ÚLOHA O DÁME V JAZERE

EMA BARUSOVÁ

Abstrakt. V úlohách o úniku a prenasledovaní uvažujeme dva objekty, kde sa jeden z nich (prenasledujúci objekt) snaží dobehnúť druhý (unikajúci) objekt, pričom ten sa snaží dobehnutiu naopak zabrániť. V tomto článku sa zaoberáme analýzou problému, ktorý je modelovaný na príklade dámy unikajúcej svojmu nápadníkovi zo stredu kruhového jazera. Diskutujeme pritom klasické riešenie problému v súlade s [1], kde je naším cieľom nájsť optimálnu únikovú stratégiu zaisťujúcu úspech dámy. V pôvodnom zadaní je pomer rýchlostí prenasledovateľa a unikajúceho je zadaný číselne a v texte okrem odvodenia optimálnej stratégie pre zadaný pomer rýchlostí uvádzame, pre aké pomery rýchlostí je takáto stratégia stále postačujúca. Tam, kde pôvodná stratégia už postačujúca nie je, ukážeme jej čiastočnú modifikáciu spolu s určením dolnej hranice pomeru rýchlostí, pre ktorý je dáma ešte stále schopná svojmu nápadníkovi uniknúť. V poslednej časti uvádzame čiastočné riešenie modifikovaného zadania, ktoré vzniklo na podnet pána profesora Čermáka v čase písania bakalárskej práce, ktorej je tento problém súčasťou.

1. Úvod do problematiky

Úlohy z oblasti úniku a prenasledovania reprezentujú zaujímavý matematický koncept so značným aplikačným potenciálom v robotike, navigácii, analýze biologických procesov či dokonca plánovaní vojenských operácií.

V zadaní úlohy zvyčajne uvažujeme dva objekty, kde o jednom hovoríme ako o prenasledovateľovi (angl. pursuer) a o druhom ako o prenasledovanom, či unikajúcom (angl. evader); vo všeobecnom ponímaní môžeme uvažovať o skupine objektov rozdelenej do dvoch „tímov“ (napríklad dve námorné či letecké posádky), kde jeden tím analogicky reprezentuje prenasledovateľa a druhý tím unikajúceho. Zadanie spravidla zahŕňa niekoľko predpokladov o smere a rýchlosti pohybu oboch objektov spolu s vymedzením oblasti, na ktorej sa toto prenasledovanie odohráva. Pri riešení takto zadanej úlohy je naším cieľom definovať stratégiu, ktorá umožní prenasledovateľovi uskutočniť sériu akcií (krokov), ktoré budú eventuálne viesť

2020 *MSC.* Primární 91A24, 49N75.

Klíčová slova. teória diferenciálnych hier, prenasledovanie, únik.

Článek vznikl na základě bakalářské práce autora v oboru Matematické inženýrství na FSI VUT v Brně. Vedoucím práce byl Jan Čermák z Ústavu matematiky FSI VUT v Brně.

Poďakovanie patrí najmä môjmu školiteľovi p. prof. Čermákovi, ktorý veľkým dielom prispel k pokojnému a úspešnému dopísaniu mojej bakalárskej práce, ktorej je tento problém súčasťou. Ďalej nesmiem zabudnúť vyjadriť vďaku mojej rodine, skvelým spolužiakom a mojim blízkym, ktorí ma podporovali v náročných chvíľach.

k jeho úspechu; napríklad definovať stratégiu, ktorá eventuálne vedie k zásahu či dobehnutiu unikajúceho objektu. Alternatívne môžeme taktiež hľadať stratégiu unikajúceho objektu, ktorá naopak zabráni úspechu prenasledovateľa.

Spravidla máme k dispozícii niekoľko predpokladov o správaní sa unikajúceho objektu, no v niektorých prípadoch ho považujeme za „inteligentného“ protivníka, ktorý sa neriadi len obmedzenou sériou predpokladov. V takom prípade je cieľom nájsť stratégiu, ktorá berie do úvahy všetky možné rozhodnutia protivníka a je tak optimálnym riešením zadaného problému.

Nasledujúci únikový problém sa prvýkrát objavil v článku Martina Gardnera *„Mathematical Games“* v časopise *Scientific American.* Autor v tomto článku zadal pomer rýchlostí prenasledovateľa a prenasledovaného objektu číselne; v texte preto najprv rozoberieme riešenie úlohy pre daný pomer a neskôr sa zameriame na isté modifikácie pôvodného zadania. Zadanie spolu s riešením sformulujeme podľa [1] s podporou publikácie [2].

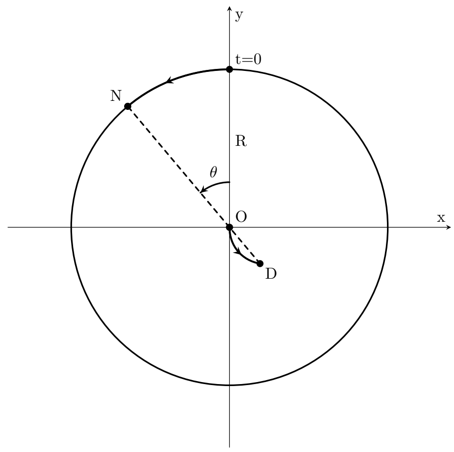
2. Zadanie

Počas dovolenky sa dáma snažila utiecť svojmu nápadníkovi. Rozhodla sa tak vyplávať člnom presne do stredu kruhového jazera, popri ktorom dovolenkovala. Jej nápadník sa rozhodol počkať si na ňu na brehu jazera. Bolo mu jasné, že dáma sa nakoniec na breh bude musieť vrátiť a zároveň sa domnieval, že sa do ľubovoľného bodu na brehu jazera dostane skôr ako dáma; disponoval totiž informáciou, že dokáže bežať 4-krát rýchlejšie ako dáma veslovať. Nevedel však, že dáma – skúsená profesorka matematiky – si svoj plán úniku dobre premyslela. Akú stratégiu profesorka zvolila?

