FLOQUETOVA TEORIE PRO LINEÁRNÍ OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 2. ŘÁDU S PERIODICKÝMI KOEFICIENTY I

JIŘÍ ŠREMR

ABSTRAKT. Článek má za cíl seznámit čtenáře se základy Floquetovy teorie pro lineární diferenciální rovnice 2. řádu s periodickými koeficienty. Zavedeme základní pojmy této teorie (zejména pojem Floquetova multiplikátoru), přičemž využijeme postup popsaný v monografii [2]. Dále ukážeme, v jakém tvaru můžeme najít fundamentální systém řešení studované rovnice určený Floquetovými multiplikátory a jak lze tuto informaci použít v otázce existence kmitů volného lineárního oscilátoru s nekonstantními tlumícími a tuhostními koeficienty, které se zcela utlumí při $t \to +\infty$.

1. ODVOZENÍ CHARAKTERISTICKÉ ROVNICE, FLOQUETOVY MULTIPLIKÁTORY

Floquetova teorie pro diferenciální rovnice vyšších řádů a její použití v otázce stability diferenciálních rovnic patří do pokročilejších partií kvalitativní teorie diferenciálních rovnic. V běžné literatuře je obvykle vybudována pro lineární soustavy diferenciálních rovnic s periodickou maticovou funkcí a poté jsou odvozeny důsledky pro lineární diferenciální rovnice vyšších řádů. My zde však použijeme alternativní postup, který je popsán například v monografii [2, Hlava VI, §1], a vybudujeme základy Floquetovy teorie přímo pro lineární diferenciální rovnice vyšších řádů. Navíc se zde z důvodu jednodušších formulací a lepší pochopitelnosti pojmů omezíme na diferenciální rovnice 2. řádu.

Uvažujme tedy diferenciální rovnici

$$x'' + g(t)x' + p(t)x = 0, \tag{1.1}$$

v níž jsou koeficienty $p, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lokálně lebesgueovsky integrovatelné ω-periodické funkce. Řešením rovnice (1.1) rozumíme funkci $x \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je absolutně spojitá spolu se svou derivaci na každém kompaktním intervalu v $\mathbb{R}$ a která po dosazení splňuje rovnost (1.1) skoro všude v $\mathbb{R}$. Čtenáři, kteří nejsou zvyklí pracovat s rovnicemi s integrovatelnými koeficienty, mohou bez problémů uvažovat koeficienty g a p spojité a řešení uvažovat ve třídě funkcí se spojitou 2. derivací.

Nejprve si všimněme, že předpoklad ω-periodičnosti koeficientů g a p je podmínkou nutnou pro existenci ω-periodického řešení rovnice (1.1), nikoliv však

---

2020 *MSC.* Primární 34A30; Sekundární 34D05, 34C25.
Klíčová slova. Diferenciální rovnice 2. řádu, Floquetova teorie.

postačující. Následující příklady ukazují, že prostor všech ω-periodických řešení rovnice (1.1) může být jak nulový, tak jedno či dvoudimenzionální.

Příklad 1.1. Fundamentální systém řešení diferenciální rovnice

$$x'' + x' - 2x = 0 \tag{1.2}$$

tvoří funkce $x_1(t) = \mathrm{e}^t$ a $x_2(t) = \mathrm{e}^{-2t}$, a proto rovnice (1.2) nemá žádné netriviální periodické řešení. To však znamená, že pro libovolné $\omega > 0$ je prostor všech ω-periodických řešení rovnice (1.2) nulový.

Poznámka 1.2. V předchozím příkladu jsme uvažovali diferenciální rovnici s konstantními koeficienty. Není však složité sestrojit také příklad rovnice s nekonstantními – avšak ω-periodickými – koeficienty takové, že prostor všech jejích ω-periodických řešení je nulový. Je totiž možné dokázat následující tvrzení: Jestliže koeficient p v rovnici (1.1) splňuje podmínku

$$p(t) \le 0 \quad \text{pro s. v. } t \in [0, \omega], \qquad p(t) \not\equiv 0,$$

pak má tato rovnice kladná lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 taková, že

$$\lim_{t\to-\infty} x_1(t) = 0, \qquad \lim_{t\to+\infty} x_1(t) = +\infty,$$
$$\lim_{t\to-\infty} x_2(t) = +\infty, \qquad \lim_{t\to+\infty} x_2(t) = 0,$$

a nemá tedy žádné netriviální ω-periodické řešení.

Příklad 1.3. Mějme $\omega = 2\pi$ a uvažujme diferenciální rovnici

$$x'' + \frac{\sin t}{2 + \sin t}\, x = 0. \tag{1.3}$$

Tato rovnice má řešení $x_1(t) = 2 + \sin t$, které je zřejmě ω-periodické. Najdeme řešení x_2 rovnice (1.3) lineárně nezávislé s x_1. Všimněme si, že každé řešení x rovnice (1.3) splňuje

$$\begin{aligned} W[x_1, x](t) = \det \begin{pmatrix} x_1(t) & x(t) \\ x_1'(t) & x'(t) \end{pmatrix} &= x_1(t)x'(t) - x(t)x_1'(t) \\ &= (2 + \sin t)x'(t) - x(t)\cos t \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

kde $W[x_1, x]$ je wronskián řešení x_1, x, a navíc platí

$$W[x_1, x](t) = W[x_1, x](0) = 2x'(0) - x(0) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R},$$

což vyplývá z důsledku Liouvilleovy formule pro diferenciální rovnice vyšších řádů (viz např. [1, Kapitola III, sekce 2]). Označme x_2 řešení diferenciální rovnice (1.3) splňující počáteční podmínky

$$x_2(0) = 0, \qquad x_2'(0) = \frac{1}{2}\,.$$

Z výše uvedených vztahů dostáváme

$$W[x_1, x_2](t) = 1 \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}$$

a

$$(2 + \sin t)x_2'(t) - x_2(t)\cos t = 1 \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

To však znamená, že řešení x_2 rovnice (1.3) je lineárně nezávislé s x_1 a navíc je x_2 řešením lineární diferenciální rovnice 1. řádu

$$y' = \frac{\cos t}{2+\sin t}\, y + \frac{1}{2+\sin t}\,.$$

Obecné řešení této rovnice je tvaru

$$y(t) = \left(c + \int_0^t \frac{1}{(2+\sin s)^2}\,\mathrm{d}s\right)(2+\sin t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}$$

a námi hledané řešení x_2 získáme v tomto systému funkcí volbou $c = 0$.

