VLASTNOSTI PROSTORŮ POSLOUPNOSTÍ A JEJICH APLIKACE V TEORII NELINEÁRNÍCH DIFERENČNÍCH ROVNIC

JINDŘICH KOSÍK

ABSTRAKT. Článek pojednává o využití aparátu funkcionální analýzy při vyšetřování kvalitativních vlastností nelineárních diferenčních rovnic. V článku jsou zpracovány základy teorie prostorů posloupností, detailně se věnuje diskrétním větám o limitním přechodu a kritériím relativní kompaktnosti. Součástí teoretického aparátu jsou také věty o pevném bodu. Zavedené matematické prostředky jsou poté využity při studiu konkrétní nelineární diferenční rovnice.

1. ÚVOD

Podobně jako v případě diferenciálních rovnic hraje při vyšetřování kvalitativních vlastností diferenčních rovnic důležitou roli aparát funkcionální analýzy. I v odborné literatuře se často můžeme setkat se zjednodušením, kdy jsou závěry pro diskrétní rovnice vyvozeny na základě vlastností jejich spojitých protějšků, to se může ukázat jako nedostatečné nebo dokonce nekorektní. Zaměříme se proto detailně na diskrétní případ.

V článku podrobně rozebereme matematické prostředky pro korektní analýzu diferenčních rovnic. Nejprve si představíme základní prostory posloupností ℓ^p a ℓ^∞ a uvedeme si některé jejich důležité vlastnosti. Dále zformulujeme věty o limitním přechodu pro posloupnosti a pečlivě si je dokážeme. Naznačíme navíc myšlenku dalších dvou přístupů k důkazům. Uvedeme Banachovu a Schauderovu větu o pevném bodu. S ohledem na předpoklady Schauderovy věty detailně rozebereme kritéria relativní kompaktnosti pro prostory posloupností. Získané znalosti pak využijeme při analýze nelineární diferenční rovnice druhého řádu ve tvaru

$$\Delta^2 y_n = p_n g(y_{n+1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zformulujeme předpoklady, za kterých dokážeme existenci jejího řešení s požadovanými vlastnostmi. Předpoklady následně upravíme, aby byla zaručena vedle existence požadovaného řešení i jeho jednoznačnost.

2020 *MSC.* Primární 34K06, 34K25.

Klíčová slova. nelineární diferenční rovnice, prostory posloupností, věty o limitním přechodu věty o pevném bodu, kriérium relativní kompaktnosti.

Článek vznikl na základě bakalářské práce autora v oboru Matematické inženýrství na FSI VUT v Brně. Vedoucím práce byl Pavel Řehák z Ústavu matematiky FSI VUT v Brně.

2. Prostory posloupností

Existuje celá řada prostorů posloupností, pro účely tohoto článku však hrají klíčovou roli pouze prostory základní, a sice ℓ^p pro $p \in [1, \infty)$ a ℓ^∞, uvedeme si proto jejich definice a některé klíčové vlastnosti.

Definice 2.1 (Prostor ℓ^p)**.** Nechť $p \in [1, \infty)$ a M je množina reálných posloupností definovaná jako

$$M := \left\{ u = \{u_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R},\ \sum_{k=1}^\infty |u_k|^p < \infty \right\}.$$

Na uvedené množině zavedeme metriku pomocí zobrazení $\varrho_p \colon M \times M \to [0, \infty)$ daného předpisem

$$\varrho_p(u, v) := \left(\sum_{k=1}^\infty |u_k - v_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad u = \{u_k\}, v = \{v_k\} \in M.$$

Množina M s definovanou metrikou ϱ_p pak tvoří metrický prostor (M, ϱ_p) označovaný běžně ℓ^p.

Metrický prostor ℓ^p pro libovolné $p \in [1, \infty)$ je rovněž normovaným lineárním prostorem, příslušná norma je tvaru

$$\|u\|_p := \left(\sum_{k=1}^\infty |u_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad u \in M.$$

Definice 2.2 (Prostor ℓ^∞)**.** Nechť M je množina reálných posloupností definovaná jako

$$M := \big\{ u = \{u_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R},\ \{u_k\} \text{ je ohraničená} \big\}.$$

Na této množině uvažujme metriku ϱ_∞ danou předpisem

$$\varrho_\infty(u, v) := \sup_{k \in \mathbb{N}} |u_k - v_k|, \quad u = \{u_k\}, v = \{v_k\} \in M.$$

Množina M s metrikou ϱ_∞ tvoří metrický prostor (M, ϱ_∞) označovaný běžně ℓ^∞.

Metrický prostor ℓ^∞ je podobně jako ℓ^p současně normovaným lineárním prostorem, příslušná norma je dána předpisem

$$\|u\|_\infty := \sup_{k \in \mathbb{N}} |u_k|, \quad u \in M.$$

Dále uvedeme některé důležité vlastnosti těchto prostorů posloupností, důkazy těchto tvrzení patří ke klasickým výsledkům funkcionální analýzy, proto si je uvádět nebudeme.

Vlastnosti prostorů posloupností

- Metrický prostor ℓ^p je pro libovolné $p \in [1, \infty)$ úplný.
- Metrický prostor ℓ^p je pro libovolné $p \in [1, \infty)$ separabilní.
- Metrický prostor ℓ^∞ je úplný.
- Metrický prostor ℓ^∞ není separabilní.