3. Matematický model a jeho riešenie

V nasledujúcom texte opíšeme únikovú stratégiu dámy, pričom ukážeme, že pre daný pomer rýchlostí je stratégia otázkou pomerne elementárnej geometrie. Táto stratégia sa pritom skladá z dvoch fáz, ktorých zmysluplnosť sa pokusíme objasniť. Skôr, než začneme s analýzou problému, dodajme do zadania ešte jednu informáciu, ktorú mala profesorka k dispozícii. Vedela s istotou povedať, že na brehu je rýchlejšia ako muž, čo nás logicky vedie k myšlienke, čo ju motivovalo veslovať najprv do stredu jazera a následne rozmýšľať nad svojou únikovou stratégiou začínajúc svoj únik práve v tomto bode. Odpoveďou na túto otázku by mohla byť jej túžba dokázať mužovi, že aj za nepriaznivých počiatočných podmienok mu je stále schopná ujsť. V ďalšom texte postupne objasníme stratégiu, ktorú profesorka zvolila.

V prvom kroku sa dáma pokúsi čo najdlhšie zachovať maximálnu vzdialenosť medzi okamžitou polohou jej nápadníka a bodom na brehu, ku ktorému chce doplávať. Z tohto dôvodu sa snaží vzďalovať od stredu jazera O tak, že jej čln, stred jazera a muž sú v každom momente sledovania na jednej priamke. Vzdialenosť dámy od bodu O sa bude pritom stále zväčšovať za predpokladu, že muž začne bežať okolo jazera konštantnou rýchlosťou v snažiac sa ju chytiť. Pokiaľ rozložíme okamžitú rýchlosť dámy na uhlovú a radiálnu zložku, tak uhlová rýchlosť dámy bude v tomto štádiu z dôvodu zachovania kolinearity kontinuálne narastať a radiálna zložka sa bude zmenšovať, až kým nedosiahne nulovú hodnotu. Táto stratégia je podporená ilustráciou na obr. 1, kde bez ujmy na všeobecnosti uvažujeme, že muž beží proti smeru hodinových ručičiek.



Obrázek 1. Poloha dámy a nápadníka v čase $t > 0$.

Ako ďalej ukážeme, dáma je naozaj schopná zachovať spomínanú kolinearitu – teda aspoň na nejakú dobu. Vysvetlíme, prečo je táto doba zhora obmedzená, a teda prečo nie je možné dostať sa na breh len s využitím tejto taktiky.

Predpokladajme, že muž beží rýchlosťou s veľkosťou v a dáma vesluje rýchlosťou s veľkosťou $0{,}25v$. Pripomeňme, že myšlienka zachovania kolinearity nám okrem iného hovorí, že dáma a jej nápadník sa musia pohybovať rovnakou uhlovou rýchlosťou počas celej prvej fázy stratégie. Na obr. 1 je ilustrovaná okamžitá poloha muža (bod N) a dámy (bod D) po tom, čo muž opíše kružnicový oblúk daný stredovým uhlom θ. Pre jeho uhlovú rýchlosť zrejme môžeme písať

$$\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t = v/R,$$

kde R označuje polomer jazera. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že priamka, na ktorej sa nachádza muž a dáma na začiatku prenasledovania, je osou y pravouhlej súradnicovej sústavy s počiatkom v bode O.

Keďže dotyčnicová zložka rýchlosti dámy je závislá na vzdialenosti od jazera a platí pre ňu

$$v_\theta = r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,,$$

kde r označuje okamžitú vzdialenosť dámy od O, za predpokladu zachovania kolinearity môžeme dosadiť

$$v_\theta = v\frac{r}{R}\,.$$

Je pritom zrejmé, že čím ďalej sa dáma dostane od stredu jazera, tým bude jej uhlová rýchlosť vyššia. Keďže veľkosť celkovej rýchlosti dámy je $0{,}25v$, radiálna zložka v_r jej rýchlosti musí byť taká, že platí

$$v_r^2 + v_\theta^2 = (0{,}25v)^2.$$

Tento vzťah vyplýva z rozkladu vektoru celkovej rýchlosti na vektor uhlovej a radiálnej rýchlosti, ktoré z geometrickej interpretácie zvierajú v každom bode pohybu dámy pravý uhol.

Pre v_r teda dostaneme

$$v_r = \sqrt{0{,}25^2 v^2 - v_\theta^2} = \sqrt{0{,}25^2 v^2 - v^2 \frac{r^2}{R^2}}\,,$$

a teda odtiaľ

$$v_r = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = v\sqrt{0{,}25^2 - \frac{r^2}{R^2}}\,.$$

Z posledného vyjadrenia je zrejmé, že hodnota v_r je pritom väčšia ako nula (dáma sa vzďaľuje od O, zatiaľ čo zachováva kolinearitu) za podmienky, že $0{,}25^2 - r^2/R^2 > 0$, teda ak $r < 0{,}25R$. Akonáhle nastane rovnosť $r = 0{,}25R$, dáma prejde do druhej fázy svojej únikovej stratégie. V opačnom prípade by nasledoval periodický pohyb po kružnici so stredom O a polomerom $0{,}25R$.

