VYBRANÉ PRÍKLADY Z INTERNETOVEJ MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

VIERA ŠTOUDKOVÁ RŮŽIČKOVÁ

Abstrakt. Článok je motivovaný príkladom z Internetovej matematickej olympiády pre študentov stredných škôl o postupnosti zadanej rekurentným vzťahom, ktorý je špeciálnym prípadom Riccatiho rovnice. V tomto texte je diskutovaných niekoľko prístupov k riešeniu o niečo všeobecnejšej úlohy.

Ústav matematiky na FSI VUT v Brne každoročne organizuje matematickú súťaž pre študentov stredných škôl v Česku a na Slovensku, doteraz známu ako Internetová matematická olympiáda. V novembri v roku 2021 prebehol už jej štrnásty ročník. Na príprave príkladov a ich vyhodnotení sa nemalou mierou podieľajú študenti oboru Matematické inženýrství a oboru Aplikovaná matematika. Na stránkach `matholymp.fme.vutbr.cz` je možné nájsť zadania aj riešenia príkladov zo všetkých ročníkov.

Tento príspevok je piaty v poradí na túto tému a je celý o postupnosti zadanej rekurentným vzťahom a zisťovaní, kedy je táto postupnosť periodická.

V roku 2020 sa na súťaži objavil nasledujúci príklad s postupnosťou.

Príklad 1. *Uvažujme rekurentní vztah*

$$a_{k+1} = \frac{\sqrt{3} + a_k}{1 - \sqrt{3}a_k}, \quad k \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Otázka: Pro které hodnoty a_1 definuje tento rekurentní vztah periodickou posloupnost reálných čísel? Jaká je její nejmenší perioda?

Například pro $a_1 = 0$ definuje tento rekurentní vztah posloupnost

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{\sqrt{3} + a_1}{1 - \sqrt{3}a_1} = \sqrt{3}, \quad a_3 = \frac{\sqrt{3} + a_2}{1 - \sqrt{3}a_2} = -\sqrt{3},$$
$$a_4 = \frac{\sqrt{3} + a_3}{1 - \sqrt{3}a_3} = 0, \; a_5 = \sqrt{3}, \quad \dots$$

Tato posloupnost je periodická s nejmenší periodou $d = 3$.

Poznámka: Posloupnost $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ se nazývá periodická s periodou d, pokud pro každé $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ platí $a_k = a_{k+d}$.

2020 *MSC.* Primární 00A09; Sekundární 39A23.

Klíčová slova. matematická soutěž, Riccatiho diferenční rovnice.

Řešení: Napíšeme si číslo $\sqrt{3}$ *ve tvaru* $\sqrt{3} = \operatorname{tg}(60°)$ *a číslo* a_1 *ve tvaru* $a_1 = \operatorname{tg}(\alpha)$*, kde* $-90° < \alpha < 90°$*. Pak z rekurentního vztahu a příslušného goniometrického vzorce máme*

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{\operatorname{tg}(60°) + \operatorname{tg}(\alpha)}{1 - \operatorname{tg}(60°)\operatorname{tg}(\alpha)} = \operatorname{tg}(\alpha + 60°), \ \textit{pokud}\ \alpha \neq 30°, \\ a_3 &= \frac{\operatorname{tg}(60°) + \operatorname{tg}(\alpha + 60°)}{1 - \operatorname{tg}(60°)\operatorname{tg}(\alpha + 60°)} = \operatorname{tg}(\alpha + 120°), \ \textit{pokud}\ \alpha \neq -30°, \\ a_4 &= \frac{\operatorname{tg}(60°) + \operatorname{tg}(\alpha + 120°)}{1 - \operatorname{tg}(60°)\operatorname{tg}(\alpha + 120°)} = \operatorname{tg}(\alpha + 180°) = \operatorname{tg}(\alpha) = a_1. \end{aligned}$$

Každá posloupnost definovaná daným rekurentním vztahem je tedy periodická s nejmenší periodou 3, pokud $a_1 \neq \operatorname{tg}(30°) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ *a* $a_1 \neq \operatorname{tg}(-30°) = \frac{-1}{\sqrt{3}}$.

Príklad bolo možné riešiť aj tak, že sa postupným dosadzovaním a úpravami odvodil vzťah medzi a_k a a_{k+2} a potom ďalej aj medzi a_k a a_{k+3} a ukázalo sa, že $a_k = a_{k+3}$. Vyššie uvedené riešenie využíva to, že rekurentný vzťah je možné chápať ako posunutý tangens. Na tento postup nikto zo súťažiacich neprišiel.

V tomto texte by som chcela ukázať, že s tým tangensom nešlo o nejakú náhodu, že je to pre tento typ postupností celkom obvyklé, a pozrieme sa aj na to, ako je to s tou periodickosťou. Majme teda takúto úlohu:

Úloha 1. *Uvažujme rekurentný vzťah*

$$q_{k+1} = \frac{c + dq_k}{a + bq_k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \tag{1}$$

Otázka: Pre ktoré hodnoty a, b, c, d, q_0 *definuje tento rekurentný vzťah periodickú postupnosť reálnych čísiel? Aká je jej najmenšia perióda?*

Rovnica (1) sa nazýva Riccatiho diferenčná rovnica (existuje aj jej spojitá verzia, Riccatiho diferenciálna rovnica) a vo všeobecnosti môžu koeficienty a, b, c, d byť závislé od k. My tu teda máme jej špeciálny prípad. Riešením takejto rovnice je postupnosť, ktorej všetky členy spĺňajú daný rekurentný vzťah. Aby sme mohli odpovedať na otázku v úlohe 1, bolo by vhodné mať explicitné vyjadrenie jej k-teho člena, teda také, ktoré už závisí len od q_0, k, a, b, c, d.

Napríklad, keď sa pozrieme na príklad 1, kde máme $a = 1, b = -\sqrt{3}, c = \sqrt{3}, d = 1$, tak z postupu riešenia vidíme, že k-tý člen sa dá vyjadriť ako

$$q_k = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}(q_0) + k\tfrac{\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Ukážem tu teraz niekoľko možných (nie úplne učebnicových) postupov, ako sa dá dopracovať k riešeniam rovnice (1) a odpovedi na otázku v úlohe 1. Budem sa tváriť, že toho o riešení diferenčných rovníc veľa nevieme.

Ešte pre istotu dopredu upozorním, že napriek tomu, že ide o na pohľad jednoduchú vec, nevyhneme sa zložitejším výrazom a komplexným číslam.

1. Riešenie rovnice (1) ako posunutý tangens

Povedzme, že sme si prečítali riešenie príkladu 1 a na základe toho nás napadla otázka: Dá sa riešenie úlohy 1 v prípade, že postupnosť je periodická, vždy napísať ako nejaký posunutý tangens? Skúsme to zistiť.

