

ODKUD SE BEROU APLIKACE ZLOMKOVÉHO KALKULU

TOMÁŠ KISELA

ABSTRAKT. Tento článek má za cíl ukázat čtenářům, jak je zlomkový kalkulus provázán s řadou moderních, nejen matematických disciplín. Přibližuje odpovědi na otázku, co stojí za obrovským rozšířením zlomkového kalkulu do aplikací v různých oborech. Nejprve shrnuje základ teorie neceločíselných derivací a hlavní rozdíly vůči klasickému kalkulu. Následně charakterizuje některé mechanismy, které mohou vysvětlovat podstatu jevů modelovaných pomocí zlomkových diferenciálních rovnic. Na závěr ve větším detailu pomocí modelů náhodných procházek rozebírá rozdíly v předpokladech pro klasickou difuzi a některé anomální difuzní jevy.

1. ÚVOD

Zlomkový kalkulus je teorie vystavěná kolem na první pohled zvláštní otázky. Co kdybychom nepracovali jen s derivacemi celočíselných řádů, tj. třeba prvními či pátými, nýbrž připustili i derivace řádu jedna polovina či čtyři pětiny? Tato myšlenka se objevila prakticky hned při vzniku klasického kalkulu a její původ lze dopátrat doslova až k G. W. Leibnizovi, jednomu z autorů pojmu derivace. Zpočátku šlo spíše o matematickou hříčku, jak zformulovat definici neceločíselné derivace, aby vše zapadalo do klasické teorie diferenciálního a integrálního počtu. Když po více než 200 letech a příspěvcích největších matematiků historie bylo několik takových definic zavedeno, nestalo se nic převratného. Vyřešením hádanka ztratila svůj půvab a výsledek neměl praktického využití. Oficiálního oživení se toto téma dočkalo až po desítkách let v roce 1974, kdy se v americkém New Havenu konala první konference věnovaná speciálně zlomkovému kalkulu (pro více detailů k historii viz např. [5, 7]).

Dnes zlomkový kalkulus patří mezi nejvlivnější oblasti matematického modelování. Co se změnilo? Klasické modely kvůli lokální povaze derivací velmi dobře popisují situace, kdy se, zhruba řečeno, vlastnosti objektů dají považovat za nezávislé na velikosti zohledněné oblasti, např. ve smyslu času či prostoru. Můžeme tedy tuto oblast libovolně zmenšovat a v limitním smyslu dojít až ke známým klasickým diferenciálním rovnicím. Tento přístup velmi dobře funguje u základních zjednodušených modelů. Nicméně s rozvojem vědy a techniky a se vzrůstajícími

2020 MSC. Primární 00A09, 26A33, 60G22.

Klíčová slova. zlomkový kalkulus, difuze, rozdělení pravděpodobnosti, Paretovo rozdělení, aplikace, náhodná procházka.

Práce byla podporována projektem GA20-11846S.

nároky na přesnost bylo pro modelování komplexnějších, často nelokálních vlastností třeba čím dál složitějších modelů zahrnujících nekonstantní parametry či nelineární členy. Modely zahrnující zlomkové derivace poskytují pro tyto situace zajímavé možnosti. Zlomková derivace si totiž zachovává linearitu, a současně se z podstaty neomezuje na lokální chování funkce. Umožňuje tak přirozeně popisovat jevy, pro které je typické zohlednění delší historie nebo vlastností v širším okolí zkoumaného bodu.

Tato vlastnost stojí za rozšířením zlomkového kalkulu do mnoha oblastí lidského poznání, protože umožňuje modelování jevů, které byly dříve chápány jako anomálie. Právě tyto atypické fenomény však často s rozvojem vědy a techniky získávají na významu, neboť jejich zvláštní projevy nachází řadu využití v praxi. Mezi typické oblasti patří třeba viskoelastické vlastnosti polymerů (dlouhé řetězce makromolekul), difuze v biologických tkáních (nezanedbatelná doba trvání překonávání buněčných stěn), difuze v silně heterogenních či fraktálních strukturách (neočekávaně rychlý transfer v některých směrech), pohyb ve viskózních materiálech, či elektrické vlastnosti organických materiálů (více viz [2, 3, 4, 7]).

Tento článek si klade za cíl přiblížit čtenářům fascinující svět zlomkového kalkulu a jeho propojení se světem kolem nás. V následující sekci uvedeme základní definice derivace zlomkových derivací a shrneme vlastnosti s důrazem na srovnání s jejich všeobecně známými „celočíselnými“ analogiemi. V sekci 3 poskytneme stručný přehled jevů, u nichž je pozorováno anomální chování, které má projevy charakteristické pro zlomkové modely. V sekci 4 se blíže podíváme na původ zlomkové difuzní rovnice a vymežíme rozdíl od předpokladů klasického modelu difuze založeného na modelu náhodné procházky. V závěrečné sekci pak připojíme pár shrnujících komentářů.