Ešte predtým, než objasníme druhú fázu únikovej stratégie, vypočítajme pre zaujímavosť, ako dlho bude dáma veslovať, kým dosiahne $v_r = 0$. Zo vzťahu $v_r = \mathrm{d}r/\mathrm{d}dt$ vyjadríme $\mathrm{d}t$, pričom $t = T$ bude čas, keď $v_r = 0$, potom platí

$$T = \int_0^T \mathrm{d}t = \int_0^{0{,}25R} \frac{\mathrm{d}r}{v_r} = \int_0^{0{,}25R} \frac{\mathrm{d}r}{v\sqrt{0{,}25^2 - r^2/R^2}} =$$

$$= \frac{R}{v}\int_0^{0{,}25R} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{0{,}25^2 - r^2/R^2}} = \frac{R}{v}\arcsin\left(\frac{r}{0{,}25R}\right)\Big|_0^{0{,}25R} = \frac{R}{v}\arcsin(1),$$

teda

$$T = \frac{\pi R}{2v}\,.$$

V čase $t = T$, keď sa dáma dostane do vzdialenosti $0{,}25R$ od O, teda zmení svoju taktiku a prejde do druhej fázy svojho úniku. Zdôraznime, že v tomto čase sa dostala do bodu na kružnici, po ktorej by sa pri udržiavaní jej predošlej taktiky začala pohybovať rovnomerným pohybom a ku brehu by sa ďalej nepribližovala. Nazvime túto kružnicu pracovne hraničná kružnica. V tomto čase zabudne na doposiaľ udržiavanú kolinearitu a začne smerovať po normále na pevninu, pričom vzdialenosť, ktorú musí z tohto bodu k pevnine doveslovať, je $0{,}75R$. Aby sa muž dostal do rovnakého bodu, musí prejsť vzdialenosť πR (až do tohto momentu totiž dáma udržala spomínanú kolinearitu a teda muž sa nachádzal od bodu, do ktorého dáma smeruje, práve polkružnicu ďaleko). Dáma ujde svojmu nápadníkovi, ak sa do tohto bodu dostane skôr ako on, teda ak platí nerovnosť časov

$$\frac{R - 0{,}25R}{0{,}25v} < \frac{\pi R}{v}\,, \tag{3.1}$$

resp.

$$R(1-0{,}25) < 0{,}25\pi R.$$

Táto nerovnosť platí, z čoho môžeme usúdiť, že pre zadaný pomer rýchlostí je dáma schopná nápadníkovi ujsť, ak sa bude riadiť práve opísanou stratégiou.

4. Rozšírenie

Doteraz sme sa zaoberali úlohou s číselne zadaným pomerom rýchlostí dámy a nápadníka; v ďalšom texte odvodíme, pre aké hodnoty tohto pomeru je stratégia vysvetlená vyššie stále postačujúca, teda zaistí dáme únik pred jej nápadníkom. Zároveň uvedieme modifikáciu stratégie pre menšie hodnoty tohto pomeru, teda tam, kde už spomínaná pôvodná stratégia postačujúca nie je.

Označme α pomer rýchlostí dámy a muža. Pre dostatočne veľkú hodnotu α nie je táto dvojfázová úniková stratégia potrebná, postačí, ak sa dáma vyberie po normále priamo na breh. Najprv určíme minimálnu hodnotu α, ktorá ešte túto stratégiu umožňuje. V uvažovanom prípade musí platiť, že dáma prevesluje vzdialenosť R za kratší čas, než muž prebehne polovicu kružnice, teda πR. Dáma pritom vesluje rýchlosťou αv, kde v je rýchlosť muža. Pre parameter α teda získame dolný odhad zo vzťahu

$$\frac{R}{\alpha v} = \frac{\pi R}{v}\,,$$

teda

$$\alpha > \frac{1}{\pi} \approx 0{,}3183$$

Pokiaľ je teda $\alpha > 1/\pi$, dáma nepotrebuje využiť pôvodnú stratégiu, no stále je pre ňu výhodné podľa nej postupovať – za každých okolností totiž získa väčší náskok pred jej nápadníkom. Pre názornosť odvodíme, ako veľký náskok získa dáma pre hraničnú hodnotu $\alpha = \pi^{-1}$. Ako platilo doteraz, okamžitá poloha dámy, muža a stred jazera budú na jednej priamke, až kým riadiálna zložka rýchlosti dámy nebude nulová. Podľa predchádzajúcich úvah sa dáma počas prvej fázy únikovej stratégie dostane do vzdialenosti $\pi^{-1}R$ od stredu jazera a následne bude smerovať po normále k brehu jazera, pričom bude musieť ešte preveslovať vzdialenosť

$$R - \pi^{-1}R = \frac{R(\pi-1)}{\pi}\,.$$

Na pevninu sa teda dostane za čas

$$t_d = \frac{R(\pi-1)/\pi}{v/\pi} = \frac{R}{v}(\pi-1). \tag{4.1}$$

Na to, aby sa muž dostal do bodu na brehu, na ktorý dáma dovesluje, bude musieť prebehnúť presne polkružnicu okolo jazera. Túto vzdialenosť prejde za čas

$$t_n = \frac{R}{v}\,\pi. \tag{4.2}$$

Odčítaním (4.1) od (4.2) zisťujeme, že muž by potreboval o R/v viac času na to, aby sa dostal do bodu na pevnine, na ktorý dáma dovesluje. Pre lepšie predstavu ide o čas, za ktorý muž prebehne vzdialenosť R, teda polomer kružnice, čo určite nie je nepodstatný úsek vzhľadom k polkružnici, ktorú musí prebehnúť celkovo.

