}_2 \cos \sqrt{|\mu_2|}t - \mathbf{b}_2 \sin \sqrt{|\mu_2|}t) \pm i(\mathbf{a}_2 \sin \sqrt{|\mu_2|}t + \mathbf{b}_2 \cos \sqrt{|\mu_2|}t).$$

Nyní vezmeme následující lineární kombinace těchto řešení

$$\boldsymbol{\psi}_1(t) = \frac{\boldsymbol{\psi}_1^*(t) + \boldsymbol{\psi}_2^*(t)}{2} = \mathbf{a}_1 \cos \sqrt{|\mu_1|}t - \mathbf{b}_1 \sin \sqrt{|\mu_1|}t,$$

$$\boldsymbol{\psi}_2(t) = \frac{\boldsymbol{\psi}_1^*(t) - \boldsymbol{\psi}_2^*(t)}{2i} = \mathbf{a}_1 \sin \sqrt{|\mu_1|}t + \mathbf{b}_1 \cos \sqrt{|\mu_1|}t,$$

$$\boldsymbol{\psi}_3(t) = \frac{\boldsymbol{\psi}_3^*(t) + \boldsymbol{\psi}_4^*(t)}{2} = \mathbf{a}_2 \cos \sqrt{|\mu_2|}t - \mathbf{b}_2 \sin \sqrt{|\mu_2|}t,$$

$$\boldsymbol{\psi}_4(t) = \frac{\boldsymbol{\psi}_3^*(t) - \boldsymbol{\psi}_4^*(t)}{2i} = \mathbf{a}_2 \sin \sqrt{|\mu_2|}t + \mathbf{b}_2 \cos \sqrt{|\mu_2|}t$$

a dostaneme tak reálný fundamentální systém řešení systému (3.7). Po dosazení do (3.9) získáme

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) = & C_1(\mathbf{a}_1 \cos \sqrt{|\mu_1|}t - \mathbf{b}_1 \sin \sqrt{|\mu_1|}t) + C_2(\mathbf{a}_1 \sin \sqrt{|\mu_1|}t + \mathbf{b}_1 \cos \sqrt{|\mu_1|}t) \\ & + C_3(\mathbf{a}_2 \cos \sqrt{|\mu_2|}t - \mathbf{b}_2 \sin \sqrt{|\mu_2|}t) + C_4(\mathbf{a}_2 \sin \sqrt{|\mu_2|}t + \mathbf{b}_2 \cos \sqrt{|\mu_2|}t). \end{aligned}$$

Protože ale hledáme řešení systému (3.3), zajímají nás pouze první dvě složky vektorové funkce  $\mathbf{y}$ . Jelikož jsou vlastní vektory matice  $\mathbf{B}$  reálné, podle věty 2.2

<sup>2</sup>Položíme-li  $\mathbf{y} = (\varphi, \dot{\varphi})^T$ , pak  $\dot{\mathbf{y}} = (\dot{\varphi}, \ddot{\varphi})^T = (\dot{\varphi}, \mathbf{B}\varphi)^T = \mathbf{A}\mathbf{y}$ .

jsou první dvě složky vektorů  $\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{b}_2$  nulové. Dále podle této věty první a druhá složka vektorů  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  tvoří vlastní vektory matice  $\mathbf{B}$ . Obecné řešení systému (3.3) můžeme tedy napsat ve tvaru

$$\varphi(t) = C_1 \mathbf{v}_1 \cos \sqrt{|\mu_1|} t + C_2 \mathbf{v}_1 \sin \sqrt{|\mu_1|} t + C_3 \mathbf{v}_2 \cos \sqrt{|\mu_2|} t + C_4 \mathbf{v}_2 \sin \sqrt{|\mu_2|} t,$$

kde  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  jsou vlastní vektory matice  $\mathbf{B}$  příslušné vlastním číslům  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ . Nyní stačí položit  $C_1 = A_1 \sin \alpha_1$ ,  $C_2 = A_1 \cos \alpha_1$  a  $C_3 = A_2 \sin \alpha_2$ ,  $C_4 = A_2 \cos \alpha_2$ , upravit pomocí goniometrického vzorce a dostaneme (3.5). Zbývá poznamenat, že vzhledem k větě 2.3 jsou vlastní vektory  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  tvaru (3.6).  $\square$

*Poznámka 3.2.* Vektor  $\varphi$  tedy vznikne složením dvojice anizochronních kmitů<sup>3</sup> s úhlovými frekvencemi  $\sqrt{|\mu_1|}$ ,  $\sqrt{|\mu_2|}$  (tzv. oscilačních módů). Obecně se tedy bude jednat o velmi komplikovaný pohyb, který nemusí být periodický. Budou-li úhlové frekvence  $\sqrt{|\mu_1|}$ ,  $\sqrt{|\mu_2|}$  soudělné, tj. bude-li platit

$$\frac{\sqrt{|\mu_1|}}{\sqrt{|\mu_2|}} = \frac{n_1}{n_2},$$

kde  $n_1$ ,  $n_2$  jsou nesoudělná přirozená čísla, pak výsledný pohyb bude periodický s periodou rovnou nejmenšímu společnému násobku jednotlivých period. Výsledný pohyb závisí také na amplitudách a fázích jednotlivých kmitů (viz [1]).

#### 4. SPECIÁLNÍ PŘÍPADY

V této části se podíváme na dva speciální případy soustavy, jejíž pohyb je popsán systémem rovnic (3.3). Nejprve předpokládáme, že  $l_1 = l_2 = l$ . Z (3.4) a (3.6) plyne, že vlastní čísla matice  $\mathbf{B}$  soustavy (3.3) jsou ve tvaru

$$\mu_{1,2} = -\frac{g}{m_1 l} (m_1 + m_2 \pm \sqrt{(m_1 + m_2)m_2})$$

a odpovídající vlastní vektory jsou násobky vektorů

$$\mathbf{v}_{1,2} = \begin{pmatrix} \mp \sqrt{m_2} \\ \sqrt{m_1 + m_2} \end{pmatrix}.$$

Dále:

- Jestliže je navíc hmotnost obou hmotných bodů stejná, tj.  $m_1 = m_2 = m$ , pak vlastní čísla matice  $\mathbf{B}$  jsou ve tvaru

$$\mu_{1,2} = -\frac{g}{l} (2 \pm \sqrt{2})$$

a vlastní vektory jsou násobky vektorů

$$\mathbf{v}_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mp \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Podle věty 3.1 je pohyb soustavy složením módů

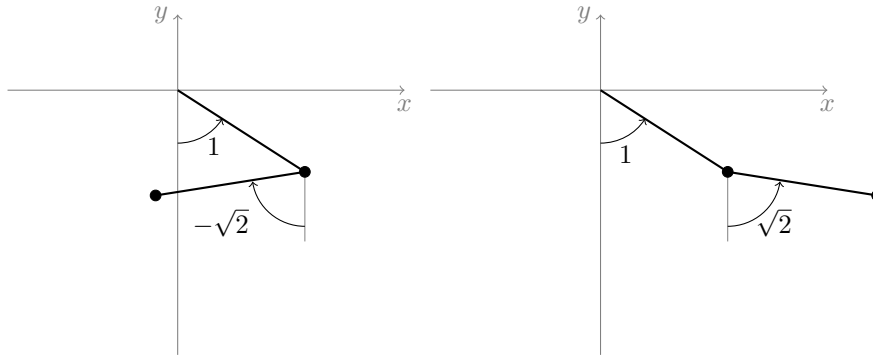
$$\varphi_1(t) = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \sin \left( \sqrt{\frac{g}{l}} (2 + \sqrt{2}) t + \alpha_1 \right)$$

<sup>3</sup>tj. stejnosměrných kmitů různých frekvencí

a

$$\varphi_2(t) = A_2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \sin \left( \sqrt{\frac{g}{l}} (2 - \sqrt{2}) t + \alpha_2 \right).$$

Tyto módy si můžeme představit jako periodické pohyby při nulových počátečních rychlostech a počátečních podmínkách ukázaných na obrázku 2 (tj.  $A_1 = A_2 = 1$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ ).



**Obrázek 2.** Oscilační módy pro  $m_1 = m_2$  a  $l_1 = l_2$ .

- Jestliže je hmotnost prvního hmotného bodu výrazně větší než hmotnost druhého hmotného bodu, tj.  $m_1 \gg m_2$  a označíme-li  $\varepsilon = \frac{m_2}{m_1}$ , pak po úpravách dostaneme vlastní čísla matice  $\mathbf{B}$  ve tvaru

$$\mu_{1,2} = -\frac{g}{l} (1 + \varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon(1 + \varepsilon)})$$

a vlastní vektory jsou násobky vektorů

$$\mathbf{v}_{1,2} = \begin{pmatrix} \mp \sqrt{\varepsilon} \\ \sqrt{1 + \varepsilon} \end{pmatrix}.$$

Podle věty 3.1 je pohyb soustavy složením módů

$$\varphi_1(t) = A_1 \left( \frac{-\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{1 + \varepsilon}} \right) \sin \left( \sqrt{\frac{g}{l}} (1 + \varepsilon + \sqrt{\varepsilon(1 + \varepsilon)}) t + \alpha_1 \right)$$

a

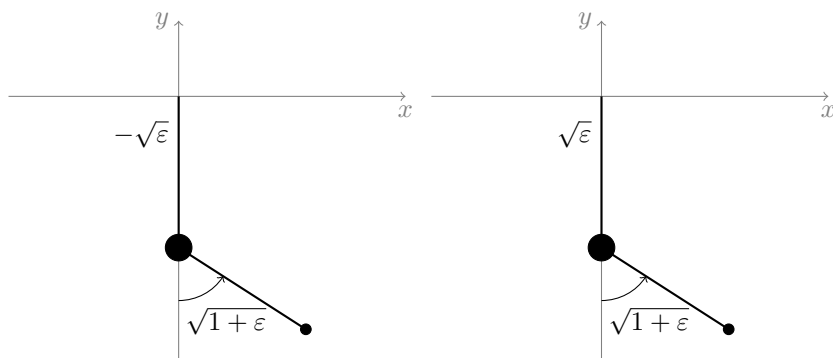
$$\varphi_2(t) = A_2 \left( \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{1 + \varepsilon}} \right) \sin \left( \sqrt{\frac{g}{l}} (1 + \varepsilon - \sqrt{\varepsilon(1 + \varepsilon)}) t + \alpha_2 \right).$$

Tyto módy jsou znázorněny na obrázku 3.

Všimněme si, že

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sqrt{|\mu_{1,2}|} = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathbf{v}_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

V těchto oscilačních módech se první hmotný bod v podstatě nebude hýbat a druhý bude v podstatě kmitat jako jednoduché kyvadlo délky  $l$ . Vzhledem k poznámce 3.2 bude pohyb soustavy periodický pouze v případě, je-li  $A_1 = 0$  nebo  $A_2 = 0$ .



**Obrázek 3.** Oscilační módy pro  $m_1 \gg m_2$  a  $l_1 = l_2$ .

### 5. ZÁVĚR

Při modelování mechanických soustav se vyskytují obyčejné diferenciální rovnice, případně jejich systémy. Nejčastěji se jedná o rovnice druhého řádu, které jsou nelineární. Omezíme-li se však na malé výchylky, lze tyto rovnice aproximovat lineárním systémem rovnic. V tomto článku jsme se zaměřili na dvojité kyvadlo. Nastínili jsme odvození systému pohybových rovnic, dále byla dokázána věta o tvaru obecného řešení linearizovaného systému a nakonec jsme diskutovali dva speciální případy této mechanické soustavy.

### REFERENCE

- [1] J. Bajer: *Mechanika 3*, Univerzita Palackého, Olomouc, 2006.
- [2] P. Kamarýt: *Matematické modelování mechanických soustav*, Bakalářská práce, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Brno, 2020.
- [3] P. Kulhánek: *Vybrané kapitoly z teoretické fyziky*, AGA, Praha, 2016.
- [4] D. Morin: *Introduction to classical mechanics: With problems and solutions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

Petr Kamarýt, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,  
*e-mail*: 200675@vutbr.cz

**VYBRANÉ ÚLOHY Z UČEBNICE R. H. WASSERMANA  
TENSORS AND MANIFOLDS WITH APPLICATIONS TO  
PHYSICS; I. LINEÁRNÍ ALGEBRA**

DUŠAN NAVRÁTIL

ABSTRAKT. V tomto článku jsou vyřešeny vybrané úlohy z učebnice R. H. Wassermana *Tensors and Manifolds* [1]. První část problémů se týká ekvivalentních definic pojmů z lineární algebry, druhá část je zaměřena na důkaz nespočetnosti báze prostoru lineárních forem a třetí část je věnována ekvivalenci reprezentací lineárních zobrazení.

ÚVOD

V literatuře z lineární algebry se můžeme setkat s různými, ale ekvivalentními definicemi některých pojmů. Pomocí různých definic jsou například nadefinovány pojmy lineárního obalu, součtu vektorových podprostorů, lineárně nezávislých množin a bází. Účelem první kapitoly bude ukázat ekvivalenci a souvislosti mezi různými definicemi těchto pojmů.

Druhá kapitola je dále věnována prostoru lineárních zobrazení  $L(V, \mathbb{R})$  z vektorového prostoru  $V$  do tělesa reálných čísel  $\mathbb{R}$  (neboli také prostoru lineárních forem  $V^*$ ). V této kapitole bude ukázáno, že spočetnost báze prostoru  $V$  implikuje nespočetnost báze prostoru  $L(V, \mathbb{R})$ .

V závěrečné třetí kapitole bude rozebrán problém ekvivalence dvou lineárních zobrazení  $\phi, \psi \in L(V, V^*)$  pomocí maticových reprezentací (kongruentní matice) a matice přechodu.

Symbolem  $\mathbb{K}$  bude v textu označena množina reálných nebo komplexních čísel ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ).

1. EKVIVALENTNÍ DEFINICE POJMŮ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY

Ke každému pojmu v první kapitole budou uvedeny dvě ekvivalentní definice spolu s důkazem této ekvivalence.

---

2010 MSC. Primární 15A03, 15A24.

*Klíčová slova.* Vektorový prostor, báze, lineární zobrazení, duální prostor.

### 1.1. Lineární obal

**Definice 1.1.** Necht'  $S$  je libovolná množina (ne nutně konečná) prvků vektorového prostoru  $V$ . Lineární obal  $\langle S \rangle$  je průnik všech vektorových podprostorů prostoru  $V$ , obsahujících množinu  $S$ .

**Definice 1.2.** Necht'  $S$  je libovolná množina (ne nutně konečná) prvků vektorového prostoru  $V$ . Lineární obal  $\langle S \rangle$  je množina všech lineárních kombinací prvků množiny  $S$ .

V důkazu ekvivalence využijeme následující pomocné lemma.

**Lemma 1.3.** Necht'  $A, B \neq \emptyset$  jsou libovolné podmnožiny vektorového prostoru  $V$ . Pak

$$A \subseteq B \Rightarrow \langle A \rangle \subseteq \langle B \rangle,$$

kde lineární obal  $\langle A \rangle$  množiny  $A$  uvažujeme podle definice 1.1.