2. HLAVNÍ VZTAHY ZLOMKOVÉHO KALKULU

Teorie zlomkového kalkulu je vystavěna kolem pojmu zlomkový integrál. Ačkoliv existuje více alternativních definic, bezkonkurenčně nejrozšířenější je verze vycházející ze zobecnění Cauchyho vzorce pro výpočet m -tého integrálu ($m \in \mathbb{Z}^+$) funkce f s dolní mezí $a \in \mathbb{R}$, tj.

$$I_a^m f(x) = \underbrace{\int_a^x \int_a^{\xi_{m-1}} \cdots \int_a^{\xi_1}}_m f(\xi_0) d\xi_0 \cdots d\xi_{m-2} d\xi_{m-1} = \int_a^x \frac{(x-\xi)^{m-1}}{(m-1)!} f(\xi) d\xi.$$

Rozšíření pro neceločíselná m je dosaženo nahrazením faktoriálu $(m-1)!$ Eulerovou Gamma funkcí Γ a nahrazením polynomu obecnou mocninnou funkcí (viz [7]).

Pro zlomkový integrál řádu $\nu > 0$ funkce f na intervalu $[a, b)$ tak dostáváme vztah

$${}_a\mathbf{D}_x^{-\nu} f(x) = \int_a^x \frac{(x-\xi)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} f(\xi) d\xi,$$

přičemž pro $\nu = 0$ klademe ${}_a\mathbf{D}_x^0 f(x) = f(x)$ pro $x \in [a, b)$.

Vidíme tedy, že zavedení zlomkového integrálu je přímým zobecněním známých vztahů. V případě zlomkové derivace je situace mnohem méně přehledná, neboť

podobně přirozený univerzální vztah pro m -tou derivaci nemáme. To je důvodem, proč v případě derivací není přítomna tak silná shoda na zvoleném přístupu. Poznamenejme, že zajímavým přístupem využívaným zejména v numerické matematice je definice Grünwaldova-Letnikova, která vychází ze zobecnění vztahu pro m -tou diferenci (viz [7]). Zde však uvedeme dvě nejčastěji používané definice, které budeme v následujícím textu využívat: Riemannovu-Liouvilleovu a novější Caputovu.

Riemannova-Liouvilleova derivace řádu $\alpha > 0$ funkce f je dána vztahem

$${}_a\mathbf{D}_x^\alpha f(x) = \frac{d^{[\alpha]}}{dx^{[\alpha]}} {}_a\mathbf{D}_x^{-(\lceil\alpha\rceil-\alpha)} f(x),$$

kde $[\alpha]$ je horní celá část čísla α , tj. nejmenší přirozené číslo větší nebo rovno α .

Caputova derivace se liší pouze záměnou pořadí operací derivace a zlomkové integrace, tedy

$${}^C\mathbf{D}_x^\alpha f(x) = {}_a\mathbf{D}_x^{-(\lceil\alpha\rceil-\alpha)} \frac{d^{[\alpha]} f(x)}{dx^{[\alpha]}}.$$

Všimněme si, že obě zlomkové derivace představují kompozici klasické derivace a zlomkového integrálu. Kromě řádu α tak mají ještě parametr a , což je počáteční bod intervalu, na kterém funkci uvažujeme. Zřejmě tedy pro pevně danou funkci můžeme dostávat jiné výsledky zlomkové derivace pro různé hodnoty a .

Právě role počáteční meze a byla jednou z příčin mnoha problémů při dlouhém hledání vhodné definice zlomkové derivace. Její přítomnost totiž z vlastností celočíselných derivací vlivem jejich lokální povahy nijak nevyplývá a současně bez jejího využití není možné dosáhnout souladu s klasickou teorií (např. pro $a = 0$ dostaneme sice očekávané výsledky pro polynomy, ale ne pro exponenciální funkce).

Příklad 2.1. Uvažujme Riemannovu-Liouvilleovu derivaci následující mocniné funkce pro $a = 0$:

$${}_0\mathbf{D}_x^\alpha \frac{x^\beta}{\Gamma(\beta+1)} = \frac{x^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}, \quad \beta > -1, \alpha > 0.$$

Dostáváme přirozeně očekávané zobecnění klasických vztahů. Pro jiné hodnoty a se však situace mění a ve výsledku se začne objevovat nekompletní Beta funkce.

Příklad 2.2. Nyní uvažujme exponenciální funkci a provedme zlomkovou derivaci pro $a = 0$ a $a \rightarrow -\infty$:

$$\begin{aligned} {}_0\mathbf{D}_x^\alpha \exp(\lambda x) &= x^{-\alpha} E_{1,1-\alpha}(\lambda x), \\ {}_{-\infty}\mathbf{D}_x^\alpha \exp(\lambda x) &= \lambda^\alpha \exp(\lambda x), \quad \lambda > 0. \end{aligned}$$

Doplňme, že jsme zde využili zápisu pomocí tzv. dvouparametrické Mittag-Lefflerovy funkce definované vztahem

$$E_{\mu,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\mu k + \beta)}, \quad \mu \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}^+$$

redukující se pro volbu $\mu = \beta = 1$ na exponenciální funkci. Klasický výsledek pro exponenciální funkci tedy dostáváme pro $a = -\infty$.

Pro lepší představu fungování zlomkových derivací a integrálů uvedeme následující příklad s nespojitou funkcí.