Predpokladajme, že nejaká postupnosť $\{q_k\}_{k=0}^{\infty}$ sa dá zapísať v tvare

$$q_k = A\operatorname{tg}(k\varphi+\omega)+B, \quad k=0,1,2,3,\dots, \tag{2}$$

kde $A \neq 0$ a $\omega = \operatorname{arctg}\frac{q_0-B}{A}$. Môžeme ďalej predpokladať, že $\varphi \neq l\pi, l \in \mathbb{Z}$, lebo v takom prípade by to bola nezaujímavá konštantná postupnosť. Konštantná postupnosť sa dá v tvare (2) očividne napísať vždy. Napríklad

$$q_k = \operatorname{tg}(k\pi)+q_0, \quad k=0,1,2,3,\dots.$$

Pre každé uvažované φ je teda definovaná hodnota $\operatorname{cotg}\varphi$ a s využitím súčtových vzorcov pre goniometrické funkcie môžeme odvodiť nasledovný vzťah medzi q_k a q_{k+1}:

$$\begin{aligned}
q_{k+1} &= A\operatorname{tg}((k+1)\varphi+\omega)+B = A\operatorname{tg}((k\varphi+\omega)+\varphi)+B\\
&= A\frac{\sin((k\varphi+\omega)+\varphi)}{\cos((k\varphi+\omega)+\varphi)}+B = A\frac{\sin(k\varphi+\omega)\cos\varphi+\cos(k\varphi+\omega)\sin\varphi}{\cos(k\varphi+\omega)\cos\varphi-\sin(k\varphi+\omega)\sin\varphi}+B\\
&= A\frac{\operatorname{tg}(k\varphi+\omega)\operatorname{cotg}\varphi+1}{\operatorname{cotg}\varphi-\operatorname{tg}(k\varphi+\omega)}+B = \frac{A+B\operatorname{cotg}\varphi+(A\operatorname{cotg}\varphi-B)\operatorname{tg}(k\varphi+\omega)}{\operatorname{cotg}\varphi-\operatorname{tg}(k\varphi+\omega)}\\
&= \frac{A^2+B^2+(A\operatorname{cotg}\varphi-B)(A\operatorname{tg}(k\varphi+\omega)+B)}{A\operatorname{cotg}\varphi+B-(A\operatorname{tg}(k\varphi+\omega)+B)}\\
&= \frac{A^2+B^2+(A\operatorname{cotg}\varphi-B)q_k}{A\operatorname{cotg}\varphi+B-q_k}, \quad k=0,1,2,3,\dots
\end{aligned}$$

Vidíme, že tento vzťah skutočne vyzerá rovnako ako vzťah z rovnice (1). Naša postupnosť $\{q_k\}_{k=0}^{\infty}$ teda vyhovuje rovnici (1), kde a, b, c, d sú také, že

$$ap = A\operatorname{cotg}\varphi+B, \tag{a}$$
$$bp = -1, \tag{b}$$
$$cp = A^2+B^2, \tag{c}$$
$$dp = A\operatorname{cotg}\varphi-B, \tag{d}$$

pre nejaké $p \neq 0$. My by sme to ale potrebovali naopak, vyjadriť A, B, φ pomocou a, b, c, d. To sa z tohto dá odvodiť tiež, ale len za istých podmienok. Je zrejmé, že ak $b=0$, tak sa to nedá.

Predpoklad 1.1: $b \neq 0$

Z (b) vyplýva $p = -\frac{1}{b}$ a ďalej odčítaním rovníc (a) a (d) dostaneme

$$B = \frac{(a-d)p}{2} = \frac{d-a}{2b}.$$

Teraz, ak do rovnice (c) dosadíme $p = -\frac{1}{b}$ a $B = \frac{d-a}{2b}$, tak dostaneme

$$c = -b(A^2 + B^2),$$

$$bA^2 = -c - bB^2 = -c - b\left(\tfrac{d-a}{2b}\right)^2 = \frac{-bc - \left(\frac{d-a}{2}\right)^2}{b} = \frac{ad - bc - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2}{b},$$

$$A = \frac{\sqrt{ad - bc - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2}}{b} \quad \text{alebo} \quad A = -\frac{\sqrt{ad - bc - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2}}{b}.$$

Pretože po dosadení $-\varphi$ za φ a $-A$ za A dostaneme tú istú postupnosť, môžeme napevno zvoliť napríklad prvú možnosť, a teda máme už vyjadrené

$$A = \frac{\sqrt{ad - bc - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2}}{b}, \quad B = \frac{d-a}{2b}, \quad p = -\frac{1}{b}. \tag{3}$$

Ešte zostáva vyjadriť φ. Do rovnice (a) dosadíme vyjadrenie (3) a máme

$$a = -Ab \operatorname{cotg} \varphi - Bb,$$

$$\operatorname{cotg} \varphi \sqrt{ad - bc - \left(\tfrac{a+d}{2}\right)^2} = -\tfrac{a+d}{2},$$

odkiaľ vyjadríme $\operatorname{cotg} \varphi$ za predpokladu, že $ad - bc - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 \neq 0$.

Predpoklad 1.2: $ad - bc - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 \neq 0$

Teraz sa zamyslime, či je nutné požadovať aj to, aby bol výraz pod odmocninou kladný. Odmocnina zo záporného čísla sa jednoducho napíše ako reálny násobok imaginárnej jednotky i. Ako ale potom nájdeme také číslo φ, ktorého kotangens je reálnym násobkom i? Dá sa to pomocou vzťahov

$$\operatorname{cotg}(\mathrm{i}\,x) = \mathrm{i} \operatorname{cotgh}(x) = \mathrm{i}\, \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}},$$

$$\operatorname{arccotg}(\mathrm{i}\,x) = \mathrm{i} \operatorname{argcotgh}(x) = \mathrm{i}\, \frac{1}{2} \ln \tfrac{x+1}{x-1}.$$

Podmienka na to, aby existoval $\operatorname{arccotg}(\mathrm{i}\,x)$, je $x \neq -1, x \neq 1$. Vidíme, že vtedy bude výraz $\frac{x+1}{x-1}$ definovaný a nenulový, a teda logaritmus bude existovať. Záporný argument v logaritme nás trápiť nemusí, keďže už sme sa zmierili s tým, že nám budú vychádzať aj komplexné čísla.

V našom prípade, ak by bolo $ad - bc - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 < 0$, máme

$$\varphi = \operatorname{arccotg} \frac{\mathrm{i}\, \frac{a+d}{2}}{\sqrt{\left(\frac{a+d}{2}\right)^2 - ad + bc}} = \mathrm{i}\, \tfrac{1}{2} \ln \frac{\frac{a+d}{2} + \sqrt{\left(\frac{a+d}{2}\right)^2 - ad + bc}}{\frac{a+d}{2} - \sqrt{\left(\frac{a+d}{2}\right)^2 - ad + bc}},$$

a tento výraz je definovaný, ak okrem $ad - bc - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 \neq 0$ je naviac splnená podmienka

$$\left|\tfrac{a+d}{2}\right| \neq \sqrt{\left(\tfrac{a+d}{2}\right)^2 - ad + bc},$$

čo je ekvivalentné s
$$ad - bc \neq 0. \tag{4}$$

Predpoklad 1.3: $ad - bc \neq 0$

Hodnoty A, B, φ už teda máme určené. Ešte sa pozrime, ako je to s číslom $\omega = \operatorname{arctg} \frac{q_0 - B}{A}$, ktoré síce vyzerá, že existuje vždy, ale pozor, argument arkus tangensu je
$$\frac{q_0 - B}{A} = \frac{q_0 - \frac{d-a}{2b}}{\frac{\sqrt{ad-bc-\left(\frac{a+d}{2}\right)^2}}{b}} = \frac{a + bq_0 - \frac{a+d}{2}}{\sqrt{ad - bc - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2}},$$
a to nemusí byť reálne číslo. Arkus tangens je definovaný pre všetky komplexné čísla okrem $-\mathrm{i}$ a i. Z toho dostaneme podmienku pre q_0 ako $q_0 \neq B \pm \mathrm{i}\,A$. Dá sa však ukázať, že ak $q_0 = B \pm \mathrm{i}\,A$, potom $\frac{c+dq_0}{a+bq_0} = q_0$, a teda ide o konštantnú postupnosť:
$$\frac{c + dq_0}{a + bq_0} = \frac{A^2 + B^2 + (A \operatorname{cotg} \varphi - B)q_0}{A \operatorname{cotg} \varphi + B - q_0} = \frac{A^2 + B^2 + (A \operatorname{cotg} \varphi - B)(B \pm \mathrm{i}\,A)}{A \operatorname{cotg} \varphi + B - (B \pm \mathrm{i}\,A)}$$
$$= B(\operatorname{cotg} \varphi \mp \mathrm{i}) + \frac{A(1 \pm \mathrm{i} \operatorname{cotg} \varphi)}{\operatorname{cotg} \varphi \mp \mathrm{i}} = B \pm \mathrm{i}\,A = q_0.$$

Predpoklad 1.4: $q_0 \neq B \pm \mathrm{i}\,A$

Na záver by ešte bolo vhodné odvodiť podmienku, kedy rekurentný vzťah (1) určuje nekonečnú postupnosť. Inými slovami, kedy sú členy takejto postupnosti definované pre všetky k. Argument tangensu musí splňovať
$$k\varphi + \omega \neq \tfrac{\pi}{2} + l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N},$$
čiže
$$q_0 \neq A \operatorname{tg}(\tfrac{\pi}{2} - k\varphi) + B = A \operatorname{cotg}(k\varphi) + B, \quad k \in \mathbb{N}.$$
Naše doterajšie zistenia teraz môžeme zhrnúť do tvrdenia.