*Důkaz.* Pro případ  $A \supset B$  je tvrzení splněno triviálně. Necht'  $A \subseteq B$ . Lineární obal  $\langle A \rangle$  je průnik všech vektorových prostorů obsahujících množinu  $A$ . Označme tyto prostory obsahující množinu  $A$  jako  $A_p$ ,  $p \in I$  a obdobně pro lineární obal  $\langle B \rangle$  označme prostory obsahující množinu  $B$  jako  $B_r$ ,  $r \in J$ . Platí tedy

$$\langle A \rangle = \bigcap_{p \in I} A_p, \quad \langle B \rangle = \bigcap_{r \in J} B_r.$$

Zřejmě platí

$$x \in \langle A \rangle = \bigcap_{p \in I} A_p \Rightarrow x \in B_r \quad \forall r \in J,$$

neboť pokud prvek  $x$  patří do každého prostoru obsahující množinu  $A$ , pak musí patřit i do prostoru  $B_r$ , neboť vektorový prostor  $B_r$  množinu  $A$  také obsahuje. Index  $r$  byl pro  $B_r$  zvolen libovolně a implikace tak platí  $\forall r \in J$ . Odtud získáme

$$x \in \langle A \rangle = \bigcap_{p \in I} A_p \Rightarrow x \in \bigcap_{r \in J} B_r = \langle B \rangle,$$

odkud již nutně  $\langle A \rangle \subseteq \langle B \rangle$ . □

**Tvrzení 1.4.** Definice 1.1 a 1.2 jsou ekvivalentní.

*Důkaz.* Označme nejdříve průnik všech podprostorů obsahující  $S$ , jako

$$W = \bigcap_{p \in I} W_p,$$

a množinu všech (konečných) lineárních kombinací jako

$$L = \{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n; \alpha_i \in \mathbb{K}, x_i \in S, n \in \mathbb{N}\}.$$

V první části dokážeme  $L \subseteq W$ . Platí

$$x \in L \Rightarrow \exists \alpha_i \in \mathbb{K}, \exists x_i \in S, \exists k \in \mathbb{N}; x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k.$$

Dále z  $x_1, \dots, x_k \in S$  plyne  $x_1, \dots, x_k \in W_p \forall p \in I$  a jelikož  $W_p$  je vektorový prostor pro libovolné  $p \in I$ , pak  $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k \in W_p \forall p \in I$  a tím pádem  $x \in W$ .

V druhé části dokážeme  $W \subseteq L$ . Zřejmě platí  $S \subseteq L$ , neboť každý prvek  $x_i \in S$  můžeme napsat ve tvaru  $x_i = 1 \cdot x_i \in L$ . Dále  $L = \langle L \rangle$ , neboť množina všech lineárních kombinací je sama o sobě vektorovým prostorem.

Z nerovnosti  $S \subseteq L$  tak pomocí lemmatu 1.3 dostáváme  $W = \langle S \rangle \subseteq \langle L \rangle = L$  a tvrzení je dokázané.  $\square$

## 1.2. Součet vektorových podprostorů

**Definice 1.5.** Necht'  $\{W_i\}$  je libovolná množina (ne nutně konečná) vektorových podprostorů prostoru  $V$ . Součet podprostorů  $\sum_i W_i$  prostoru  $V$  je průnik všech podprostorů  $V$  obsahujících množinu  $\bigcup_i W_i$ .

**Definice 1.6.** Necht'  $\{W_i\}$  je libovolná množina (ne nutně konečná) vektorových podprostorů prostoru  $V$ . Součet podprostorů  $\sum_i W_i$  prostoru  $V$  je množina všech vektorů, které lze napsat ve tvaru konečných součtů  $w_{i_1} + w_{i_2} + \dots + w_{i_n}$ , kde

$$w_{i_1} \in W_{i_1}, w_{i_2} \in W_{i_2}, \dots, w_{i_n} \in W_{i_n}.$$

**Tvrzení 1.7.** *Definice 1.5 a 1.6 jsou ekvivalentní.*

*Důkaz.* Označme symbolem  $P$  průnik všech podprostorů  $V$  obsahujících  $\bigcup_i W_i$  a symbolem  $S$  množinu vektorů ve tvaru zmíněných součtů.

Nejdříve dokážeme  $P \subseteq S$ . Pokud  $x \in P$ , pak  $x$  patří (podle definice) do lineárního obalu množiny  $\bigcup_i W_i$ . Z předchozího tvrzení víme, že lineární obal  $\bigcup_i W_i$  je množina všech lineárních kombinací prvků  $\bigcup_i W_i$ . Tím pádem pro  $j = 1, \dots, n$

$$\exists \alpha_j \in \mathbb{K}, w_{i_1} \in W_{i_1}, w_{i_2} \in W_{i_2}, \dots, w_{i_n} \in W_{i_n},$$

že platí

$$\left\langle \bigcup_i W_i \right\rangle \ni x = \alpha_1 w_{i_1} + \alpha_2 w_{i_2} + \dots + \alpha_n w_{i_n} \in S,$$

neboť pro každý sčítanec máme  $\alpha_j w_{i_j} \in W_{i_j}$  (plyne z vlastnosti, že  $W_{i_j}$  je vektorový prostor).

Nyní dokážeme  $S \subseteq P$ . Necht'  $x \in S$ . Pak lze tento prvek zapsat pomocí  $w_{i_1} \in W_{i_1}, w_{i_2} \in W_{i_2}, \dots, w_{i_n} \in W_{i_n}$ , ve tvaru

$$S \ni w_{i_1} + w_{i_2} + \dots + w_{i_n} = 1 \cdot w_{i_1} + 1 \cdot w_{i_2} + \dots + 1 \cdot w_{i_n} \in \left\langle \bigcup_i W_i \right\rangle = P.$$

$\square$

## 1.3. Lineárně nezávislá množina

**Definice 1.8.** Množinu  $S$  vektorů nazveme lineárně nezávislou, pokud pro všechny konečné součty  $\sum_i a_i v_i, v_i \in S$  platí  $\sum_i a_i v_i = o \Rightarrow a_i = 0 \forall i$ .

**Definice 1.9.** Množinu  $S$  vektorů nazveme lineárně nezávislou, pokud  $o \notin S$  a zároveň každý konečný součet podprostorů tvaru  $l_v = \{av \mid a \in \mathbb{K}, v \in S\}$  je přímý.

**Tvrzení 1.10.** *Definice 1.8 a 1.9 jsou ekvivalentní.*

*Důkaz.* Dokážeme ekvivalenci opačných tvrzení. Chceme tedy dokázat, že existuje konečný součet  $\sum_i a_i v_i$ ,  $v_i \in S$  s vlastností  $\sum_i a_i v_i = o$  (kde alespoň jeden člen  $a_i$  je nenulový) právě tehdy, když  $o \in S$  nebo existuje konečný součet podprostorů  $l_v$ , který není přímý. Předpokládejme nejdříve, že existuje konečný součet  $n$  vektorů množiny  $S$ , pro který platí

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = o \wedge \exists i \ a_i \neq 0.$$

Z tohoto tvrzení vyplývá, že člen s nenulovým koeficientem  $a_i$  lze vyjádřit jako součet ostatních členů. Platí tedy

$$-a_i v_i = a_1 v_1 + \cdots + a_{i-1} v_{i-1} + a_{i+1} v_{i+1} + \cdots + a_n v_n$$

odtud dostáváme

$$l_{v_i} \cap \sum_{j \neq i} l_{v_j} \neq o,$$

což platí pouze tehdy, když  $v_i \neq o$  a součet podprostorů tedy není přímý. Kdyby  $v_i = o$ , pak nenulové  $a_i$  lze zvolit libovolně a  $v_i = o \in S$ .

Předpokládejme nyní, že  $o \in S$  nebo existuje konečný součet podprostorů  $l_v$ , který není přímý. Pokud  $o \in S$ , důkaz je zřejmý (tento člen vynásobíme libovolným koeficientem  $a$  a všechny ostatní koeficienty položíme rovny nule). Nechť daný konečný součet podprostorů  $l_v$  není přímý. To znamená

$$l_{v_i} \cap \sum_{j \neq i} l_{v_j} \neq o, \quad \forall i.$$

Existuje tedy nenulový vektor, který se nachází v obou množinách. V množině  $l_{v_i}$  nabývá tvaru  $a_i v_i$  a v množině  $\sum_{j \neq i} l_{v_j}$  tvaru  $a_1 v_1 + \cdots + a_{i-1} v_{i-1} + a_{i+1} v_{i+1} + \cdots + a_n v_n$ , odkud

$$\begin{aligned} a_i v_i &= a_1 v_1 + \cdots + a_{i-1} v_{i-1} + a_{i+1} v_{i+1} + \cdots + a_n v_n, \\ a_1 v_1 + \cdots + a_{i-1} v_{i-1} - a_i v_i + a_{i+1} v_{i+1} + \cdots + a_n v_n &= o. \end{aligned}$$

Jelikož je člen  $a_i v_i$  nenulový, tvrzení platí. Díky libovolně zvolenému  $n \in \mathbb{N}$  tvrzení platí pro libovolně velké součty.  $\square$

#### 1.4. Báze vektorového prostoru

**Definice 1.11.** Množinu  $S$  vektorů  $v_i \in S$  nazveme bází podprostoru  $W$  prostoru  $V$ , pokud je lineárně nezávislá a generuje podprostor  $W$ .

**Definice 1.12.** Množinu  $S$  vektorů  $v_i \in S$  nazveme bází podprostoru  $W$  prostoru  $V$ , pokud pro každé  $v_i \in S$  existuje právě jedno  $a_i \in \mathbb{K}$  tak, že každý vektor  $w \in W$  lze vyjádřit ve tvaru  $w = \sum_i a_i v_i$ .

**Tvrzení 1.13.** *Definice 1.11 a 1.12 jsou ekvivalentní.*



*Důkaz.* Předpokládejme nejdříve, že daný vektor  $w \in W$  lze vyjádřit dvěma různými způsoby pomocí koeficientů  $a_i, b_i \in \mathbb{K}$  jako

$$w = \sum_i a_i v_i = \sum_i b_i v_i,$$

dále od sebe odečteme odpovídající si členy, odkud obdržíme

$$\sum_i a_i v_i - \sum_i b_i v_i = \sum_i (a_i - b_i) v_i = o.$$

Jelikož je množina  $S$  lineárně nezávislá, pak z této rovnosti plyne

$$a_i - b_i = 0 \quad \forall i \implies a_i = b_i \quad \forall i,$$

a vektor  $w$  tak lze vyjádřit pouze jediným možným způsobem, pomocí koeficientů  $a_i \in \mathbb{K}$ .

Nyní naopak předpokládejme, že libovolný vektor  $w \in W$  lze vyjádřit pouze pomocí jediné  $n$ -tice koeficientů  $a_i \in \mathbb{K}$  a vektorů  $v_i \in S$ , tedy

$$w = \sum_i a_i v_i.$$

Je zřejmé, že množina  $S$  generuje podprostor  $W$ , neboť každý vektor  $w \in W$  lze vyjádřit pomocí lineární kombinace  $v_i \in S$ . Zbývá dokázat, že množina  $S$  je lineárně nezávislá. Necht'

$$w = \sum_i a_i v_i = o.$$

Jelikož je vektor  $w$  nulový a pro každý vektor  $w \in W$  existuje pouze jediná  $n$ -tice koeficientů  $a_i \in \mathbb{K}$ , která tuto rovnost splňuje, touto  $n$ -ticí musí být koeficienty  $a_i = 0 \quad \forall i$ , což je definice lineární nezávislosti.  $\square$

## 2. NESPOČETNOST BÁZE PROSTORU $L(V, \mathbb{R})$

Než se pustíme k samotnému důkazu nespočetnosti báze  $L(V, \mathbb{R})$  za předpokladu spočetnosti báze  $V$ , dokážeme tvrzení 2.1, které bude v důkazu nápomocné. Pro snadnější čitelnost bude použita Einsteinova sumační konvence.

**Tvrzení 2.1.** *Necht'  $V$  a  $W$  jsou vektorové prostory a  $S$  je báze prostoru  $V$ . Pak existuje právě jedno lineární zobrazení  $\phi : V \rightarrow W$  takové, že  $\phi(v_i) = w_i$ , kde  $v_i \in S$  a  $w_i$  jsou libovolně zvolené prvky  $W$ .*

*Důkaz.* Definujme  $\phi$  jako zobrazení

$$\phi(v) = a^i w_i \quad \text{pro } v = a^i v_i.$$

Takové zobrazení je lineární, neboť

$$\phi(u + v) = \phi(b^i v_i + a^i v_i) = \phi((b^i + a^i) v_i) = (b^i + a^i) w_i = b^i w_i + a^i w_i = \phi(u) + \phi(v)$$

a

$$\phi(\alpha v) = \phi(\alpha a^i v_i) = \alpha a^i w_i = \alpha \phi(v).$$

Předpokládejme dále, že existuje jiné lineární zobrazení  $\psi : V \rightarrow W$ , pro které platí  $\psi(v_i) = w_i$ . Díky linearitě  $\psi$  získáme

$$\psi(v) = \psi(a^i v_i) = a^i \psi(v_i) = a^i w_i$$

a tedy

$$\phi(v) = \psi(v), \quad \forall v \in V,$$

odkud plyne  $\phi = \psi$ . □

Pro případ  $W = \mathbb{R}$  (neboli  $\phi \in L(V, \mathbb{R}) = V^*$ ) toto tvrzení říká, že pro libovolně zvolené reálné číslo  $r \in \mathbb{R}$  a přirozené číslo  $k \in \mathbb{N}$ , existuje pouze jedno lineární zobrazení  $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}$ , pro které platí (předpokládáme uspořádanou bázi prostoru  $V$ )

$$\phi(v_k) = r, \quad \phi(v_j) = 0, \quad \forall j \neq k$$

a je tedy ve tvaru

$$\phi(v) = \phi(a^i v_i) = a^i \phi(v_i) = a^k r.$$

Nyní mohou nastat dva různé případy pro  $V$ . Pokud je  $V$  konečněrozměrný prostor ( $\dim V = n < \aleph_0$ ), pak jsou prostory  $V$  a  $V^*$  izomorfní a  $k \leq n$ . Tento izomorfismus je dán zobrazením

$$\Phi : V \rightarrow V^*,$$

$$\Phi(v_k) = \phi_k(v), \quad k = 1, \dots, n$$

( $\phi_k(v)$  je zobrazení popsané výše) a odpovídajícími reálnými čísly  $r_k$ .

Pokud je naopak  $V$  nekonečněrozměrný ( $\dim V \geq \aleph_0$ ), pak je obecně  $V^*$  větší než  $V$  (viz. následující tvrzení) a  $k \in \mathbb{N}$ .