Našli jsme tak fundamentální systém řešení rovnice (1.3) tvaru

$$x_1(t) = 2 + \sin t, \qquad x_2(t) = (2+\sin t)\int_0^t \frac{1}{(2+\sin s)^2}\,\mathrm{d}s.$$

Přímým výpočtem zjistíme, že

$$\begin{aligned} x_2(t+\omega) &= \big(2+\sin(t+2\pi)\big)\int_0^{t+2\pi} \frac{1}{(2+\sin s)^2}\,\mathrm{d}s \\ &= (2+\sin t)\int_0^{t+2\pi} \frac{1}{(2+\sin s)^2}\,\mathrm{d}s \\ &= x_2(t) + x_1(t)\int_t^{t+2\pi} \frac{1}{(2+\sin s)^2}\,\mathrm{d}s \\ &= x_2(t) + x_1(t)\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\sin s)^2}\,\mathrm{d}s \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

tedy řešení x_2 není ω-periodické. Odtud vyplývá, že prostor všech ω-periodických řešení rovnice (1.3) je jednodimenzionální.

Příklad 1.4. Pro $\omega > 0$ uvažujme diferenciální rovnici

$$x'' + \frac{4\pi^2}{\omega^2}\, x = 0. \tag{1.5}$$

Fundamentální systém řešení této rovnice je tvaru $x_1(t) = \cos\left(\frac{2\pi t}{\omega}\right)$, $x_2(t) = \sin\left(\frac{2\pi t}{\omega}\right)$, a proto je každé její řešení ω-periodické. To však znamená, že prostor všech ω-periodických řešení rovnice (1.5) je dvoudimenzionální.

V příkladu 1.1 vidíme, že lineární diferenciální rovnice s ω-periodickými koeficienty nemusí mít žádná netriviální ω-periodická řešení. Pro dané $\omega > 0$ má však rovnice (1.2) lineárně nezávislá řešení x_1, x_2, která místo ω-periodicity splňují podmínky

$$x_1(t+\omega) = \mathrm{e}^{\omega}\, x_1(t), \quad x_2(t+\omega) = \mathrm{e}^{-2\omega}\, x_2(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

Uvažujme proto otázku existence netriviálního řešení rovnice (1.1) splňujícího podmínku

$$x(t+\omega) = \varrho x(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \tag{1.6}$$

kde $\varrho \in \mathbb{C}$. V případě $\varrho \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ samozřejmě uvažujeme komplexní řešení diferenciální rovnice (1.1), v níž jsou však koeficienty funkce reálné. Všimněme si, že otázka existence ω-periodického řešení rovnice (1.1) je zahrnuta v úloze (1.1), (1.6), v níž $\varrho = 1$.

Nechť x_1, x_2 je reálný fundamentální sytém řešení rovnice (1.1). Jelikož jsou koeficienty p, g periodické s periodou ω, funkce

$$y_1(t) := x_1(t+\omega), \quad y_2(t) := x_2(t+\omega) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R} \tag{1.7}$$

jsou také řešení rovnice (1.1), a proto je lze vyjádřit jako lineární kombinace

$$y_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t), \quad y_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \tag{1.8}$$

kde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$ jsou vhodné konstanty. Řešení x úlohy (1.1), (1.6) budeme hledat ve tvaru

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R},$$

kde $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Toto řešení splňuje podmínku (1.6) právě tehdy, když

$$c_1x_1(t+\omega) + c_2x_2(t+\omega) = \varrho\big[c_1x_1(t) + c_2x_2(t)\big] \quad \text{pro } t \in \mathbb{R},$$

odkud vzhledem k (1.7) a (1.8) dostáváme

$$\big[c_1a_{11} + c_2a_{21} - c_1\varrho\big]x_1(t) + \big[c_1a_{12} + c_2a_{22} - c_2\varrho\big]x_2(t) = 0 \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

Řešení x_1, x_2 jsou však lineárně nezávislá, a proto je předchozí vztah splněn právě tehdy, když jsou konstanty c_1, c_2 řešením soustavy algebraických lineárních rovnic

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\varrho & a_{21} \\ a_{12} & a_{22}-\varrho \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dokázali jsme tak, že úloha (1.1), (1.6) má netriviální (eventuálně komplexní) řešení právě tehdy, když konstanta $\varrho \in \mathbb{C}$ splňuje

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}-\varrho & a_{21} \\ a_{12} & a_{22}-\varrho \end{pmatrix} = 0. \tag{1.9}$$

Rovnici (1.9) nazýváme **charakteristickou rovnicí** diferenciální rovnice (1.1) a matici

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\varrho & a_{21} \\ a_{12} & a_{22}-\varrho \end{pmatrix}$$

nazýváme **charakteristickou maticí**. Rozepíšeme-li příslušný determinant, můžeme vztah (1.9) přepsat do tvaru

$$\varrho^2 - (\operatorname{tr} A)\varrho + \det A = 0, \tag{1.10}$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

Nyní ukážeme, že charakteristická rovnice (1.10) nezávisí na zvoleném fundamentálním systému řešení, pomocí kterého jsme matici A vytvořili. Mějme tedy ještě jiný fundamentální systém řešení $\widehat{x}_1$, $\widehat{x}_2$ diferenciální rovnice (1.1). Oba systémy x_1, x_2 a $\widehat{x}_1$, $\widehat{x}_2$ tvoří bázi vektorového prostoru všech řešení rovnice (1.1), existuje tedy regulární matice $B = (b_{ik})_{i,k=1}^2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ taková, že

$$\begin{pmatrix} \widehat{x}_1(t) \\ \widehat{x}_2(t) \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

Odtud a s použitím (1.7), (1.8) a (1.11) dostáváme

$$\begin{pmatrix}\widehat{x}_1(t+\omega)\\ \widehat{x}_2(t+\omega)\end{pmatrix} = B\begin{pmatrix}x_1(t+\omega)\\ x_2(t+\omega)\end{pmatrix} = BA\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix} = BAB^{-1}\begin{pmatrix}\widehat{x}_1(t)\\ \widehat{x}_2(t)\end{pmatrix} \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

Použitím tohoto vztahu místo (1.7) a (1.8) ukážeme analogicky jako výše, že úloha (1.1), (1.6) má netriviální (eventuálně komplexní) řešení právě tehdy, když konstanta $\varrho \in \mathbb{C}$ splňuje

$$\varrho^2 - \operatorname{tr}\left(BAB^{-1}\right)\varrho + \det\left(BAB^{-1}\right) = 0.$$

Přímým výpočtem však lehce ověříme, že

$$\operatorname{tr}\left(BAB^{-1}\right) = \operatorname{tr} A \quad \text{a} \quad \det\left(BAB^{-1}\right) = \det A.$$

Proto je charakteristická rovnice jednoznačně přiřazena k diferenciální rovnici (1.1) a nezáleží na fundamentálním systému řešení, pomocí kterého ji vytvoříme. Odvoďme nakonec tvar charakteristické rovnice pomocí fundamentálním systému řešení rovnice (1.1), který je často uvažován i v jiných oblastech kvalitativní teorie diferenciálních rovnic, například v teorii okrajových úloh či oscilační teorii.