Tvrdenie 1. *Uvažujme rekurentný vzťah*
$$q_{k+1} = \frac{c + dq_k}{a + bq_k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \tag{1}$$
a predpokladajme, že $b \neq 0$, $ad - bc - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 \neq 0$, $ad - bc \neq 0$, $q_0 \neq B \pm \mathrm{i}\,A$ *a*
$$q_0 \neq A \operatorname{cotg}(k\varphi) + B, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{5}$$
kde
$$A = \frac{\sqrt{ad-bc-\left(\frac{a+d}{2}\right)^2}}{b}, \quad B = \frac{d-a}{2b}, \quad \varphi = \operatorname{arccotg} \frac{-\frac{a+d}{2}}{\sqrt{ad-bc-\left(\frac{a+d}{2}\right)^2}}.$$
Potom vzťah (1) *definuje nekonečnú postupnosť* $\{q_k\}_{k=0}^{\infty}$, *ktorej členy sa dajú zapísať v tvare*
$$q_k = A \operatorname{tg}\left(k\varphi + \operatorname{arctg} \tfrac{q_0 - B}{A}\right) + B, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Keď už toto vieme, pozrieme sa teraz, kedy je takáto postupnosť periodická. Predpokladajme, že pre nejaké $n \geq 1$ platí $q_0 = q_n$, teda

$$\begin{gathered} A \operatorname{tg} \omega + B = A \operatorname{tg}(n\varphi + \omega) + B, \\ \operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg}(n\varphi + \omega). \end{gathered}$$

To nastane jedine v tom prípade, ak existuje $l \in \mathbb{Z}$, pre ktoré $n\varphi = l\pi$. Pre koeficienty a, b, c, d to znamená, že

$$\frac{-\frac{a+d}{2}}{\sqrt{ad - bc - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2}} = \operatorname{cotg} \frac{l\pi}{n}, \ l \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

K tomu treba pridať podmienku (5) pre q_0, ktorá nám zaručí, že členy $q_1, \ldots, q_{n-1}$ existujú, že nedôjde k deleniu nulou. Do nej môžeme dosadiť $\varphi = \frac{l\pi}{n}$. Dostaneme

$$q_0 \neq A \operatorname{cotg}\left(k \tfrac{l\pi}{n}\right) + B = \frac{\sqrt{ad - bc - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2}}{b} \operatorname{cotg} \tfrac{kl\pi}{n} + \tfrac{d-a}{2b}, \ k = 1, 2, \ldots n - 1.$$

Ak platí $ad - bc - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 < 0$, tak φ nie je reálne číslo, takže postupnosť vtedy určite nie je periodická. Až na jednu výnimku, ktorá sa dá ľahko prehliadnuť. Pokiaľ totiž vo vyjadrení čísla φ je čitateľ nulový, potom bez ohľadu na to, či menovateľ je reálny alebo nie, dostaneme $\varphi = \operatorname{arccotg} 0$, a teda $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Postupnosť je v takom prípade vždy periodická s periódou 2.

Príklad 2. *Majme napríklad rekurentný vzťah*

$$q_{k+1} = \frac{c + dq_k}{a + bq_k} = \frac{3 - q_k}{1 + q_k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Teda $a = b = -d = 1$, $c = 3$, $ad - bc = -4$, $ad - bc - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 = -4 < 0$, $A = 2\,\mathrm{i}$, $B = -1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\omega = \operatorname{arctg} \frac{q_0+1}{2\,\mathrm{i}}$. *Potom podľa Tvrdenia 1 tento rekurentný vzťah definuje postupnosť, ktorej členy sa dajú zapísať v tvare*

$$q_k = 2\,\mathrm{i} \operatorname{tg}\left(k\tfrac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \tfrac{q_0+1}{2\,\mathrm{i}}\right) - 1, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

pokiaľ $q_0 \neq A \operatorname{cotg}(\varphi) + B = B = -1$ *a* $q_0 \neq B \pm \mathrm{i}\, A$, *teda* $q_0 \neq -3$ *a* $q_0 \neq 1$.

Môžeme sa o tom presvedčiť. Keď do tohto vyjadrenia postupne dosadíme $k = 1$ *a* $k = 2$, *dostaneme*

$$\begin{aligned} q_1 &= 2\,\mathrm{i} \operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \tfrac{q_0+1}{2\,\mathrm{i}}\right) - 1 = 2\,\mathrm{i} \operatorname{cotg}\left(-\operatorname{arctg} \tfrac{q_0+1}{2\,\mathrm{i}}\right) - 1 \\ &= 2\,\mathrm{i} \tfrac{-2\,\mathrm{i}}{q_0+1} - 1 = \tfrac{3-q_0}{q_0+1}, \\ q_2 &= 2\,\mathrm{i} \operatorname{tg}\left(\pi + \operatorname{arctg} \tfrac{q_0+1}{2\,\mathrm{i}}\right) - 1 = 2\,\mathrm{i} \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \tfrac{q_0+1}{2\,\mathrm{i}}\right) - 1 = q_0. \end{aligned}$$

Pokiaľ $q_0 = B \pm \mathrm{i}\, A$, *teda* $q_0 = -3$ *alebo* $q_0 = 1$, *dostávame konštantnú postupnosť.*

Zostalo ešte určiť, či by postupnosť mohla byť periodická aj v prípadoch, keď $b = 0$ alebo $ad - bc = 0$ alebo $ad - bc - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 = 0$, o ktorých zatiaľ nič nevieme.

1.1. Prípad $b = 0$

Pokiaľ je $b = 0$, ide o postupnosť danú vzťahom

$$q_{k+1} = \frac{c}{a} + \frac{d}{a} q_k,$$

a dá sa ukázať, že táto postupnosť je periodická jedine ak je súčasne konštantná alebo ak $a = -d$ a teda ide o postupnosť $q_{k+1} = \frac{c}{a} - q_k$, ktorá má najmenšiu periódu 2. Prosím čitateľov, aby si toto už overili sami. Táto konkrétna postupnosť ale tiež spĺňa podmienku (6), pretože v tomto prípade je $a+d = 0$ a podmienka (6) je splnená pre $l = 1$, $n = 2$.

Naopak, ak je podmienka (6) splnená a súčasne $b = 0$, tak pod odmocninou nie je kladné číslo. Takže čitateľ musí byť nulový, z toho $a + d = 0$. Postupnosť je teda periodická a má najmenšiu periódu 2.

1.2. Prípad $ad - bc = 0$

Ak $ad - bc = 0$ a $b \neq 0$, tak

$$q_{k+1} = \frac{c + dq_k}{a + bq_k} = \frac{bc + bdq_k}{ba + b^2 q_k} = \frac{ad + bdq_k}{ba + b^2 q_k} = \frac{d}{b}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{7}$$

čiže postupnosť je periodická práve vtedy keď $q_0 = \frac{d}{b}$ a $a + d \neq 0$, a vtedy je konštantná.

V tomto prípade nemôže byť splnená podmienka (6) pre žiadne hodnoty a, b, c, d.