**Tvrzení 2.2.** *Nechť  $L(V, \mathbb{R})$  je vektorový prostor všech lineárních zobrazení (lineárních forem) z vektorového prostoru  $V$  do  $\mathbb{R}$ . Pokud má  $V$  spočetně nekonečnou bázi, pak je báze prostoru  $L(V, \mathbb{R})$  nespočetně nekonečná.*

*Důkaz.* Nechť  $S = \{v_1, v_2, v_3, \dots\}$  je spočetná báze prostoru  $V$ . Uvažujme dále množinu všech posloupností reálných čísel tvaru  $(1, r, r^2, r^3, \dots)$ , kde  $r > 1$  a označme posloupnost pro dané  $r$  symbolem  $\varrho_r$ . Podle tvrzení 2.1 víme, že existuje právě jedno lineární zobrazení  $f_r$ , pro které platí

$$f_r(v_i) = r^{i-1}.$$

Odpovídajících posloupností je zřejmě díky  $r \in \mathbb{R}$ ,  $r > 1$  nespočetně mnoho. Zbývá tedy ukázat, že libovolná konečná podmnožina lineárních zobrazení  $\{f_1, \dots, f_n\}$  je lineárně nezávislá.

Jako první část důkazu ověříme, že množina posloupností

$$\varrho_r = \{r^{k-1}\}_{k=1}^{\infty} = (1, r, r^2, r^3, \dots), \quad r > 1,$$

je lineárně nezávislou podmnožinou vektorového prostoru všech posloupností.

Mějme tedy  $n$  posloupností, které odpovídají  $n$ -prvkové množině  $\{f_{r_1}, \dots, f_{r_n}\}$ , a seřaďme je vzestupně podle velikosti  $r_i$ , tedy  $\varrho_{r_1}, \varrho_{r_2}, \dots, \varrho_{r_n}$ , kde  $r_i > r_j$  pro

$i > j$ . Díky  $r > 1$  platí také  $(r_i^k > r_j^k, i > j) \wedge (r_k^i > r_k^j, i > j)$  pro  $k \in \mathbb{N}$ . Vytvořme nyní libovolnou lineární kombinaci těchto posloupností

$$a_1 \varrho_{r_1} + a_2 \varrho_{r_2} + \cdots + a_n \varrho_{r_n}.$$

Pro dokázání lineární nezávislosti položíme součet těchto posloupností roven nulové posloupnosti  $(0, 0, 0, \dots)$ . Obdržíme tak systém spočetně mnoha rovnic

$$\sum_{i=1}^n a_i r_i^k = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Chceme tedy dokázat

$$a_1 r_1^k + a_2 r_2^k + \cdots + a_n r_n^k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow a_1 = \cdots = a_n = 0,$$

kde  $r_i > 1$ . Celou rovnici vydělíme členem  $r_n^k$ , odkud obdržíme

$$a_1 \left(\frac{r_1}{r_n}\right)^k + a_2 \left(\frac{r_2}{r_n}\right)^k + \cdots + a_{n-1} \left(\frac{r_{n-1}}{r_n}\right)^k + a_n = 0.$$

Jelikož platí  $r_i > r_j, \forall i > j$ , pak nutně

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_1 \left(\frac{r_1}{r_n}\right)^k + a_2 \left(\frac{r_2}{r_n}\right)^k + \cdots + a_{n-1} \left(\frac{r_{n-1}}{r_n}\right)^k + a_n = a_n = 0.$$

Totéž opakujeme pro koeficienty  $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1$ , odkud dostáváme  $a_1 = \cdots = a_n = 0$ , a množina posloupností je tak nutně lineárně nezávislá.

V druhé části důkazu je třeba ukázat, že se lineární nezávislost mezi vektorovými prostory izomorfním lineárním zobrazením přenáší. Mějme izomorfní lineární zobrazení  $\phi$  mezi prostory  $V$  a  $W$ , dále  $\{v_1, \dots, v_n\}$  lineárně nezávislou podmnožinu  $V$  a  $\{w_1, \dots, w_n\}$  množinu odpovídajících prvků ve  $W$ . Pak máme

$$\begin{aligned} b_1 w_1 + \cdots + b_n w_n &= b_1 \phi(v_1) + \cdots + b_n \phi(v_n) \\ &= \phi(b_1 v_1) + \cdots + \phi(b_n v_n) = \phi(b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n) = 0, \end{aligned}$$

kde za předpokladu, že zobrazení  $\phi$  je izomorfní, musí platit

$$b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n = 0.$$

Množina  $\{v_1, \dots, v_n\}$  je však lineárně nezávislá a proto  $b_1 = \cdots = b_n = 0$ , odkud plyne lineární nezávislost  $\{w_1, \dots, w_n\}$ .

Poslední část důkazu spočívá v nalezení izomorfního lineárního zobrazení, které by díky bijekci zachovávalo lineární nezávislost. Toto zobrazení zavedeme následujícím způsobem. Nechť  $(a_1, a_2, a_3, \dots)$  je libovolná posloupnost, které přiřadíme index  $\alpha = a_1 a_2 a_3 \dots$ . Pak odpovídající lineární zobrazení bude mít díky tvrzení 2.1 tvar pro báze vektory  $v_i$

$$f_\alpha(v_i) = a_i, \quad i \in \mathbb{N},$$

a zároveň bude lineární. Je zřejmé, že takto zavedená lineární zobrazení (označme např.  $F$ ) budou tvořit vektorový prostor, neboť tvoří podmnožinu vektorového prostoru všech lineárních zobrazení. Nulovým prvkem je zobrazení

$$f_0(v_i) = 0,$$

kteří zobrazí libovolný vektor na nulu. Součet dvou zobrazení a skalární násobek splňují

$$\begin{aligned} f_\alpha(v_i) + f_\beta(v_i) &= a_i + b_i = f_{\alpha+\beta}(v_i) \in F, \\ a \cdot f_\alpha(v_i) &= a \cdot a_i = f_{a\alpha}(v_i) \in F. \end{aligned}$$

Mezi vektorovým prostorem  $F \subseteq L(V, \mathbb{R})$  a posloupnostmi  $\mathbb{R}^\infty$  tak existuje bijekce spolu s lineárním zobrazením a jde tedy o izomorfismus. Z předchozího plyne, že z lineární nezávislosti posloupností  $\varrho_{r_1}, \varrho_{r_2}, \dots, \varrho_{r_n}$ , plyne lineární nezávislost odpovídající množiny  $\{f_{r_1}, \dots, f_{r_n}\}$ . Jelikož je takových množin v prostoru  $L(V, \mathbb{R})$  díky  $r \in \mathbb{R}, r > 1$  nespočetně mnoho, existuje nespočetně mnoho lineárně nezávislých podmnožin  $L(V, \mathbb{R})$ , odkud plyne existence nespočetné báze prostoru  $L(V, \mathbb{R})$ .  $\square$

### 3. EKVIVALENCE LINEÁRNÍCH ZOBRAZENÍ MEZI $V$ A $V^*$

V poslední kapitole se budeme zabývat lineárními zobrazeními mezi prostory  $V$  a  $V^*$ , pro případ  $\dim V = \dim V^* = n \in \mathbb{N}$ . Z lineární algebry víme, že množinu všech lineárních zobrazení z vektorového prostoru  $V$  do sebe sama (endomorfismů), můžeme ztotožnit s množinou matic  $M_n(\mathbb{K})$  nad  $\mathbb{K}$ . Pokud navíc předpokládáme tato zobrazení bijektivní (automorfismy  $\phi : V \rightarrow V$ ), můžeme je ztotožnit s množinou regulárních matic  $GL(n, \mathbb{K})$ . Nyní si připomeneme, jakým způsobem se změní složky vektorů při změně báze prostoru  $V$  a jak můžeme reprezentovat lineární zobrazení pomocí matic.

Uvažujme vektor  $v \in V$  v  $n$ -rozměrném prostoru  $V$ , s bází  $\{e_i\}$ . Z definice báze víme, že k vektoru  $v$  existuje jednoznačně určená  $n$ -tice reálných čísel taková, že platí  $v = x^i e_i$  a tedy

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

jednoznačně popisuje vektor  $v$  při stanovené bázi  $\{e_i\}$ . Pokud dojde ke změně báze na bázi  $\{\bar{e}_i\}$ , popisujeme sice stejný vektor  $v$ , ale  $n$ -tice reálných čísel je tentokrát odlišná, tedy

$$v = y^i \bar{e}_i, \quad y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n.$$

Díky lineární nezávislosti bází  $\{e_i\}$  a  $\{\bar{e}_i\}$  existuje právě jedna matice  $a_j^i \in GL(n, \mathbb{K})$ , pro kterou platí

$$\bar{e}_j = a_j^i e_i.$$

Dosazením této rovnosti do jednotlivých vyjádření  $v$  získáme

$$v = x^i e_i = y^j a_j^i e_i$$

odkud

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$$

a tedy

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Matici  $a_j^i$  říkáme matice přechodu. Vyjadřuje, jakým způsobem se změní složky vektorů při změně báze. Díky lineární nezávislosti prvků báze je matice přechodu nutně regulární a inverzní matice vždy existuje.

Pro reprezentaci lineárního zobrazení pomocí matic mějme vektorové prostory  $V$  a  $W$  s bázemi  $\{e_i\}$ , resp.  $\{E_i\}$  a dimenzemi  $\dim V = n$ , resp.  $\dim W = m$ . Pak pro lineární zobrazení  $\phi : V \rightarrow W$  a  $i$ -tý prvek báze  $e_i$  bude existovat podle tvrzení 2.1 jednoznačně určená  $m$ -tice čísel  $\phi_i^j$ ,  $j = 1, \dots, m$  taková, že platí

$$\phi(e_i) = \phi_i^j E_j.$$

Pokud pak  $v \in V$ ,  $w \in W$ , získáme

$$y^j E_j = w = \phi(v) = \phi(x^i e_i) = x^i \phi(e_i) = x^i \phi_i^j E_j$$

Takové lineární zobrazení  $\phi$  je pak vyjádřeno maticovým násobením

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1^1 & \phi_1^2 & \cdots & \phi_1^n \\ \phi_2^1 & \phi_2^2 & \cdots & \phi_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_m^1 & \phi_m^2 & \cdots & \phi_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

a říkáme, že matice  $\phi_i^j$  reprezentuje lineární zobrazení  $\phi$ .

Dále dokážeme pomocné tvrzení, které říká, že matice přechodu  $b_j^i$  mezi bázemi  $V^*$  je inverzní k matici přechodu  $a_j^i$  mezi odpovídajícími bázemi  $V$ .

**Tvrzení 3.1.** *Nechť  $\{e_i\}$  a  $\{\bar{e}_i\}$  jsou báze  $V$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $\{\varepsilon^i\}$  a  $\{\bar{\varepsilon}^i\}$  odpovídající duální báze  $V^*$ . Pokud*

$$(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n) = (e_1 \dots e_n) \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix},$$

pak

$$\begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_1 \\ \vdots \\ \bar{\varepsilon}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^1 & \dots & b_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ b_1^n & \dots & b_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix},$$

kde  $a_j^i b_k^j = \delta_k^i$  (matice přechodu  $b_j^i$  je inverzní k matici přechodu  $a_j^i$ ).

*Důkaz.* Necht  $v$  je libovolný vektor prostoru  $V$ . Pak

$$v = x^1 e_1 + \dots + x^n e_n = y^1 \bar{e}_1 + \dots + y^n \bar{e}_n$$

a

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (v) = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_1 \\ \vdots \\ \bar{\varepsilon}_n \end{pmatrix} (v) = \begin{pmatrix} \bar{v}^1 \\ \vdots \\ \bar{v}^n \end{pmatrix}.$$

Jelikož

$$v = (e_1 \dots e_n) \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n) \begin{pmatrix} \bar{v}^1 \\ \vdots \\ \bar{v}^n \end{pmatrix}$$

pak

$$\begin{aligned} v &= (e_1 \dots e_n) \begin{pmatrix} \varepsilon^1 \\ \vdots \\ \varepsilon^n \end{pmatrix} (v) = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n) \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}^1 \\ \vdots \\ \bar{\varepsilon}^n \end{pmatrix} (v) \\ &= (e_1 \dots e_n) \begin{pmatrix} a_1^1 \dots a_n^1 \\ \vdots \\ a_1^n \dots a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}^1 \\ \vdots \\ \bar{\varepsilon}^n \end{pmatrix} (v). \end{aligned}$$

Protože pro danou bázi  $\{e_i\}$  je lineární kombinace vektoru  $v$  dána jednoznačně, musí platit

$$\begin{pmatrix} \varepsilon^1 \\ \vdots \\ \varepsilon^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 \dots a_n^1 \\ \vdots \\ a_1^n \dots a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}^1 \\ \vdots \\ \bar{\varepsilon}^n \end{pmatrix}.$$

Matice  $a_j^i$  je regulární a existuje k ní tedy inverzní matice  $b_j^i$ . Vynásobením rovnice zleva maticí  $b_j^i$  dostáváme požadovanou rovnost

$$\begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_1 \\ \vdots \\ \bar{\varepsilon}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^1 \dots b_n^1 \\ \vdots \\ b_1^n \dots b_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$

□

Nyní přejdeme k samotnému tvrzení, které dává do souvislosti ekvivalentní lineární zobrazení při změně báze prostoru  $V$ .

**Tvrzení 3.2.** *Necht  $V$  je  $n$ -rozměrný vektorový prostor. Pak dvě matice  $M = \phi_j^i$  a  $N = \psi_j^i$  reprezentují (vzhledem ke stanoveným bázím prostoru  $V$  a jejich duálním bázím ve  $V^*$ ) stejné lineární zobrazení z  $V$  do  $V^*$  právě tehdy, když platí  $N = A^T M A$ , kde  $A$  je matice přechodu  $a_j^i$  mezi bázemi  $V$ .*

*Důkaz.* Necht'  $\{e_i\}$ ,  $\{\bar{e}_i\}$  jsou dvě různé báze prostoru  $V$  s maticí přechodu  $A = a_j^i$ . Předpokládejme nejdříve, že matice  $M = \phi_j^i$  a  $N = \psi_j^i$  reprezentují stejné lineární zobrazení z  $V$  do  $V^*$  a vektor  $v \in V$  se tak při aplikaci obou matic zobrazí na stejný prvek  $f \in V^*$ . Získáme dvě různé báze prostoru  $V^*$ ,  $\{E_i\}$ , resp.  $\{\bar{E}_i\}$ , duální k  $\{e_i\}$ , resp.  $\{\bar{e}_i\}$  pomocí  $\phi_j^i$ , resp.  $\psi_j^i$ . Necht' dále

$$v = x^i e_i = y^i \bar{e}_i$$

je vektor  $v \in V$  vyjádřený v bázích  $\{e_i\}$ ,  $\{\bar{e}_i\}$  a

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$$

jeho složky v jednotlivých bázích. Pokud je  $A$  maticí přechodu mezi  $\{e_i\}$  a  $\{\bar{e}_i\}$ , pak platí

$$y = A^{-1}x, \quad \bar{e} = A^T e,$$

kde  $e$ , resp.  $\bar{e}$  označuje vektor bázových vektorů  $e_i$ , resp.  $\bar{e}_i$  (viz. tvrzení 3.1). Dále

$$p^i = x^j \phi_j^i \quad \text{a} \quad q^i = y^j \psi_j^i$$

jsou obrazy vektorů  $x$  a  $y$  vzhledem k jednotlivým maticím  $M = \phi_j^i$ ,  $N = \psi_j^i$  a bázím  $\{e_i\}$ ,  $\{\bar{e}_i\}$ . Proto

$$f = p^i E_i = q^i \bar{E}_i \in V^*$$

je obrazem lineárního zobrazení vektoru  $v \in V$  se složkami

$$p = \begin{pmatrix} p^1 \\ \vdots \\ p^n \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q^n \end{pmatrix}.$$

v jednotlivých bázích  $\{E_i\}$ ,  $\{\bar{E}_i\}$ .