Označme u_1 a u_2 řešení lineární rovnice (1.1) splňující počáteční podmínky

$$u_1(0) = 1,\ u_1'(0) = 0 \qquad \text{a} \qquad u_2(0) = 0,\ u_2'(0) = 1. \tag{1.12}$$

Řešení u_1, u_2 zřejmě tvoří fundamentální systém řešení rovnice (1.1). Stejným postupem jako výše dostaneme

$$u_1(t+\omega) = a_{11}u_1(t) + a_{12}u_2(t), \quad u_2(t+\omega) = a_{21}u_1(t) + a_{22}u_2(t) \tag{1.13}$$

pro $t \in \mathbb{R}$, odkud plyne

$$u_1(\omega) = a_{11}, \qquad u_2(\omega) = a_{21}. \tag{1.14}$$

Derivací rovností (1.13) a následným dosazením za $t = 0$ získáme

$$u_1'(\omega) = a_{12}, \qquad u_2'(\omega) = a_{22}. \tag{1.15}$$

Použijeme-li vztahy (1.14), (1.15) a výraz (1.9) pro charakteristickou rovnici, obdržíme

$$\det\begin{pmatrix}u_1(\omega)-\varrho & u_2(\omega)\\ u_1'(\omega) & u_2'(\omega)-\varrho\end{pmatrix} = 0, \tag{1.16}$$

nebo-li

$$\varrho^2 - \left(u_1(\omega) + u_2'(\omega)\right)\varrho + \det\begin{pmatrix}u_1(\omega) & u_2(\omega)\\ u_1'(\omega) & u_2'(\omega)\end{pmatrix}. \tag{1.17}$$

Všimněme si ještě, že determinant v předchozí rovnici je hodnotou wronskiánu řešení u_1, u_2 v bodě ω a použijeme-li důsledek Liouvilleovy formule pro diferenciální rovnice vyšších řádů (viz např. [1, Kapitola III, sekce 2]), dostaneme

$$\det\begin{pmatrix}u_1(\omega) & u_2(\omega)\\ u_1'(\omega) & u_2'(\omega)\end{pmatrix} = W[u_1,u_2](\omega) = W[u_1,u_2](0)\,\mathrm{e}^{-\int_0^\omega g(s)\mathrm{d}s} = \mathrm{e}^{-\int_0^\omega g(s)\mathrm{d}s}.$$

Závěrem výše uvedené diskuze je následující definice a tvrzení.

Definice 1.5. Kořeny charakteristické rovnice

$$\varrho^2 - \big(u_1(\omega) + u_2'(\omega)\big)\varrho + \mathrm{e}^{-\int_0^\omega g(s)\mathrm{d}s} = 0 \tag{1.18}$$

kde u_1, u_2 jsou řešení rovnice (1.1) splňující počáteční podmínky (1.12) a ω je perioda koeficientů p a q, nazýváme **Floquetovy multiplikátory** diferenciální rovnice (1.1).

Tvrzení 1.6. *Úloha* (1.1), (1.6) *má netriviální (eventuálně komplexní) řešení právě tehdy, když je ϱ Floquetovým multiplikátorem diferenciální rovnice* (1.1).

Poznámka 1.7. V úvodu článku jsme zmínili, že je Floquetova teorie obvykle vybudována pro soustavy lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu s ω-periodickou maticovou funkcí a poté jsou odvozeny důsledky pro lineární diferenciální rovnice vyšších řádů. Pro lineární soustavu

$$y' = P(t)y \tag{1.19}$$

s ω-periodickou maticovou funkcí P jsou Floquetovy multiplikátory definovány jako vlastní čísla tzv. **matice monodromie** $Y(\omega)$, kde Y je fundamentální matice soustavy (1.19) splňující podmínku $Y(0) = I$ (viz např. [3, Hlava II, §2]).

Uvažujme tedy soustavu lineárních diferenciálních rovnic

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p(t) & -g(t) \end{pmatrix} y \tag{1.20}$$

odpovídající diferenciální rovnici (1.1) a připomeňme, že řešení rovnice (1.1) a soustavy (1.20) jsou v následujícím vztahu: Je-li funkce x řešením rovnice (1.1), pak je vektorová funkce $y = (x, x')$ řešením soustavy (1.20). Naopak, je-li vektorová funkce $y = (y_1, y_2)$ řešením soustavy (1.20), pak $y_2 = y_1'$ a funkce y_1 je řešením rovnice (1.1). Fundamentální matice Y soustavy (1.20) splňující podmínku $Y(0) = I$ je tedy tvaru

$$Y(\omega) = \begin{pmatrix} u_1(\omega) & u_2(\omega) \\ u_1'(\omega) & u_2'(\omega) \end{pmatrix},$$

kde u_1, u_2 jsou řešení rovnice (1.1) splňující počáteční podmínky (1.12). Odtud okamžitě vidíme, že Floquetovy multiplikátory rovnice (1.1) zavedené v definici 1.5 jsou skutečně vlastními čísly matice monodromie soustavy (1.20).

V závěru této sekce se budeme věnovat diferenciální rovnici s konstantními koeficienty

$$x'' + g_0 x' + p_0 x = 0, \tag{1.21}$$

kde $p_0, g_0 \in \mathbb{R}$. Jedná se o speciální případ rovnice (1.1), jejíž koeficienty jsou funkce periodické s libovolnou periodou $\omega > 0$. Ačkoliv jsou kořeny „klasické“ charakteristické rovnice

$$\lambda^2 + g_0\lambda + p_0 = 0 \tag{1.22}$$

příslušné k (1.21) určené diferenciální rovnicí (1.21) jednoznačně, Floquetovy multiplikátory rovnice (1.21) jsou závislé na uvažované hodnotě periody ω. Lehce lze ukázat, že je-li $\omega > 0$ a λ je kořenem „klasické“ charakteristické rovnice (1.22), pak je $\varrho = \mathrm{e}^{\lambda\omega}$ Floquetovým multiplikátorem diferenciální rovnice (1.21) pro dané ω.