1.3. Prípad $ad - bc - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 = 0$

Pokiaľ je $ad - bc - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 = 0$, vyjadrenie k-teho člena postupnosti má úplne iný tvar. Tento tvar je možné tiež postupne aj uhádnuť, napríklad ak si vypíšeme konkrétne postupnosti s touto vlastnosťou.

Príklad 3. *Majme napríklad rekurentný vzťah*

$$q_{k+1} = \frac{1 + 5q_k}{1 - 4q_k}$$

so začiatočnou hodnotou $q_0 = 1$.

Teda $a = 1$, $b = -4$, $c = 1$, $d = 5$, $ad - bc = \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 = 9$. *Vypíšeme si prvých niekoľko členov postupnosti:*

$$\begin{aligned}\{q_k\}_{k=0}^{5} &= \left\{1, -2, -1, -\tfrac{4}{5}, -\tfrac{5}{7}, -\tfrac{2}{3}\right\}, \\ &= \left\{\tfrac{-1}{-1}, \tfrac{-2}{1}, \tfrac{-3}{3}, \tfrac{-4}{5}, \tfrac{-5}{7}, \tfrac{-6}{9}\right\}\end{aligned}$$

Z toho odhadneme, že by mohlo byť $q_k = \frac{-k-1}{2k-1}$.

Na základe tohto príkladu skúsime zistiť, či by všeobecne bolo možné vyjadriť q_k vzťahom $q_k = \frac{uk+v}{sk+t}$. Dosadením za $k = 0$ hneď dostaneme, že $q_0 = \frac{v}{t}$ a z toho

$t \neq 0, v = tq_0$. Môžeme položiť $t = 1$ a máme $q_k = \frac{uk+q_0}{sk+1}$. Teraz to dosadíme do rekurentného vzťahu (1) a porovnáme pravú a ľavú stranu

$$P = \frac{c + dq_k}{a + bq_k} = \frac{c + d\frac{uk+q_0}{sk+1}}{a + b\frac{uk+q_0}{sk+1}} = \frac{(cs + du)k + c + dq_0}{(as + bu)k + a + bq_0},$$
$$L = q_{k+1} = \frac{u(k+1) + q_0}{s(k+1) + 1} = \frac{uk + u + q_0}{sk + s + 1}.$$

Pravá a ľavá strana sa teda rovnajú, pokiaľ pre nejaké $p \neq 0$ platia vzťahy

$$\begin{aligned} cs + du &= pu, \\ as + bu &= ps, \\ c + dq_0 &= pu + pq_0, \\ a + bq_0 &= ps + p. \end{aligned}$$

Dá sa ukázať, že táto sústava má riešenie, ak platí $p = \frac{a+d}{2}$. Úpravy vedúce k riešeniu tu vynechám. Nakoniec dostaneme, že v tomto prípade je q_k tvaru

$$q_k = \frac{\left(\frac{d-a}{2}q_0 + c\right)k + \frac{a+d}{2}q_0}{\left(bq_0 + \frac{a-d}{2}\right)k + \frac{a+d}{2}}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

a z toho ľahko odvodíme podmienku, kedy je postupnosť periodická s periódou n,

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{d-a}{2}q_0 + c\right)n + \frac{a+d}{2}q_0}{\left(bq_0 + \frac{a-d}{2}\right)n + \frac{a+d}{2}} &= q_0, \\ \frac{d-a}{2}q_0 + c &= \left(bq_0 + \frac{a-d}{2}\right)q_0, \\ bq_0^2 + (a-d)q_0 - c &= 0, \\ q_0 &= \frac{d-a}{2}. \end{aligned}$$

Kvadratická rovnica má len toto jedno riešenie, pretože diskriminant je rovný $\left(\frac{a+d}{2}\right)^2 - ad + bc = 0$. Postupnosť je teda periodická, pokiaľ je $q_0 = \frac{d-a}{2}$ a výraz v menovateli $a + bq_0 \neq 0$. Každé n je vtedy periódou, postupnosť je teda konštantná. Nekonštantnú periodickú postupnosť v tomto prípade nedostaneme.

V tomto prípade nemôže byť splnená podmienka (6) pre žiadne hodnoty a, b, c, d.

1.4. Zhrnutie

Zistili sme teda, že v prípade nesplnenia niektorého z predpokladov 1.1–1.4 je postupnosť periodická jedine vtedy, keď je súčasne konštantná, okrem špeciálneho prípadu postupnosti $q_{k+1} = \frac{c}{a} - q_k$, ktorá má najmenšiu periódu 2. Táto konkrétna postupnosť ale tiež spĺňa podmienku (6). Takže podmienka (6) je nutnou podmienkou toho, aby naša postupnosť bola periodická a súčasne nekonštantná. Je to aj postačujúca podmienka? Ak je podmienka (6) splnená, potom určite je splnený aj predpoklad 1.2 a 1.3. A čo sa týka predpokladu 1.1, tak v prípade, že nie je splnený, platí $a + d = 0$ a ide tiež o periodickú postupnosť. Predpoklad 1.4 je splnený vždy, keď postupnosť nie je konštantná. Takže pokiaľ ide o nekonštantnú postupnosť, je podmienka (6) aj postačujúca.

Môžeme to zhrnúť do nasledovného tvrdenia.

Tvrdenie 2. *Uvažujme rekurentný vzťah*

$$q_{k+1} = \frac{c + dq_k}{a + bq_k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \tag{1}$$

a predpokladajme, že q_0 je také, že tento vzťah nedefinuje konštantnú postupnosť. Potom tento vzťah definuje periodickú postupnosť s periódou n práve vtedy, keď pre nejaké $l \in \mathbb{Z}$ platí

$$\frac{-\frac{a+d}{2}}{\sqrt{ad - bc - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2}} = \operatorname{cotg} \frac{l\pi}{n}$$

a

$$q_0 \neq \frac{\sqrt{ad - bc - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2}}{b} \operatorname{cotg} \frac{kl\pi}{n} + \frac{d-a}{2b}, \quad k = 1, 2, \dots n-1.$$

2. Rovnica (1) ako sústava

Teraz si ukážeme úplne iný postup riešenia, kde nebudeme až tak odkázaní na uhádnutie tvaru riešenia, ale zato sa nezaobídeme bez nejakých teoretických poznatkov. Namiesto jednej postupnosti $\{q_k\}_{k=0}^{\infty}$ uvažujme dve postupnosti $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ a $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ také, že $q_k = \frac{y_k}{x_k}$. Rovnicu (1) potom môžeme napísať ako

$$\frac{y_{k+1}}{x_{k+1}} = \frac{cx_k + dy_k}{ax_k + by_k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Môžeme dať do rovnosti čitatele aj menovatele v tejto rovnici a dostaneme, že ak dvojica postupností $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ a $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ je riešením sústavy

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= ax_k + by_k, \\ y_{k+1} &= cx_k + dy_k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \tag{8}$$

a všetky členy x_k sú nenulové, potom postupnosť $\{q_k\}_{k=0}^{\infty}$, kde $q_k = \frac{y_k}{x_k}$, je riešením rovnice (1).

Vyjasnime si ešte dôležitú vec. Platí to aj naopak. Pokiaľ postupnosť $\{q_k\}_{k=0}^{\infty}$ je riešením rovnice (1), potom existuje dvojica postupností $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ a $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$, ktorá je riešením sústavy (8) a všetky členy x_k sú nenulové. Tieto postupnosti sú definované vzťahmi

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (a + bq_k)x_k, \\ y_k &= q_k x_k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \tag{9}$$

a x_0 je ľubovoľné nenulové číslo.

3. Maticový tvar sústavy (8)

Komu matice nie sú veľmi po chuti, môže túto časť preskočiť. K vyriešeniu sústavy (8) matice nutne nepotrebujeme, ale získame tým nový pohľad na vec. Sústavu (8) môžeme zapísať v maticovom tvare.

