

Milí čtenáři,

dostalo se k vám další dvojčíslo ročníku 2022 časopisu Kvaternion vydávaného Ústavem matematiky FSI. Cílovou skupinou jsou studenti matematických oborů, i když lze očekávat, že si jej s chutí přečtou i ostřílení matematici. Obsah je psán lehčí formou než ve vědeckých časopisech, ale přesto s vysokou precizností a korektním matematickým jazykem. Příspěvky jsou jako obvykle trojího typu, každý s jiným cílem.

V první skupině jsou články, které mají poučenému čtenáři buď uvést daný problém v širších souvislostech nebo poskytnout pedagogicky zajímavý přístup. První příspěvek letošního vydání je tedy o aplikacích zlomkového kalkulu, tedy derivacích neceločíselného řádu, a je typickým příkladem textu rozšiřujícího matematický koncept do aplikačních souvislostí. Druhý příspěvek pedagogicky přívětivě přibližuje Floquetovu teorii, tedy nástroj pro kvalitativní analýzu diferenciálních rovnic.

Druhou skupinou jsou studentské příspěvky, které představují úlohy a témata řešená studenty Matematického inženýrství ÚM FSI typicky v rámci závěrečné práce. Tato část by mohla oslovit zájemce o studium matematiky na FSI nebo může stávajícím studentům usnadnit výběr tématu bakalářské nebo diplomové práce. Prvním příspěvkem v této části je popis matematického modelu úlohy o pronásledování a úniku. Druhý text se zabývá aplikací prostředků funkcionální analýzy na řešení nelineárních diferenčních rovnic.

Třetí část tvoří rozbor řešení vybrané úlohy středoškolské internetové soutěže MATHING, kterou Ústav matematiky FSI každoročně pořádá. Tento text je určen pro současné a budoucí řešitele soutěže, ale pomoci může každému při hledání zajímavých příkladů a jejich řešení. Letošnímu rozboru neunikl příklad o posloupnosti zadané rekurentním vztahem, který je speciálním případem Riccatiho rovnice. Úloha mimo jiné ukazuje na vysokou náročnost zadání a nutnou kvalitu řešitelských týmů.

Věřím, že vzhledem k zajímavým tématům zpracovaným na vysoké úrovni si i letošní vydání Kvaternionu najde své početné čtenáře.

Petr Vašík

ODKUD SE BEROU APLIKACE ZLOMKOVÉHO KALKULU

TOMÁŠ KISELA

ABSTRAKT. Tento článek má za cíl ukázat čtenářům, jak je zlomkový kalkulus provázán s řadou moderních, nejen matematických disciplín. Přibližuje odpovědi na otázku, co stojí za obrovským rozšířením zlomkového kalkulu do aplikací v různých oborech. Nejprve shrnuje základ teorie neceločíselných derivací a hlavní rozdíly vůči klasickému kalkulu. Následně charakterizuje některé mechanismy, které mohou vysvětlovat podstatu jevů modelovaných pomocí zlomkových diferenciálních rovnic. Na závěr ve větším detailu pomocí modelů náhodných procházek rozebírá rozdíly v předpokladech pro klasickou difuzi a některé anomální difuzní jevy.

1. ÚVOD

Zlomkový kalkulus je teorie vystavěná kolem na první pohled zvláštní otázky. Co kdybychom nepracovali jen s derivacemi celočíselných řádů, tj. třeba prvními či pátými, nýbrž připustili i derivace řádu jedna polovina či čtyři pětiny? Tato myšlenka se objevila prakticky hned při vzniku klasického kalkulu a její původ lze dopátrat doslova až k G. W. Leibnizovi, jednomu z autorů pojmu derivace. Zpočátku šlo spíše o matematickou hříčku, jak zformulovat definici neceločíselné derivace, aby vše zapadalo do klasické teorie diferenciálního a integrálního počtu. Když po více než 200 letech a příspěvcích největších matematiků historie bylo několik takových definic zavedeno, nestalo se nic převratného. Vyřešením hádanka ztratila svůj půvab a výsledek neměl praktického využití. Oficiálního oživení se toto téma dočkalo až po desítkách let v roce 1974, kdy se v americkém New Havenu konala první konference věnovaná speciálně zlomkovému kalkulu (pro více detailů k historii viz např. [5, 7]).

Dnes zlomkový kalkulus patří mezi nejvlivnější oblasti matematického modelování. Co se změnilo? Klasické modely kvůli lokální povaze derivací velmi dobře popisují situace, kdy se, zhruba řečeno, vlastnosti objektů dají považovat za nezávislé na velikosti zohledněné oblasti, např. ve smyslu času či prostoru. Můžeme tedy tuto oblast libovolně zmenšovat a v limitním smyslu dojít až ke známým klasickým diferenciálním rovnicím. Tento přístup velmi dobře funguje u základních zjednodušených modelů. Nicméně s rozvojem vědy a techniky a se vzrůstajícími

2020 MSC. Primární 00A09, 26A33, 60G22.

Klíčová slova. zlomkový kalkulus, difuze, rozdělení pravděpodobnosti, Paretovo rozdělení, aplikace, náhodná procházka.