Vskutku, je-li λ kořenem „klasické“ charakteristické rovnice (1.22), diferenciální rovnice (1.21) má (eventuálně komplexní) řešení $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$, pro které zřejmě platí

$$x(t+\omega) = \mathrm{e}^{\lambda(t+\omega)} = \mathrm{e}^{\lambda\omega}\, x(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

Z tvrzení 1.6 pak okamžitě plyne, že $\varrho = \mathrm{e}^{\lambda\omega}$ je Floquetův multiplikátor diferenciální rovnice (1.21) pro dané ω.

Připomeňme ještě, jak lze najít lineárně nezávislá řešení rovnice (1.21), známe-li kořeny její „klasické“ charakteristické rovnice (1.22).

Tvrzení 1.8. *Nechť λ_1, λ_2 jsou kořeny charakteristické rovnice* (1.22)*. Pak platí:*

(1) Jestliže $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ a $\lambda_1 \neq \lambda_2$, pak má rovnice (1.21) *lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 tvaru*

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \quad x_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \quad \textit{pro } t \in \mathbb{R}.$$

(2) Jestliže $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda_0$, pak má rovnice (1.21) *lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 tvaru*

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_0 t}, \quad x_2(t) = t\,\mathrm{e}^{\lambda_0 t} \quad \textit{pro } t \in \mathbb{R}.$$

(3) Jestliže $\lambda_{1,2} = \mu \pm \nu\mathrm{i}$, kde $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ a $\nu > 0$, pak má rovnice (1.21) *lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 tvaru*

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{\mu t}\cos(\nu t), \quad x_2(t) = \mathrm{e}^{\mu t}\sin(\nu t) \quad \textit{pro } t \in \mathbb{R}.$$

V následující části ukážeme, v jakém tvaru lze najít lineárně nezávislá řešení rovnice (1.1), známe-li její Floquetovy multiplikátory (viz větu 2.6).

2. Fundamentální systém řešení rovnice (1.1) určený Floquetovými multiplikátory

Uvažujme opět fundamentální systém řešení rovnice (1.1) jako její řešení u_1, u_2 splňující počáteční podmínky (1.12). Z předchozí části víme, že Floquetovy multiplikátory jsou čísla ϱ, která nulují determinant charakteristické matice

$$\begin{pmatrix} u_1(\omega) - \varrho & u_2(\omega) \\ u_1'(\omega) & u_2'(\omega) - \varrho \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Uděláme nyní krátkou vsuvku a ukážeme, jak vypadá charakteristická matice lineární diferenciální rovnice vyššího řádu

$$x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(t)x' + p_n(t)x = 0, \tag{2.2}$$

kde $p_1, \ldots, p_n$ jsou ω-periodické funkce. Nebudeme vše znovu detailně rozepisovat, to určitě zvládne čtenář udělat sám. Označíme-li $u_1, \ldots, u_n$ řešení rovnice (2.2) splňující počáteční podmínky

$$u_i^{(k-1)}(0) = \delta_{ik} \quad \text{pro} \ \ i, k \in \{1, \ldots, n\},$$

kde δ_{ik} je Kronekerovo delta, zřejmě tyto funkce tvoří fundamentální systém řešení rovnice (2.2). Charakteristická matice rovnice (2.2) je proto tvaru

$$\begin{pmatrix} u_1(\omega)-\varrho & u_2(\omega) & \dots & u_n(\omega) \\ u_1'(\omega) & u_2'(\omega)-\varrho & \dots & u_n'(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(\omega) & u_2^{(n-1)}(\omega) & \dots & u_n^{(n-1)}(\omega)-\varrho \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

a Floquetovy multiplikátory jsou pak čísla ϱ, která nulují její determinant. Lze ukázat, že pro každý Floquetův multiplikátor ϱ rovnice (2.2) s násobností ℓ existuje právě ℓ lineárně nezávislých řešení rovnice (2.2), které je možné rozdělit do podskupin odpovídajícím tzv. elementárním dělitelům charakteristické matice (2.3) (viz např. [2, Hlava VI, §1, sekce 5]). Tyto elementární dělitele lze získat následovně. Pro každé $k \in \{1,\dots,n\}$ nechť je $D_k(\varrho)$ největší společný dělitel všech minorů[1] matice (2.3) řádu k. Položme $D_0(\varrho) := 1$,

$$p_k(\varrho) := \frac{D_k(\varrho)}{D_{k-1}(\varrho)} \quad \text{pro } k=1,\dots,n$$

a vyberme všechny faktory $p_1(\varrho),\dots,p_\nu(\varrho)$ různé od 1. Každý vybraný faktor $p_k(\varrho)$ je polynom s reálnými koeficienty stupně $s(k)\geq 1$ a rozložíme-li ho v komplexním oboru na součin kořenových činitelů, dostaneme

$$p_k(\varrho) = (\varrho-\varrho_{k,1})^{m_{k,1}}\dots(\varrho-\varrho_{k,s(k)})^{m_{k,s(k)}},$$

kde $\varrho_{k,1},\dots,\varrho_{k,s(k)}$ jsou navzájem různé Floquetovy multiplikátory rovnice (1.1) a $m_{k,1}+\dots+m_{k,s(k)} = s(k)$. Takto získané výrazy $(\varrho-\varrho_{k,i})^{m_{k,i}}$, $k=1,\dots,\nu$ a $i=1,\dots,s(k)$, jsou elementárními děliteli charakteristické matice (2.3). Všimněme si, že zde může být $\varrho_{k_1,i}=\varrho_{k_2,j}$ pro nějaká $k_1,k_2\in\{1,\dots,\nu\}$, $k_1\neq k_2$ a $i\in\{1,\dots,s(k_1)\}$, $j\in\{1,\dots,s(k_2)\}$.

Pro diferenciální rovnice 2. řádu máme pouze tři možnosti:

(1) Rovnice (1.1) má dva různé Floquetovy multiplikátory $\varrho_1,\varrho_2\in\mathbb{C}$ a elementární dělitelé charakteristické matice (2.1) jsou

$$\varrho-\varrho_1, \quad \varrho-\varrho_2\,.$$

(2) Rovnice (1.1) má Floquetův multiplikátor $\varrho_0\in\mathbb{R}$ s násobností 2 a elementární dělitelé charakteristické matice (2.1) jsou

$$\varrho-\varrho_0, \quad \varrho-\varrho_0\,.$$

(3) Rovnice (1.1) má Floquetův multiplikátor $\varrho_0\in\mathbb{R}$ s násobností 2 a elementární dělitel charakteristické matice (2.1) je

$$(\varrho-\varrho_0)^2.$$

Lze tedy dokázat následující tvrzení.