3. Věty o limitním přechodu

Důležitým nástrojem pro analýzu diferenciálních a diferenčních rovnic jsou věty o limitním přechodu. Jejich spojité verze jsou běžnou součástí učebnic funkcionální analýzy, avšak abychom mohli korektně přistoupit k analýze rovnice difereční, je třeba zformulovat a dokázat jejich diskrétní varianty. K důkazu lze přistoupit různými způsoby, my detailně ukážeme způsob čistě diskrétní a níže naznačíme i alternativní přístupy. Jako hlavní zdroje nám v této části posloužily práce [1, 3, 4, 9].

3.1. Čistě diskrétní přístup

Klíčovou roli v čistě diskrétním důkazu našich vět bude hrát Fatouovo lemma.

Lemma 3.1 (Fatouvo–diskrétní)**.** *Nechť* $\{u_k^{[n]}\}_{k=1}^{\infty}$ *je pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *posloupnost nezáporných čísel, která splňuje rovnost* $\liminf_{n\to\infty} u_k^{[n]} = v_k \in \mathbb{R}$ *pro všechna* $k \in \mathbb{N}$*. Potom*

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = \sum_{k=1}^{\infty} \liminf_{n\to\infty} u_k^{[n]} \le \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]}.$$

Důkaz. Pro důkaz budeme uvažovat libovolné $t \in \mathbb{N}$ a $m \in \mathbb{N}$, tak, že $t \ge n$, potom pro každé $k \in \mathbb{N}$

$$\inf_{s\ge n} u_k^{[s]} \le u_k^{[t]}.$$

Pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$ je poté splněno

$$\sum_{k=1}^{m} \inf_{s\ge n} u_k^{[s]} \le \inf_{t\ge n} \sum_{k=1}^{m} u_k^{[t]} \le \inf_{t\ge n} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[t]}.$$

Z uvedeného pro všechna $m \in \mathbb{N}$ vyplývá

$$\sum_{k=1}^{m} v_k = \sum_{k=1}^{m} \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{s\ge n} u_k^{[s]} \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \inf_{s\ge n} u_k^{[s]} \le \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{t\ge n} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[t]} \right)$$
$$= \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]}.$$

Nakonec provedeme limitní přechod $m \to \infty$ pro $\sum_{k=1}^{m} v_k$ a dostaneme

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k \le \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]}.$$

□

Nyní už přikročíme k formulaci a důkazu vět samotných.

Věta 3.2 (Leviho o monotónní konvergenci–diskrétní)**.** *Nechť* $\{u_k^{[n]}\}_{k=1}^{\infty}$ *je pro libovolné* $n \in \mathbb{N}$ *posloupnost nezáporných čísel a je splněno, že* $\{u_k^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ *je pro* *všechna $k \in \mathbb{N}$ neklesající posloupnost (tj. $u_k^{[n]} \leq u_k^{[n+1]}$) a konverguje pro $n \to \infty$ k $v_k \in \mathbb{R}$. Potom*

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} u_k^{[n]} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]}.$$

Důkaz. Z předpokladů věty plyne pro libovolné $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]} \leq \sum_{k=1}^{\infty} v_k,$$

a platí tedy i

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]} \leq \sum_{k=1}^{\infty} v_k. \tag{3.1}$$

Dále na základě Fatouova lemmatu můžeme usoudit

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k \leq \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]}. \tag{3.2}$$

Celkově z (3.1) a (3.2) vyplývá

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]} \leq \sum_{k=1}^{\infty} v_k \leq \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]}.$$

Z této nerovnosti pak plyne

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} u_k^{[n]} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]}.$$

□

Věta 3.3 (Lebesgueova o dominantní konvergenci – diskrétní)**.** *Nechť $\{u_k^{[n]}\}_{k=1}^{\infty}$ je pro všechna $n \in \mathbb{N}$ posloupnost reálných čísel a pro všechna $k \in \mathbb{N}$ je splněno $\lim_{n\to\infty} u_k^{[n]} = v_k$. Dále nechť existuje posloupnost $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ splňující pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $k \in \mathbb{N}$ nerovnost $|u_k^{[n]}| \leq w_k$, přičemž $\sum_{k=1}^{\infty} w_k < \infty$. Potom $\sum_{k=1}^{\infty} v_k < \infty$ a*

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} u_k^{[n]} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]}.$$

Důkaz. Protože pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a pro všechna $k \in \mathbb{N}$ platí $|u_k^{[n]}| \leq w_k$, můžeme tvrdit pro všechna $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k^{[n]}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} w_k.$$

Z toho vyplývá, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]}$ je pro všechna $n \in \mathbb{N}$ absolutně konvergentní.

Nejdříve ukážeme, že $\sum_{k=1}^{\infty} v_k < \infty$. Uvažujme pro všechna $n \in \mathbb{N}$ posloupnost $\{w_k - u_k^{[n]}\}_{k=1}^{\infty}$. Pro všechna $k \in \mathbb{N}$ je splněno $|u_k^{[n]}| \le w_k$, a proto je to posloupnost nezáporných čísel. Z Fatouova lemmatu pak plyne

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(w_k - u_k^{[n]}\right) &\ge \sum_{k=1}^{\infty} \liminf_{n\to\infty} \left(w_k - u_k^{[n]}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(w_k - v_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} w_k - \sum_{k=1}^{\infty} v_k,\end{aligned}$$

Protože $\sum_{k=1}^{\infty} w_k < \infty$, je zřejmě splněno $\sum_{k=1}^{\infty} v_k < \infty$. Dále platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k - \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]} = \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(w_k - u_k^{[n]}\right) \ge \sum_{k=1}^{\infty} w_k - \sum_{k=1}^{\infty} v_k.$$

Z toho můžeme vyvodit

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]} \le \sum_{k=1}^{\infty} v_k. \tag{3.3}$$