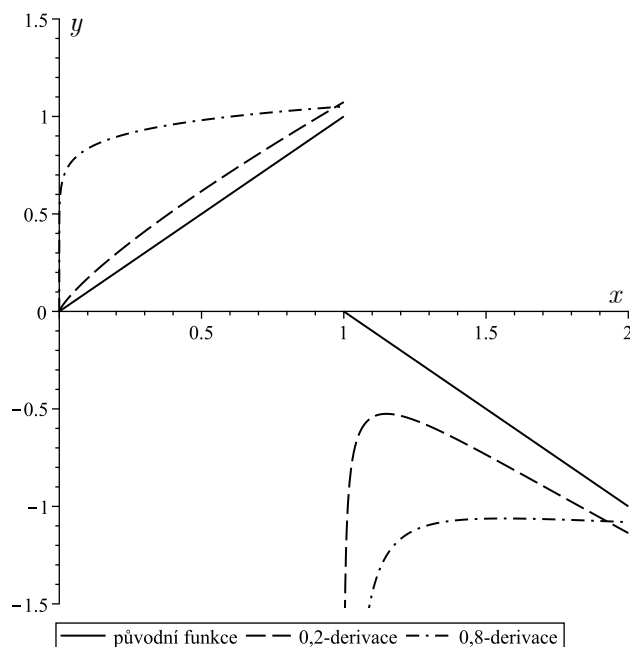
Příklad 2.3. Uvažujme po částech definovanou funkci

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, 1), \\ 1 - x, & x \in [1, \infty). \end{cases}$$

Je možné ukázat, že Riemannova-Liouvilleova derivace pro $\alpha > 0$ s dolní mezí $a = 0$ je rovna

$${}_0\mathbf{D}_x^\alpha f(x) = \begin{cases} \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, & x \in (0, 1), \\ \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} - \frac{(x-1)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} - 2\frac{(x-1)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, & x \in [1, \infty). \end{cases} \quad (2.1)$$

Obrázek 1 zobrazuje derivace pro vybrané α z intervalu $[0, 1]$. Vidíme, že pro nízké řády je průběh výsledné derivace „blízký“ původní funkci, pro řády bližší hodnotě jedna se průběh derivací „blíží“ hodnotám první derivace (tj. 1 pro $x \in [0, 1)$, nebo -1 pro $x \in (1, \infty)$). V pravém okolí bodu $x = 1$ vidíme paměťový efekt: všechny derivace neceločíselných řádů jsou neohrazené, neboť původní funkce zde má nespojitost. Vliv této nespojitosti pak s rostoucím x klesá, ale zůstává přítomný. V levém okolí bodu $x = 1$ neohrazenost nepozorujeme, protože naše zlomková derivace bere v úvahu jen funkční hodnoty směrem vlevo od daného bodu.



Obrázek 1. Riemannova-Liouvilleova derivace (2.1) pro $\alpha \in \{0; 0,2; 0,8\}$.

Dodejme, že při dosazení $\alpha < 0$ do (2.1) získáme vztahy pro zlomkové integrály. Není obtížné dovodit, že pro všechna $\alpha < 0$ jsou odpovídající integrály spojitě funkce. Dále pro $\alpha \in [0, 1]$ je výsledek platný i pro Caputovu derivaci. Pro $\alpha > 1$ pak všechny Caputovy derivace vyjdou nulové.

Zdůrazněme, že všechny tyto operátory jsou lineární a že obecně nekomutují. Konkrétně pro Riemannovy-Liouvilleovy derivace dostáváme

$$\begin{aligned} {}_a\mathbf{D}_x^\alpha \left({}_a\mathbf{D}_x^{-\beta} f(x) \right) &= {}_a\mathbf{D}_x^{\alpha-\beta} f(x), \\ {}_a\mathbf{D}_x^\alpha \left({}_a\mathbf{D}_x^\beta f(x) \right) &= {}_a\mathbf{D}_x^{\alpha+\beta} f(x) - \sum_{k=1}^{\lceil \beta \rceil} {}_a\mathbf{D}_x^{\beta-k} f(x) \Big|_{x=a} \frac{(x-a)^{-\alpha-k}}{\Gamma(1-\alpha-k)}, \end{aligned}$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\beta \in \mathbb{R}^+$. Tyto vztahy zahrnují i pravidla pro skládání Caputovy derivace, neboť se na ni můžeme dívat jako na specifické složení derivace a zlomkového integrálu.

Složitější definiční tvar zlomkových derivací a zohlednění funkčních hodnot na širším intervalu s sebou však přináší i výrazné zkomplikování mnoha vztahů, které jsme zvyklí automaticky využívat v mnoha metodách a postupech. To brání přímočarému zobecnění známých výsledků klasického kalkulu pro neceločíselné řády. Pro ilustraci uvádíme vztah pro Riemannovu-Liouvilleovu derivaci součinu funkcí f a g

$${}_a\mathbf{D}_x^\alpha (f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} f^{(k)}(x) {}_a\mathbf{D}_x^{\alpha-k} g(x). \quad (2.2)$$

Vidíme, že pro jakýkoliv neceločíselný řád dostáváme ve výsledku nekonečnou sumu, pro jejíž vyčíslení bychom potřebovali znát nekonečné množství zlomkových derivací a integrálů jedné z funkcí f či g . Je zřejmé, že pro specifické funkce f a g , u kterých se derivace od určitého indexu vynulují, je vzorec použitelný, ale celkově vzato je jeho využití v praxi sporadické. Připomeňme, že v případě celočíselných hodnot α vztah předází do známého tvaru, neboť binomické koeficienty pro $k > \alpha$ jsou nulové.