Pokud matice  $\phi_j^i$  a  $\psi_j^i$  reprezentují stejné lineární zobrazení, vektor  $v$  se v případech obou bází zobrazí na  $f$  a matice přechodu mezi  $\{E_i\}$  a  $\{\bar{E}_i\}$  bude maticí inverzní k  $A$  (důsledek tvrzení 3.1). Platí tedy

$$\bar{E} = A^{-1}E,$$

odkud plyne (aplikace vztahů  $\bar{e} = A^T e$ ,  $y = A^{-1}x$  na vektory  $E$ ,  $\bar{E}$  bázových vektorů  $E_i$ ,  $\bar{E}_i$ )

$$q = ((A^{-1})^T)^{-1}p = A^T p.$$

Dále z rovnic

$$p = Mx, \quad x = Ay,$$

získáme

$$p = M(Ay).$$

Vynásobením zleva  $A^T$  dostaneme

$$A^T p = A^T(M(Ay)),$$

odkud ze vztahů

$$q = Ny, \quad q = A^T p,$$

plyne

$$Ny = A^T(M(Ay)) = (A^TMA)y.$$

Jelikož tento vztah platí pro libovolné  $y \in V$ , dostáváme rovnost

$$N = A^TMA.$$

První část tvrzení je tedy dokázaná.

Nechť obráceně platí

$$N = A^TMA$$

pro matici přechodu  $A$  mezi  $\{e_i\}$  a  $\{\bar{e}_i\}$  (dvě libovolně zvolené báze  $V$ ), a matice  $\phi_j^i, \psi_j^i$  reprezentují dvě různá lineární zobrazení  $\phi, \psi$  (provedeme důkaz sporem), tzn.

$$\begin{aligned}\phi(v) = f &= p^i E_i = p^T E, \\ \psi(v) = \tilde{f} &= q^i \bar{E}_i = q^T \bar{E},\end{aligned}$$

kde  $f \neq \tilde{f}$ . Musí tak platit

$$p^T E \neq q^T \bar{E} = q^T (A^{-1} E) = (q^T A^{-1}) E,$$

z čehož vyplývá

$$\begin{aligned}p^T &\neq q^T A^{-1}, \\ p &\neq (A^T)^{-1} q, \\ Mx &\neq (A^T)^{-1} (Ny), \\ M(Ay) &\neq (A^T)^{-1} (Ny), \\ (A^TMA)y &\neq Ny,\end{aligned}$$

odkud již získáváme hledaný spor, neboť  $N = A^TMA$  a tvrzení je tak dokázané.  $\square$

#### REFERENCE

- [1] R. H. Wasserman: *Tensors and Manifolds*, Oxford University Press, 1992.

Dušan Navrátil, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,  
e-mail: 171626@vutbr.cz



## GRAFOVÁ ROZŠÍŘENÍ NĚKTERÝCH DYNAMICKÝCH MODELŮ

RADKA SKÁCELOVÁ

**ABSTRAKT.** Tento článek se zabývá rozšířením dynamických modelů o možnost cestování v prostoru pomocí teorie grafů. Nejprve je uvedeno obecné rozšíření užitím konečného souvislého grafu a jeho interpretace pomocí Laplaceovy matice. Dále je tento obecný přístup aplikován na Lotkvy-Volterrovy modely dravec-kořist a konkurence a na epidemiologický model SIR. Podrobněji jsou analyzována prostorová homogenní a heterogenní stacionární řešení grafového modelu dravec-kořist z hlediska existence a stability. Stabilita homogenních stacionárních řešení je zkoumána také z hlediska obecného planárního modelu.

### 1. ÚVOD

Když popisujeme reálné problémy pomocí soustav diferenciálních rovnic, zpravidla musíme uvažovat jisté idealizace. V případě popisu situace, kdy se zkoumané subjekty, ať už zvířata či lidé, pohybují a interagují spolu, se předpokládá izolace oblastí, na které se subjekty vyskytují. Toto je bohužel značné omezení. Abychom se více přiblížili skutečnému chování, umožníme proto zkoumaným subjektům pohyb v prostoru, což znamená zavedení možnosti migrace/cestování mezi různými oblastmi. Vhodným aparátem pro požadované zobecnění je teorie grafů. V případě zvířecích populací si situaci můžeme představit tak, že existuje systém ostrovů, které jsou navzájem pospojovány mosty, přičemž tyto mosty umožňují přesun populace z jednoho ostrova na druhý. Nebo systém lesů, kdy místo mostů můžeme uvažovat, že zvíře je, či není schopné dostat se do lesa sousedního. Analogicky můžeme vzít v úvahu cestování člověka např. mezi obcemi či státy. I když se musí i v takovém modelu uvažovat idealizace, toto rozšíření je velkým krokem kupředu.

### 2. ZAVEDENÍ OBECNÉHO GRAFOVÉHO ROZŠÍŘENÍ

Klasický přístup analýzy modelu spočívá v tom, že máme autonomní soustavu  $m$  diferenciálních rovnic popisující daný model, jež můžeme zapsat ve tvaru

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}), \quad (2.1)$$

---

2010 MSC. Primární 92B25,34D20,37C25.

*Klíčová slova.* Lotkuv-Volterrov model, autonomní systém diferenciálních rovnic, stacionární bod, stabilita, teorie grafů, Laplaceova matice, SIR model.

Článek vznikl na základě bakalářské práce autorky v oboru Matematické inženýrství na FSI VUT v Brně. Vedoucím práce byl Jan Čermák z Ústavu matematiky FSI VUT v Brně.

kde složky vektoru  $\mathbf{f}$  jsou definovány v tzv. fázovém prostoru  $\Omega \in \mathbb{R}^m$  a  $\mathbf{y}$  je  $m$ -rozměrný vektor, jehož jednotlivé složky  $y_k$  jsou proměnné představující různé druhy zvířecích populací, popřípadě různé skupiny osob.

Obeční model (2.1) se nyní rozšíří o možnost migrace všech jedinců. Zavedeme množinu  $V = \{1, \dots, n\}$ , která reprezentuje soubor oblastí v prostoru, ve kterých pozorování jedinci žijí. Může se jednat například o rybníky, ostrovy, lesy, města či státy, přičemž v každé oblasti spolu jednotlivé druhy interagují jako v klasickém modelu. Dále je třeba, aby bylo možné mezi oblastmi cestovat. K tomu se zavádí množina  $E$  tak, že existuje-li cesta mezi oblastmi  $i, j$ , pak  $\{i, j\} \in E$ . Dvojice právě zavedených množin  $G = (V, E)$  pak reprezentuje konečný graf. Prvky z množiny  $V$  proto nazýváme vrcholy grafu  $G$  a prvky množiny  $E$  představují jeho hrany. Důležitým předpokladem je souvislost grafu  $G$  (mezi každými dvěma vrcholy existuje taková posloupnost vrcholů a hran, že se dostaneme z jednoho vrcholu do druhého). Dále se zavádí difuzní koeficienty  $d_{y_k} \geq 0$ , které představují intenzitu migrace konkrétního druhu / skupiny lidí  $y_k$ ,  $k \in \{1, \dots, m\}$ .

Předpokládáme-li, že migrace jedinců  $k$ -tého druhu z jednoho vrcholu do druhého je úměrná rozdílu jejich počtů v sousedících vrcholech, pak lze grafové rozšíření zapsat ve tvaru

$$y'_{ki} = d_{y_k} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (y_{kj} - y_{ki}) + f_{ki}(y_{11}, \dots, y_{1n}, \dots, y_{m1}, \dots, y_{mn}) \quad (2.2)$$

pro  $k \in \{1, \dots, m\}$  a  $i \in V$ , kde  $\mathcal{N}(i)$  představuje množinu vrcholů sousedících s vrcholem  $i$ , přičemž prvek  $y_{ki}$  představuje populaci  $k$ -tého druhu na  $i$ -tém vrcholu a funkce  $f_{ki}$  ovlivňuje dynamiku toho prvku.

Systém (2.2) lze zapsat také jako soustavu rovnic v maticovém tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'_1 &= -d_{y_1} L \mathbf{y}_1 + \mathbf{f}_1(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m), \\ &\vdots \\ \mathbf{y}'_m &= -d_{y_m} L \mathbf{y}_m + \mathbf{f}_m(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m), \end{aligned} \quad (2.3)$$

kde  $\mathbf{y}_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  a  $\mathbf{f}_k: \mathbb{R}^{mn} \rightarrow \mathbb{R}^n$  jsou dány vztahy

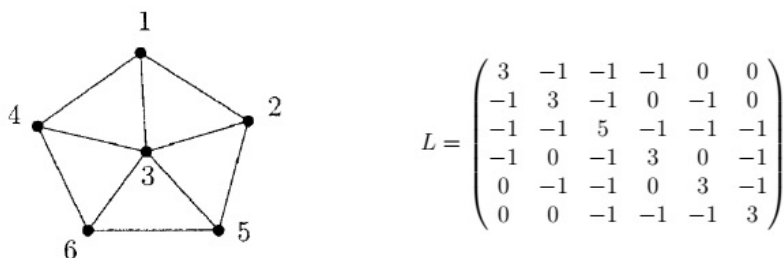
$$\mathbf{y}_k = \begin{pmatrix} y_{k1} \\ \vdots \\ y_{kn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_k = \begin{pmatrix} f_{k1} \\ \vdots \\ f_{kn} \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, m.$$

Matice  $L$  vystupující v (2.3) je Laplaceova matice. Tato matice nám umožňuje graf jednoduše zaznamenat a je definována jako rozdíl dvou matic  $L = \Delta - S$ . Tyto matice si nyní popíšeme.

Matice  $\Delta = (\delta_{ij})_{i,j=1}^n$  je diagonální matice popisující graf s množinou vrcholů  $V = \{1, \dots, n\}$ , na jejíž pozici  $\delta_{ii}$  je stupeň vrcholu  $i$ ,  $i \in V$ , přičemž stupněm vrcholu  $i$  v grafu  $G$  rozumíme počet hran vycházejících z tohoto vrcholu.

Matici  $S = (s_{ij})_{i,j=1}^n$  nazýváme matice sousednosti grafu  $G$ . Tato matice má na pozici  $s_{ij}$  číslo 1, jestliže existuje hrana spojující vrcholy  $i$  a  $j$  grafu  $G$ , tj. existuje-li  $\{i, j\} \in E$ . V opačném případě má na dané pozici 0.

Pro lepší porozumění pojmu Laplaceova matice je na obrázku 1 zobrazena Laplaceova matice pro konkrétní graf s 6-ti vrcholy.



**Obrázek 1.** Vlevo reprezentace konečného souvislého grafu, vpravo jeho příslušná Laplaceova matice.

Pro Laplaceovy matice platí následující věta.

**Věta 2.1.** *Nechť  $G = (V, E)$  je graf s  $n$  vrcholy a  $L$  jeho Laplaceova matice. Potom pro tuto matici platí následující:*

1.  $L$  je symetrická a pozitivně semidefinitní;
2. součet prvků každého jejího řádku a každého sloupce je roven nule;
3. algebraické doplňky každých dvou prvků matice  $L$  se rovnají.

Z této věty vyplývají některé užitečné vlastnosti Laplaceovy matice. Dle vlastnosti 1 jsou všechna vlastní čísla Laplaceovy matice reálná a nezáporná. Z vlastnosti 2 navíc dostáváme, že tato matice má vždy nulové vlastní číslo, přičemž příslušný vlastní vektor má všechny složky stejné.

Více informací o Laplaceových maticích lze nalézt např. v [4, 5].

### 3. VYBRANÉ GRAFOVÉ MODELY

V této kapitole bude ukázáno, jak aplikovat obecně odvozený model z předchozí kapitoly na tři konkrétní modely, jejichž význam bude v každé sekci vysvětlen. Podrobnější informace o těchto modelech lze nalézt například v [3].

#### 3.1. Model dravec-kořist

Obecný přístup nyní aplikujeme na Lotkúv-Volterrův model dravec-kořist s omezenou kapacitou prostředí. Tento model vyjadřuje situaci, kdy se dvě populace vzájemně ovlivňují a to tak, že jeden druh je potravou pro druhý druh, jako například dvojice ryba-žralok či zajíc-rys. V tomto modelu se předpokládá, že se dravec živí výhradně kořistí a tedy nemůže přežít, jakmile je kořist zcela vyhubena. Kořist je naopak pozitivně ovlivněna nepřítomností dravce, ale musíme zde předpokládat omezenou kapacitu prostředí, aby počet jedinců nerostl nade všechny meze – tato myšlenka je vyjádřena pomocí vnitrodruhové konkurence.

V dalším označíme  $y_1 = N$  jako velikost populace kořisti a  $y_2 = P$  velikost populace dravce.

Klasický model je tvaru

$$\begin{aligned} N'(t) &= (1 - N(t) - aP(t))N(t), \\ P'(t) &= (-c + bN(t) - P(t))P(t). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Konstanty, které se v něm vyskytují, jsou tvaru  $a = \frac{\gamma_N}{\alpha_P}$ ,  $b = \frac{\gamma_P}{\alpha_N}$ ,  $c = \frac{\varepsilon_P}{\varepsilon_N}$ , přičemž  $\alpha$  představuje míru vnitrodruhové konkurence,  $\varepsilon$  specifickou míru růstu daného druhu při jeho izolaci a naopak  $\gamma$  specifickou míru růstu za přítomnosti druhého druhu.

V tomto modelu se typicky předpokládá, že se oba druhy vyskytují na jedné omezené oblasti. Toto omezení však neodpovídá reálné situaci, a proto v následujícím provedeme rozšíření pomocí teorie grafů. V takovém případě už budeme mít vícero uzavřených oblastí, mezi kterými budou moci oba druhy cestovat, přičemž se předpokládá, že každou cestu mohou využít oba druhy. Nemůže se tedy stát například to, že bude existovat systém ostrovů (bez mostů), kde dravec je suchozemský jedinec, který je neschopný mezi ostrovy přecházet, ale kořisti by byli ptáci, již mohou mezi ostrovy přelétat (tj. stále pro ně jakési imaginární mosty existují). Dále se předpokládá, že všechny trasy jsou stejně náročné. Nemůže tedy nastat situace, kdy by některá cesta byla využívána častěji z důvodu její menší náročnosti. Zavedení různé obtížnosti tras by se dalo vyjádřit pomocí váženého grafu, avšak tím se nebudeme momentálně zabývat.