Vezměme nyní posloupnost $\{w_k + u_k^{[n]}\}_{k=1}^{\infty}$, ta je podobně jako $\{w_k - u_k^{[n]}\}_{k=1}^{\infty}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ posloupností nezáporných čísel. Aplikujme na ni Fatouovo lemma následovně

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(w_k + u_k^{[n]}\right) &\ge \sum_{k=1}^{\infty} \liminf_{n\to\infty} \left(w_k + u_k^{[n]}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(w_k + v_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} w_k + \sum_{k=1}^{\infty} v_k,\end{aligned}$$

a tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k + \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]} = \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(w_k + u_k^{[n]}\right) \ge \sum_{k=1}^{\infty} w_k + \sum_{k=1}^{\infty} v_k.$$

Z toho vyplývá

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]} \ge \sum_{k=1}^{\infty} v_k. \tag{3.4}$$

Z (3.3) a (3.4) poté plyne

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k \le \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]} \le \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]} \le \sum_{k=1}^{\infty} v_k.$$

Na základě této nerovnosti pak můžeme konstatovat

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]} = \sum_{k=1}^{\infty} v_k.$$

□

3.2. Využití klasických verzí vět o limitním přechodu

Alternativně je možné k důkazu vět 3.2 a 3.3 využít klasických verzí vět o konvergenci ve spojení s konstrukcí schodovitých funkcí sestrojených pomocí posloupností v předpokladech diskrétních verzí.

Nechť $\{u_k^{[n]}\}_{k=1}^{\infty}$ je pro všechna $n \in \mathbb{N}$ posloupnost nezáporných čísel, která pro všechna $k \in \mathbb{N}$ splňuje $\lim\limits_{n\to\infty} u_k^{[n]} = v_k \in \mathbb{R}$. Uvažujme intervaly $I_i = [i,\ i+1)$ a odpovídající charakteristické funkce χ_{I_i} pro všechna $i \in \mathbb{N}$. Pak definujme funkci f_n následujícím způsobem

$$f_n = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{I_i} u_i^{[n]}.$$

Získali jsme takto posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nezáporných měřitelných funkcí na $[1,\infty)$. Podobně pro $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ lze definovat měřitelnou funkci f takto

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{I_i} v_i.$$

Za předpokladu, že $\{u_k^{[n]}\}_{k=1}^{\infty}$ je neklesající posloupnost nezáporných čísel, je i posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ neklesající posloupností, tentokrát nezáporných funkcí. Pak jsou splněny předpoklady spojité verze Leviho věty a platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\mathrm{d}x = \int_I f(x)\mathrm{d}x.$$

Obdobně bychom postupovali i v případě věty Lebesgueovy.

3.3. Abstraktní přístup k teorii míry

Další přístup k důkazu vět 3.2 a 3.3 využívá teorie obecného měřitelného prostoru a abstraktní teorie míry. Na obecném měřitelném prostoru lze pro funkce opět odvodit věty o limitním přechodu. Diskrétní věty o limitním přechodu pak plynou z obecných verzí vět, pokud jako nosnou množinu zvolíme přirozená čísla a jako míru čítací.

Definice 3.4 (Čítací míra)**.** Uvažujme množinu $\mathbb{N}$ a její σ-algebru $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Jestliže $\alpha\colon \Sigma \to [0,\infty) \cup \{\infty\}$ je zobrazení definované následujícím způsobem

$$\alpha(A) = \begin{cases} \mathrm{card}(A) & \text{pokud je množina } A \text{ konečná},\\ \infty & \text{pokud množina } A \text{ není konečná}, \end{cases}$$

pak α je míra na $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, kterou nazýváme čítací.

3.4. Věty o limitním přechodu pro řady

Podobně jako pro posloupnosti můžeme formulovat diskrétní Leviho a Lebesgueovu větu pro řady. Získáme tak diskrétní ekvivalent zaměnitelnosti sumace a integrálu. Při splnění modifikovaných předpokladů vět o limitním přechodu pro posloupnosti

je pak zaručeno
$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}u_k^{[n]}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}u_k^{[n]}.$$

4. Věty o pevném bodu

Podstatnou roli při vyšetřování kvalitativních vlastností diferenciálních a diferenčních rovnic hrají věty o pevném bodu. Takových vět je celá řada, pro naše účely se zaměříme na dvě větu Banachovu, která nám zajišťuje za přísnějších předpokladů existenci a jednoznačnost pevného bodu a Schauderovu, která za obecnějších podmínek zajišťuje existenci. Více o větách o pevném bodu lze dohledat např. v [7, 10].

Definice 4.1 (Pevný bod)**.** Nechť (M,ϱ) je metrický prostor a dále nechť $F\colon M\to M$. Bod $u^*\in M$ nazýváme pevný bod zobrazení F, je-li splněno $F(u^*)=u^*$.

Věta 4.2 (Banachova o pevném bodu)**.** *Nechť (M,ϱ) je úplný metrický prostor a zobrazení $F\colon M\to M$ je kontrakce. Pak existuje jediný pevný bod zobrazení F, který je navíc limitou posloupnosti $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $u_1\in M$ je libovolné a $u_{n+1}=F(u_n)$ pro $n\in\mathbb{N}$.*

Než bude uvedena Schauderova věta, je vhodné připomenout jeden důležitý pojem.

Definice 4.3 (Relativně kompaktní množina)**.** Nechť (M,ϱ) je metrický prostor. Množinu $N\subseteq M$ nazýváme relativně kompaktní, jestliže její uzávěr $\overline{N}\subseteq M$ je množina kompaktní v (M,ϱ).