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \tag{10}$$

a z toho

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \tag{11}$$

Máme teda riešenie sústavy (8) vyjadrené explicitne. Z toho síce veľmi nie je vidno, ako vyzerá postupnosť $\{q_k\}_{k=0}^{\infty}$, ale môžeme použiť tvrdenie, že ak sú postupnosti $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ a $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ periodické s rovnakou periódou, potom postupnosť $\{q_k\}_{k=0}^{\infty}$ je tiež periodická. A z vyjadrenia (11) vidíme, že to nastane práve vtedy, keď pre nejaké $n \in \mathbb{N}$ bude

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

a teda matica $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ je „n-tá odmocnina“ z matice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Toto vyzerá veľmi jednoducho, ale až tak jednoduché to nie je. Nie je to ani jednoznačné. Napríklad

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ale aj

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

takže to už máme dve rôzne „druhé odmocniny“ z jednotkovej matice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Pomôžeme si trochu poznatkami z teórie matíc. Sú známe rôzne užitočné rozklady matice na súčin špeciálnych matíc. Nám tu pomôže Jordanov rozklad matice. Keď máme ľubovoľnú štvorcovú maticu A s rozmermi 2×2, jej Jordanov rozklad je tvaru

$$A = QJQ^{-1},$$

kde matica $J = \left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & p \\ 0 & \lambda_2 \end{smallmatrix}\right)$ má na diagonále vlastné čísla matice A a matica Q^{-1} je inverzná k matici Q. (To znamená, že $QQ^{-1} = Q^{-1}Q = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.) Takýto Jordanov rozklad vždy existuje. Pokiaľ vlastné čísla matice A sú rôzne, v pravom hornom rohu matice J je 0. Pokiaľ sú rovnaké, v pravom hornom rohu matice J je 0 alebo 1. Ako presne sa určia hodnoty λ_1, λ_2 a matica Q, zatiaľ nebudeme riešiť. Zamerajme sa ďalej na prvú možnosť, teda predpokladajme, že vlastné čísla sú rôzne.

Predpoklad 3.1: $\boldsymbol{\lambda_1 \neq \lambda_2}$

Pokiaľ sa naša matica sústavy dá rozložiť tak, že matica $J = \left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{smallmatrix}\right)$, potom ľahko spočítame, že

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n = QJQ^{-1}QJQ^{-1} \cdots QJQ^{-1}QJQ^{-1} = QJ^nQ^{-1} = Q \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} Q^{-1},$$

a teda rovnicu (12) môžeme upraviť nasledovne

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n = Q \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$Q^{-1} Q \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} Q^{-1} Q = Q^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Q,$$
$$\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Z toho už hneď vidíme, že riešením sú také matice, ktorých vlastné čísla λ_1, λ_2 po umocnení na n-tú dajú jednotku. Ak by sme uvažovali len reálne čísla, je to číslo 1 a pre párne n aj číslo -1. Ak uvažujeme aj komplexné čísla, je to komplexná n-tá odmocnina z jednotky, čo sú čísla tvaru

$$\sqrt[n]{1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi l}{n}} = \cos\tfrac{2\pi l}{n} + \mathrm{i}\sin\tfrac{2\pi l}{n},\ l = 0, 1, \dots n-1.$$

Takže z toho vidíme, že to, ako vyzerá matica Q zo Jordanovho rozkladu, nám môže byť jedno, ale potrebujeme vedieť, aké sú vlastné čísla matice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Tie sa počítajú zo vzťahu

$$\det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

To nám dá kvadratickú rovnicu $\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$, ktorej riešenia sú

$$\lambda_{1,2} = \tfrac{a+d}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{a+d}{2}\right)^2 - ad + bc}.$$

Matice, ktoré spĺňajú rovnicu (12), sú teda také, že

$$\tfrac{a+d}{2} + \sqrt{\left(\tfrac{a+d}{2}\right)^2 - ad + bc} = \cos\tfrac{2\pi l}{n} + \mathrm{i}\sin\tfrac{2\pi l}{n} \quad \text{pre nejaké } l \in \{0, 1, \dots n-1\}.$$

To vyzerá, že bude splnené, jedine pokiaľ pod odmocninou bude záporné číslo (nula by nám dala rovnaké vlastné čísla). Potom dostaneme nasledovné vzťahy

$$\begin{aligned} \tfrac{a+d}{2} &= \cos\tfrac{2\pi l}{n}, \\ \sqrt{-\left(\tfrac{a+d}{2}\right)^2 + ad - bc} &= \sin\tfrac{2\pi l}{n} > 0 \quad \text{pre nejaké } l \in \{0, 1, \dots n-1\}. \end{aligned} \tag{13}$$

Ale pozor, je tu jedna výnimka. Skúste na ňu prísť sami. Nápoveda: Pozrite si príklad 2.

Zo vzťahov (13) dostaneme využitím známeho vzťahu $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ nasledovnú podmienku pre a, b, c, d:

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{a+d}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{a+d}{2}\right)^2 + ad - bc &= 1, \\ ad - bc &= 1. \end{aligned}$$

Rozdiel $ad - bc$ v skutočnosti ani nemusí byť rovný 1, stačí, ak je kladný. Môžeme totiž napísať

$$q_{k+1} = \frac{c + dq_k}{a + bq_k} = \frac{\frac{c}{\sqrt{ad-bc}} + \frac{d}{\sqrt{ad-bc}} q_k}{\frac{a}{\sqrt{ad-bc}} + \frac{b}{\sqrt{ad-bc}} q_k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \tag{14}$$

a namiesto matice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ máme maticu

$$\begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{ad-bc}} & \frac{b}{\sqrt{ad-bc}} \\ \frac{c}{\sqrt{ad-bc}} & \frac{d}{\sqrt{ad-bc}} \end{pmatrix},$$

ktorá spĺňa

$$\tilde{a}\tilde{d} - \tilde{b}\tilde{c} = \frac{ad}{(\sqrt{ad-bc})^2} - \frac{bc}{(\sqrt{ad-bc})^2} = 1.$$

Namiesto vzťahov (13) vtedy máme vzťahy

$$\frac{a+d}{2\sqrt{ad-bc}} = \cos\tfrac{2\pi l}{n},$$
$$\sqrt{1-\left(\frac{a+d}{2\sqrt{ad-bc}}\right)^2} = \sin\tfrac{2\pi l}{n} \neq 0, \quad \text{pre nejaké } l \in \{0,1,\dots n-1\}.$$

a dostávame tvrdenie.

Tvrdenie 3. *Uvažujme rekurentný vzťah*

$$q_{k+1} = \frac{c+dq_k}{a+bq_k}, \quad k = 0,1,2,3,\dots \tag{1}$$

a predpokladajme, že tento vzťah definuje nekonečnú postupnosť $\{q_k\}_{k=0}^{\infty}$. *Ak platí*

$$\frac{a+d}{2\sqrt{ad-bc}} = \cos\tfrac{2\pi l}{n} \neq \pm 1, \quad \textit{pre nejaké } n, l \in \mathbb{N}, \tag{15}$$

potom postupnosť $\{q_k\}_{k=0}^{\infty}$ *je periodická s periódou* n.

Príklad 4. *Majme znova postupnosť* $\{q_k\}_{k=0}^{\infty}$ *z príkladu 1,*

$$q_{k+1} = \frac{\sqrt{3}+q_k}{1-\sqrt{3}q_k}, \quad k = 0,1,2,3,\dots$$

teda $a = 1$, $b = -\sqrt{3}$, $c = \sqrt{3}$, $d = 1$. *Vidíme, že* $ad - bc = 4$, $\frac{a+d}{2\sqrt{ad-bc}} = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{6}\right)$. *Z Tvrdenia 3 dostávame záver, že táto postupnosť je periodická s periódou* 6.