Práce byla podporována projektem GA20-11846S.

nároky na přesnost bylo pro modelování komplexnějších, často nelokálních vlastností třeba čím dál složitějších modelů zahrnujících nekonstantní parametry či nelineární členy. Modely zahrnující zlomkové derivace poskytují pro tyto situace zajímavé možnosti. Zlomková derivace si totiž zachovává linearitu, a současně se z podstaty neomezuje na lokální chování funkce. Umožňuje tak přirozeně popisovat jevy, pro které je typické zohlednění delší historie nebo vlastností v širším okolí zkoumaného bodu.

Tato vlastnost stojí za rozšířením zlomkového kalkulu do mnoha oblastí lidského poznání, protože umožňuje modelování jevů, které byly dříve chápány jako anomálie. Právě tyto atypické fenomény však často s rozvojem vědy a techniky získávají na významu, neboť jejich zvláštní projevy nachází řadu využití v praxi. Mezi typické oblasti patří třeba viskoelastické vlastnosti polymerů (dlouhé řetězce makromolekul), difuze v biologických tkáních (nezanedbatelná doba trvání překonávání buněčných stěn), difuze v silně heterogenních či fraktálních strukturách (neočekávaně rychlý transfer v některých směrech), pohyb ve viskózních materiálech, či elektrické vlastnosti organických materiálů (více viz [2, 3, 4, 7]).

Tento článek si klade za cíl přiblížit čtenářům fascinující svět zlomkového kalkulu a jeho propojení se světem kolem nás. V následující sekci uvedeme základní definice derivace zlomkových derivací a shrneme vlastnosti s důrazem na srovnání s jejich všeobecně známými „celočíselnými“ analogiemi. V sekci 3 poskytneme stručný přehled jevů, u nichž je pozorováno anomální chování, které má projevy charakteristické pro zlomkové modely. V sekci 4 se blíže podíváme na původ zlomkové difuzní rovnice a vymežíme rozdíl od předpokladů klasického modelu difuze založeného na modelu náhodné procházky. V závěrečné sekci pak připojíme pár shrnujících komentářů.

2. HLAVNÍ VZTAHY ZLOMKOVÉHO KALKULU

Teorie zlomkového kalkulu je vystavěna kolem pojmu zlomkový integrál. Ačkoliv existuje více alternativních definic, bezkonkurenčně nejrozšířenější je verze vycházející ze zobecnění Cauchyho vzorce pro výpočet m -tého integrálu ($m \in \mathbb{Z}^+$) funkce f s dolní mezí $a \in \mathbb{R}$, tj.

$$I_a^m f(x) = \underbrace{\int_a^x \int_a^{\xi_{m-1}} \cdots \int_a^{\xi_1}}_m f(\xi_0) d\xi_0 \cdots d\xi_{m-2} d\xi_{m-1} = \int_a^x \frac{(x-\xi)^{m-1}}{(m-1)!} f(\xi) d\xi.$$

Rozšíření pro neceločíselná m je dosaženo nahrazením faktoriálu $(m-1)!$ Eulerovou Gamma funkcí Γ a nahrazením polynomu obecnou mocninnou funkcí (viz [7]).

Pro zlomkový integrál řádu $\nu > 0$ funkce f na intervalu $[a, b)$ tak dostáváme vztah

$${}_a D_x^{-\nu} f(x) = \int_a^x \frac{(x-\xi)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} f(\xi) d\xi,$$

přičemž pro $\nu = 0$ klademe ${}_a D_x^0 f(x) = f(x)$ pro $x \in [a, b)$.

Vidíme tedy, že zavedení zlomkového integrálu je přímým zobecněním známých vztahů. V případě zlomkové derivace je situace mnohem méně přehledná, neboť

podobně přirozený univerzální vztah pro m -tou derivaci nemáme. To je důvodem, proč v případě derivací není přítomna tak silná shoda na zvoleném přístupu. Poznamenejme, že zajímavým přístupem využívaným zejména v numerické matematice je definice Grünwaldova-Letnikova, která vychází ze zobecnění vztahu pro m -tou diferenci (viz [7]). Zde však uvedeme dvě nejčastěji používané definice, které budeme v následujícím textu využívat: Riemannovu-Liouvilleovu a novější Caputovu.

Riemannova-Liouvilleova derivace řádu $\alpha > 0$ funkce f je dána vztahem

$${}_a\mathbf{D}_x^\alpha f(x) = \frac{d^{[\alpha]}}{dx^{[\alpha]}} {}_a\mathbf{D}_x^{-(\lceil\alpha\rceil-\alpha)} f(x),$$

kde $[\alpha]$ je horní celá část čísla α , tj. nejmenší přirozené číslo větší nebo rovno α .