Věta 4.4 (Schauderova o pevném bodu zobecněná)**.** *Nechť M je Banachův prostor, $N\subseteq M$ neprázdná, konvexní, omezená a uzavřená množina a $F\colon N\to N$ je spojité zobrazení takové, že $F(N)$ je relativně kompaktní podmnožina N. Potom má zobrazení F pevný bod $u^*\in N$.*

V předpokladech Schauderovy věty 4.4 figuruje předpoklad relativní kompaktnosti. Problematika relativní kompaktnosti však na ℓ^p a ℓ^∞ není triviální záležitost. Další část článku proto věnujeme kritériím relativní kompaktnosti v prostorech posloupností.

5. Kritéria relativní kompaktnosti

Při vyšetřování diferenční rovnice uvažované v tomto článku budeme pracovat primárně s prostorem ℓ^∞, proto kritérium pro tento prostor podrobně dokážeme a pro ℓ^p se uchýlíme pouze k formulaci. V této části jsme vycházeli primárně z [2].

Velmi důležitou roli pro důkaz kritéria hraje vztah mezi relativní kompaktností a vlastností, které se říká prekompaktnost. Nejprve si musíme ujasnit, co vlastně prekompaktnost znamená.

Definice 5.1 (ε-síť)**.** Nechť (M, ϱ) je metrický prostor, ε kladné reálné číslo a $N \subseteq M$. Množinu $A \subseteq M$ nazýváme ε-síť množiny N, pokud pro všechna $u \in N$ existuje $v \in A$ tak, že $\varrho(u, v) \leq \varepsilon$.

Definice 5.2 (Prekompaktní množina)**.** Nechť (M, ϱ) je metrický prostor. Množinu $N \subseteq M$ nazýváme prekompaktní, jestliže existuje její konečná ε-síť pro každé $\varepsilon > 0$.

Věta 5.3. *Nechť (M, ϱ) je úplný metrický prostor. Pak je množina $N \subseteq M$ relativně kompaktní právě tehdy, když je prekompaktní.*

Věta nám vlastně říká, že pojmy relativní kompaktnost a prekompaktnost jak na prostoru ℓ^∞, tak na prostoru ℓ^p splývají, tohoto faktu využijeme a k důkazu kritéria budeme přistupovat přes konstrukci ε-sítě.

5.1. Relativně kompaktní podmnožiny ℓ^∞

Než uvedeme kritérium relativní kompaktnosti pro podmnožiny ℓ^∞, uvedeme ještě dvě důležité definice.

Definice 5.4 (Stejně ohraničené posloupnosti)**.** Posloupnosti z množiny $N \subset \ell^\infty$ nazýváme stejně ohraničené, pokud je množina N v ℓ^∞ omezená.

Definice 5.5 (Stejně cauchyovské posloupnosti)**.** Posloupnosti z množiny $N \subset \ell^\infty$ nazýváme stejně cauchyovské, pokud pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $i, j \geq n$ a pro libovolnou posloupnost $u \in N$ platí

$$|u_i - u_j| < \varepsilon.$$

Následuje samotné kritérium relativní kompaktnosti.

Věta 5.6. *Množina $N \subset \ell^\infty$ stejně ohraničených a stejně cauchyovských posloupností je relativně kompaktní.*

Důkaz. Pro důkaz věty zkonstruujeme pro N konečnou ε-síť pro každé $\varepsilon > 0$. Uvažujme $\varepsilon > 0$ libovolné. Posloupnosti z N jsou stejně cauchyovské (viz definice 5.5), proto existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $i, j \geq n$ a pro libovolnou posloupnost $u \in N$ platí

$$|u_i - u_j| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.1}$$

Vzhledem k tomu, že posloupnosti z N jsou stejně ohraničené, existuje $L \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $u \in N$ platí

$$\|u\|_\infty \leq L.$$

Nechť $m \in \mathbb{N}$ je takové, že pro čísla $-L = y_1 < y_2 < \cdots < y_m = L$ je splněno

$$|y_i - y_{i+1}| < \varepsilon \tag{5.2}$$

pro všechna $1 \leq i \leq m - 1$.

Dále pro všechna $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ přiřaďme v_k jednu z hodnot $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ a pro $k > n$ položme $v_k = v_n$. Množinu všech takto definovaných posloupností $v = \{v_k\}_{k=1}^\infty$ označme A. Zřejmě $A \subset \ell^\infty$ má právě m^n prvků.

Nakonec ukážeme, že množina A je ε-sítí množiny N, tj. že pro všechna $u \in N$ existuje $v \in A$ takové, že

$$\varrho_\infty(u, v) < \varepsilon.$$

Pro každé $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ vyberme $z_k \in \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ tak, aby platilo

$$|u_k - z_k| = \min_{j \in \{1,2,\dots,m\}} |u_k - y_j|.$$

Z (5.2) vyplývá $|u_k - z_k| < \varepsilon/2$ pro $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Položme $v_k = z_k$ pro $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ a $v_k = v_n$ pro $k > n$. Posloupnost v zřejmě náleží do množiny A. Pro $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ je pak zřejmě splněno