Uvažujme teraz, že dáma sa nepohybuje dostatočne veľkou rýchlosťou (teda $\alpha > 1/\pi$), a teda potrebuje postupovať dvojfázovou stratégiou odvodenou v predchádzajúcej časti. Najprv vypočítajme, pre akú minimálnu hodnotu $\alpha_{\min}$ je táto stratégia pre dámu ešte postačujúca. Túto minimálnu hodnotu parametru dostaneme z výrazu (3.1), pričom za číselnú hodnotu 0,25 dosadíme parameter α a máme

$$\frac{R - \alpha R}{\alpha v} < \frac{\pi R}{v},$$

resp.

$$1 < \alpha(1 + \pi).$$

Pre α teda môžeme písať

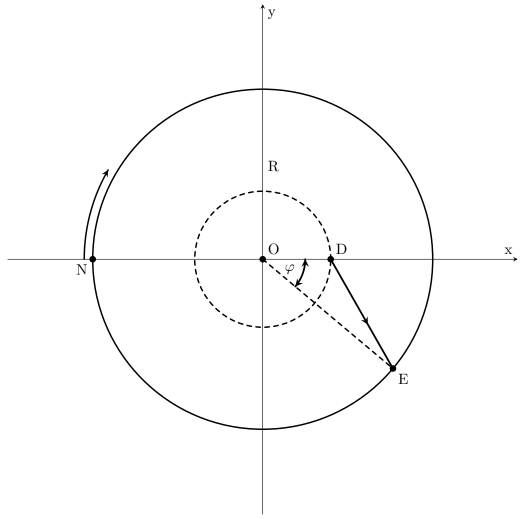
$$\alpha > \frac{1}{1+\pi} \approx 0{,}2415, \quad \text{a teda} \quad \alpha_{\min} \approx 0{,}2415.$$

V tejto sérii úvah si môžeme položiť ešte poslednú otázku: Je možné túto stratégiu modifikovať tak, aby dáma ušla mužovi aj pre hodnoty α menšie ako $(1 + \pi)^{-1}$?

Ukazuje sa, že to možné je, pokiaľ predpokladáme, že muž sa správa „racionálne“. Túto charakterovú črtu v krátkosti okomentujeme. Keďže je naša dáma profesorkou matematiky, je pravdepodobné, že svojho nápadníka stretla na niektorom z mnohých matematických seminárov, ktoré navštevuje, a teda nápadník sám disponuje aspoň základnými vedomosťami z oblasti matematiky. Muž si teda uvedomuje, akú taktiku dáma zvolí a tento predpoklad zahrnie do svojej vlastnej taktiky. Špeciálne predpokladá, že akonáhle sa dáma prestane vzďalovať od stredu jazera (dostane sa na hraničnú kružnicu), vydá sa priamo po normále k brehu jazera. Náš predpoklad mužovej racionality teda znie nasledovne: akonáhla dáma prejde do druhej fázy stratégie, muž ju prestane pozorne sledovať a jednoducho sa rozbehne po brehu do bodu, do ktorého podľa jeho racionálnej úvahy dáma smeruje. Prehodnotiť svoju taktiku ho pritom donúti iba jedna okolnosť – ak sa dáma začne z nejakého dôvodu naspäť približovať k stredu jazera (tento predpoklad ešte pripomenieme neskôr).

Dáma disponuje informáciou, že veľkosť jej rýchlosti je menšia ako $(\pi - 1)^{-1}v$ a dobre si uvedomuje, že by mužovi neušla, pokiaľ by postupovala podľa pôvodnej stratégie. Vytiahne tak z rukávu posledný trik – v druhej fáze svojho úniku bude smerovať na breh po priamke, nie však po normále do najbližšieho bodu (ako tomu bolo doposiaľ). Muž pritom stále predpokladá, že bude smerovať práve do tohto bodu a rozbehne sa k nemu, zatiaľ čo dáma bude smerovať niekam inam. On ju ale už naďalej nesleduje a svojej chyby si nevšimne.

Pre lepšie predstavu toho, čo má dáma v umysle, uvažujme situáciu ako na obr. 2, ktorý ilustruje práve moment, keď má dáma prejsť do druhej fázy. Bez ujmy na všeobecnosti sa v tomto čase dáma nachádza v bode $[\alpha R, 0]$ na osi x, a teda muž v bode $[-R, 0]$. Počiatok súradnicovej sústavy sa tak nachádza v strede jazera. Uhol φ potom vyjadruje odklon priamky, po ktorej sa dáma plánuje vybrať od osi x, resp. od normály, po ktorej by za iných okolností smerovala na breh. Muž predpokladá, že $\varphi = 0$, no ako si ďalej ukážeme, mýli sa.



Obrázek 2. Modifikácia stratégie dámy v druhej fáze úniku.

V prvom kroku výrazne zjednodušíme naše výpočty tým, že budeme kružnicu, na ktorej má dáma nulovú radiálnu zložku rýchlosti, považovať za jednotkovú. Z predchádzajúceho textu vieme, že polomer tejto kružnice je αR, z čoho dostávame

$$\alpha = \frac{1}{R}\,. \tag{4.3}$$

Zároveň si uvedomíme, že pomer polomerov tejto kružnice a kružnice okolo jazera je $\alpha R/R$, teda α. Úlohu hľadania minimálnej hodnoty α môžeme tak preformulovať na úlohu hľadania maximálnej hodnoty R, pre ktoré dokáže dáma stále ujsť. Zároveň z predchádzajúceho zjednodušenia môžeme odvodiť, že dáma sa pohybuje rýchlosťou v/R. Teraz už môžeme úlohu formulovať matematicky.