---

[1] Tj. determinantů čtvercových submatic.

Tvrzení 2.1. *Nechť $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathbb{R}$, $\varrho_1 \neq \varrho_2$, jsou Floquetovy multiplikátory rovnice* (1.1)*. Pak existují (reálná) lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice* (1.1) *splňující*

$$x_1(t+\omega) = \varrho_1 x_1(t), \quad x_2(t+\omega) = \varrho_2 x_2(t) \quad \textit{pro } t \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Tvrzení 2.2. *Nechť $\varrho_0 \in \mathbb{R}$ je Floquetův multiplikátor rovnice* (1.1) *s násobností 2. Pak existují (reálná) lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice* (1.1) *splňující buď*

$$x_1(t+\omega) = \varrho_0 x_1(t), \quad x_2(t+\omega) = \varrho_0 x_2(t) \quad \textit{pro } t \in \mathbb{R} \tag{2.5}$$

nebo

$$x_1(t+\omega) = \varrho_0 x_1(t), \quad x_2(t+\omega) = \varrho_0 x_2(t) + x_1(t) \quad \textit{pro } t \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Tvrzení 2.3. *Nechť $\varrho_{1,2} = a \pm b\mathrm{i}$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $b > 0$, jsou Floquetovy multiplikátory rovnice* (1.1)*. Pak existují (reálná) lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice* (1.1) *splňující*

$$x_1(t+\omega) = a x_1(t) - b x_2(t), \quad x_2(t+\omega) = b x_1(t) + a x_2(t) \quad \textit{pro } t \in \mathbb{R}.$$

Příklady potvrzující možná chování lineárně nezávislých řešení rovnice (1.1) uvedená v tvrzeních 2.1 a 2.3 lze snadno sestrojit pro rovnici s konstantními koeficienty a vhodné hodnoty periody ω. Fakt, že obě možnosti (2.5) a (2.6) v tvrzení 2.2 mohou opravdu nastat, ukážeme v následujících příkladech.

Příklad 2.4. Mějme $\omega = 2\pi$ a uvažujme diferenciální rovnici

$$x'' + x = 0. \tag{2.7}$$

Kořeny „klasické“ charakteristické rovnice jsou $\lambda_{1,2} = \pm\mathrm{i}$ a jak jsme ukázali v závěru předchozí sekce, odpovídající Floquetovy multiplikátory jsou $\varrho_{1,2} = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}2\pi}$, tj. $\varrho_{1,2} = 1$. Rovnice (2.7) má lineárně nezávislá řešení

$$x_1(t) = \cos t, \quad x_2(t) = \sin t \quad \text{pro } t \in \mathbb{R},$$

která splňují podmínku (2.5), v níž je samozřejmě $\varrho_0 = 1$.

Příklad 2.5. Mějme $\omega = 2\pi$ a uvažujme diferenciální rovnici (1.3). Použijeme její lineárně nezávislá řešení uvedená v příkladu 1.3, sestrojíme fundamentální systém řešení jako její řešení u_1, u_2 splňující počáteční podmínky (1.12) a dostaneme

$$u_1(t) = (2 + \sin t)\left(\frac{1}{2} - \int_0^t \frac{1}{(2+\sin s)^2}\,\mathrm{d}s\right) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}$$

a

$$u_2(t) = 2(2+\sin t)\int_0^t \frac{1}{(2+\sin s)^2}\,\mathrm{d}s \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}$$

Odtud

$$u_1(2\pi) = 1 - 2\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\sin s)^2}\,\mathrm{d}s, \quad u_2'(2\pi) = 2\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\sin s)^2}\,\mathrm{d}s + 1,$$

a proto je charakteristická rovnice příslušná diferenciální rovnici (1.3) tvaru $\varrho^2 - 2\varrho + 1 = 0$, viz (1.18). Floquetovy multiplikátory rovnice (1.3) jsou tedy $\varrho_{1,2} = 1$. Z příkladu 1.3 také vyplývá, že má rovnice (1.3) lineárně nezávislá řešení

$$x_1(t) = (2 + \sin t) \int_0^{2\pi} \frac{1}{(2 + \sin s)^2} \, \mathrm{d}s, \quad x_2(t) = (2 + \sin t) \int_0^{t} \frac{1}{(2 + \sin s)^2} \, \mathrm{d}s,$$

která splňují podmínku (2.6), v níž je samozřejmě $\varrho_0 = 1$.

Nyní již ukážeme, v jakém tvaru lze najít lineárně nezávislá řešení rovnice (1.1), známe-li její Floquetovy multiplikátory. V následující větě označme $AC^1_{loc}(\mathbb{R})$ množinu funkcí, které jsou absolutně spojité spolu s jejich derivací na každém kompaktním intervalu v $\mathbb{R}$.

Věta 2.6. *Nechť ϱ_1, ϱ_2 jsou Floquetovy multiplikátory rovnice* (1.1)*. Pak platí:*

(1) Jestliže $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathbb{R}$ a $\varrho_1 \neq \varrho_2$, pak $\varrho_1\varrho_2 > 0$ a existují lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice (1.1) *splňující*

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{\frac{\ln|\varrho_1|}{\omega} t} \varphi_1(t), \quad x_2(t) = \mathrm{e}^{\frac{\ln|\varrho_2|}{\omega} t} \varphi_2(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \tag{2.8}$$

kde $\varphi_1, \varphi_2 \in AC^1_{loc}(\mathbb{R})$ jsou ω-periodické (resp. 2ω-periodické) funkce, je-li $\varrho_1 > 0$ (resp. $\varrho_1 < 0$).

(2) Jestliže $\varrho_1 = \varrho_2 =: \varrho_0$, pak existují lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice (1.1) *splňující buď*

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{\frac{\ln|\varrho_0|}{\omega} t} \varphi_1(t), \quad x_2(t) = \mathrm{e}^{\frac{\ln|\varrho_0|}{\omega} t} \varphi_2(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R} \tag{2.9}$$

nebo

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{\frac{\ln|\varrho_0|}{\omega} t} \varphi_1(t), \quad x_2(t) = \mathrm{e}^{\frac{\ln|\varrho_0|}{\omega} t} \big[t\varphi_1(t) + \varphi_2(t)\big] \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \tag{2.10}$$

kde $\varphi_1, \varphi_2 \in AC^1_{loc}(\mathbb{R})$ jsou ω-periodické (resp. 2ω-periodické) funkce, je-li $\varrho_0 > 0$ (resp. $\varrho_0 < 0$).