$$|u_k - v_k| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.3}$$

a pro $k > n$

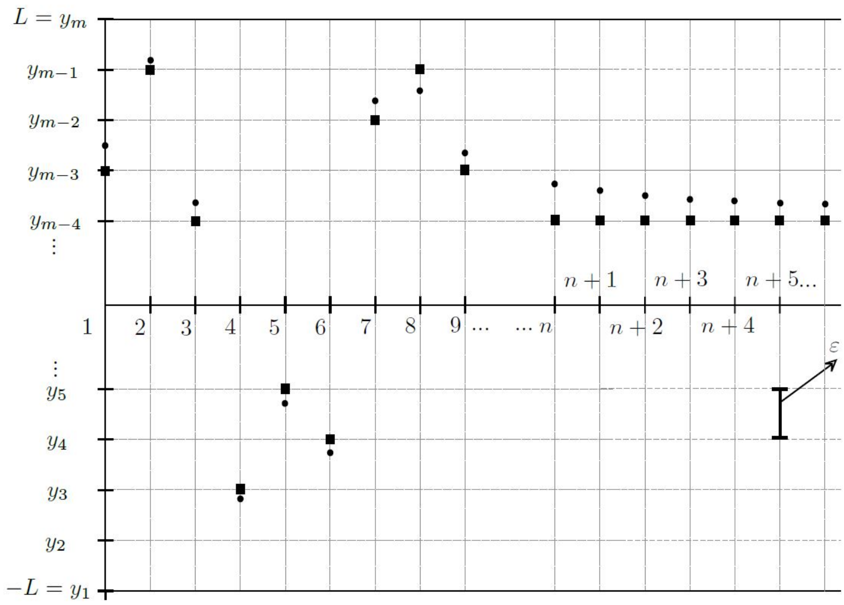
$$|u_k - v_k| = |u_k - v_n| \leq |u_k - u_n| + |u_n - v_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

což plyne z trojúhelníkové nerovnosti, (5.1) a (5.3).

Celkově tedy dostáváme

$$\varrho_\infty(u, v) \leq \varepsilon.$$

Množina A je tedy konečnou ε-sítí množiny N. Množina N je proto v ℓ^∞ prekompaktní a vzhledem k úplnosti ℓ^∞ i relativně kompaktní. Důkaz názorně ilustruje obr 1. $\square$



Obrázek 1. Aproximace posloupnosti $u \in N$ (kolečka) posloupností v z ε-sítě (čtverečky).

5.2. Relativně kompaktní podmnožiny ℓ^p

V této části si ještě bez důkazu uvedeme kritérium pro ℓ^p.

Věta 5.7. *Množina $N \subset \ell^p$ pro $1 \le p < \infty$ je relativně kompaktní právě tehdy, když jsou prvky této množiny stejně omezené a pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $u \in N$ platí*

$$\left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |u_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Detailní důkaz je vypracován v [6]. Více si lze přečíst také v [4, 8].

6. Analýza nelineární diferenční rovnice

Teoretické poznatky z předchozích částí nyní využijeme pro analýzu rovnice

$$\Delta^2 y_n = p_n g(y_{n+1}), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{6.1}$$

kde symbolem Δ rozumíme standardní dopřednou diferenci definovanou jako

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Symbol Δ^2 pak chápeme jako

$$\Delta^2 y_n = \Delta(\Delta y_n) = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Budeme předpokládat, že pro $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí $p_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a funkce $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá a taková, že $tg(t) > 0$ pro $t \neq 0$.

Zaměříme se na studium existence řešení rovnice (6.1), které pro dané kladné reálné číslo c splňuje podmínky

$$\left.\begin{aligned} &\Delta y_n < 0, \quad n \in \mathbb{N},\\ &y_n > 0, \quad n \in \mathbb{N},\\ &\lim_{n\to\infty} y_n = c. \end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

6.1. Podmínky zaručující existenci řešení

V této části odvodíme podmínku, pro kterou ukážeme, že je nejenom postačující, nýbrž i nutnou pro existenci řešení (6.1) s vlastnostmi (6.2) pro libovolně zvolené $c > 0$.

Věta 6.1. *Pro posloupnost $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ v rovnici (6.1) platí*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k p_k < \infty \tag{6.3}$$

právě tehdy, když pro libovolně zvolené kladné reálné číslo c existuje řešení úlohy (6.1), (6.2).

Poznámka 6.2. V důkazu později ukážeme, že ve skutečnosti pro splnění podmínky (6.3) stačí, aby existovalo jedno $c > 0$, pro které existuje řešení úlohy (6.1), (6.2).

Lemma 6.3. *Nechť $p_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\sum_{n=j}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} p_k < \infty$ pro nějaké $j \in \mathbb{N}$. Pak*

$$\sum_{n=j}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} p_k = \sum_{k=j}^{\infty} (k+1-j) p_k.$$

Důkaz. Důkaz plyne z diskrétní verze Fubiniovy věty. □

Důkaz věty 6.1. Nejdříve se zaměříme na implikaci zprava doleva. Využijeme vztah

$$\sum_{k=m}^{n-1} \Delta y_k = y_n - y_m \tag{6.4}$$

platný pro libovolná $m, n \in \mathbb{N}$ taková, že $m \leq n$.

Předpokládejme, že y je řešení (6.1) s vlastnostmi (6.2) pro pevně zvolené $c > 0$. Rovnici (6.1) upravíme pomocí ekvivalentní úpravy, kdy na obě strany rovnice aplikujeme $\sum_{j=k}^{m-1}$, s ohledem na (6.4) je pak pro $m > k \geq 1$ splněno

$$\Delta y_m - \Delta y_k = \sum_{j=k}^{m-1} p_j g(y_{j+1}).$$

Dále provedeme limitní přechod $m \to \infty$. Předpokládáme konvergenci y, proto $\lim\limits_{m\to\infty} \Delta y_m = 0$. Dostaneme tak pro $k \in \mathbb{N}$

$$0 - \Delta y_k = \sum_{j=k}^{\infty} p_j g(y_{j+1}). \tag{6.5}$$

Na obě strany (6.5) nyní aplikujeme $\sum_{k=n}^{m-1}$ a dostáváme pro $m > k \geq 1$

$$y_n = y_m + \sum_{k=n}^{m-1} \sum_{j=k}^{\infty} p_j g(y_{j+1}),$$

nyní provedeme další limitní přechod $m \to \infty$, a protože předpokládáme $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = c$, získáváme pro $n \in \mathbb{N}$

$$y_n = c + \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j g(y_{j+1}).$$

Platí tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j g(y_{j+1}) < \infty$$

a díky limitnímu srovnávajícímu kritériu pro řady s kladnými členy je splněno i

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j < \infty.$$

S ohledem na lemma 6.3 pak platí $\sum_{k=1}^{\infty} k p_k < \infty$. Tím je dokázána implikace zprava doleva.