Keď sa dáma dostane na únikovú kružnicu, jej vzdialenosť od stredu jazera je jednotková a pomocou kosínovej vety môžeme vyjadriť vzdialenosť, ktorú musí preveslovať z tejto kružnice do bodu E na brehu ako

$$|DE| = \sqrt{1 + R^2 - 2R\cos\varphi}\,,$$

pričom pre čas, za ktorý sa jej to podarí, platí

$$\frac{|DE|}{v/R} = \frac{R}{v}\sqrt{1 + R^2 - 2R\cos\varphi}\,. \tag{4.4}$$

Čo teda spraví muž? Ako môžeme vidieť na obr. 2, muž beží po brehu v smere hodinových ručičiek, no mohli by sme namietať. Nebolo by preňho výhodnejšie rozbehnúť sa proti smeru hodinových ručičiek? Prešiel by tak kratšiu vzdialenosť a do bodu S by sa dostal zrejme skôr, ako dáma. V tomto momente musíme ešte raz pripomenúť predpoklad mužovej racionality, ktorý bol objasnený vyššie. Ako je uvedené v [2], taktika dámy a reakcia muža bude nasledovná: Dáma prejde infinitezimálnu vzdialenosť tak, aby sa muž začal pohybovať v smere hodinových ručičiek. Od toho momentu je pre muža najvýhodnejšie zachovať smer pohybu a bežať v smere hodinových ručičiek, ak sa dáma vyberie po priamke k brehu, no zároveň nepretne hraničnú kružnicu. Pokiaľ by sa muž nečakane otočil, dáma by mohla zmeniť stratégiu a začať veslovať k brehu po normále. Alternatívne by mohla iba „otočiť znamienko“ uhlu φ, a tak by bola situácia podobná, ako predtým (len symetricky otočená).

Akonáhle sa muž odovzdá myšlienke racionality a rozbehne sa v smere hodinových ručičiek, bude musieť prebehnúť vzdialenosť $(\pi + \varphi)R$, aby sa dostal do bodu S. Zaberie mu to pritom čas

$$\frac{R}{v}(\pi + \varphi). \tag{4.5}$$

Dáma teda tesne unikne mužovi, ak nastane rovnosť výrazov (4.4) a (4.5), teda platí

$$\pi + \varphi = \sqrt{1 + R^2 - 2R\cos\varphi}\,.$$

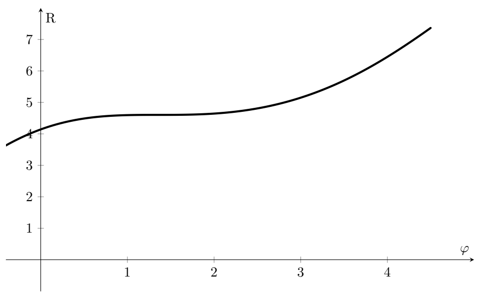
Rovnicu riešime pre R a dostávame

$$R = \cos\varphi \pm \sqrt{\cos^2\varphi + (\pi + \varphi)^2 - 1}\,.$$

Keďže polomer jazera R musí byť kladný, do úvahy berieme len plusové znamienko a pre R teda platí

$$R = \cos\varphi + \sqrt{\cos^2\varphi + (\pi + \varphi)^2 - 1}\,. \tag{4.6}$$

Na Obr. 3 môžeme sledovať priebeh funkcie $R(\varphi)$. Pre nájdenie minimálnej



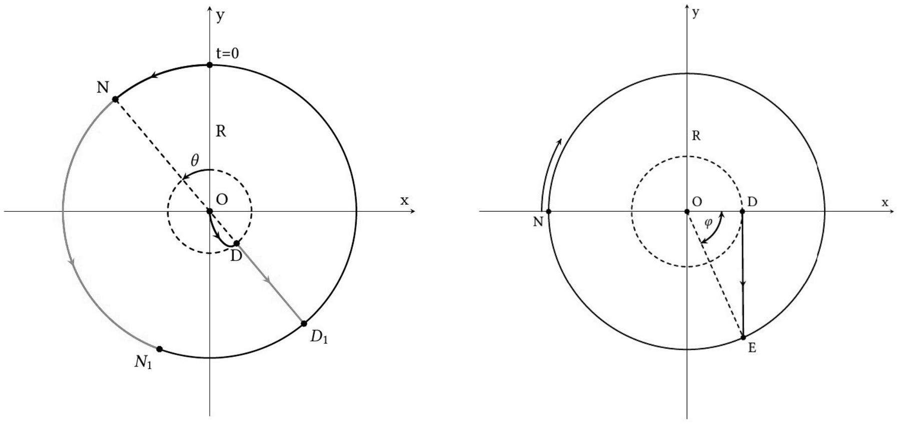
Obrázek 3. Závislosť veľkosti polomeru jazera R na uhle φ.

hodnoty α teda musíme nájsť maximálnu hodnotu R (pripomeňme, že túto úvahu máme z rovnice (4.3)). Chceme teda nájsť hodnotu φ, ktorá maximalizuje hodnotu $R(\varphi)$. Najprv uskutočníme jej výpočet na základe goniometrickej analýzy. Ak φ prekročí hodnotu, pre ktorú je priamka DE dotyčnicou k hraničnej kružnici (teda spätne pretne túto kružnicu), začne sa približovať k stredu jazera a táto situácia je pre nás neprípustná. Z tohto dôvodu je maximálna hodnota φ zhora ohraničená. Dáma by teda mala zvoliť taký uhol φ, aby priamka DE bola kolmá k osi x.