(3) Jestliže $\varrho_{1,2} = \varrho_0 \, \mathrm{e}^{\pm\vartheta \mathrm{i}}$, kde $\varrho_0 > 0$ a $\vartheta \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$, pak existují lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice (1.1) *splňující*

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{\frac{\ln \varrho_0}{\omega} t} \left[\varphi_1(t) \cos \frac{\vartheta t}{\omega} - \varphi_2(t) \sin \frac{\vartheta t}{\omega}\right] \quad \text{pro } t \in \mathbb{R} \tag{2.11}$$

a

$$x_2(t) = \mathrm{e}^{\frac{\ln \varrho_0}{\omega} t} \left[\varphi_1(t) \sin \frac{\vartheta t}{\omega} + \varphi_2(t) \cos \frac{\vartheta t}{\omega}\right] \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \tag{2.12}$$

kde $\varphi_1, \varphi_2 \in AC^1_{loc}(\mathbb{R})$ jsou ω-periodické funkce.

Důkaz. Část (1): Nechť $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathbb{R}$ a $\varrho_1 \neq \varrho_2$. Jelikož jsou ϱ_1, ϱ_2 kořeny charakteristické rovnice (1.18), z Vietových vztahů okamžitě plyne $\varrho_1\varrho_2 > 0$, tj. $\operatorname{sgn}(\varrho_1) = \operatorname{sgn}(\varrho_2)$. Podle tvrzení 2.1 existují lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice (1.1) splňující podmínku (2.4). Definujme funkce φ_1, φ_2 vztahem

$$\varphi_k(t) := \mathrm{e}^{-\frac{\ln|\varrho_k|}{\omega} t} x_k(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \ k = 1, 2. \tag{2.13}$$

Zřejmě $\varphi_1, \varphi_2 \in AC^1_{loc}(\mathbb{R})$ a vzhledem k (2.4) dostaneme

$$\begin{aligned}\varphi_k(t+\omega) &= \mathrm{e}^{-\frac{\ln|\varrho_k|}{\omega}(t+\omega)}\, x_k(t+\omega)\\ &= \mathrm{e}^{-\frac{\ln|\varrho_k|}{\omega}t}\,\frac{1}{|\varrho_k|}\,\varrho_k x_k(t) = \operatorname{sgn}(\varrho_k)\varphi_k(t) \quad \text{pro } t\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

To však znamená, že funkce φ_1, φ_2 jsou ω-periodické (resp. 2ω-periodické), je-li $\varrho_1 > 0$ (resp. $\varrho_1 < 0$). Z (2.13) tedy vyplývá, že lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice (1.1) jsou tvaru (2.8).

Část (2): Nechť $\varrho_1 = \varrho_2 =: \varrho_0$. Pak $\varrho_0 \in \mathbb{R}$ je kořen charakteristické rovnice (1.18) s násobnosti 2, a proto podle tvrzení 2.2 existují lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice (1.1) splňující buď (2.5) nebo (2.6).

Jestliže x_1, x_2 splňují podmínku (2.5), analogicky jako v důkazu části (1) ukážeme, že jsou x_1, x_2 tvaru (2.9), kde $\varphi_1, \varphi_2 \in AC^1_{loc}(\mathbb{R})$ jsou ω-periodické (resp. 2ω-periodické) funkce, je-li $\varrho_0 > 0$ (resp. $\varrho_0 < 0$).

Předpokládejme nyní, že x_1, x_2 splňují podmínku (2.6). Definujme funkce φ_1, φ_2 vztahy

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &:= \frac{1}{\varrho_0\omega}\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln|\varrho_0|}{\omega}t}\,x_1(t) \quad \text{pro } t\in\mathbb{R},\\ \varphi_2(t) &:= \mathrm{e}^{-\frac{\ln|\varrho_0|}{\omega}t}\,x_2(t) - t\varphi_1(t) \quad \text{pro } t\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Zřejmě $\varphi_1, \varphi_2 \in AC^1_{loc}(\mathbb{R})$. Analogicky jako v důkazu části (1) ukážeme, že φ_1 splňuje

$$\varphi_1(t+\omega) = \operatorname{sgn}(\varrho_0)\varphi_1(t) \quad \text{pro } t\in\mathbb{R}. \tag{2.15}$$

Dále vzhledem (2.6) a (2.15) dostaneme

$$\begin{aligned}\varphi_2(t+\omega) &= \mathrm{e}^{-\frac{\ln|\varrho_0|}{\omega}(t+\omega)}\,x_2(t+\omega) - (t+\omega)\varphi_1(t+\omega)\\ &= \mathrm{e}^{-\frac{\ln|\varrho_0|}{\omega}t}\,\frac{1}{|\varrho_0|}\Big[\varrho_0 x_2(t) + x_1(t)\Big] - \operatorname{sgn}(\varrho_0)(t+\omega)\varphi_1(t)\\ &= \operatorname{sgn}(\varrho_0)\Big[\mathrm{e}^{-\frac{\ln|\varrho_0|}{\omega}t}\,x_2(t) - t\varphi_1(t)\Big]\\ &\quad + \operatorname{sgn}(\varrho_0)\omega\left[\frac{1}{\varrho_0\omega}\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln|\varrho_0|}{\omega}t}\,x_1(t) - \varphi_1 t)\right] = \operatorname{sgn}(\varrho_0)\varphi_2(t)\end{aligned}$$

pro $t \in \mathbb{R}$. To však znamená, že funkce φ_1, φ_2 jsou ω-periodické (resp. 2ω-periodické), je-li $\varrho_0 > 0$ (resp. $\varrho_0 < 0$). Z (2.14) tedy vyplývá, že lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice (1.1) jsou tvaru (2.10).