Pro další zobecňující vztahy odkazujeme čtenáře na [7]. Doplňme, že např. zlomková derivace složené funkce vede na nekonečnou sumu výrazně vyšší komplexity než tomu bylo u (2.2). Důsledkem je, že v rámci zlomkového kalkulu se musíme téměř vždy obejít bez substituce při integraci, a tak i při řešení diferenciálních rovnic.

3. KOUZLO ALGEBRAICKÉHO POKLESU

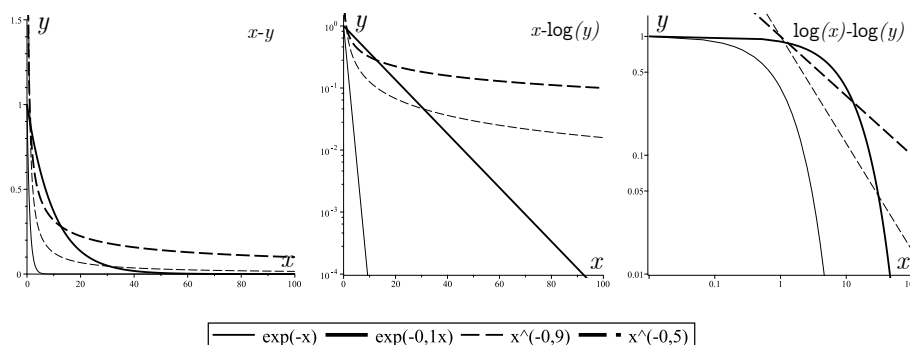
Jedním z nejvýraznějších rysů zlomkového kalkulu je asymptotické chování řešení diferenciálních rovnic, která konvergují k nule. Roli, kterou v těchto případech u klasických obyčejných diferenciálních rovnic hrají exponenciální funkce (se záporným argumentem), plní u zlomkových rovnic funkce mocninné (se zápornou mocninou). Konkrétně u lineárních zlomkových diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty je řešení y takzvaně asymptoticky ekvivalentní mocninné funkci $x^{-\gamma}$

($\gamma > 0$). Matematickým zápisem vyjádřeno:

$$y(x) \sim x^{-\gamma} \quad \text{pro } x \text{ dostatečně velké, tj. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|y(x)|}{x^{-\gamma}} = C < \infty.$$

Doplňme, že parametr γ bývá závislý na řádu zlomkové derivace α a nejčastěji nabývá hodnot α , $\alpha + 1$ či $\alpha - 1$. Toto chování se vztahuje na lineární zlomkové diferenciální rovnice skalární, vektorové, rovnice se zpožděním i rovnice s parciální zlomkovou derivací.

Experimentální data s očekávaným exponenciálním poklesem v praxi vyhodnocujeme díky převodu osy y do logaritmické škály, čímž je exponenciála zobrazena jako přímka. V případě algebraického poklesu je stejně silným a praktickým nástrojem práce v log-log škále (viz [4]). Přítomnost poklesu $x^{-\gamma}$ se totiž pak projeví jako přímka se směrnici $-\gamma$ (viz Obrázek 2).



Obrázek 2. Srovnání exponenciálních a mocninných funkcí v klasické, semilogaritmické a logaritmické škále.

Je to právě mocninný pokles, co kvalitativně odlišuje zlomkové modely od jejich klasických verzí a umožňuje jejich aplikaci v situacích dříve pro lineární rovnice nedostupných. Mocninné závislosti jsou empiricky (na log-log škálách) potvrzované v mnoha oborech a zlomkový kalkulus představuje jednu z možností, jak tyto fenomény modelovat a přispět k jejich vysvětlení. Pro představu pestrosti oborů a jevů, u kterých bylo toto chování pozorováno uvádíme výčet několika příkladů (pro více detailů i větší množství příkladů odkazujeme na knihu [8]):

- Psychologie: Reakční čas při N -té iteraci přístupu pokus-omyl $\sim N^{-0,91}$
- Psychologie: Procento správně zapamatovaných informací za čas t je $\sim t^{-\alpha}$
- Fyziologie: Pravděpodobnost doby t mezi událostmi na EEG $\sim t^{-1,61}$
- Fyzika: Pravděpodobnost doby t mezi teplotními anomáliemi $\sim t^{-2,14}$
- Fyzika: Pokles amplitudy kmitů tělesa ve viskózní kapalině v čase t je $\sim t^{-\alpha}$
- Fyzika: Pokles napětí ve polymerickém materiálu v čase t je $\sim t^{-\alpha}$
- Geofyzika: Pravděpodobnost plochy ostrova větší než a je $\sim a^{-\alpha}$
- Geofyzika: Pravděpodobnost zemětřesení síly menší než x je $\sim x^{-\alpha}$
- Geofyzika: Frekvence výskytu lesních požárů na rozloze A je $\sim A^{-1,38}$
- Informatika: Pravděpodobnost k spojení se serverem $\sim k^{-1,94}$