Pre lepšiu predstavu je táto situácia znázornená na obr. 4(b) spolu s ilustráciou pôvodnej stratégie (a), kde pre uhol φ z elementárnej geometrie platí

$$\cos\varphi = \frac{\alpha R}{R} = \frac{1}{R}\,, \tag{4.7}$$

pretože vzdialenosť αR považujeme za jednotkovú.



(a) Pôvodná úniková stratégia dámy

(b) Modifikácia druhej fázy

Obrázek 4. Porovnanie dvoch scenárov druhej fázy únikovej stratégie.

V rovnici (4.6) potom môžeme substituovať za R z výrazu vyššie a dostávame rovnicu pre neznámu φ

$$\frac{1}{\cos\varphi} = \cos\varphi + \sqrt{\cos^2\varphi + (\pi+\varphi)^2 - 1}\,.$$

Túto rovnicu teraz upravíme. Najprv vynásobíme členom $\cos\varphi$, následne odčítame z oboch strán člen $\cos^2\varphi$ a máme

$$1 - \cos^2\varphi = \sin^2\varphi = \cos\varphi\sqrt{\cos^2\varphi + (\pi+\varphi)^2 - 1}\,.$$

Umocníme a ďalej upravujeme:

$$\begin{aligned}
\sin^4\varphi &= \cos^4\varphi + (\pi+\varphi)^2\cos^2\varphi - \cos^2\varphi,\\
(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) &= (\pi+\varphi)^2\cos^2\varphi - \cos^2\varphi,\\
\sin^2\varphi - \cos^2\varphi &= (\pi+\varphi)^2\cos^2\varphi - \cos^2\varphi,\\
\tan\varphi &= \pi + \varphi.
\end{aligned}$$

Alternatívou k vyššie uvedenému postupu je stanovenie hodnoty φ pomocou prostriedkov diferenciálneho počtu (hľadáme extrém funkcie $R(\varphi)$). Rovnicu (4.6) zderivujeme podľa φ a položíme rovnú nule, teda

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\varphi} = -\sin\varphi + \frac{-2\cos\varphi\sin\varphi + 2(\pi+\varphi)}{(\cos^2\varphi + (\pi+\varphi)^2 - 1)^{1/2}} = 0.$$

Po prevode na spoločného menovateľa dostávame v čitateli výraz

$$\sin\varphi\sqrt{\cos^2\varphi + (\pi+\varphi)^2 - 1} - 2\cos\varphi\sin\varphi + 2(\pi+\varphi) = 0,$$

ktorý ďalej upravíme na tvar

$$2(\pi+\varphi)\sin\varphi\cos\varphi = (\pi+\varphi)^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi.$$

Tento výraz následne vynásobíme členom $1/\cos^2\varphi$ a dostávame rovnicu

$$2(\pi+\varphi)\tan\varphi = \tan^2\varphi + (\pi+\varphi)^2,$$

ktorej riešením je práve výraz

$$\tan\varphi = \pi + \varphi.$$

Oboma spôsobmi sme sa dostali k transcendentálnej rovnici, ktorú analyticky nemožno vyriešiť. Použitím vhodnej numerickej metódy sa možno dostať k približnému riešeniu a my sa už len odkážeme na riešenie podľa [1], kde pre φ zhora ohraničené $\pi/2$ dostaneme riešenie $\varphi \approx 1{,}352\,\mathrm{rad}$. Keďže maximálna hodnota R je zo vzťahu (4.7) rovná

$$R = \frac{1}{\cos\varphi}\,,$$

pre minimálnu hodnotu α dostávame

$$\alpha = \frac{1}{R} = \cos\varphi \approx 0{,}217.$$

Alternatívne dáma dokáže uniknúť, ak muž beží najviac $1/\alpha_{\min} \approx 4{,}603$-krát rýchlejšie ako dáma vesluje, čo je nezanedbateľne vyššia hodnota než faktor uvedený v Gardnerovom zadaní v časopise *Scientific American*.