Část (3): Nechť $\varrho_{1,2} = \varrho_0\,\mathrm{e}^{\pm\vartheta\mathrm{i}}$, kde $\varrho_0 > 0$ a $\vartheta \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$. Podle tvrzení 1.6 existuje netriviální komplexní řešení x_c rovnice (1.1) splňující

$$x_c(t+\omega) = \varrho_0\,\mathrm{e}^{\vartheta\mathrm{i}}\,x_c(t) \quad \text{pro } t\in\mathbb{R}. \tag{2.16}$$

Definujme funkci φ_c vztahem

$$\varphi_c(x) := \mathrm{e}^{-\frac{\ln\varrho_0+\vartheta\mathrm{i}}{\omega}t}\,x_c(t) \quad \text{pro } t\in\mathbb{R}. \tag{2.17}$$

Vzhledem (2.16) dostaneme

$$\begin{aligned}\varphi_c(t+\omega) &= \mathrm{e}^{-\frac{\ln \varrho_0 + \vartheta \mathrm{i}}{\omega}(t+\omega)}\, x_c(t+\omega)\\ &= \mathrm{e}^{-\frac{\ln \varrho_0 + \vartheta \mathrm{i}}{\omega}t}\, \frac{1}{\varrho_0}\, \mathrm{e}^{-\vartheta \mathrm{i}}\, \varrho_0\, \mathrm{e}^{\vartheta \mathrm{i}}\, x_c(t) = \varphi_c(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Položme nyní

$$\varphi_1(t) := \mathrm{Re}\{\varphi_c(t)\}, \quad \varphi_2(t) := \mathrm{Im}\{\varphi_c(t)\} \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

Zřejmě $\varphi_1, \varphi_2 \in AC^1_{loc}(\mathbb{R})$ jsou ω-periodické funkce. Dále položme

$$x_1(t) := \mathrm{Re}\{x_c(t)\}, \quad x_2(t) := \mathrm{Im}\{x_c(t)\} \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

Z obecné teorie lineárních diferenciálních rovnic vyšších řádů vyplývá, že jsou x_1, x_2 lineárně nezávislá řešení rovnice (1.1). Z (2.17) navíc dostaneme

$$\begin{aligned}x_c(t) &= \mathrm{e}^{\frac{\ln \varrho_0 + \vartheta \mathrm{i}}{\omega}t}\, \varphi_c(x)\\ &= \mathrm{e}^{\frac{\ln \varrho_0}{\omega}t}\left(\cos\frac{\vartheta t}{\omega} + \mathrm{i}\sin\frac{\vartheta t}{\omega}\right)\Big(\varphi_1(t) + \mathrm{i}\varphi_2(t)\Big)\\ &= \mathrm{e}^{\frac{\ln \varrho_0}{\omega}t}\left[\varphi_1(t)\cos\frac{\vartheta t}{\omega} - \varphi_2(t)\sin\frac{\vartheta t}{\omega}\right]\\ &\quad + \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\frac{\ln \varrho_0}{\omega}t}\left[\varphi_1(t)\sin\frac{\vartheta t}{\omega} + \varphi_2(t)\cos\frac{\vartheta t}{\omega}\right] \quad \text{pro } t \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

a proto jsou řešení x_1, x_2 tvaru (2.11) a (2.12). □

Poznámka 2.7. Připomeňme, že k určení Floquetových multiplikátorů rovnice (1.1) potřebujeme znát nějaký její fundamentální systém řešení. Ten však nemusí být vhodný pro kvalitativní analýzu dané rovnice. Věta 2.6 nám dovolí najít tvar fundamentálního systému rovnice (1.1), který je vhodný například pro vyšetřování asymptotického chování jejích řešení.

V závěru předchozí sekce jsme ukázali, že je-li $\omega > 0$ a λ je kořenem „klasické“ charakteristické rovnice příslušné k rovnici s konstantními koeficienty (1.21), pak $\varrho = \mathrm{e}^{\lambda\omega}$ je Floquetovým multiplikátorem rovnice (1.21) pro dané ω. Není tedy složité ověřit, že tvrzení věty 2.6 aplikovaná pro dané ω na rovnici s konstantními koeficienty (1.21) jsou v souladu s tvrzením 1.8. Podrobnou diskuzi zde uvádět nebudeme, zmíníme však, že z této diskuze mimo jiné vyplývá smysluplnost zavedení následujícího pojmu.

Je-li ϱ Floquetův multiplikátor rovnice (1.1), lze ho zřejmě psát ve tvaru $\varrho = |\varrho|\,\mathrm{e}^{\vartheta \mathrm{i}}$, kde $\vartheta \in (-\pi, \pi]$. Potom číslo

$$\alpha := \frac{1}{\omega}\big[\ln|\varrho| + \vartheta \mathrm{i}\big]$$

nazýváme **charakteristický (Floquetův) exponent** rovnice (1.1). Číslo α hraje pro rovnici (1.1) podobnou roli jako kořen „klasické“ charakteristické rovnice (1.22) pro rovnici s konstantními koeficienty (1.21). Ve druhé části tohoto článku, kterou plánujeme publikovat v některém z dalších čísel Kvaternionu, se budeme pojmu charakteristického exponentu věnovat podrobněji. Reálné části charakteristických exponentů totiž úzce souvisí se stabilitou diferenciální rovnice (1.1).

3. Volné tlumené kmity lineárních oscilátorů s nekonstantními tlumícími a tuhostními charakteristikami

V této části ukážeme jedno možné použití věty 2.6 v otázce existence řešení diferenciální rovnice (1.1) konvergujícího k 0 pro $t \to +\infty$ spolu se svou první derivací.

Uvažujme nejprve běžný volný tlumený oscilátor tvořený tělesem o hmotnosti m, tlumícím členem s charakteristikou b a lineární pružinou s charakteristikou k. Jedná se o systém s 1 stupněm volnosti, jehož pohybová rovnice je tvaru

$$mx'' + bx' + kx = 0, \tag{3.1}$$

kde m, b, k jsou kladné konstanty. Jelikož je to rovnice s konstantními koeficienty, lze jednoduše ukázat, že pro libovolné kladné hodnoty konstant m, b a k má rovnice (3.1) fundamentální sytém řešení x_1, x_2 splňující

$$\lim_{t\to+\infty} x_1^{(k)}(t) = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} x_2^{(k)}(t) = 0, \quad k = 0, 1.$$

To však znamená, že každé řešení rovnice (3.1) konverguje k 0 pro $t \to +\infty$ spolu se svou první derivací. Fyzikální interpretace tohoto faktu je následující: Každý pohyb oscilátoru s pohybovou rovnicí (3.1) je tlumený a těleso se „v nekonečném čase“ zastaví v rovnovážném stavu. Podrobnější analýza pak ukazuje, že se jedná o pohyb, který je tzv. podkriticky, kriticky, či nadkriticky tlumen v závislosti na znaménku výrazu $D = \left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \omega_0^2$, kde $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ je vlastní úhlová frekvence netlumeného oscilátoru.