V dalším budeme uvažovat difuzní koeficienty  $d_N, d_P$ . Tyto koeficienty můžeme chápat jako potřebu daného druhu migrovat. Čím větší je tento koeficient, tím je větší šance, že jedinci daného druhu budou cestovat. Naopak, kdyby byl tento koeficient roven nule, pak nedochází k žádné migraci a každý vrchol grafu se může vyšetřovat separátně na základě klasického modelu dravec-kořist. Navíc předpokládáme, že migrace jedinců z jednoho vrcholu do druhého je úměrná rozdílu populací daného druhu v obou vrcholech.

Nyní již napíšeme konkrétní tvar grafového rozšíření. Pomocí sumačního zápisu (2.2) se dá vyjádřit jako

$$\begin{aligned} N'_i(t) &= d_N \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (N_j(t) - N_i(t)) + N_i(t)(1 - N_i(t) - aP_i(t)), \\ P'_i(t) &= d_P \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (P_j(t) - P_i(t)) + P_i(t)(-c + bN_i(t) - P_i(t)) \end{aligned} \quad (3.2)$$

pro  $i \in V$ . V případě využití Laplaceovy matice, tj. vztahu (2.3), má pak grafový model tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{N}'(t) &= -d_N L\mathbf{N}(t) + \mathbf{f}_N(\mathbf{N}(t), \mathbf{P}(t)), \\ \mathbf{P}'(t) &= -d_P L\mathbf{P}(t) + \mathbf{f}_P(\mathbf{N}(t), \mathbf{P}(t)), \end{aligned} \quad (3.3)$$

kde  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{P}$  jsou nyní  $n$  rozměrné sloupcové vektory o složkách  $N_i, P_i, i \in V$  a

$$\mathbf{f}_N(\mathbf{N}, \mathbf{P}) = \begin{pmatrix} N_1(1 - N_1 - aP_1) \\ \vdots \\ N_n(1 - N_n - aP_n) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_P(\mathbf{N}, \mathbf{P}) = \begin{pmatrix} P_1(-c + bN_1 - P_1) \\ \vdots \\ P_n(-c + bN_n - P_n) \end{pmatrix},$$

přičemž  $\mathbf{f}_N, \mathbf{f}_P: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

### 3.2. Model konkurence

Model konkurence popisuje soužití dvou druhů, které se navzájem negativně ovlivňují. Může se jednat například o soupeření o potravu či vytlačování jednoho druhu v důsledku zabírání území druhým druhem.

Stejně jako u předchozího modelu dravec-kořist, i zde se předpokládá omezená kapacita prostředí. Obzvláště proto, že u modelu konkurence se často stává, že jeden druh vyhubí druhý druh. Pak by totiž populace druhu, který zvítězil, mohla neomezeně růst, což ale neodpovídá realitě.

Klasický model konkurence s omezenou kapacitou prostředí je popsán soustavou dvou diferenciálních rovnic tvaru

$$\begin{aligned} N'(t) &= \rho_1 N(t)(1 - N(t) - \alpha P(t)), \\ P'(t) &= \rho_2 P(t)(1 - \beta N(t) - P(t)), \end{aligned}$$

kde  $\rho_1, \rho_2, \alpha, \beta > 0$  jsou parametry a proměnné  $N, P$  představují jednotlivé soutěžící druhy.

Parametry  $\rho$  představují specifickou míru porodnosti populace daného druhu. Parametr  $\alpha$  je vyjádřen jako  $\alpha = \frac{\alpha^* K_2}{K_1}$ , přičemž  $\alpha^*$  je specifická míra úbytku 1. druhu vlivem soutěživosti 2. druhu,  $K_1$  je kapacita prostředí pro 1. druh a  $K_2$  kapacita prostředí pro 2. druh. Parametr  $\beta$  je analogicky  $\beta = \frac{\beta^* K_1}{K_2}$ , kde  $\beta^*$  je specifická míra úbytku 2. druhu vlivem soutěživosti 1. druhu.

I u modelu konkurence chceme zajistit možnost pohybu v prostoru. Zde opět musíme brát v úvahu, že není možné povolit libovolný pohyb, nýbrž pohyb mezi několika oblastmi, z nichž každou uvažujeme idealizovanou. Jako takové oblasti si můžeme představit různé rybníky, ostrovy v moři, ale například i sousedící lesy, přičemž cesty mezi nimi musíme předpokládat opět idealizované. Potom například nemůže dojít ke snížení počtu populace v závislosti na náročné cestě. Navíc se ani nepředpokládá, že by přechod do sousedící oblasti zabíral určitý časový úsek.

Při sestavování grafového rozšíření pak stejně jako u modelu dravec-kořist uvažujeme difuzní koeficienty vyjadřující míru migrace jednotlivých druhů, která je navíc úměrná rozdílu populací na sousedících vrcholech. Potom na základě (2.2) máme grafový model tvaru

$$\begin{aligned} N'_i(t) &= d_N \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (N_j(t) - N_i(t)) + \rho_1 N_i(t)(1 - N_i(t) - \alpha P_i(t)), \\ P'_i(t) &= d_P \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (P_j(t) - P_i(t)) + \rho_2 P_i(t)(1 - P_i(t) - \beta N_i(t)) \end{aligned} \quad (3.4)$$

pro všechna  $i \in V$ ,  $V = \{1, \dots, n\}$ . Dostáváme tak  $2n$  rovnic popisujících dynamiku modelu při zavedení migrace.

Systém (3.4) lze opět přepsat do vektorového tvaru

$$\begin{aligned}\mathbf{N}'(t) &= -d_N L \mathbf{N}(t) + \rho_1 \mathbf{f}_N(\mathbf{N}(t), \mathbf{P}(t)), \\ \mathbf{P}'(t) &= -d_P L \mathbf{P}(t) + \rho_2 \mathbf{f}_P(\mathbf{N}(t), \mathbf{P}(t)),\end{aligned}$$

kde  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{P}$  jsou  $n$  rozměrné sloupcové vektory o složkách  $N_i, P_i$ ,  $i \in V$ , a

$$\mathbf{f}_N(\mathbf{N}, \mathbf{P}) = \begin{pmatrix} N_1(1 - N_1 - \alpha P_1) \\ \vdots \\ N_n(1 - N_n - \alpha P_n) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_P(\mathbf{N}, \mathbf{P}) = \begin{pmatrix} P_1(1 - P_1 - \beta N_1) \\ \vdots \\ P_n(1 - P_n - \beta N_n) \end{pmatrix},$$

přičemž  $\mathbf{f}_N, \mathbf{f}_P: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$  a  $L$  je příslušná Laplaceova matice popisující souvislý graf.

Analýza klasického modelu konkurence i jeho grafového rozšíření je detailně provedena v článku [2].

### 3.3. SIR model

V této sekci se pokusíme aplikovat obecný přístup ke grafovému rozšíření na známý epidemiologický model SIR. V tomto modelu předpokládáme, že každý člen populace spadá do jedné z následujících tří kategorií:

- $S$  ... populace náchylná k infekci (netrpí danou chorobu, ale jedinci jsou schopni onemocnět),
- $I$  ... populace, která je infikovaná a schopná infekci přenášet dále,
- $R$  ... populace, která onemocněla, ale už nešíří nákazu dále, ať už z důvodu izolace, získání trvalé imunity, či smrti v důsledku prodělání nemoci.

Velikosti těchto populací jsou závislé na čase  $t$  a v každém časovém okamžiku platí, že

$$S(t) + I(t) + R(t) = N, \quad (3.5)$$

kde  $N > 0$  je celkový konstantní počet populace.

Dále předpokládáme, že je daná populace homogenní. To znamená, že pravděpodobnost kontaktu libovolných dvou jedinců je stejná, přičemž možnost nákazy zdravého jedince od infikovaného je také totožná. Nebere se tedy v potaz věk, předchozí zdravotní stav jedinců ani například délka setkání dvou lidí.

Označí-li se dále  $\beta > 0$  jako koeficient šíření choroby a  $\nu > 0$  koeficient značící rychlost, se kterou přecházejí jedinci ze skupiny  $I$  do  $R$ , pak klasický SIR model můžeme popsat pomocí tří diferenciálních rovnic jako

$$\begin{aligned}S'(t) &= -\beta S(t)I(t), \\ I'(t) &= \beta S(t)I(t) - \nu I(t), \\ R'(t) &= \nu I(t),\end{aligned}$$

přičemž se předpokládá, že  $S(0) = S_0 > 0$ ,  $I(0) = I_0 > 0$  a  $R(0) = 0$ .

Na základě vzorců (2.2) a (2.3) provedeme stejně jako u modelů dravec-kořist a konkurence grafové rozšíření. To je v případě sumačního zápisu tvaru

$$\begin{aligned} S'_i(t) &= d_S \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (S_j(t) - S_i(t)) - \beta S_i(t) I_i(t), \\ I'_i(t) &= d_I \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (I_j(t) - I_i(t)) + \beta S_i(t) I_i(t) - \nu I_i(t), \\ R'_i(t) &= d_R \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (R_j(t) - R_i(t)) + \nu I_i(t) \end{aligned}$$

pro  $i \in V$  a a soustava maticových rovnic má tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{S}'(t) &= -d_S L \mathbf{S}(t) + \mathbf{f}_S(\mathbf{S}(t), \mathbf{I}(t)), \\ \mathbf{I}'(t) &= -d_I L \mathbf{I}(t) + \mathbf{f}_I(\mathbf{S}(t), \mathbf{I}(t)), \\ \mathbf{R}'(t) &= -d_R L \mathbf{R}(t) + \mathbf{f}_R(\mathbf{I}(t)), \end{aligned}$$

kde  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{I}$  a  $\mathbf{R}$  jsou  $n$  rozměrné sloupcové vektory a

$$\mathbf{f}_S(\mathbf{S}, \mathbf{I}) = -\beta \begin{pmatrix} S_1 I_1 \\ \vdots \\ S_n I_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_I(\mathbf{S}, \mathbf{I}) = \begin{pmatrix} \beta S_1 I_1 - \nu I_1 \\ \vdots \\ \beta S_n I_n - \nu I_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_R(\mathbf{I}) = \nu \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix}.$$

Při takovém grafovém rozšíření tedy předpokládáme, že cestování probíhá nezávisle na zdravotním statusu jedince, to jest ať už je člověk v jakékoli ze tří skupin, může se uskutečnit jeho pohyb v prostoru. Tento pohyb je stejně jako v předchozích modelech úměrný rozdílu jedinců v sousedních oblastech a difuzním koeficientům. Zde už tato podmínka nemusí být tak přímočará jako u Lotkových-Volterrových populačních modelů dravec-kořist a konkurence. Můžeme si ji představit například tak, že v každé oblasti existuje jen omezený počet lůžek a aby byla zajištěna dostatečná lékařská péče, je snaha o to, aby byl v každé oblasti stejný počet nakažených jedinců. Tu samou myšlenku můžeme aplikovat i na skupinu  $R$ , kde se mimo jiné nacházejí jedinci v izolaci, to jest jejich vyrovnaný počet umožní například kvalitnější lékařskou péči.

Celkově si toto vyrovnavání počtů můžeme představit tak, že v každé oblasti je konstantní počet obytných prostor (do toho můžeme započítat jak domy pro lidi náchylné k nemoci, vyléčené, ale i nemocniční lůžka) a nepřipouštíme situaci, kdy by byly některé obytné prostory nevyužity, popřípadě by naopak byly obydleny nad limit.

K podmínce (3.5) by se mohlo přistupovat dvojným způsobem. Buďto budeme předpokládat, že na každém vrcholu je součet populací stejný, tj.  $S_i(t) + I_i(t) + R_i(t) = N$  pro všechna  $i \in V$ , anebo můžeme uvažovat počet sice stále konstantní, ale rozdílný na každém vrcholu. Tím máme na mysli, že na vrcholu  $i$  bude na počátku  $N_i$  jedinců a tento počet zůstane zachován i v průběhu času.

Analýza grafového modelu SIR může být předmětem dalšího zkoumání. V tomto článku se zaměříme převážně na model dravec-kořist a částečně i na model konkurence.

## 4. ANALÝZA GRAFOVÉHO MODELU DRAVEC - KOŘIST

Pod analýzou modelu si můžeme představit hledání stacionárních řešení zkoumaného modelu a jejich následné vyšetření z hlediska stability. Na rozdíl od klasického modelu, zde můžeme z kvalitativního hlediska posuzovat dva různé typy řešení – prostorově homogenní stacionární řešení a prostorově heterogenní stacionární řešení. Tato řešení budeme dále převážně nazývat pouze jako homogenní, či heterogenní.

Homogenní řešení  $[N_1, P_1, \dots, N_n, P_n] \in \mathbb{R}^{2n}$  systému (3.2) je tvaru  $N_i(t) = N^* \geq 0$ ,  $P_i(t) = P^* \geq 0$  pro všechna  $i \in V$ ,  $t \geq 0$ , kde  $N^*$ ,  $P^*$  se od sebe mohou, ale nemusí lišit. Jinak řečeno,  $N_1 = \dots = N_n$  a  $P_1 = \dots = P_n$ . V opačném případě, tj. existuje-li alespoň jedna dvojice  $N_i, N_j$  taková, že  $N_i \neq N_j$ , popřípadě dvojice  $P_i, P_j$  taková, že  $P_i \neq P_j$ , nazveme toto stacionární řešení heterogenní.

## 4.1. Homogenní stacionární řešení

Při analýze grafového modelu dravec-kořist se nejprve zaměříme na hledání prostorově homogenních stacionárních řešení.

Dosazením hledaného tvaru řešení do (3.2) a položením pravých stran rovnic rovno 0 zjistíme, že  $2n$ -tice  $[N^*, P^*, \dots, N^*, P^*]$  může být homogenním řešením systému (3.2) pouze tehdy, je-li zároveň dvojice  $[N^*, P^*]$  stacionárním bodem Lotkova-Volterrova modelu s omezenou kapacitou prostředí (3.1).

Řešení tedy mohou být generována body

$$E_0 = [0, -c], \quad E_1 = [0, 0], \quad E_2 = [1, 0], \quad E_3 = \left[ \frac{1+ac}{1+ab}, \frac{b-c}{1+ab} \right] \quad (4.1)$$

a pro označení řešení soustavy (3.2) generovaného bodem  $E_i$  budeme užívat symbol  $\mathbf{E}_i$ . V dalším již nebudeme brát v úvahu bod  $\mathbf{E}_0$ , jelikož při analýze grafového modelu hledáme – stejně jako v případě klasického modelu – pouze řešení nacházející se výhradně v prvním ortantu (ten zachycuje tu část daného prostoru, jehož body mají všechny souřadnice nezáporné).