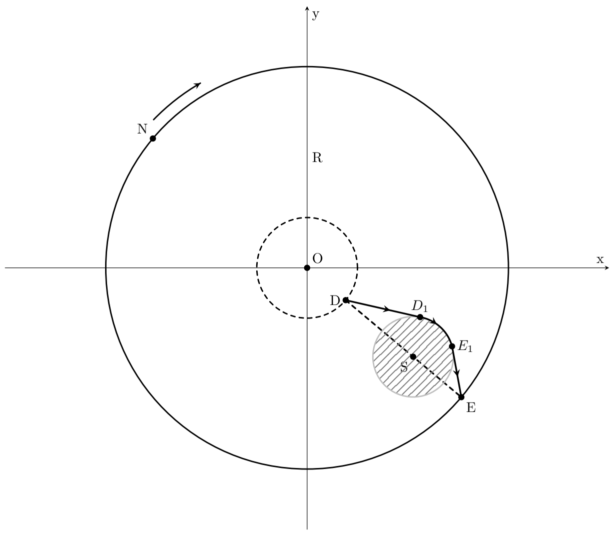
5. Úloha so "zakázanou" oblasťou

V poslednej časti ešte modifikujeme zadanie tak, že profesorke postavíme do cesty prekážku a pritom budeme požadovať, aby sa z bodu D na hraničnej kružnici chcela dostať priamo do bodu E, do ktorého by smerovala po normále z bodu D, keby jej v ceste prekážka nestála. Význam tejto úlohy môže byť napríklad taký, že v bode E na brehu je odstavený dopravný prostriedok, ku ktorému chce doveslovať skôr, než tam dobehne jej nápadník, a tak mu definitívne uniknúť (v zadaní sme síce predpokladali, že dáma je na pevnine rýchlejšia ako muž, nebrali sme však do úvahy, že veslovanie je bezpochybne vyčerpávajúca aktivita a dáme by už nemusel zostať dostatok síl na útek po pevnine). Pre jednoduchosť umiestnime našej profesorke do cesty kruhovú oblasť (ďalej ostrov) so stredom v bode S vo vzdialenosti $5/8$ od stredu jazera O a polomerom $1/4$ (číselné hodnoty sme pritom zadali tak, aby bol ostrov dostatočne ďaleko od hraničnej kružnice, vnútri ktorej dáma zachováva kolinearitu s polohou nápadníka a stredom jazera). Stred ostrova bude pritom ležať na spojnici bodu D, kde dáma v pôvodnom riešení mení svoju taktiku a bodu E na pevnine, do ktorého sa chce dáma dostať. Zo symetrie zadania tak nebude záležať na tom, z ktorej strany sa dáma rozhodne tento ostrov obísť. Zároveň taktiež nezáleží na voľbe smeru pohybu nápadníka, keďže do bodu E musí prebehnúť z každej strany práve vzdialenosť rovnú polkružnici okolo jazera.

Zadanie sformulujeme nasledovne: Pre aký pomer rýchlostí α je dáma schopná dostať sa do bodu E skôr ako jej nápadník, pokiaľ jej v ceste stojí prekážka v tvare kruhového ostrova, ktorú musí nutne oboplávať?

V ďalšom texte pre jednoduchosť položíme $R = 1$, teda budeme uvažovať jazero s jednotkovým polomerom. Ako už bolo uvedené, úniková stratégia dámy sa skladá z dvoch štádií. V prvom sa pohybuje smerom od stredu jazera tak, že body označujúce aktuálnu polohu dámy, nápadníka a stred jazera ležia na jednej priamke, až kým sa dáma nedostane na tzv. hraničnú kružnicu, za ktorej hranicou by už nebola schopná zachovať túto kolinearitu. V tomto momente tak zmení stratégiu a vydá sa po normále k brehu jazera. Pre pomer rýchlostí $\alpha > 1/(1+\pi)$ sa nasledovaním tejto stratégie ozaj dostane na breh skôr ako jej nápadník. V tejto časti však bude mať práve v druhej fáze únikovej stratégie pred sebou prekážku v tvare kruhového ostrova, ktorý bude musieť oboplávať a zároveň sa stále dostať do zadaného bodu na brehu skôr ako muž. V ďalšom texte sa tak budeme zaoberať len druhou fázou únikovej stratégie, pričom za začiatok pozorovania budeme považovať moment, keď sa dáma ocitne v bode D na hraničnej kružnici.

Situácia je ilustrovaná na obr. 5, kde sa v čase t_0 dáma nachádza na hraničnej



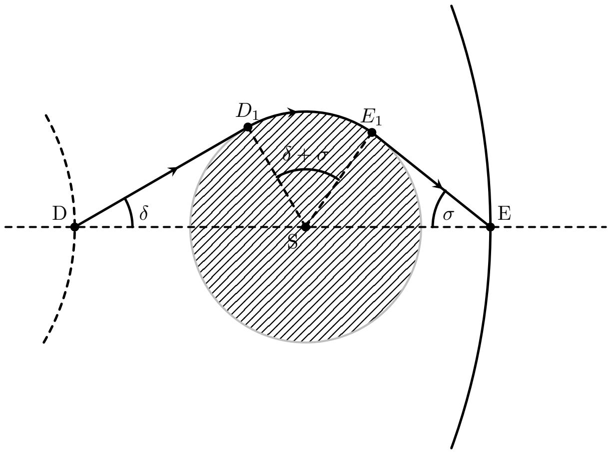
Obrázok 5. Ilustrácia druhej fázy únikovej stratégie za prítomnosti prekážky.

kružnici v bode D a nápadník v bode N na brehu. Pripomeňme, že body N, O a D ležia na jednej priamke. Dáma sa chce dostať do bodu E na pevnine skôr ako muž; ten bude pritom musieť prebehnúť polkružnicu okolo jazera a zo vzťahu (4.2) môžeme pre celkový čas písať

$$t_n = \frac{\pi}{v}\,, \tag{5.1}$$

kde v označuje jeho rýchlosť. Dáma sa potrebuje dostať do bodu E za čo najkratší čas, hľadaná krivka spájajúca body D, E a zároveň nepretínajúca ostrov má byť teda najkratšia možná.

Je možné dokázať (viď napr [4]), že najkratšiu krivku spĺňajúcu podmienky v zadaní môžeme skonštruovať nasledovne: Na hranici kružnice (ostrova) nájdeme bod D_1, resp. E_1 taký, že dotyčnica k tejto kružnici prechádzajúca týmto bodom prechádza súčasne aj bodom D, resp. E. Najkratšia spojnica bodov D a E bude potom tvorená úsečkou DD_1, kružnicovým oblúkom D_1E_1 so stredom v bode S a úsečkou E_1E. Pre lepšiu predstavu situácie slúži obr. 6. Toto tvrdenie je



Obrázek 6. Detail najkratšej krivky pri potrebe oboplávania zakázanej oblasti.

už z ilustrácie zjavné, no dôkaz pomerne obšírny a my sa tak v ďalšom texte obmedzíme len na odvodenie minimálnej hodnoty parametru α, pre ktoré sa dáma dostane na breh skôr, ako nápadník.