Nyní se zaměříme na implikaci zleva doprava. S využitím zobecněné Schauderovy věty (viz věta 4.4) dokážeme nejprve řešení rovnice (6.1) splňující

$$\left.\begin{aligned} &\Delta y_n < 0, \quad n \geq n_0,\\ &y_n > 0, \quad n \geq n_0,\\ &\lim_{n\to\infty} y_n = c \end{aligned}\right\} \tag{6.6}$$

pro $n \geq n_0$, kde $n_0 \in \mathbb{N}$ je dostatečně velké. Uvažujme libovolné reálné kladné číslo, to si označme c. Dále označme

$$M = \max_{t\in[c,2c]} g(t).$$

Z konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} kp_k$ a lemma 6.3 plyne konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} p_k$. Pro libovolné $\varepsilon > 0$ tak existuje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} p_k < \varepsilon$. Zvolme $\varepsilon = c/M$ a označme odpovídající n_ε jako n_0.

Jak jsme již uvedli, prostor ℓ^∞ je úplný. Dále najdeme množinu $\Omega \subseteq \ell^\infty$, která je neprázdná, konvexní, uzavřená a omezená a zobrazení $T\colon \Omega \to \Omega$, které je spojité a $T\Omega$ je relativně kompaktní podmnožina Ω.

Množinu Ω budeme uvažovat ve tvaru

$$\Omega = \left\{u \in \ell^\infty,\ c \leq u_n \leq 2c \text{ pro } n \geq n_0\right\}.$$

Tato množina je zřejmě neprázdná a omezená. Dále ukážeme, že je uzavřená. Uvažujme proto posloupnost $\left\{u^{[m]}\right\}_{m=1}^{\infty}$ prvků z Ω konvergující k u. Je třeba dokázat, že u patří do Ω. Platí, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sup_{n\geq n_0}\left|u_n^{[m]} - u_n\right| < \varepsilon, \quad m \geq m_\varepsilon.$$

Vezměme libovolné pevně zvolené $n \geq n_0$, pro to je splněno $\lim_{m\to\infty} u_n^{[m]} = u_n$. Pro všechna $m \in \mathbb{N}$ pak platí pro zvolené n, že

$$c \leq u_n^{[m]} \leq 2c,$$

a proto

$$c \leq u_n \leq 2c.$$

Vzhledem k tomu, že $n \geq n_0$ je zvoleno libovolně, platí $u \in \Omega$ a množina Ω je uzavřená.

Zbývá ukázat, že je množina Ω konvexní. Vezměme $u, v \in \Omega$ a libovolné $\lambda \in [0,1]$. Pro $n \geq n_0$ platí

$$\lambda c \leq \lambda u_n \leq \lambda 2c \tag{6.7}$$

a

$$(1-\lambda)c \leq (1-\lambda)v_n \leq (1-\lambda)2c. \tag{6.8}$$

Když (6.7) a (6.8) sečteme, dostaneme pro $n \geq n_0$

$$c \leq \lambda u_n + (1-\lambda)v_n \leq 2c.$$

Vzhledem k tomu, že zřejmě $\lambda u + (1-\lambda)v \in \ell^\infty$, můžeme konstatovat, že $\lambda u + (1-\lambda)v \in \Omega$ a množina Ω je tedy konvexní.

Zobrazení T definujeme s ohledem na možnost ekvivalentní úpravy diferenční rovnice na rovnici sumační, které jsme využili už v důkazu implikace zprava doleva, takto

$$(Tu)_n = c + \sum_{k=n}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} p_j g(u_{j+1}), \quad u \in \Omega.$$

Nyní dokážeme, že je splněno $T\Omega \subseteq \Omega$. Nechť $u \in \Omega$, jistě platí $Tu \in \ell^\infty$, neboť $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} p_k < \infty$ a Tu je tedy ohraničená posloupnost. Dále je třeba dokázat, že pro $n \geq n_0$ platí

$$c \leq (Tu)_n \leq 2c.$$

První nerovnost je splněna, neboť $p_k \geq 0$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, a protože $tg(t) > 0$ pro $t \neq 0$, platí $g(t) > 0$ pro $t > 0$, a tedy $\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} p_j g(u_{j+1}) \geq 0$. Abychom dokázali platnost druhé nerovnosti, ukážeme, že pro $n \geq n_0$ platí

$$\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} p_j g(u_{j+1}) \leq c.$$

Budeme tak postupně zvětšovat výraz $\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} p_j g(u_{j+1})$ následujícím způsobem

$$\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} p_j g(u_{j+1}) \leq M \sum_{k=n}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} p_j \leq M \sum_{k=n_0}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} p_j.$$

Vzhledem k tomu, že platí $\sum_{k=n_0}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} p_j \leq c/M$, můžeme výraz dále upravit

$$M \sum_{k=n_0}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} p_j \leq M\frac{c}{M} = c.$$

Celkově tedy $Tu \in \Omega$.