To je pravda, ale my vieme, že má aj menšiu periódu. Kde je teda chyba? Nikde, len to znamená, že naše podmienky stále nie sú nutné. Postupnosť spĺňajúca podmienku (15) môže mať aj menšiu periódu, než je najmenšie n, pre ktoré platí rovnosť. A ďalej, stále ešte sme nezisťovali, či môže byť periodická aj v prípade, keď vlastné čísla matice sústavy sú rovnaké a v prípade, keď postupnosti $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ a $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ s ňou spojené nie sú periodické s rovnakou periódou.

Na tieto ďalšie zistenia už budeme potrebovať vedieť presný tvar riešenia (11). Mohli by sme ho zistiť aj tak, že by sme určili maticu Q zo Jordanovho rozkladu matice sústavy. Ale na to je treba ešte viac poznatkov z teórie matíc. Kto chce a vie ako na to, nech si to týmto spôsobom odvodí sám.

4. Riešenie sústavy (8) a rovnice (1)

Poďme teraz riešiť sústavu

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= ax_k + by_k, \\ y_{k+1} &= cx_k + dy_k, \qquad k = 0,1,2,3,\dots \end{aligned} \tag{8}$$

bez použitia matíc. Vyriešime ju napríklad tak, že z prvej rovnice vyjadríme y_k a dosadíme do druhej. To sa dá za predpokladu, že $b \neq 0$. Prípad, keď $b = 0$, je rozobratý v časti 1.1.

Predpoklad 4.1: $b \neq 0$

Dostaneme

$$\frac{x_{k+1} - ax_k}{b} = y_k, \qquad k = 0,1,2,3,\dots$$

$$\frac{x_{k+2} - ax_{k+1}}{b} = y_{k+1}, \qquad k = 0,1,2,3,\dots$$

$$\frac{x_{k+2} - ax_{k+1}}{b} = cx_k + d\frac{x_{k+1} - ax_k}{b}, \qquad k = 0,1,2,3,\dots$$

$$x_{k+2} - (a+d)x_{k+1} + (ad - bc)x_k = 0, \qquad k = 0,1,2,3,\dots \tag{16}$$

Dostali sme sa k diferenčnej rovnici (16), kde už je len jedna neznáma, a vyskytuje sa tam lineárna kombinácia troch po sebe idúcich členov tejto postupnosti.

Takéto rovnice majú (okrem triviálneho riešenia $x_k = 0$) riešenie v tvare $x_k = \lambda^k$, kde λ je nejaké reálne, prípadne komplexné číslo. Že je to práve tento tvar, sa vie. Kto to nevie, asi by sa chvíľu potrápil, kým by na to prišiel. Keď už ale o tom vieme, nie je ťažké si to dosadením overiť a zistiť, pre akú hodnotu λ to vyjde.

Po dosadení dostaneme

$$\lambda^{k+2} - (a+d)\lambda^{k+1} + (ad - bc)\lambda^k = 0, \qquad k = 0,1,2,3,\dots$$

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \tfrac{a+d}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{a+d}{2}\right)^2 - ad + bc}. \tag{17}$$

Že to vyšli rovnaké čísla, ako sú vlastné čísla matice sústavy (10), nie je žiadna náhoda.

Riešením rovnice (16) je teda postupnosť $\left\{\lambda_1^k\right\}_{k=0}^{\infty}$, aj postupnosť $\left\{\lambda_2^k\right\}_{k=0}^{\infty}$ a aj každá postupnosť $\left\{u\lambda_1^k + v\lambda_2^k\right\}_{k=0}^{\infty}$, kde u, v sú ľubovoľné komplexné čísla. O tom sa dá ľahko presvedčiť dosadením. (V prípade, že vyjde $\lambda_1 = \lambda_2$, sú ešte ďalšie tvary riešení, ale tie si zatiaľ nebudeme všímať.) Vieme, že čísla $\lambda_{1,2}$ nemusia vyjsť vždy reálne, a takisto aj čísla u, v neobmedzíme len na reálne. Dajú sa zvoliť tak, aby všetky členy postupnosti $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ už reálne boli. Ukážeme si to na našom konkrétnom príklade.

Príklad 5. *Majme znova postupnosť $\{q_k\}_{k=0}^{\infty}$ z príkladu 1,*

$$q_{k+1} = \frac{\sqrt{3} + q_k}{1 - \sqrt{3}q_k}, \qquad k = 0,1,2,3,\dots$$

teda $a = 1$, $b = -\sqrt{3}$, $c = \sqrt{3}$, $d = 1$. *Takže* $ad - bc = 4$, $\frac{a+d}{2} = 1$, $\lambda_{1,2} = 1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}$ *a dostaneme tvar riešenia*

$$\begin{aligned} x_k &= u\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)^k + v\left(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right)^k = u\,2^k\left(\tfrac{1}{2} + \mathrm{i}\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^k + v\,2^k\left(\tfrac{1}{2} - \mathrm{i}\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^k \\ &= u\,2^k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{3}} + v\,2^k\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k\pi}{3}} = u\,2^k\left(\cos\tfrac{k\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\tfrac{k\pi}{3}\right) + v\,2^k\left(\cos\tfrac{k\pi}{3} - \mathrm{i}\sin\tfrac{k\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

A z toho vidno, že pre $u = \frac{\tilde{u} - \mathrm{i}\,\tilde{v}}{2}$ *a* $v = \frac{\tilde{u} + \mathrm{i}\,\tilde{v}}{2}$ *dostaneme riešenie*

$$x_k = 2^k\left(\tilde{u}\cos\tfrac{k\pi}{3} + \tilde{v}\sin\tfrac{k\pi}{3}\right), \tag{18}$$

ktoré už je reálne.

Keď vieme tvar riešenia rovnice (16), môžeme už z toho určiť aj riešenie rovnice (1), q_k. To získame zo vzťahu (9) ako

$$q_k = \frac{\frac{x_{k+1} - a x_k}{b}}{x_k} = \frac{x_{k+1}}{b x_k} - \frac{a}{b} = \frac{u\lambda_1^{k+1} + v\lambda_2^{k+1}}{bu\lambda_1^k + bv\lambda_2^k} - \frac{a}{b}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \tag{19}$$

Už to je takmer ten hľadaný tvar riešenia, ale ešte tam v tom vyjadrení sú čísla u, v namiesto q_0. Mohlo by to síce vyzerať, že ich konkrétna hodnota nás nemusí zaujímať, lebo to, či je postupnosť periodická, by už z tohto malo byť vidno, ale my sme zatiaľ len zistili, že riešenia rovnice (1) môžu mať takýto tvar. Mali by sme ešte overiť, že nech začneme z akéhokoľvek q_0, ďalšie členy už bude tento vzťah popisovať pre nejaké konkrétne u, v.

Vzťah medzi u, v a q_0 získame, keď za k dosadíme v tomto vyjadrení nulu. Potom máme

$$q_0 = \frac{u\lambda_1 + v\lambda_2}{b(u+v)} - \frac{a}{b}. \tag{20}$$

Vidíme, že pokiaľ vzťah platí pre nejakú dvojicu u, v, platí aj pre jej ľubovoľný nenulový násobok. Môžeme teda zvoliť u, v napríklad také, že $u + v = 1$. Potom z rovnice (20) dostaneme

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{u\lambda_1 + (1-u)\lambda_2}{b} - \frac{a}{b}, \\ a + bq_0 - \lambda_2 &= u(\lambda_1 - \lambda_2). \end{aligned} \tag{21}$$

A tu vidíme, že môže nastať problém. Pokiaľ by $\lambda_1 = \lambda_2$, potom by to platilo len pre jedno konkrétne $q_0 = \frac{\lambda_2 - a}{b}$. Najskôr dokončíme úvahy pre prípad $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Predpoklad 4.2: $\boldsymbol{\lambda_1 \neq \lambda_2}$

Vtedy z rovnice (21) a z toho, že $u + v = 1$ vypočítame

$$u = \frac{a + bq_0 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \qquad v = \frac{a + bq_0 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

čo už stačí dosadiť do vzťahu (19) a dostaneme výsledný tvar riešenia.