Pripomeňme, že ak jazero má polomer jednotkovej dĺžky, tak polomer hraničnej kružnice musí potom byť rovný parametru α. V čase t_0 sa tak dáma nachádza vo vzdialenosti α od stredu jazera. Odvoďme teraz postupne vzťahy pre dĺžky úsekov, z ktorých sa skladá najkratšia úniková krivka dámy. Podporou pri týchto odvodeniach nám bude práve obr. 6. Označme δ a σ postupne uhly $\angle SDD_1$ a $\angle SEE_1$, pre ich veľkosť platí

$$\delta = \arcsin\left(\frac{1/4}{5/8-\alpha}\right), \qquad \sigma = \arcsin\left(\frac{1/4}{3/8}\right) = \arcsin\left(\frac{2}{3}\right). \tag{5.2}$$

Stred kruhového ostrova sa zo zadania nachádza vo vzdialenosti $(5/8 - \alpha)$ od hraničnej kružnice, a tak pre dĺžku úsečky DD_1 môžeme písať

$$|DD_1| = \left(\frac{5}{8} - \alpha\right) \cos\delta = \left(\frac{5}{8} - \alpha\right) \sqrt{1 - \sin^2\delta} = \sqrt{\left(\frac{5}{8} - \alpha\right)^2 - \frac{1}{16}}\,.$$

Dĺžka kružnicového oblúku $\widehat{D_1E_1}$ je zrejme

$$\left|\widehat{D_1E_1}\right| = \frac{1}{4}(\delta + \sigma),$$

keďže veľkosť stredového uhlu $\angle D_1SE_1$ prislúchajúcemu tomuto oblúku je

$$\angle D_1SE_1 = (\pi - \angle DSD_1 - \angle ESE_1) = \pi - (\pi/2 - \delta) - (\pi/2 - \sigma) = \delta + \sigma.$$

Vynásobením veľkosti stredového uhlu hodnotou polomeru kružnice dostaneme dĺžku kružnicového oblúku prislúchajúceho tomuto uhlu. Napokon dĺžka úsečky E_1E je

$$|E_1E| = \frac{3}{8}\cos\varphi = \frac{3}{8}\sqrt{1 - \sin^2\varphi} = \sqrt{\left(\frac{3}{8}\right)^2 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{8}\,.$$

Podarilo sa nám odvodiť dĺžku krivky DD_1E_1E v závislosti na jedinom neznámom parametri α. Označme celkovú dĺžku tejto krivky d, platí tak

$$d = |DD_1| + \left|\widehat{D_1E_1}\right| + |E_1E| = \sqrt{\left(\frac{5}{8} - \alpha\right)^2 - \frac{1}{16}} + \frac{1}{4}(\delta + \sigma) + \frac{\sqrt{5}}{8}\,, \qquad (5.3)$$

kde parametre δ a σ dosadíme z (5.2). Čas, za ktorý sa dáma dostane na breh, je potom

$$t_d = \frac{d}{\alpha v}\,. \qquad (5.4)$$

Dáma ujde nápadníkovi, ak $t_n > t_d$, a tak zo vzťahov (5.1) a (5.4) dostávame nerovnosť v tvare

$$\frac{\pi}{v} > \frac{d}{\alpha v}.$$

Dosadením za d z (5.3) dostávame výraz závislý iba na parametri α, a tak sme schopní určiť minimálnu hodnotu parametru $\alpha_{\min}$, pre ktorý sa dáme podarí ujsť svojmu nápadníkovi. Výsledok môžeme interpretovať nasledovne: Pokiaľ sa chce dáma dostať z bodu D na breh do bodu E, pričom spojnica DE je najkratšia možná a bod E tak leží na normále z bodu D, no v priamočiarej ceste jej stojí ostrov v tvare kružnice so stredom ležiacim na spojnici DE, pre pomer rýchlostí väčší ako $\alpha_{\min}$ sa jej podarí dostať na breh do bodu E skôr ako jej nápadníkovi. V opačnom prípade však nemusí nutne strácať nádej, môže ešte po nejakú dobu zotrvať v pohybe po hraničnej kružnici (zachovávajúc kolinearitu) a získa tak čas na domyslenie svojej únikovej stratégie. Úlohu by sme mohli modelovať pre rôzne tvary a umiestnenia zakázanej oblasti, toto rozšírenie je však základom pre ďalšie modifikácie, keďže myšlienka únikovej krivky založenej na spojení kriviek pohybu po dotyčniciach k zadanej kružnici a hranici tejto kružnice je aplikovateľná aj na iné, zložitejšie oblasti.

6. Záver

V tomto článku sme sa zaoberali únikovým problémom, ktorý bol ilustrovaný na príklade dámy unikajúcej svojmu nápadníkovi zo stredu kruhového jazera. Odvodili sme optimálnu stratégiu zaisťujúcu úspech dámy pre zadaní pomer rýchlostí a následne sme sa zaoberali modifikáciou druhej fázy jej stratégie pre menšie pomery rýchlostí, kde už pôvodná stratégia nie je postačujúca. V poslednej časti sme uviedli modifikované zadanie a načrtli optimálne riešenie pre číselne zvolené parametre zadania. Napriek tomu, že túto úlohu môžeme zaradiť do teórie diferenciálnych hier, pri riešení sme využili prostriedky elementárnej geometrie a využitie diferenciálneho počtu tak nebolo esenciálne.

Reference

[1] P. J. Nahin: *Chases and Escapes: The Mathematics of Pursuit and Evasion*, Princeton University Press, 2012.

[2] W. Schuurman, J. Lodder: *The Beauty, the Beast, and the Pond*, Mathematics Magazine **47** (1974), 93–95.

[3] M. E. Khan: *Game theory models for pursuit evasion games*, University of British Columbia, Vancouver, Canada, 2007.

[4] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mishechenko: *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, John Wiley & Sons, New York/London, 1962.

Ema Barusová, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,

e-mail: `216938@vutbr.cz`