- **Ekonomika:** Pravděpodobnost volatility x na komoditních trzích $\sim x^{-3}$
- **Biologie:** Pravděpodobnost k sexuálních vztahů $\sim k^{-\alpha}$
- **Antropologie:** Pravděpodobnost intenzity války větší než I je $\sim I^{-1,80}$

Z pohledu teorie pravděpodobnosti výše zmíněné vztahy reprezentují rozdělení známé pod termíny rozdělení s těžkými konci, rozdělení Paretova typu či bezrozměrná rozdělení, která v sobě v nějaké formě obsahují zmiňované mocninné závislosti. Původ těchto mocninných závislostí ve většině případů není zcela jasný, existuje však několik mechanismů, které jsou k jeho vysvětlení používány. Ty nejčastější zde pro představu čtenářů s krátkým komentářem uvádíme a pro více detailů odkazuje na článek [6]:

Kombinace exponenciálních rozdělení představuje myšlenku, která byla použita k vysvětlení mocninného rozdělení frekvence délky slov. Pro ilustraci matematické stránky přístupu nyní nebudeme odvozovat původ samotných exponenciálních vztahů. Předpokládejme, že frekvence x výskytu slova délky y odpovídá asymptoticky exponenciálnímu vztahu $x \sim \exp\{by\}$, kde b je parametr. Počet možných slov s délkou y roste, takže pro pravděpodobnost, že slovo je délky y , platí $p(y) \sim \exp\{ay\}$, kde a je parametr (tedy v asymptotickém smyslu jde o exponenciální rozdělení). Pro hustotu pravděpodobnosti veličiny x pak platí mocninný zákon

$$p(x) \sim \frac{\exp\{ay\}}{b \exp\{by\}} = \frac{x^{-1+a/b}}{b}.$$

Yuleův proces modeluje mechanismus, jakým velká města přitahují relativně více obyvatel, populární filmy relativně ještě více návštěvníků, či bohaté společnosti ještě více bohatství. Výsledkem je tzv. Yuleovo rozdělení, které má těžké konce.

Samoorganizovaná kritičnost (self-organized criticality) vychází z předpokladu, že se systém sám automaticky udržuje v kritickém stavu. Kritickým stavem je myšlena kombinace systémových parametrů, kdy tzv. škálovací faktor systému (např. průměrná velikost shluků) diverguje, čímž v systému zaniká možnost škálování a objevuje se bezrozměrné rozdělení (viz [1]).

Tento mechanismus byl uplatněn v modelu lesních požárů založeném na předpokladu, že šíření požáru souvisí s hustotou porostu. Je-li hustota příliš malá, oheň se hůře šíří a zmenšuje se i oblast zasažená požárem, je-li hustota příliš velká, oheň se rozšíří na celý les. Model ukazuje, že při dosažení určité hustoty porostu začnou být požáry právě tak rozsáhlé, že je jejich efekt v rovnováze s obnovou lesa. Hustota porostu tedy stále kolísá kolem této kritické hodnoty. Podobné úvahy byly aplikovány na fenomény jako zemětřesení, laviny či sluneční erupce.

Náhodná procházka bývá sice často používána pro ilustraci původu normálního rozdělení, nicméně mnoho jejích vlastností má rozdělení s těžkými konci. Pro ilustraci: Mějme jednorozměrnou symetrickou náhodnou procházku se startem v bodě nula a sledujme počet kroků, za který se do bodu nula vrátíme zpět (tzv. čas prvního návratu). Netriviálním rozbořem se dá ukázat, že pravděpodobnost

prvního návratu po N krocích se chová jako $\sim N^{-1,5}$, což je hledané rozdělení s těžkými konci.

V následující sekci uvidíme možnosti zobecnění modelu náhodné procházky vedoucí k různým zlomkovým modelům difuze.

4. ANOMÁLNÍ DIFUZE

Difuze patří mezi základní transportní procesy a současně mezi oblasti s nejširším využitím zlomkového kalkulu. Difuze je samovolné rozptylování částic v prostoru na základě rozdílů v koncentraci látky. Je-li hybnou silou gradient koncentrace (mluvíme o Fickovu zákonu), je difuze v jednom rozměru dobře popsána klasickou rovnicí