Zostáva ešte určiť podmienky pre q_0. Vo vzťahu (19) musí byť menovateľ nenulový pre každé k. Dostaneme

$$bu\lambda_1^k + bv\lambda_2^k \neq 0,$$

$$(a+bq_0-\lambda_2)\lambda_1^k \neq (a+bq_0-\lambda_1)\lambda_2^k, \quad k=0,1,2,3,\dots$$
$$(a+bq_0)(\lambda_1^k-\lambda_2^k) \neq \lambda_2\lambda_1^k-\lambda_1\lambda_2^k, \quad k=0,1,2,3,\dots$$

Zhrňme naše doterajšie zistenia opäť do tvrdenia.

Tvrdenie 4. *Uvažujme rekurentný vzťah*

$$q_{k+1}=\frac{c+dq_k}{a+bq_k}, \quad k=0,1,2,3,\dots \tag{1}$$

a označme $\lambda_{1,2}=\frac{a+d}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a+d}{2}\right)^2-ad+bc}$. *Ak* $b\neq 0$ *a* $\lambda_1\neq\lambda_2$ *a*

$$(a+bq_0)(\lambda_1^k-\lambda_2^k) \neq \lambda_2\lambda_1^k-\lambda_1\lambda_2^k, \quad k=0,1,2,3,\dots, \tag{22}$$

potom vzťah (1) *definuje nekonečnú postupnosť* $\{q_k\}_{k=0}^{\infty}$, *ktorej členy sa dajú zapísať v tvare*

$$q_k=\frac{(a+bq_0-\lambda_2)\lambda_1^{k+1}-(a+bq_0-\lambda_1)\lambda_2^{k+1}}{b(a+bq_0-\lambda_2)\lambda_1^k-b(a+bq_0-\lambda_1)\lambda_2^k}-\frac{a}{b}, \quad k=1,2,3,\dots \tag{23}$$

Teraz zistíme, kedy je naša postupnosť periodická. Predpokladajme, že pre nejaké $k=n\geq 1$ platí $q_0=q_n$ a dosaďme to do vzťahu (23). Úpravami dostaneme

$$q_0=\frac{(a+bq_0-\lambda_2)\lambda_1^{n+1}-(a+bq_0-\lambda_1)\lambda_2^{n+1}}{b(a+bq_0-\lambda_2)\lambda_1^n-b(a+bq_0-\lambda_1)\lambda_2^n}-\frac{a}{b},$$
$$a+bq_0=\frac{(a+bq_0-\lambda_2)\lambda_1^{n+1}-(a+bq_0-\lambda_1)\lambda_2^{n+1}}{(a+bq_0-\lambda_2)\lambda_1^n-(a+bq_0-\lambda_1)\lambda_2^n},$$
$$(a+bq_0)(a+bq_0-\lambda_2)\lambda_1^n$$
$$-(a+bq_0)(a+bq_0-\lambda_1)\lambda_2^n=(a+bq_0-\lambda_2)\lambda_1^{n+1}-(a+bq_0-\lambda_1)\lambda_2^{n+1},$$
$$0=(a+bq_0-\lambda_1)(a+bq_0-\lambda_2)(\lambda_1^n-\lambda_2^n).$$

Vidíme, že postupnosť je konštantná, pokiaľ $a+bq_0=\lambda_1$ alebo $a+bq_0=\lambda_2$ a periodická a súčasne nekonštantná je práve vtedy, keď

$$\lambda_1^n=\lambda_2^n \quad \text{pre nejaké } n\geq 2. \tag{24}$$

Tu vidno, prečo nám vyšla v našom príklade pomocou predchádzajúceho maticového postupu len perióda 6, aj keď existuje aj perióda 3. V skutočnosti totiž nemusí byť $\lambda_1^n=\lambda_2^n=1$, stačí, aby bol ich podiel rovný jednej. Predpokladali sme, že $\lambda_1\neq\lambda_2$. Takže aby platilo $\lambda_1^n=\lambda_2^n$, tak buď $\lambda_1=-\lambda_2$ alebo sú to komplexné čísla.

Ak je $\lambda_1=-\lambda_2$, ide o špeciálny prípad, ktorý nastane, pokiaľ $\frac{a+d}{2}=0$. Najmenšia perióda je vtedy 2. Na tento typ špeciálneho prípadu sme natrafili aj v prvej časti a je tam k tomu uvedený príklad 2.

Ak sú λ_1, λ_2 komplexné čísla, potom je z ich tvaru jasné, že sú komplexne združené a dajú sa teda zapísať ako $\lambda_{1,2}=r(\cos\varphi\pm \mathrm{i}\sin\varphi)=r\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\varphi}$. Z toho dostávame, že

$$(\lambda_{1,2})^n=r^n\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}n\varphi}=r^n\left[\cos(n\varphi)\pm\mathrm{i}\sin(n\varphi)\right]$$

a

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^n = \mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,n\varphi} = \cos(2n\varphi) + \mathrm{i}\sin(2n\varphi).$$

Teda vidíme, že postupnosť bude mať vždy aj polovičnú periódu z periódy, ktorá vyjde z podmienky (15).

Ešte predtým, než sa pozrieme na prípad, keď je $\lambda_1 = \lambda_2$, zamyslime sa nad tým, ako je možné, že nám tvar riešenia (23) vyšiel tak nepekne, keď v konkrétnom príklade 1 vyšiel tvar riešenia

$$q_k = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}(q_0) + k\tfrac{\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

a aj v iných prípadoch očakávame, že to bude posunutý tangens?

Ukážeme si, ako sa k tomu tvaru s tangensom dá dostať, na našom konkrétnom príklade.

Príklad 6 (Pokračovanie príkladu 5)**.** *Už sme zistili v príklade 5, že riešenie rovnice* (16) *je v tomto prípade možné napísať ako*

$$x_k = 2^k\left(\tilde{u}\cos\tfrac{k\pi}{3} + \tilde{v}\sin\tfrac{k\pi}{3}\right), \tag{18}$$

a toto môžeme dosadiť do (19)*. Dostaneme*

$$\begin{aligned} q_k &= \frac{2^{k+1}\left(\tilde{u}\cos\frac{(k+1)\pi}{3} + \tilde{v}\sin\frac{(k+1)\pi}{3}\right)}{-\sqrt{3}\,2^k\left(\tilde{u}\cos\frac{k\pi}{3} + \tilde{v}\sin\frac{k\pi}{3}\right)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{2\left(\tilde{u}\cos\frac{k\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} - \tilde{u}\sin\frac{k\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3} + \tilde{v}\sin\frac{k\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} + \tilde{v}\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{k\pi}{3}\right)}{-\sqrt{3}\left(\tilde{u}\cos\frac{k\pi}{3} + \tilde{v}\sin\frac{k\pi}{3}\right)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\tilde{v}\sqrt{3} - \tilde{u}\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{k\pi}{3}}{-\sqrt{3}\left(\tilde{u} + \tilde{v}\operatorname{tg}\frac{k\pi}{3}\right)} \qquad k = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Teraz určíme čísla $\tilde{u}, \tilde{v}$ tak, aby sme pre $k = 0$ dostali q_0.

$$q_0 = \frac{\tilde{v}\sqrt{3}}{-\sqrt{3}\tilde{u}} = \frac{-\tilde{v}}{\tilde{u}},$$

takže môžeme položiť $\tilde{u} = 1, \tilde{v} = -q_0$. Vrátime sa k výrazu pre q_k a dosadíme to tam. Dostaneme

$$q_k = \frac{q_0 + \operatorname{tg}\frac{k\pi}{3}}{1 - q_0\operatorname{tg}\frac{k\pi}{3}} = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}(q_0) + k\tfrac{\pi}{3}\right), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Podobne by sa tento tvar dal odvodiť aj všeobecne. Nebudeme si to tu už ukazovať, postup by bol analogický a výsledok už poznáme.