Nyní se budeme zabývat otázkou stability těchto homogenních řešení. Především je snadné nahlédnout, že je-li  $E_i$  nestabilní stacionární bod klasického Lotkova-Volterrova modelu (3.1), potom  $\mathbf{E}_i$  je nestabilní homogenní stacionární řešení systému (3.2). Z toho důvodu je bod  $\mathbf{E}_1$  vždy nestabilní.

Otázku stability či nestability  $\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$  řeší následující tvrzení.

**Tvrzení 4.1.** *Nechť  $\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$  jsou výše zavedená homogenní řešení grafového modelu (3.2). Pak*

- $\mathbf{E}_2$  je nestabilní pro  $b > c$  a asymptoticky stabilní pro  $b < c$ ,
- $\mathbf{E}_3$  nevyšetřujeme pro  $b < c$ , jelikož se řešení nenachází v prvním ortantu. Pro  $b > c$  je potom asymptoticky stabilní, typ řešení je uzel, či ohnisko, a to v závislosti na koeficientech  $a, b, c$ .



Pro prokázání tohoto tvrzení vyjádříme Jacobiho matici soustavy (3.2). Využijeme-li jejího tvaru (3.3), pak Jacobiho matici soustavy můžeme vyjádřit jako

$$\begin{pmatrix} -d_N L & 0 \\ 0 & -d_P L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{N,1}}{\partial N_1} & & & \frac{\partial f_{N,1}}{\partial P_1} & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & \frac{\partial f_{N,n}}{\partial N_n} & & & \frac{\partial f_{N,n}}{\partial P_n} \\ \frac{\partial f_{P,1}}{\partial N_1} & & & \frac{\partial f_{P,1}}{\partial P_1} & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & \frac{\partial f_{P,n}}{\partial N_n} & & & \frac{\partial f_{P,n}}{\partial P_n} \end{pmatrix},$$

kde  $f_{j,i}$  reprezentuje  $i$ -tou složku vektoru  $f_j$ ,  $j \in \{N, P\}$ .

Po provedení několika úprav je možno dokázat, že vlastní čísla této matice jsou totožná s vlastními čísly matice, kterou lze vyjádřit jako

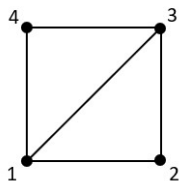
$$J(E_i) + \lambda \begin{pmatrix} -d_N & 0 \\ 0 & -d_P \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

kde  $J(E_i)$  představuje Jacobiho matici klasického Lotkova-Volterrova modelu a  $\lambda$  je libovolné vlastní číslo Laplaceovy matice  $L$ .

Dosažením konkrétních předpisů  $J(E_i)$  pro  $i = 2, 3$ , vypočtením a analyzováním získaných vlastních čísel se dá dané tvrzení dokázat.

Vidíme tedy, že stabilita homogenních stacionárních řešení je analogická ke stabilitě stacionárních řešení klasického Lotkova-Volterrova modelu s omezenou kapacitou prostředí (3.1).

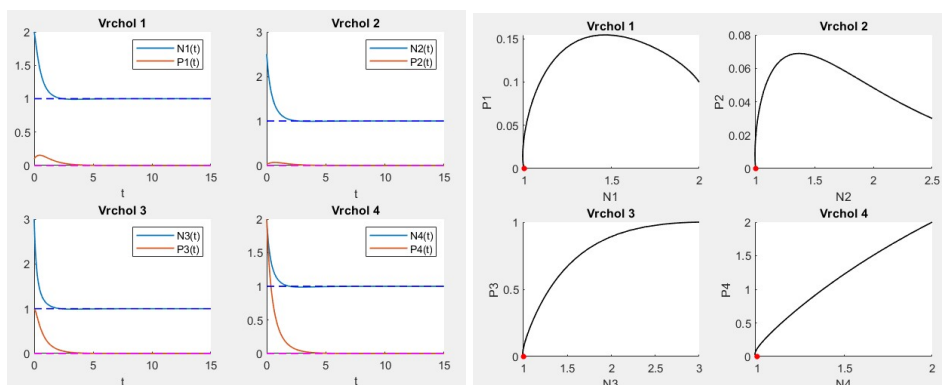
Ukázku chování pro konkrétní hodnoty a konkrétní graf na obrázku 2 můžeme vidět na obrázcích 3, 4.



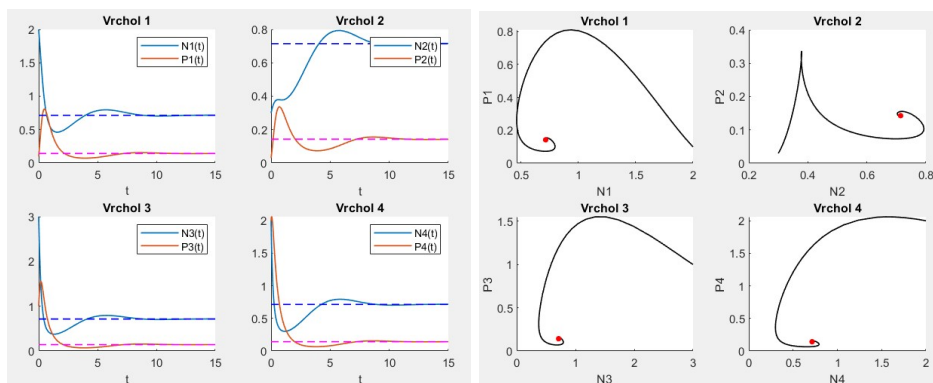
**Obrázek 2.** Souvislý graf se čtyřmi vrcholy a pěti hranami.

### 4.2. Heterogenní stacionární řešení

V této sekci se pokusíme zjistit, zda mohou existovat stacionární heterogenní řešení s nezápornými složkami.



**Obrázek 3.** Vlevo vývoj v čase populace kořisti a dravce pro graf zobrazený na obrázku 2. Přerušovanými čarami vyznačen stacionární bod  $\mathbf{E}_2$ . Zvolené koeficienty:  $a = 0.5, b = 1, c = 2, d_N = 0.8, d_P = 0.1$ . Vpravo odpovídající fázové trajektorie. Vykresleno v prostředí MATLAB.



**Obrázek 4.** Vlevo vývoj v čase populace kořisti a dravce pro graf zobrazený na obrázku 2. Přerušovanými čarami vyznačen stacionární bod  $\mathbf{E}_3$ . Zvolené koeficienty:  $a = 2, b = 3, c = 2, d_N = 0.03, d_P = 0.5$ . Vpravo odpovídající fázové trajektorie. Vykresleno v prostředí MATLAB.

Stacionární řešení modelu získáme řešením algebraické soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 0 &= d_N \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (N_j - N_i) + N_i(1 - N_i - aP_i), \quad i \in V, \\ 0 &= d_P \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (P_j - P_i) + P_i(-c + bN_i - P_i), \quad i \in V. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Z jejího tvaru plyne, že pro nulové hodnoty difuzních koeficientů  $d_N, d_P$  se model rozpadne na  $n$  nezávislých klasických modelů. Stacionární řešení jsou pak tvaru  $[N_1, P_1, \dots, N_n, P_n]$ , kde jednotlivé dvojice  $[N_i, P_i]$  představují stacionární body klasického modelu dravec-kořist (3.1). Konkrétně se jedná o body  $E_0, E_1, E_2, E_3$ , jejichž tvar nalezneme v (4.1). Počet všech řešení je  $4^n$ , z toho 4 jsou homogenní a  $4^n - 4$  heterogenních.

Nyní předpokládejme kladné hodnoty difuzních koeficientů  $d_N, d_P$ . Pro tento případ bylo provedeno několik numerických experimentů, a to pro  $n = 2, 3$ . Žádný z nich existenci heterogenních rovnováh s nezápornými složkami neprokázal. Všechny experimenty vykazovaly podobné závěry jako následující příklad.

**Příklad 4.2.** *Volíme  $a = 1, b = 1, c = 2$  a  $d_n = d_P = 0.01$ . V obou případech  $n = 2, 3$  (zde volíme úplný graf) jsou jediná nezáporná řešení soustavy (4.3) homogenní rovnováhy, a to  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ . Pro volbu  $a = 1, b = 2, c = 1$  navíc přibývá homogenní rovnováha  $\mathbf{E}_3$  jako další řešení soustavy (4.3). V každém jiném řešení se nachází alespoň jedna záporná složka.*

*Při volbě větších difuzních koeficientů, konkrétně  $d_N = d_P \geq 1$ , jsou závěry obdobné jako pro případ malých difuzních koeficientů. Rozdíl je v tom, že odpovídající homogenní rovnováhy představují jediná reálná řešení soustavy (4.3) (neexistují tedy již žádné heterogenní rovnováhy, ani s některými zápornými složkami).*

Celkově lze tedy formulovat hypotézu, že při problému existence heterogenních rovnováh s nezápornými složkami pro grafový model dravec-kořist stačí rozlišovat, zda jsou difuzní koeficienty nulové, či nikoliv. Při jejich nulovosti pak dostáváme  $x^n$  nezáporných řešení, kde  $n$  představuje počet vrcholů grafu a  $x = 2$  pro volbu koeficientů takovou, že  $b < c$ , v opačném případě  $x = 3$ . Při volbě nenulových difuzních koeficientů jsou pak jediná nezáporná řešení homogenní stacionární řešení odpovídající příslušným nezáporným stacionárním bodům.

## 5. ROZŠÍŘUJÍCÍ ÚVAHY

Získané výsledky nás mohou vést na dvě zajímavé otázky. Za prvé, při analýze homogenních řešení modelu dravec-kořist se zjistilo, že stabilita klasického stacionárního řešení implikuje stabilitu homogenního řešení jím generovaného. Je tomu tak vždy? A za druhé, když neexistuje heterogenní rovnováha s kladnými složkami v modelu dravec-kořist, znamená to, že neexistuje ani v jiných modelech, nebo jsou tu modely takové, kde ji nalézt můžeme? V této kapitole se pokusíme přiblížit odpovědi na tyto otázky.

### 5.1. Porušení stability grafovým rozšířením

Odpověď na první otázku je pro planární modely podrobněji vypracována v [1]. Zde se omezíme převážně na výsledné vztahy.

Myšlenka spočívá v tom, že vezmeme obecný planární systém

$$\begin{aligned} N'(t) &= f_N(N(t), P(t)), \\ P'(t) &= f_P(N(t), P(t)), \end{aligned} \tag{5.1}$$

kde  $f_N, f_P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a analýzou Jacobiho matic klasického i příslušného grafového modelu získáme hledané vztahy.

Jacobiho matici  $J(E)$  planárního klasického modelu uvažujeme tvaru

$$J(E) = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix},$$

kde  $p, q, r, s \in \mathbb{R}$ .

Pro grafový model lze Jacobiho matici přepsat opět na tvar (4.2). Spektrum této matice (tj. množina všech jejích vlastních čísel) je přitom rovna sjednocení spekter matic tvaru

$$\widetilde{J(E)}_\lambda = J(E) + \lambda \begin{pmatrix} -d_N & 0 \\ 0 & -d_P \end{pmatrix},$$

kde za  $\lambda$  postupně dosazujeme všechna vlastní čísla Laplaceovy matice  $L$ .

Analýzou vlastních čísel získáme dvě tvrzení.

**Tvrzení 5.1.** *Rovnováha  $E$  soustavy (5.1) bez grafového rozšíření a homogenní rovnováha  $\mathbf{E}$  příslušné grafové soustavy jsou současně asymptoticky stabilní právě tehdy, když pro prvky Jacobiho matice  $J(E)$  platí podmínky*

$$p + s < 0, \quad ps - qr > 0$$

a

$$ps - qr + \lambda^2 d_N d_P - \lambda(pd_P + sd_N) > 0,$$

kde  $\lambda$  je libovolné vlastní číslo Laplaceovy matice  $L$  příslušné grafovému modelu.

Jak model dravec-kořist, tak model konkurence tyto podmínky splňují, a proto nedošlo ke změně stability řešení při rozšíření na grafový model. Nyní uvedeme podmínky, které musí být splněny, aby bylo homogenní řešení grafové soustavy nestabilní, i když je stabilní řešení příslušné soustavy bez grafového rozšíření.

**Tvrzení 5.2.** *Rovnováha  $E$  soustavy (5.1) je asymptoticky stabilní a současně homogenní rovnováha  $\mathbf{E}$  grafového modelu není asymptoticky stabilní právě tehdy, když pro prvky Jacobiho matice  $J(E)$  platí podmínky*

$$\lambda d_N d_P < pd_P + sd_N, \quad p + s < 0 \quad (5.2)$$

a

$$ps + \lambda^2 d_N d_P - \lambda(pd_P + sd_N) \leq r < ps, \quad (5.3)$$

kde  $\lambda$  je nějaké vlastní číslo Laplaceovy matice  $L$  příslušné grafovému modelu.

Na základě zachování platnosti vztahů (5.2) a (5.3) můžeme určit hodnoty parametrů  $p, q, r, s, d_N$ , a  $d_P$ , přičemž jedinou neurčitost zde představuje vlastní číslo  $\lambda$  Laplaceovy matice  $L$ . Z (5.2) vyplývá, že se stačí omezit na nejmenší kladné z nich, jelikož pak tato podmínka představuje nejmenší možné omezení. Pro speciální typy grafů jsme dokonce schopni toto nejmenší kladné číslo určit.

Z toho plyne, že opravdu existují i soustavy diferenciálních rovnic, pro které je stabilita řešení při grafovém rozšíření porušena.

## 5.2. Existence heterogenních řešení s nezápornými složkami

Při zodpovězení druhé otázky nám pomůže článek [2], který diskutuje grafové rozšíření modelu konkurence, tj. modelu představeným v sekci 3.2. Tento článek potvrzuje existenci heterogenních řešení s nezápornými složkami. To je zajímavé zejména z toho hlediska, že se modely dravec-kořist a konkurence liší před dimenzionální analýzou pouze v jednom znaménku.

Pro tvrzení, které bude následovat, je třeba nejprve uvést, že klasický model konkurence má čtyři stacionární řešení, jejichž tvar je

$$E_0 = [0, 0], \quad E_1 = [1, 0], \quad E_2 = [0, 1], \quad E_3 = \left[ \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha\beta}, \frac{1 - \beta}{1 - \alpha\beta} \right],$$

přičemž pro existenci bodu  $E_3$  je nutné, aby  $\alpha\beta \neq 1$ . Navíc, aby tento bod ležel v prvním kvadrantu musí platit  $\alpha > 1$  a  $\beta > 1$  nebo  $\alpha < 1$  a  $\beta < 1$ .

Dále je třeba zavést označení řešení  $\mathbf{E}_{\sigma(i)}$ , kde  $\sigma(i) \in \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ . To jsou taková řešení, kdy na každém z  $n$  vrcholů nastane jedna z rovnováh klasického modelu  $E_0, E_1, E_2, E_3$ . Nyní se již můžeme přesunout k samotnému tvrzení.