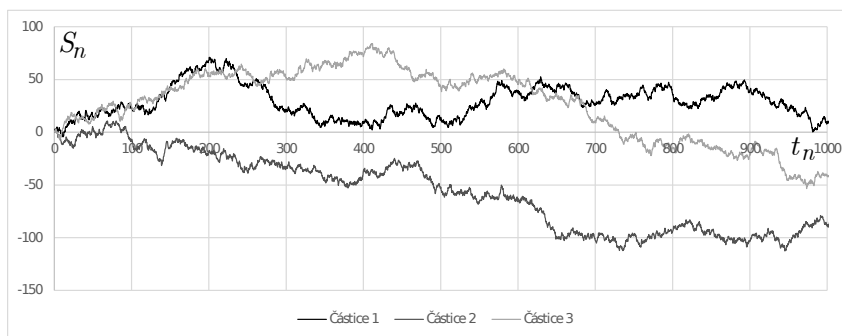
$$\frac{\partial c(x, t)}{\partial t} = A \frac{\partial^2 c(x, t)}{\partial x^2}, \quad (4.1)$$

kde $c(x, t)$ je koncentrace látky v bodě x a čase t , $A > 0$ je difuzní koeficient. V situacích, kdy Fickův zákon nevystihuje realitu, hovoříme o tzv. anomální (či nefickovské) difuzi, jejíž dva příklady si popíšeme níže (pro více detailů k odvození i způsoby řešení odkazujeme na [4]).

Klasický difuzní model vychází z rozboru pohybu částic pomocí modelu náhodné procházky. Pro jednoduchost se omezme na jednorozměrný případ. Uvažujme nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny Y_k (k přirozené číslo) představující délky skoků náhodně zvolené částice. Potom náhodná procházka

$$S_n = Y_1 + \dots + Y_n$$

vystihuje pozici této částice po n skocích. Na Obrázku 3 vidíme tři realizace náhodné procházky S_n (s časovým krokem $\Delta t_n = 0,25$) pro tři náhodně generované částice (pro $\Delta t_n \rightarrow 0$ pak taková náhodná procházka přechází ve známý Brownův pohyb).



Obrázek 3. Trajektorie pohybu tří částic, Y_k má normální rozdělení se střední hodnotou nula a rozptylem jedna.

Díky platnosti centrální limitní věty pak rozdělení pravděpodobnosti S_n konverguje k normálnímu rozdělení, které se objevuje v řešení klasické difuzní rovnice.

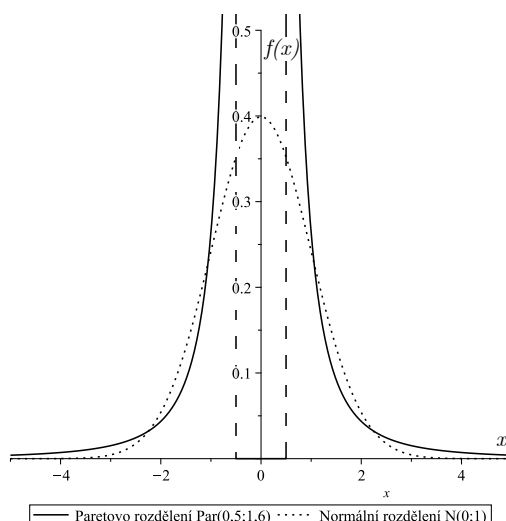
S využitím poznatků Fourierovy transformace, charakteristických funkcí rozdělení pravděpodobnosti a teorie nekonečných řad pak je možné odvodit (4.1).

Superdifuze

Kde je v přístupu náhodné procházky prostor pro zlomkovou derivaci či pro rozdělení s těžkými konci? Centrální limitní věta platí za předpokladu, že náhodné veličiny Y_k mají konečný rozptyl. V reálných aplikacích se ale stává, že délka skoků Y_k má rozdělení s těžkými konci. Jedním z příkladů může být např. symetrické Paretovo rozdělení s hustotou pravděpodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\alpha C^\alpha x^{-\alpha-1}, & x > C, \\ 0, & -C \leq x \leq C, \\ \frac{1}{2}\alpha C^\alpha |x|^{-\alpha-1}, & x < -C, \end{cases}$$

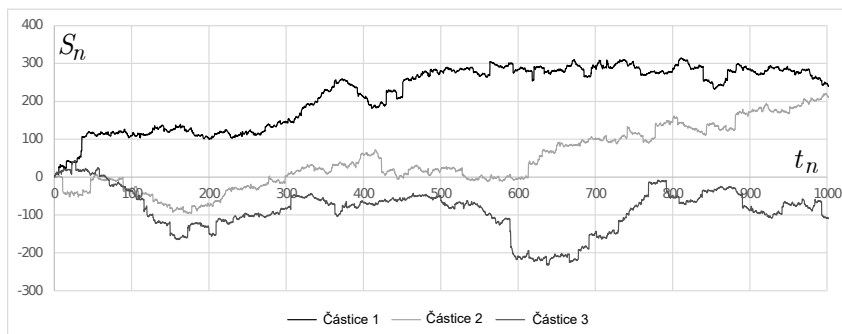
kde $C > 0$ a $1 < \alpha < 2$ jsou parametry rozdělení, viz Obrázek 4.



Obrázek 4. Srovnání průběhu normálního a Paretova rozdělení.

Příklad takto konstruované náhodné procházky S_n pro tři náhodně generované částice ukazuje Obrázek 5. Na rozdíl od klasického případu nehovoříme v limitním případě o Brownově pohybu, nýbrž o tzv. Lévyho pohybu či Lévyho letu. Ten je charakteristický „častými“ dlouhými skoky, které můžeme pozorovat na Obrázku 5 a které jsou zodpovědné za rychlé šíření látky.