4.1. Prípad $\lambda_1 = \lambda_2$

Teraz zostáva vyšetriť možnosť, keď $\lambda_1 = \lambda_2$. Ako budú potom vyzerať riešenia rovnice (1)? Určite nebudú môcť mať tvar (19), jedine ak by $q_0 = \frac{\lambda_2 - a}{b}$. Zo vzťahu (17) dostaneme, že ak $\lambda_1 = \lambda_2$, potom je

$$ad - bc = \left(\tfrac{a+d}{2}\right)^2 \geq 0.$$

Ak by nastala rovnosť, $ad - bc = 0$ a z toho (stále máme aj predpoklad, že $b \neq 0$) dostávame, že ide o konštantnú postupnosť, viď (7).

Ďalej ak je $ad - bc > 0$, môžeme predpokladať, že $ad - bc = 1$. Inak by sme rovnicu (1) upravili ako v (14). Stačí teda už len vyšetriť prípad, keď je $ad - bc = 1$ a $a + d = \pm 2$. Rovnica (16) vtedy bude

$$x_{k+2} \pm 2x_{k+1} + x_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Rozoberme postupne obe možnosti. V prvom prípade po úprave máme rovnicu

$$x_{k+2} - x_{k+1} = x_{k+1} - x_k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

čiže rozdiel dvoch po sebe idúcich členov je konštantný a teda vzťah pre k-ty člen je

$$x_k = x_0 + k(x_1 - x_0), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Potom

$$\begin{aligned} q_k &= \frac{x_{k+1}}{bx_k} - \frac{a}{b} = \frac{x_0 + (k+1)(x_1 - x_0)}{b(x_0 + k(x_1 - x_0))} - \frac{a}{b} \\ &= \frac{x_1 - x_0}{b(x_0 + k(x_1 - x_0))} + \frac{1-a}{b}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Z toho už vidíme, že táto postupnosť je periodická jedine ak $x_1 = x_0$ a vtedy je konštantná, $q_0 = q_k = \frac{1-a}{b}$.

V druhom prípade po úprave máme rovnicu

$$x_{k+2} + x_{k+1} = -(x_{k+1} + x_k), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

z čoho je možné odvodiť (alebo odhadnúť a overiť dosadením) vzťah pre k-ty člen, ktorý je

$$x_k = (-1)^k(x_0 - k(x_0 + x_1)), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Potom

$$\begin{aligned} q_k &= \frac{(-1)^{k+1}(x_0 - (k+1)(x_0 + x_1))}{b(-1)^k(x_0 - k(x_0 + x_1))} - \frac{a}{b} \\ &= \frac{x_0 + x_1}{b(x_0 - k(x_0 + x_1))} - \frac{1+a}{b}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Z toho už vidíme, že táto postupnosť je periodická jedine ak $x_1 = -x_0$ a vtedy je konštantná, $q_0 = q_k = \frac{-1-a}{b}$.

4.2. Zhrnutie

Teraz vyhodnotíme, či je podmienka (24) spolu s podmienkou (22) nutná a postačujúca na to, aby naša postupnosť bola periodická v prípade, že je nekonštantná. Za predpokladu 4.1 a 4.2 sme to už ukázali.

Ak nie je splnený predpoklad 4.1, teda $b = 0$, potom je postupnosť periodická jedine vtedy, keď je súčasne konštantná, okrem špeciálneho prípadu, keď $a+d = 0$. V tomto prípade je ale $\lambda_{1,2} = \pm a$, takže $\lambda_1^2 = \lambda_2^2$ a podmienka (24) je splnená pre $n = 2$.

Ak nie je splnený predpoklad 4.2, teda $\lambda_1 = \lambda_2$, je postupnosť periodická jedine vtedy, keď je súčasne konštantná.

Naopak, ak sú splnené podmienky (24),(22), potom je splnený aj predpoklad 4.2. A čo sa týka predpokladu 4.1, ak $b = 0$, potom $\lambda_1 = a$ a $\lambda_2 = d$, takže podmienka (24) nám dá $a = -d$ a postupnosť teda je periodická.

Teraz si to opäť celé zhrnieme do tvrdenia.

Tvrdenie 5. *Uvažujme rekurentný vzťah*

$$q_{k+1} = \frac{c + dq_k}{a + bq_k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \tag{1}$$

a predpokladajme, že q_0 je také, že tento vzťah nedefinuje konštantnú postupnosť. Potom tento vzťah definuje periodickú postupnosť s periódou n práve vtedy, keď

$$\lambda_1^n = \lambda_2^n$$

a

$$(a + bq_0)(\lambda_1^k - \lambda_2^k) \neq \lambda_2\lambda_1^k - \lambda_1\lambda_2^k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n-1,$$

kde $\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+d}{2}\right)^2 - ad + bc}$.

5. Záver

Rovnicu

$$q_{k+1} = \frac{c + dq_k}{a + bq_k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \tag{1}$$

sme postupne riešili troma prístupmi. Prvý postup bol najmenej teoretický, ale bolo tam nutné podľa konkrétneho príkladu dopredu odhadnúť tvar riešenia a nevyhli sme sa tam ani práci s komplexnými číslami.

V druhom postupe sa využívala teória matíc. Kto ju pozná, pravdepodobne by týmto spôsobom rýchle došiel k správnemu výsledku.

V treťom postupe sme riešili diferenčné rovnice, u ktorých sa dalo aj bez znalosti ich teórie nejak dopracovať k riešeniam, ale ak niekto teóriu pozná, má aj tu dosť veľkú výhodu. Týmto postupom sme to dotiahli až do konca a rozobrali všetky možnosti, ale výsledný všeobecný tvar riešenia bol dosť neprehľadný a vystupovali v ňom komplexné čísla. Jeho ďalšie úpravy by boli ešte možné, ale už sme sa nimi nezaoberali.

Vo všetkých postupoch sme sa rôznymi spôsobmi dopracovali k vetveniu – raz to bolo delenie nenulovým výrazom, raz to boli rôzne alebo rovnaké vlastné čísla matice, raz nenulový alebo nulový diskriminant, vždy ale išlo o tú istú podmienku pre koeficienty a, b, c, d:

$$ad - bc \neq \left(\tfrac{a+d}{2}\right)^2 \quad \text{alebo} \quad ad - bc = \left(\tfrac{a+d}{2}\right)^2.$$

Ukázalo sa, že periodické nekonštantné riešenie môžeme dostať len v prvom prípade a zistili sme, že vtedy sa v explicitnom tvare riešenia objavujú goniometrické funkcie. Tento explicitný tvar riešenia je uvedený v Tvrdení 1 a jeho zápis pomocou vlastných čísiel je v Tvrdení 4. V prípade, že ide o nekonštantnú postupnosť, sme odvodili nutná a postačujúcu podmienka na to, aby táto postupnosť bola periodická. Je uvedená v Tvrdení 2 a v inom tvare aj v Tvrdení 5. Či je to určite tá istá podmienka, len inak zapísaná, už nech si každý premyslí sám. Postačujúca podmienka je uvedená aj v Tvrdení 3. Vo všetkých troch prípadoch vidno, že dôležitá je hodnota

$$\frac{a+d}{2\sqrt{ad-bc}}.$$

Je zrejmé, že namiesto koeficientov a, b, c, d môžeme uvažovať ich ľubovoľné nenulové násobky a dostaneme tú istú postupnosť. Z našich úvah vyplynulo, že by bolo výhodné uvažovať také koeficienty, pre ktoré platí $ad - bc = 1$. To je možné dosiahnuť úpravou uvedenou v (14), pokiaľ pre pôvodné koeficienty platí $ad - bc \neq 0$.

Viera Štoudková Růžičková, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: ruzickova@fme.vutbr.cz