V článku [2] je ukázáno, že pro každou dvojici  $\alpha, \beta > 1$  existuje číslo  $\varepsilon > 0$  takové, že pro  $d_N = d_P \in [0, \varepsilon]$  a pro každou volbu bodu  $\mathbf{E}_{\sigma(i)}$ , kde  $\sigma(i) \in \{1, 2, 3\}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , existuje heterogenní stacionární řešení s nezápornými složkami  $[N_1, P_1, \dots, N_n, P_n]$ , kde bod  $[N_i, P_i]$  je blízko bodu  $E_{\sigma(i)}$ . Dané heterogenní řešení je pak lokálně stabilní, právě když  $\sigma(i) \in \{1, 2\}$  pro všechna  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Z daného tvrzení pak vyplývá, že systém (3.4) má při slabé difuzi (tj. při hodnotách  $d_N, d_P$  blízkých 0)  $3^n - 3$  nezáporných heterogenních stacionárních řešení, přičemž  $2^n - 2$  z nich je lokálně stabilních.

Při zkoumání grafových rozšíření má proto smysl zkoumat také existenci a stabilitu heterogenních řešení.

#### REFERENCE

- [1] R. Skácelová: *Lotkuv-Volterrův model soutěže na grafech*, Bakalářská práce, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Brno, 2020.
- [2] A. Slavík: *Lotka-Volterra competition model on graphs*, SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, **19**(2), 725–762, 2020.
- [3] J. Kalas, Z. Pospíšil: *Spojité modely v biologii*, Masarykova univerzita, Brno, 2001.
- [4] R. Quinlan: *Spectral Graph Theory MA500-1: Lecture Notes*, School of Mathematics, Statistics and Applied Mathematics, NUI Galway, 2017, on-line: <http://www.maths.nuigalway.ie/~rquinlan/teaching/spectralgraphtheory.pdf>.
- [5] R. B. Bapat: *Graphs and matrices*, New Delhi: Hindustan Book Agency, 2010, Universitext.

Radka Skácelová, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,  
e-mail: 199996@vutbr.cz



## VYBRANÉ PŘÍKLADY Z INTERNETOVEJ MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

VIERA ŠTOUDKOVÁ RŮŽIČKOVÁ

**ABSTRAKT.** V článku je rozobraný jeden príklad z Internetovej matematickej olympiády pre študentov stredných škôl, ktorý sa týka počítania pravdepodobnosti a ďalšie, s ním súvisiace príklady. Tieto príklady sú známe ako *Monty Hall Problem* a *Two Child Problem*.

Ústav matematiky na FSI VUT v Brne každoročne organizuje Internetovú matematickú olympiádu pre študentov stredných škôl v Česku a na Slovensku. V novembri v roku 2020 prebehol už jej trinásty ročník. Na príprave príkladov a ich vyhodnotení sa nemalou mierou podieľajú študenti oboru Matematické inžénrství a oboru Aplikovaná matematika. Na stránkach [matholymp.fme.vutbr.cz](http://matholymp.fme.vutbr.cz) je možné nájsť zadania aj riešenia príkladov zo všetkých ročníkov.

Tento príspevok je štvrtý v poradí na túto tému a tentoraz je celý venovaný jednému príkladu na počítanie pravdepodobnosti a ďalším podobným príkladom.

### 1. MONTY HALL PROBLEM

Nasledovný príklad sa na súťaži sa objavil v roku 2009 a účastníci si s ním pomerne dobre poradili. Príklad je prevzatý, ide o známú úlohu.

**Príklad 1.** *Televizná súťaž probíhá nasledujúcim spôsobom: Súťažiaci má pred sebou troje zavreté dvere. Za jednými z nich je nové auto, za zbývajúcimi je jen koza. Súťažiaci si zvolí jedny dvere a na záver súťaže dostane to, čo je za nimi. Súťažiaci samozrejme neví, čo ktoré dvere skrývajú, a musí tedy voliť náhodně. Poté, co si soutěžící vybere svoje dvere, moderátor pořadu otevře jedny ze zbývajících dveří. Vždy ty, za kterými je koza, protože moderátor ví, co které dvere skrývají. Moderátor dá nyní soutěžícímu možnost změnit svoji původní volbu a vybrat si jiné dvere.*

*Předpokládejme, že soutěžící chce auto. Je tedy pro něj z hlediska pravděpodobnosti výhodnější ponechat si svoji první volbu? Nebo je výhodnější svoji původní volbu po zásahu moderátora změnit? Nebo je pravděpodobnost, že získá auto v obou případech stejná?*

**Autorské riešenie:** Mohlo by se zdát, že v momentě, kdy jsou jedny dvere s kozou otevřené, je to pro soutěžícího padesát na padesát a že je tedy jedno, co

---

2010 MSC. Primární 00A09; Sekundární 00A35.

*Klíčová slova.* Matematická olympiáda.

udělá. Ale není tomu tak. Z hlediska pravděpodobnosti je pro soutěžícího výhodné svoji volbu vždy změnit.

Na začátku máme jedny dveře s autem a dvoje dveře s kozou. Tedy pravděpodobnost, že si soutěžící vybere dveře s autem, je  $1/3$ . Pravděpodobnost, že je auto za jedněmi ze zbývajících dveří, je  $2/3$ . Vzhledem k tomu, že poté moderátor vždy, úmyslně a najisto otevře dveře s kozou, nedává soutěžícímu žádnou novou informaci o tom, co je za dveřmi, které si vybral. Tedy pravděpodobnost, že si soutěžící vybral dveře s autem, je stále  $1/3$ . Proto se tedy vyplatí svoji volbu změnit - druhé dveře totiž skrývají auto s pravděpodobností  $2/3$ .

Ide o známý tzv. *The Monty Hall problem*, pomenovaný podľa moderátora, ktorý vystupoval v americkej televíznej súťaži *Let's Make a Deal*. Viac informácií k nemu sa dá nájsť napríklad na Wikipedii v článku [1, 2], kde je úloha spracovaná podrobne z rôznych pohľadov. Ja tu spomeniem pár vecí, ktoré ma na tom najviac zaujali, a k tomu pridám nejaké vlastné úvahy o zlomyseľnosti moderátora.

Ako prvý publikoval stručné riešenie tohto problému profesor bioštatistiky Steve Selvin v roku 1975 v článku [3], ale jeho riešenie bolo kritizované a spochybňované toľkými čitateľmi, že potom dodatočne publikoval ešte ďalší postup riešenia založený na Bayesovej vete. Mnoho ľudí však ani po prečítaní všetkých možných dôkazov a zhliadnutí simulácií neverí, že zmena dverí je výhodnejšia.

Jednou z možností, ako niekoho o správnosti úvah presvedčiť, je zvýšiť počet dverí v zadaní. Napríklad, majme 100 dverí a len za jednými je auto. Potom, čo si súťažiaci jedny dvere vyberie, zo zvyšných 99 dverí otvorí moderátor 98 dverí a nechá zatvorené len jedny. V takejto situácii sú ľudia viac ochotní uveriť, že sa vyplatí pôvodnú voľbu zmeniť. Vtedy sa totiž pravdepodobnosť výhry zväčší oveľa výraznejšie, z  $1/100$  na  $99/100$ , a tak to skôr správne odhadne aj človek, ktorý sa riadi len akousi intuíciou.

Ľudia, ktorí si nepozorne prečítali zadanie, často predpokladajú, že moderátor je zlomyseľný a otvorí nejaké dvere a ponúkne súťažiacemu možnosť zmeny len v prípade, ak súťažiaci pôvodne zvolil správne. Za tohto predpokladu samozrejme dôjdu k záveru, že by po otvorení dverí súťažiaci nemal nikdy meniť svoje rozhodnutie.

Moderátor Monty Hall v rozhovore povedal, že skutočné pravidlá súťaže mu takéto správanie umožňujú. Takže sa môže pred každým kolom súťaže rozhodnúť podľa nálady, či bude zlomyseľný a dá súťažiacemu možnosť zmeny len vtedy, keď zvolí na začiatku správne, alebo vždy.

Potom sa pri riešení úlohy musí brať do úvahy aj hodnota pravdepodobnosti, že moderátor je zlomyseľný. Ak je dostatočne vysoká, väčšia ako  $1/2$ , je lepšie voľbu nemeniť.

Naopak, moderátor môže byť občas aj dobromyseľný, a keď si súťažiaci na začiatku vyberie dvere s autom, nedá mu už možnosť zmeny. Ako často býva moderátor zlomyseľný, dobromyseľný a neutrálny, je možné odhadnúť častým sledovaním súťaže.

Označme  $p$  hodnotu pravdepodobnosti, že moderátor sa v danom kole súťaže rozhodol byť zlomyseľný a dvere plánuje otvoriť len v prípade, keď by si súťažiaci



vybral na začiatku dvere s autom. Označme ďalej  $q$  hodnotu pravdepodobnosti, že moderátor sa v danom kole súťaže rozhodol byť dobromyseľný a dvere plánuje otvoriť len v prípade, keď by si súťažiaci vybral na začiatku dvere s kozou. Potom pravdepodobnosť, že moderátor sa v danom kole súťaže rozhodol byť neutrálny a dvere plánuje otvoriť v každom prípade, je  $1 - p - q$ . V priebehu daného kola súťaže tak mohla nastať práve jedna z možností:

1. Moderátor je zlomyseľný a súťažiaci si vybral dvere s autom. Tento jav nastane s pravdepodobnosťou  $1/3 \cdot p$ .
2. Moderátor je dobromyseľný a súťažiaci si vybral dvere s autom. Tento jav nastane s pravdepodobnosťou  $1/3 \cdot q$ .
3. Moderátor je neutrálny a súťažiaci si vybral dvere s autom. Tento jav nastane s pravdepodobnosťou  $1/3 \cdot (1 - p - q)$ .
4. Moderátor je zlomyseľný a súťažiaci si vybral dvere s kozou. Tento jav nastane s pravdepodobnosťou  $2/3 \cdot p$ .
5. Moderátor je dobromyseľný a súťažiaci si vybral dvere s kozou. Tento jav nastane s pravdepodobnosťou  $2/3 \cdot q$ .
6. Moderátor je neutrálny a súťažiaci si vybral dvere s kozou. Tento jav nastane s pravdepodobnosťou  $2/3 \cdot (1 - p - q)$ .

Ak nastala situácia, že súťažiaci nedostal možnosť zmeniť vybrané dvere, buď je v tomto kole moderátor dobromyseľný a za dverami je auto, alebo je zlomyseľný a za dverami je koza. Táto situácia nastáva s pravdepodobnosťou rovnou súčtu pravdepodobností 2. a 4. javu, to je  $2/3 \cdot p + 1/3 \cdot q$ . Stačí teda sledovať, ako často sa toto stane, a ďalej ako často v takejto situácii súťažiaci vyhrá auto. To je s pravdepodobnosťou  $\frac{1/3 \cdot q}{2/3 \cdot p + 1/3 \cdot q}$ . Z toho vieme odhadnúť hodnoty  $p, q$ .

Teraz predpokladajme, že poznáme hodnoty  $p, q$  a vypočítajme, či sa súťažiacemu vyplatí zmeniť voľbu dverí. Pravdepodobnosť, že súťažiaci dostane možnosť voľby a na začiatku vybral dvere s autom je rovná súčtu pravdepodobností 1. a 3. javu, teda  $1/3 \cdot p + 1/3 \cdot (1 - p - q) = 1/3 \cdot (1 - q)$ . Pravdepodobnosť, že súťažiaci dostane možnosť voľby a na začiatku vybral dvere s kozou, je rovná súčtu pravdepodobností 5. a 6. javu, teda  $2/3 \cdot q + 2/3 \cdot (1 - p - q) = 2/3 \cdot (1 - p)$ . Zmeniť voľbu dverí sa vyplatí, ak je prvá pravdepodobnosť menšia, teda

$$\begin{aligned} 1/3 \cdot (1 - q) &< 2/3 \cdot (1 - p), \\ 2p - q &< 1. \end{aligned}$$

Najjednoduchšie je ale bez počítania pravdepodobnosti rovno odhadnúť, či sa vyplatí meniť voľbu dverí tak, že si budeme robiť štatistiky, ako často sa to vyplatilo tým, ktorí voľbu zmenili a ako často tým, ktorí voľbu nezmenili.

Jedným z dôvodov, prečo toľko ľudí sa touto úlohou nechá zmiastť, je to, že hoci situácia je od začiatku v jednom z možných stavov (auto aj kozy už za dverami sú umiestnené), aktivitou moderátora sa zmení pravdepodobnosť jednotlivých možností bez toho, aby sa ten samotný stav zmenil.

Jednoduchšie uchopiteľné sú pre nás úlohy, kde sa hádže kockou, mincou, alebo inak losuje a na začiatku nie je situácia v žiadnom stave, len je nejaká pravdepodobnosť nastatia rôznych javov, a konkrétny jav nastane až po tej losovacej aktivite.

## 2. TWO CHILD PROBLEM

Je známych viacero úloh podobného druhu, keď stav je dopredu daný ale získaním informácie sa zmení pravdepodobnosť.

Z nich by som tu teraz spomenula ešte *The Two Child Problem*, ktorý je podľa mňa ešte zaujímavejší. Je tiež podrobne spracovaný na Wikipédii, v článku [4]. Ja tu uvediem vlastnú verziu zadania, riešenia a ďalších úvah.

Poznámka: Vo všetkých úvahách budeme predpokladať, že pravdepodobnosť narodenia dievčaťa a chlapca je vždy rovnaká a rovná sa jednej polovici.

**Príklad 2.** *Stretlo sa niekoľko známych – Dušan, Milan, Michal a Adam, ktorí sa dlho nevideli a rozprávali sa o svojich rodinách.*

**Otázka 1:** *Dušan sa dozvedel, že Milan má dve deti. Na základe tejto jedinej informácie, aká je pravdepodobnosť, že obe Milanove deti sú chlapci?*

**Odpoveď:** Odpoveď na túto otázku by ešte mala byť jasná. Každé z Milanových detí je chlapec s pravdepodobnosťou  $1/2$  a tieto javy sú na sebe nezávislé. Pravdepodobnosť, že každé dieťa je chlapec, je teda súčinom týchto pravdepodobností, a to je  $1/4$ .

Môžeme to spočítať aj tak, že si napíšeme všetky možnosti:

1. staršie dieťa je dievča a mladšie dieťa je dievča,
2. staršie dieťa je dievča a mladšie dieťa je chlapec,
3. staršie dieťa je chlapec a mladšie dieťa je dievča,
4. staršie dieťa je chlapec a mladšie dieťa je chlapec.

Všetky štyri možnosti sú rovnako pravdepodobné, lebo to, akého pohlavia je ktoré dieťa, nezávisí od pohlavia druhého dieťaťa. Pravdepodobnosť 4. možnosti je teda  $1/4$ .