Pro hodnoty parametru $\alpha \in (1, 2)$ nemá symetrické Paretovo rozdělení konečně velký rozptyl, a tedy centrální limitní věta není aplikovatelná. Za použití tzv. rozšířené centrální limitní věty můžeme odvodit, že rozdělení pravděpodobnosti S_n (s délkou skoků následujícími jakékoliv rozdělení s těžkými konci) konverguje k tzv. α -stabilnímu rozdělení (také nazývanému Lévyho rozdělení).



Obrázek 5. Lévyho pohyb tří částic, Y_k má Paretovo rozdělení s parametry $C = 0,5$ a $\alpha = 1,6$.

Zobecněním operací využitých v klasickém případě následně můžeme odvodit zlomkovou parciální diferenciální rovnici superdifuze

$$\frac{\partial c(x, t)}{\partial t} = A \mathbf{D}_x^\alpha c(x, t),$$

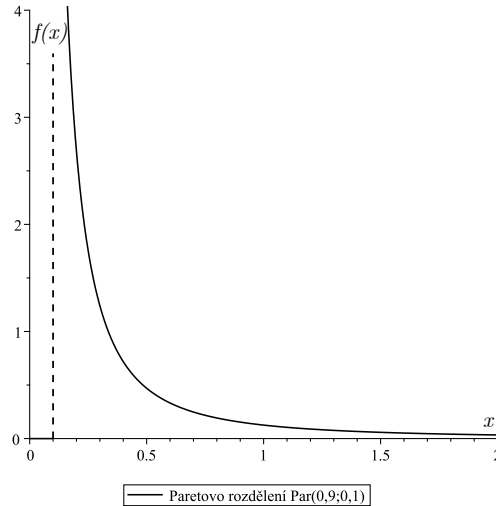
kde α je parametr Paretova rozdělení výše (a odpovídá tak řádu mocninného poklesu) a \mathbf{D}_x^α označuje speciální typ Riemannovy-Liouvilleovy derivace vůči prostorové proměnné pracující s oběma směry pohybu, kterou zde blíže z důvodu srozumitelnosti textu nebudeme komentovat.

Tento model superdifuze (nebo také rychlé difuze) se uplatňuje např. v hydrologii při šíření látky v porézním prostředí. Objevuje se třeba při studiu podzemních vod, kdy se pozorované částice šíří skrz porézní médium složené z písku, štěrku či jílu. Některé částice mají cestu prakticky přímou, jiné po cestě narážejí na výrazně vyšší odpor, čímž vzniká výrazně větší variabilita, než by odpovídalo klasickému difuznímu modelu. Řád derivace α bývá v praxi výsledkem fitování dat na logaritmické škále, nicméně objevují se i práce propojující jej s fraktální dimenzí porézního média.

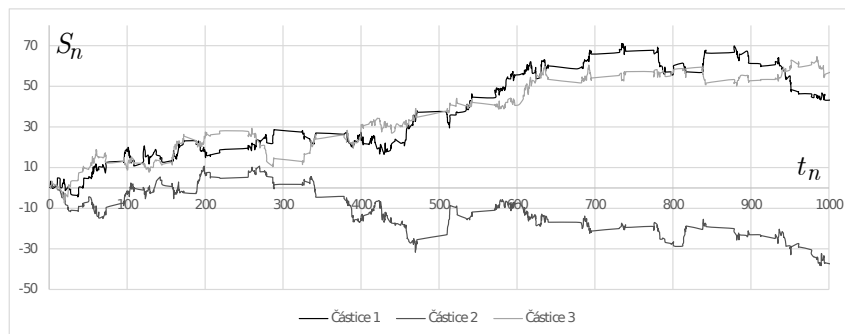
Subdifuze

V případě superdifuze se rozdělení s těžkými konci promítlo do délky skoku, který částice v daném čase učiní. Pomalá difuze je model stojící na předpokladu, že délka skoků odpovídá klasickému modelu, ale mezi jednotlivými skoky může docházet k časovým prodlevám (waiting times), jejichž délka sleduje rozdělení s těžkými konci. Přesněji předpokládáme, že n -tý skok se uskuteční po uplynutí doby t_n delší než t s pravděpodobností $\sim Bt^{-\beta}$, kde $0 < \beta < 1$. Příklad hustoty takového rozdělení, konkrétně jednostranné Paretovo rozdělení, zobrazuje Obrázek 7.

Původně diskrétní model náhodné procházky, kdy se skoky uskutečňovaly v předepsaný okamžik, tak zobecňujeme na tzv. náhodnou procházku se spojitým časem, neboli CTRW (continuous time random walk). Příklad takové náhodné procházky S_n pro 3 náhodně generované částice ukazuje Obrázek 7, kde vidíme dlouhé prodlevy mezi jednotlivými skoky.