Díky absolutní konvergenci $\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} p_j g(u_{j+1})$ můžeme zobrazení T pro $n \geq n_0$ ekvivalentně zapsat s ohledem na lemma 6.3 následovně

$$(Tu)_n = c + \sum_{j=n}^{\infty}(j+1-n) p_j g(u_{j+1}).$$

Dále je zapotřebí dokázat, že je zobrazení T spojité. Nechť je posloupnost $\{u^{[m]}\}_{m=1}^{\infty} \subseteq \Omega$ taková, že $\lim_{m\to\infty} \|u^{[m]} - u\|_\infty = 0$. Ukážeme, že platí

$$\lim_{m\to\infty} \left\|Tu^{[m]} - Tu\right\|_\infty = 0.$$

Zaměřme se na výraz $\|Tu^{[m]} - Tu\|_\infty$, který rozepíšeme a zvětšíme následovně

$$\begin{aligned}\sup_{n\geq n_0}\left|(Tu^{[m]})_n - (Tu)_n\right| &= \sup_{n\geq n_0}\left|\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} p_j g(u_{j+1}^{[m]}) - \sum_{k=n}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} p_j g(u_{j+1})\right| \\ &= \sup_{n\geq n_0}\left|\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} p_j\left(g(u_{j+1}^{[m]}) - g(u_{j+1})\right)\right| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} p_j \left|g(u_{j+1}^{[m]}) - g(u_{j+1})\right|.\end{aligned}$$

Posloupnost $\{p_j|g(u_{j+1}^{[m]}) - g(u_{j+1})|\}_{j=n_0}^{\infty}$ je pro všechna $m \in \mathbb{N}$ posloupností nezáporných čísel. Existuje $L \geq 0$ takové, že $|g(u_{j+1}^{[m]}) - g(u_{j+1})| \leq L$ pro všechna $j \geq n_0$ a $m \in \mathbb{N}$, a proto platí

$$p_j|g(u_{j+1}^{[m]}) - g(u_{j+1})| \leq Lp_j.$$

My víme, že je splněno $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} p_k < \infty$, pak zřejmě $\sum_{j=n_0}^{\infty} p_j < \infty$. Posloupnost $\{p_j|g(u_{j+1}^{[m]}) - g(u_{j+1})|\}_{j=n_0}^{\infty}$ tak splňuje předpoklady Lebesgueovy věty o dominantní konvergenci (věta 3.3). Posloupnost

$$\left\{\sum_{j=k}^{\infty} p_j|g(u_{j+1}^{[m]}) - g(u_{j+1})|\right\}_{k=n_0}^{\infty} \tag{6.9}$$

je také posloupností nezáporných čísel takovou, že pro $k \geq n_0$ a $m \in \mathbb{N}$ že platí

$$\sum_{j=k}^{\infty} p_j|g(u_{j+1}^{[m]}) - g(u_{j+1})| \leq L\sum_{j=k}^{\infty} p_j.$$

Víme, že $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} p_k < \infty$, a proto i $\sum_{k=n_0}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} p_j < \infty$. Posloupnost (6.9) tedy předpoklady Lebesgueovy věty také splňuje. Lebesgueovu větu tak nyní lze dvakrát aplikovat následovně

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=n_0}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} p_j|g(u_{j+1}^{[m]}) - g(u_{j+1})| = \sum_{k=n_0}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} p_j \lim_{m\to\infty}|g(u_{j+1}^{[m]}) - g(u_{j+1})|.$$

Předpokládáme $\lim_{m\to\infty}\|u^{[m]} - u\|_\infty = 0$, proto platí $\lim_{m\to\infty}\big(\sup_{n\geq n_0}|u_n^{[m]} - u_n|\big) = 0$. Lze tedy konstatovat, že $\lim_{m\to\infty} u_{j+1}^{[m]} = u_{j+1}$ je splněno pro všechna $j \geq n_0 - 1$. Na základě této úvahy potom můžeme tvrdit

$$\sum_{k=n_0}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} p_j \lim_{m\to\infty}|g(u_{j+1}^{[m]}) - g(u_{j+1})| = \sum_{k=n_0}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} p_j 0 = 0.$$

Celkově potom

$$\lim_{m\to\infty}\|Tu^{[m]} - Tu\|_\infty = 0$$

a zobrazení T je tedy spojité.

Zbývá dokázat, že $T\Omega$ je relativně kompaktní, k tomu využijeme věty 5.6. Množina $T\Omega$ je omezená, neboť $T\Omega \subseteq \Omega$ a množina Ω je omezená. Stačí tedy ukázat, že posloupnosti z $T\Omega$ jsou stejně cauchyovské.

K tomu je zapotřebí demonstrovat, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n, m \geq n_\varepsilon$ platí $|(Tu)_n - (Tu)_m| < \varepsilon$ pro všechna $u \in \Omega$.

Pro $u \in \Omega$ a $n > m$ je

$$|(Tu)_m - (Tu)_n| = \sum_{k=m}^{n-1}\sum_{j=k}^{\infty} p_j g(u_{j+1}) \leq M\sum_{k=m}^{n-1}\sum_{j=k}^{\infty} p_j \leq M\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} p_j.$$

Využili jsme předpokladu $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} p_k < \infty$, proto i $\sum_{k=m}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j < \infty$. Tudíž

$$\lim_{m\to\infty} M \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j = 0.$$

Nechť je $\varepsilon > 0$ libovolné. Pak existuje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $m \geq n_\varepsilon$ platí

$$M \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j < \varepsilon.$$

Pro $n > m \geq n_\varepsilon$ je tak splněno

$$\left|(Tu)_m - (Tu)_n\right| < \varepsilon.$$

Dokázali jsme tak platnost všech předpokladů zobecněné Schauderovy věty o pevném bodu a existuje tedy pevný bod zobrazení T. To znamená, že existuje řešení y rovnice (6.1) s vlastnostmi (6.6).