**Otázka 2:** *Potom sa Dušan dozvedel, že aspoň jedno z dvoch Milanových detí je chlapec. Aká je teraz pravdepodobnosť, že obe Milanove deti sú chlapci?*

**Odpoveď:** Druhá odpoveď je už trochu náročnejšia, ale dá sa to spočítať podobne. Ak vieme iba to, že Milan má dve deti, rovnako pravdepodobné sú všetky štyri vyššie uvedené možnosti. Ak vieme aj to, že Milan určite nemá dve dievčatá, máme len tri možnosti:

1. staršie dieťa je dievča a mladšie dieťa je chlapec,
2. staršie dieťa je chlapec a mladšie dieťa je dievča,
3. staršie dieťa je chlapec a mladšie dieťa je chlapec.

Všetky tri sú znovu rovnako pravdepodobné. Pravdepodobnosť, že má dvoch chlapcov, je teda  $1/3$ .

**Otázka 3:** *Dušan sa ďalej dozvedel, že aj Milan má jedného súrodenca. Aká je pravdepodobnosť, že Milan má brata?*

**Odpoveď:** Pozrime sa na to z pohľadu Milana. Sú štyri možnosti, akého môže mať Milan súrodenca: staršieho brata, mladšieho brata, staršiu sestru, mladšiu sestru. Každá z týchto možností je rovnako pravdepodobná. Preto pravdepodobnosť každej z nich je  $1/4$ . Pravdepodobnosť, že Milan má brata, je súčtom pravdepodobností prvej a druhej možnosti, a to je  $1/2$ .

Z doterajších odpovedí vyplýva zaujímavý poznatok: keď vieme, že niekto má dve deti, a pritom aspoň jedného syna, potom pravdepodobnosť, že obe deti sú chlapci, je  $1/3$ . A súčasne, keď vieme, že chlapec má práve jedného súrodenca, potom pravdepodobnosť, že obe deti sú chlapci, je  $1/2$ .

Dobre, povedzme, že je to zvláštne, ale tak nám to vyšlo. Teraz ale skúste odpovedať na nasledujúcu, veľmi záľudnú otázku. Tak čo, bude to tentoraz  $1/3$  alebo  $1/2$ ?

**Otázka 4:** *K Dušanovi a Milanovi prišiel chlapec a Dušan povedal: „Aj ja mám spolu dve deti. Toto je môj syn Tomáš.“ „Áno, ja mám jedného súrodenca,“ potvrdil Tomáš. Aká je pravdepodobnosť, že aj druhé Dušanovo dieťa je chlapec?*

**Odpoveď:** Poďme na to takouto úvahou. Keď stretieme otca s jedným dieťaťom, ktorý má spolu dve deti, je osem možností, aká to môže byť dvojica otec–dieťa, a každá je rovnako pravdepodobná. Sú to štyri dvojice otec a dcéra a štyri dvojice otec a syn:

1. otec a dcéra majúca staršiu sestru,
2. otec a dcéra majúca mladšiu sestru,
3. otec a dcéra majúca staršieho brata,
4. otec a dcéra majúca mladšieho brata,
5. otec a syn majúci mladšieho brata,
6. otec a syn majúci staršieho brata,
7. otec a syn majúci staršiu sestru,
8. otec a syn majúci mladšiu sestru.

V našom prípade vieme, že ide o jednu z možností 5–8, lebo Tomáš je chlapec. Prvé štyri možnosti teda vôbec neuvažujeme. Z uvažovaných štyroch možností je ďalej v dvoch prípadoch druhým súrodencom chlapec, a v dvoch prípadoch je druhým súrodencom dievča. Pravdepodobnosť, že sú obaja súrodenci chlapci, je teda  $2/4 = 1/2$ .

Takže máme nový zaujímavý poznatok: keď vieme iba to, že niekto má dve deti a z nich je aspoň jeden chlapec, pravdepodobnosť toho, že má dvoch chlapcov, je  $1/3$ . Ale keď má chlapca pri sebe, tak už je to  $1/2$ . To už je veľmi podozrivé, ale všetky doterajšie úvahy predsa boli zrozumiteľné a správne, nie?

A čo ak nemá toho chlapca pri sebe, ale má povedzme iba jeho fotku? Aká bude odpoveď na nasledujúcu otázku?

**Otázka 5:** „Ja mám tiež dve deti,“ ozval sa Michal. „Nie je tu so mnou ani jedno z nich, ale mám tu fotku jedného z nich.“ Potom im ukázal fotku chlapca. Aká je pravdepodobnosť, že aj druhé Michalovo dieťa je chlapec?

**Odpoveď:** Ide o tú istú situáciu ako v predchádzajúcej 4. otázke, pretože máme znovu dvojicu otec–syn (syn na fotke). Postup úvah bude teda rovnaký ako pri 4. otázke: Keď stretneme otca s fotkou jedného dieťaťa, ktorý má spolu dve deti, je osem možností, aká to môže byť dvojica otec–dieťa na fotke, a každá je rovnako pravdepodobná. Keď dieťa na fotke je chlapec, zostávajú štyri možnosti, z toho v dvoch prípadoch má chlapec brata. Odpoveď je teda znovu  $1/2$ .

Tak, ak ste to doteraz ešte nejak strávili, teraz sa dostávame k tomu najneuveriteľnejšiemu.

Zistili sme už, že stačí mať syna na fotke, a už sa zmení odpoveď oproti tomu, keď vieme iba to, že nejaký syn existuje. Je to tým, že už máme o ňom istú informáciu, že vidíme jeho podobu? A čo ak tá informácia je menej určitá – napríklad vieme iba to, v akom sa narodil znamení? Presne toho sa týka posledná, 6. otázka.

**Otázka 6:** Potom sa do rozhovoru zapojil Adam. Dozvedeli sa, že má tiež dve deti, a že aspoň jedno z detí je chlapec narodený v znamení Býka. Aká je pravdepodobnosť, že aj druhé Adamovo dieťa je chlapec?

**Odpoveď:** Pre jednoduchosť predpokladajme, že narodenie sa v každom z dvanástich znamení je rovnako pravdepodobné u každého dieťaťa v rodine a táto pravdepodobnosť je preto  $1/12$ .

Každé dieťa je buď dievča alebo chlapec a je narodené v jednom z dvanástich znamení, spolu je to teda 24 rôznych možností pre každé dieťa, všetky rovnako pravdepodobné. Pre rodinu s dvomi deťmi je to potom  $24 \cdot 24 = 576$  rovnako pravdepodobných možností.

Nás ale zaujímajú iba tie možnosti, keď aspoň jedno z detí je chlapec narodený v znamení Býka. V prípade, že to je prvé dieťa, druhé má 24 možností. V prípade, že ide o druhé dieťa, prvé má tiež 24 možností, ale možnosť, že sú to dvaja chlapci Býci sme počítali dvakrát. Spolu je to teda  $24 + 24 - 1 = 47$  možných variant, ako môže vyzerat' rodina s dvomi deťmi, z ktorých aspoň jedno je chlapec Býk.

Teraz spočítame, koľko z nich je takých, že aj druhé dieťa je chlapec. Pokiaľ prvé dieťa je chlapec Býk, a druhé dieťa je tiež chlapec, existuje 12 možností, aké môže mať znamenie. Pokiaľ druhé dieťa je chlapec, zase je 12 možností, aké môže mať znamenie prvé dieťa, s tým, že možnosť dvaja Býci sme zase započítali dvakrát. Spolu je to teda  $12 + 12 - 1 = 23$  možností.

Pravdepodobnosť, že v dvojdetnej rodine sú dvaja chlapci, za predpokladu, že v tejto rodine je chlapec Býk, je teda rovná  $23/47$ .

Zdá sa vám to tiež také neuveriteľné? Máte silný pocit alebo dokonca istotu, že niekde v tých úvahách je chyba? Tak si to skúste overiť experimentom. Nemusíte ho ani robiť, stačí si ho predstaviť. Predstavte si teda nasledovný experiment. Veľkej náhodnej vzorke rodín, ktoré majú práve dve deti, dáte vyplniť takýto papierový dotazník. (Kvôli názornejšej predstave ten dotazník je papierový. Pokiaľ

sa rozhodnete tento experiment aj reálne uskutočniť, môžete zvoliť praktickejšiu elektronickú variantu.)

1. Vaše staršie dieťa je dievča alebo chlapec? (2 možnosti)
2. V akom znamení sa narodilo vaše staršie dieťa? (12 možností)
3. Vaše mladšie dieťa je dievča alebo chlapec? (2 možnosti)
4. V akom znamení sa narodilo vaše mladšie dieťa? (12 možností)

Lístky s odpoveďami potom vytriedite tak, že vždy tie, v ktorých sú rovnaké odpovede na všetky štyri otázky, dáte na jednu kôpku. Ak vzorka ľudí je dostatočne veľká, všetci odpovedali pravdivo, deti sa rodia rovnako často v každom znamení a rodí sa rovnako veľa chlapcov a dievčat, potom budete mať na stole  $2 \cdot 12 \cdot 2 \cdot 12 = 576$  zhruba rovnako veľkých kôpok.

Teraz dáte preč zo stola všetky kôpky, v ktorých ľudia vyplnili, že majú dve dievčatá. Takých kôpok bude jedna štvrtina, to je 144. Zostane vám tak  $576 - 144 = 432$  kôpok.

To sú všetky, kde majú v rodine aspoň jedného chlapca. Z nich jedna tretina sú kôpky, v ktorých ľudia vyplnili, že majú dvoch chlapcov. (Týmto sa experimentálne potvrdila správnosť odpovede na 2. otázku.)

Teraz vyberiete kôpky, v ktorých ľudia vyplnili, že staršie dieťa sa narodilo v znamení Býka a dáte si ich napravo. Takých bude  $1/12$  celkového počtu, to je 36. Zostane  $432 - 36 = 396$  kôpok. Z nich dáte napravo ešte tie, v ktorých ľudia vyplnili, že mladšie dieťa sa narodilo v znamení Býka. Aj tých bude  $1/12$  celkového počtu, to je 33. V ostatných kôpkach už nie je ani jedno dieťa v znamení Býka, tak ich dáte zo stola preč.

Na stole máte teraz  $36 + 33 = 69$  kôpok. Z nich je jedna tretina taká, v ktorých ľudia vyplnili, že majú dvoch chlapcov. Spolu teda 23. Tie dáte naľavo. Napravo zostalo 46 kôpok, ktoré rozdelíte na dve skupiny po 23. V prvej skupine budú tie, v ktorých ľudia vyplnili, že majú staršie dievča a mladšieho chlapca a v druhej tie, v ktorých vyplnili, že majú staršieho chlapca a mladšie dievča. Vo všetkých je aspoň jedno z detí v znamení Býka, ale nemusí to byť chlapec. V každej z týchto skupín je teda 23 kôpok. Z týchto 23 je vždy jedna taká, kde sú obe deti Býk, 11 je takých, kde mladšie dieťa nie je Býk (ale jedno zo zvyšných 11 znamení) a 11 je takých, kde staršie dieťa nie je Býk. V prvej skupine dáte preč zo stola všetky kôpky, kde mladšie dieťa nie je Býk. A v druhej skupine dáte preč zo stola všetky kôpky, kde staršie dieťa nie je Býk.

Zostane vám teda na stole  $23 + 46 - 11 - 11 = 47$  kôpok, kde je už všade jedno dieťa chlapec Býk. To sú rodiny, ktoré vás zaujímajú. Koľko z nich má dvoch chlapcov? Naľavo máte 23 kôpok, kde sú dvaja chlapci a aspoň jeden z nich Býk, napravo máte 24 kôpok, kde je len jeden chlapec a tiež je Býk. Pretože kôpky sú zhruba rovnako veľké, záver je jasný: zhruba  $23/47$  týchto rodín má dvoch chlapcov.

Ak vás experiment už presvedčil, asi vám stále vrta v hlave, ako je to teda možné ... Prečo to vychádza tak zvláštne?

Vtip je v tom, že v rôznych otázkach sa v skutočnosti zaoberáme stavom niečoho iného. V otázkach 1 a 2 skúmame rodiny – v akom stave môže byť dvojdetná

rodina. Zatiaľčo v otázkach 3,4 a 5 už máme dopredu vybrané jedno dieťa a už len skúmame, v akom stave môže byť jeho súrodenec. A je jedno, či vybrané dieťa je prítomné, alebo len ukázané na fotke. Otázku 6 môžeme chápať tak, že máme „čiasťočne vybrané“ dieťa – neoznačili sme ho konkrétne, ale uviedli nejakú jeho vlastnosť, o ktorej je známe, s akou pravdepodobnosťou sa u detí vyskytuje. Preto výsledok vyjde niečo medzi  $1/2$  a  $1/3$ . Čím vzácnejšia vlastnosť to je, tým sa výsledok viac blíži k  $1/2$ .

Ak vás to ešte stále nepresvedčilo, a máte pocit, že to je iba nejaká hra so slovami, pre bežných ľudí neužitočná teória, pozrite sa na túto ukážku využitia nami vypočítaných hodnôt v praxi.

Predstavte si, že organizujete nejakú veľkú hromadnú akciu pre dvojdetnú rodinu.

Rodiny sa zhromaždia a vy potom zavoláte k sebe všetkých otcov, ktorí majú aspoň jedného syna. Keď prídu, tak sa spýtate, ktorí z nich majú dvoch synov. Prihlási sa zhruba tretina.

V druhom prípade zavoláte k sebe všetkých otcov a povieť im, aby náhodne vybrali aj jedno zo svojich detí a priviedli ho so sebou. Tých, ktorí privedú chlapca, sa spýtate, ktorí z nich majú dvoch synov. Prihlási sa zhruba polovica z nich.

V treťom prípade povieť, aby za vami prišli všetci otcovia, ktorí majú aspoň jedného syna narodeného v znamení Býka. Keď prídu, tak sa spýtate, ktorí z nich majú dvoch synov. Prihlási sa zhruba  $23/47$  z nich.

Ak po tom všetkom ešte zvažujete urobiť si vlastný prieskum, tak napríklad ja mám dve deti, sú to dvaja chlapci, a ani jeden z nich nie je narodený v znamení Býka.

#### REFERENCE

- [1] *Monty Hallův problém*, Wikipedie, Otevřená encyklopedie, online [https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Monty\\_Hall%C5%AFv\\_prob%C3%A9m&oldid=19764830](https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Monty_Hall%C5%AFv_prob%C3%A9m&oldid=19764830).
- [2] *Monty Hall problem*, Wikipedia, The Free Encyclopedia, online [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Monty\\_Hall\\_problem&oldid=1026358351](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Monty_Hall_problem&oldid=1026358351).
- [3] S. Selvin, et al.: “*Letters to the Editor*”, *The American Statistician* **29** (1975), No. 1, 67–71, online [www.jstor.org/stable/2683689](http://www.jstor.org/stable/2683689).
- [4] *Boy or Girl paradox*, Wikipedia, The Free Encyclopedia, online [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Boy\\_or\\_Girl\\_paradox&oldid=1024765494](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Boy_or_Girl_paradox&oldid=1024765494).

Viera Štoudková Růžičková, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,  
e-mail: [ruzickova@fme.vutbr.cz](mailto:ruzickova@fme.vutbr.cz)