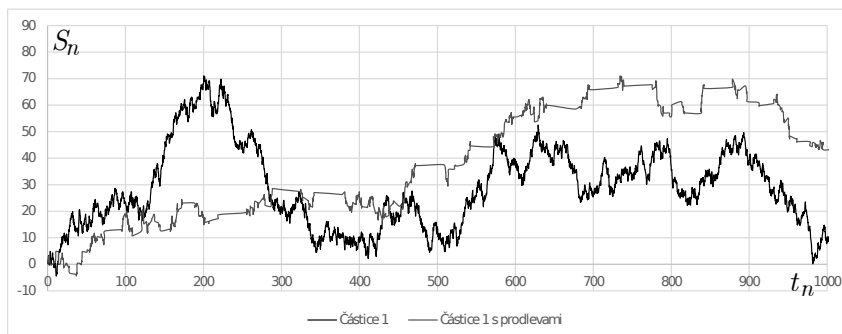


Obrázek 6. Jednostranné Paretovo rozdělení s prahem $C = 0,1$ a $\beta = 0,9$.



Obrázek 7. CTRW s prodlevami mezi skoky dle rozdělení z Obrázku 6.

Takto upravený model generuje mnohem pomalejší šíření částic. Srovnajme CTRW s klasickou náhodnou procházkou. Uvažujme dvě částice s identickou posloupností délek skoků Y_k . Jedna částice vykoná skok vždy po uplynutí časového intervalu délky 0,25, zatímco druhá částice bude čekat proměnnou délku intervalu dle rozdělení na Obrázku 6. I když výpočet ukazuje, že druhá částice má ve více než 56 % případů menší prodlevy, těžké konce rozdělení způsobí, že se v průměru bude šířit do prostoru mnohem pomaleji než první částice. Tato situace je ilustrována na Obrázku 8, kde vidíme, že částice s proměnnými prodlevami vykoná za čas $t_n = 1000$ zhruba jen čtvrtinu skoků ve srovnání s Brownovým pohybem (první maximum S_n nastává u Brownova pohybu kolem času 200, zatímco u CTRW až kolem 740).



Obrázek 8. Srovnání Brownova pohybu a CTRW; 2 částice s identickými posloupnostmi délky skoků a rozdílnými rozděleními časových prodlev.

Za pomoci podobných technik jako v případech výše pak můžeme dojít k formulaci zlomkové parciální diferenciální rovnice obsahující Caputovu zlomkovou derivaci v časové proměnné

$${}_0^C D_t^\beta c(x, t) = A \frac{\partial c(x, t)}{\partial x},$$

kde parametr β odpovídá parametru rozdělení časových prodlev.

Subdifuze je často používána např. v biologických aplikacích, kde přítomnost časových prodlev odpovídá překonávání bariér tvořených buněčnými stěnami.

Model náhodné procházky se spojitým časem představuje fyzikální vysvětlení toho, odkud se berou zlomkové modely difuze. Má-li délka skoku rozdělení s těžkými konci, dostaneme zlomkovou derivaci v prostorové proměnné. Má-li trvání prodlevy mezi skoky rozdělení s těžkými konci, objeví se zlomková derivace vůči časové proměnné. Oba jevy je možné kombinovat a pracovat tak se zlomkovými derivacemi v obou proměnných.

Pro vícerozměrné případy je zavedení prostorových zlomkových operátorů složitější, ale základní myšlenka zůstává nezměněna.

5. ZÁVĚR

Zlomkový kalkulus rychle nabývá na významu. V oblasti teorie můžeme pozorovat silné vazby na teorie pravděpodobnosti, stochastických procesů, regulární variace či chaosu. V oblasti fyzikálních a technických aplikací vidíme uplatnění schopnosti přirozeně pracovat s historií procesů a modelovat algebraický pokles veličin.

Předložili jsme přehled některých jevů, které vykazují algebraický pokles ve svých veličinách. Vzhledem k jejich různorodosti se zdá, že algebraický pokles není uměle vytvořený koncept pro nějakou konkrétní aplikaci, ale projev reálné existujících obecnějších mechanismů. Na příkladu anomální difuze jsme ukázali, jakým způsobem se dá vystavět pokročilý model obsahující zlomkovou derivaci, a to nikoliv formálním nahrazením klasické derivace za zlomkovou, nýbrž korektním postupem využívajícím statistických vlastností reálných jevů.

Podobně by bylo možné rozebrat aplikace v dynamice polymerů, teorii řízení či modelování oscilátorů ve viskózních podmínkách. Věříme, že předložené myšlenky a reference poskytnou čtenářům inspiraci a pomohou rozšířit obecné povědomí o zlomkovém kalkulu.

REFERENCE

- [1] P. Bak: *How Nature Works: The Science of Self-organized Criticality*, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [2] R. Hilfer: *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, Singapore, 2000.
- [3] F. Mainardi: *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models*, Imperial College Press, Singapore, 2010.
- [4] M. M. Meerschaert, A. Sikorskii: *Stochastic Models for Fractional Calculus*, Walter de Gruyter GmbH, Leck, 2019.
- [5] K. S. Miller, B. Ross: *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley & Sons, New York, 1993.
- [6] M. E. J. Newman: *Power laws, Pareto distribution and Zipf's law*, Contemporary Physics **46** (2005), No. 5, 232–351.
- [7] I. Podlubný: *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 1999.
- [8] B. J. West, P. Grigolini: *Complex Webs: Anticipating the Improbable*, Cambridge, 2011.

Tomáš Kisela, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: kisela@fme.vutbr.cz