Řešení rovnice (6.1) lze rozšířit doleva na celou množinu $\mathbb{N}$. Skutečně pro $n_0 - 1$ definujeme

$$y_{n_0-1} = c + \sum_{k=n_0-1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j g(y_{j+1}).$$

Víme, že platí $c \in (0,\infty)$, je splněno $p_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $g(t) > 0$ pro všechna $t \in (0,\infty)$. Platí tak zřejmě $y_{n_0-1} > 0$, a protože

$$\sum_{k=n_0-1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j g(y_{j+1}) > \sum_{k=n_0}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j g(y_{j+1})$$

je splněno také $\Delta y_{n_0-1} < 0$. Postupně tak prodloužíme řešení na $\mathbb{N}$, tak že y splňuje (6.2). □

Obdobným způsobem lze pro rovnici (6.1) dokázat existence rostoucího záporného řešení konvergujícího k libovolné záporné konstantě.

6.2. Podmínky zaručující existenci a jednoznačnost řešení

Pokud bychom zvolili přísnější podmínku a vyžadovali, aby funkce g byla navíc lipschitzovsky spojitá na $[0,\infty)$, pak bychom byli schopni s využitím Banachovy věty dokázat pro libovolné $c \in (0,\infty)$ nejenom existenci, ale i jednoznačnosti řešení (6.1) s vlastnostmi (6.2). Větu o této skutečnosti si nejprve zformulujeme a následně uvedeme stručně bez detailů důkaz.

Věta 6.4. *Nechť g splňuje Lipschitzovu podmínku na $[0,\infty)$. Pak pro posloupnost $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ v rovnici (6.1) platí*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k p_k < \infty$$

právě tehdy, když pro libovolně zvolené kladné reálné číslo c existuje jediné řešení úlohy (6.1), (6.2).

Myšlenka důkazu. Důkaz implikace zprava doleva zde splývá s důkazem věty 6.1, neboť platnost $\sum_{k=1}^{\infty} kp_k < \infty$ je zaručena už existencí řešení.

V důkazu implikace zleva doprava bychom pak uvažovali, že funkce g je lipschitzovsky spojitá na $[0, \infty)$ s lipschitzovskou konstantou L a zvolili $n_0 \in \mathbb{N}$, tak, aby platilo

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j < \frac{1}{2L} . \tag{6.10}$$

Dále bychom uvažovali jako množinu Ω množinu všech posloupností definovaných a ohraničených pro $n \geq n_0$ a operátor T definovaný v důkazu věty 6.1 a ukázali, že je toto zobrazení kontrakcí, tj. že existuje $K \in (0, 1)$ takové, že pro všechna $u, v \in \Omega$ platí

$$\|Tu - Tv\|_\infty \leq K\|u - v\|_\infty .$$

Detailní důkaz si lze přečíst v [6]. □

6.3. Další poznámky

Rovnici (6.1) lze chápat jako diskretizaci rovnice

$$y'' = p(t)g(y), \quad t \geq 0,$$

kde p je kladná funkce a g má vlastnosti jako v případě rovnice (6.1). Tato rovnice zahrnuje známou rovnici Emdenova–Fowlerova typu (příp. Thomasova–Fermiho), kde funkce g je volena následovně

$$g(t) = |t|^\lambda \operatorname{sgn} t, \quad \lambda \in (0, \infty).$$

Ta se začala studovat v souvislosti s modelováním struktury hvězd a úvahami o modelech atomů, ale v současné době má celou řadu dalších aplikací.

7. Závěr

V článku jsme zpracovali aparát související s funkcionální analýzou pro kvalitativní analýzu difenčních rovnic a demonstrovali jeho využití při analýze řešení rovnice (6.1). Na téma lze dále navázat studiem dalších diferenčních rovnic a rozborem analogií a rozdílů oproti jejich diferenciálním protějškům.

Reference

[1] S. Cheng: *A crash course on the Lebesgue integral and measure theory*, 51 Franklin St, Fifth Floor, Boston, MA 02110-1301 USA, 2008.

[2] S. S. Cheng, W. T. Patula: *An existence theorem for a nonlinear difference equations*, Nonlin. Anal. **20** (1993), No. 3, 193–203.

[3] D. H. Griffel: *Applied functional analysis*, New York: Dover, 2002.

[4] D. Farenick: *Fundamentals of functional analysis*, Switzerland: Springer International Publishing, 2016.

[5] H. Hanche-Olsen, H. Holden: *The Kolmogorov-Riezs compactness theorem*, Expositiones Mathematicae **28** (2010), No. 4, 385–394.

[6] J. Kosík: *Vlastnosti prostorů posloupností a jejich aplikace v teorii nelineárních diferenčních rovnic*, Bakalářská práce, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Brno, 2022.

[7] P. Kumlin: *A note on fixed point theory*, TMA 401/MAN 670 Functional Analysis, 2003/2004.
[8] I. Netuka: *Základy moderní analýzy*, Praha: MatfyzPress, 2014.
[9] S. Ovchinnikov: *Measure, integral, derivative: A course on Lebesgue's theory*, New York: Springer Science+Business Media, 2013.
[10] V. Pata: *Fixed Point Theorems and Applications*, New York: Springer International Publishing, 2019.

Jindřich Kosík, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: `jin.kosik@gmail.com`