Všimněme si ještě následujících skutečností. Jsou-li konstanty m, b a k takové, že $\frac{b}{m} > 0$ a $\frac{k}{m} < 0$, pak existují lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice (3.1) splňující

$$\lim_{t\to+\infty} x_1^{(k)}(t) = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} x_2^{(k)}(t) = +\infty, \quad k = 0, 1.$$

A nakonec, jestliže $\frac{b}{m} > 0$ a $k = 0$, pak existují lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice (3.1) splňující

$$x_1(t) = 1 \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \quad \lim_{t\to+\infty} x_2(t) = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} x_2'(t) = 0.$$

V těchto dvou případech je prostor všech řešení rovnice (3.1) konvergujících k 0 pro $t \to +\infty$ spolu se svou první derivací jednodimenzionální. Platí tedy následující jednoduché pozorování.

Pozorování 3.1. *Jestliže $m, b, k \in \mathbb{R}$ a $\frac{b}{m} > 0$, pak existuje řešení x rovnice* (3.1) *splňující*

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} x'(t) = 0. \tag{3.2}$$

Zobecníme nyní toto tvrzení pro diferenciální rovnice s nekonstantními periodickými koeficienty. Poznamenejme, že takové zobecnění není pouze teoretické ani v souvislosti s výše uvažovaným lineárním oscilátorem. Není totiž problém najít příklad mechanické soustavy takové, že v její pohybové rovnici budou tlumící a tuhostní koeficienty nekonstantní – avšak periodické – funkce. Takový případ může nastat například po aproximaci nelinearit v pohybových rovnicích oscilátorů s tzv. geometrickou nelinearitou.

Použijeme Floquetovu teorii k důkazu následujícího tvrzení.

Tvrzení 3.2. *Jestliže $p, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou lokálně lebesgueovsky integrovatelné ω-periodické funkce a*

$$\int_0^\omega g(s)\mathrm{d}s > 0, \tag{3.3}$$

pak existuje řešení x rovnice (1.1) splňující podmínku (3.2).

Důkaz. Nechť ϱ_1, ϱ_2 jsou Floquetovy multiplikátory rovnice (1.1), tj. řešení charakteristické rovnice (1.18). Vzhledem k předpokladu (3.3) máme $\mathrm{e}^{-\int_0^\omega g(s)\mathrm{d}s} < 1$, a proto z Vietových vztahů plyne $0 < \varrho_1\varrho_2 < 1$. To však znamená, že buď $|\varrho_1| < 1$ nebo $|\varrho_2| < 1$ a bez újmy na obecnosti můžeme tedy předpokládat, že $|\varrho_1| < 1$. Probereme oba případy, které mohou nastat.

Nejprve předpokládejme, že $\varrho_1 \in \mathbb{R}$. Pak také $\varrho_2 \in \mathbb{R}$ a podle částí (1) a (2) věty 2.6 tak existuje řešení řešení x rovnice (3.1) splňující

$$x(t) = \mathrm{e}^{\frac{\ln|\varrho_1|}{\omega}t}\varphi_1(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \tag{3.4}$$

kde $\varphi_1 \in AC^1_{loc}(\mathbb{R})$ je periodická funkce. Derivací tohoto vztahu dostáváme

$$x'(t) = \left(\frac{\ln|\varrho_1|}{\omega}\varphi_1(t) + \varphi_1'(t)\right)\mathrm{e}^{\frac{\ln|\varrho_1|}{\omega}t} \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}. \tag{3.5}$$

Jelikož $\ln|\varrho_1| < 0$ a funkce φ_1, φ_1' jsou ohraničené na $\mathbb{R}$, ze vztahů (3.4) a (3.5) okamžitě vyplývá, že řešení x splňuje požadovanou podmínku (3.2).

Nyní předpokládejme, že $\varrho_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Pak $\varrho_2 = \overline{\varrho_1}$ a z části (3) věty 2.6 vyplývá existence řešení x rovnice (1.1) splňujícího

$$x(t) = \mathrm{e}^{\frac{\ln|\varrho_1|}{\omega}t}\left[\varphi_1(t)\cos\frac{\vartheta t}{\omega} - \varphi_2(t)\sin\frac{\vartheta t}{\omega}\right] \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \tag{3.6}$$

kde $\vartheta \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ a $\varphi_1, \varphi_2 \in AC^1_{loc}(\mathbb{R})$ jsou periodické funkce. Derivací tohoto vztahu dostáváme

$$\begin{aligned} x'(t) = \mathrm{e}^{\frac{\ln|\varrho_1|}{\omega}t}\bigg(&\frac{\ln|\varrho_1|}{\omega}\Big[\varphi_1(t)\cos\frac{\vartheta t}{\omega} - \varphi_2(t)\sin\frac{\vartheta t}{\omega}\Big] \\ &- \varphi_1'(t)\cos\frac{\vartheta t}{\omega} - \frac{\vartheta}{\omega}\varphi_1(t)\sin\frac{\vartheta t}{\omega} - \varphi_2'(t)\sin\frac{\vartheta t}{\omega} - \frac{\vartheta}{\omega}\varphi_2(t)\cos\frac{\vartheta t}{\omega}\bigg) \end{aligned} \tag{3.7}$$

pro $t \in \mathbb{R}$. Jelikož $\ln|\varrho_1| < 0$ a funkce φ_1, φ_2, φ_1', φ_2' jsou ohraničené na $\mathbb{R}$, ze vztahů (3.6) a (3.7) okamžitě vyplývá, že řešení x splňuje požadovanou podmínku (3.2). □

4. Závěrečné poznámky

Cílem toho článku bylo ukázat alternativní možnost, jak vybudovat Floquetovu teorii pro lineární obyčejné diferenciální rovnice vyšších řádů s periodickými koeficienty a předvést její možné použití v úlohách kvalitativní teorie diferenciálních rovnic. V pokračování tohoto článku, které plánujeme publikovat v některém z dalších čísel časopisu Kvaternion, ukážeme využití Floquetovy teorie v otázce Lyapunovské stability řešení uvažovaných rovnic.

Reference

[1] J. Kalas, M. Ráb: *Obyčejné diferenciální rovnice*, Masarykova univerzita, Brno, 1995.
[2] G. Sansone: *Ordinary differential equations. Vol. I.*, Izdat. Inostrannoj Literatury, Moscow, 1953, rusky.
[3] V. A. Yakubovich, V. M. Starzhinskij: *Linear differential equations with periodic coefficients and their applications*, Nauka, Moscow, 1972, rusky.

Jiří Šremr, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 61669 Brno, Česká republika,
e-mail: sremr@fme.vutbr.cz