Caputova derivace se liší pouze záměnou pořadí operací derivace a zlomkové integrace, tedy

$${}^C\mathbf{D}_x^\alpha f(x) = {}_a\mathbf{D}_x^{-(\lceil\alpha\rceil-\alpha)} \frac{d^{[\alpha]} f(x)}{dx^{[\alpha]}}.$$

Všimněme si, že obě zlomkové derivace představují kompozici klasické derivace a zlomkového integrálu. Kromě řádu α tak mají ještě parametr a , což je počáteční bod intervalu, na kterém funkci uvažujeme. Zřejmě tedy pro pevně danou funkci můžeme dostávat jiné výsledky zlomkové derivace pro různé hodnoty a .

Právě role počáteční meze a byla jednou z příčin mnoha problémů při dlouhém hledání vhodné definice zlomkové derivace. Její přítomnost totiž z vlastností celočíselných derivací vlivem jejich lokální povahy nijak nevyplývá a současně bez jejího využití není možné dosáhnout souladu s klasickou teorií (např. pro $a = 0$ dostaneme sice očekávané výsledky pro polynomy, ale ne pro exponenciální funkce).

Příklad 2.1. Uvažujme Riemannovu-Liouvilleovu derivaci následující mocniné funkce pro $a = 0$:

$${}_0\mathbf{D}_x^\alpha \frac{x^\beta}{\Gamma(\beta+1)} = \frac{x^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}, \quad \beta > -1, \alpha > 0.$$

Dostáváme přirozeně očekávané zobecnění klasických vztahů. Pro jiné hodnoty a se však situace mění a ve výsledku se začne objevovat nekompletní Beta funkce.

Příklad 2.2. Nyní uvažujme exponenciální funkci a provedme zlomkovou derivaci pro $a = 0$ a $a \rightarrow -\infty$:

$$\begin{aligned} {}_0\mathbf{D}_x^\alpha \exp(\lambda x) &= x^{-\alpha} E_{1,1-\alpha}(\lambda x), \\ {}_{-\infty}\mathbf{D}_x^\alpha \exp(\lambda x) &= \lambda^\alpha \exp(\lambda x), \quad \lambda > 0. \end{aligned}$$

Doplňme, že jsme zde využili zápisu pomocí tzv. dvouparametrické Mittag-Lefflerovy funkce definované vztahem

$$E_{\mu,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\mu k + \beta)}, \quad \mu \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}^+$$

redukující se pro volbu $\mu = \beta = 1$ na exponenciální funkci. Klasický výsledek pro exponenciální funkci tedy dostáváme pro $a = -\infty$.

Pro lepší představu fungování zlomkových derivací a integrálů uvedeme následující příklad s nespojitou funkcí.

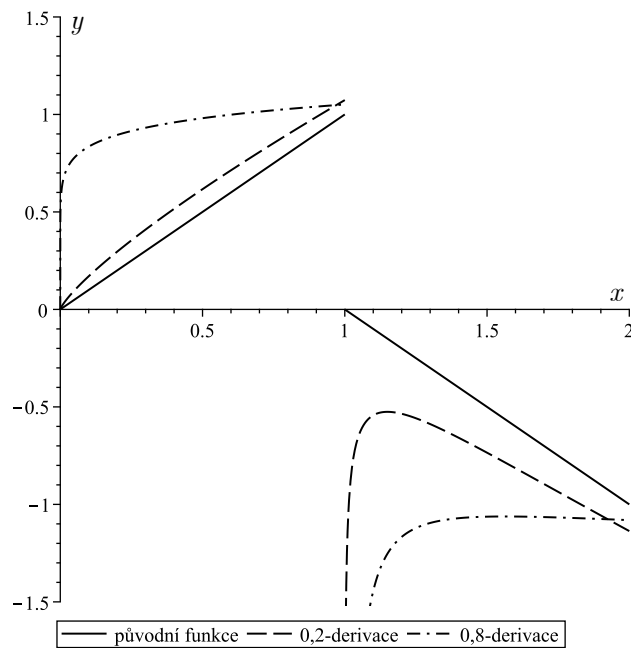
Příklad 2.3. Uvažujme po částech definovanou funkci

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, 1), \\ 1 - x, & x \in [1, \infty). \end{cases}$$

Je možné ukázat, že Riemannova-Liouvilleova derivace pro $\alpha > 0$ s dolní mezí $a = 0$ je rovna

$${}_0\mathbf{D}_x^\alpha f(x) = \begin{cases} \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, & x \in (0, 1), \\ \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} - \frac{(x-1)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} - 2\frac{(x-1)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, & x \in [1, \infty). \end{cases} \quad (2.1)$$

Obrázek 1 zobrazuje derivace pro vybrané α z intervalu $[0, 1]$. Vidíme, že pro nízké řády je průběh výsledné derivace „blízký“ původní funkci, pro řády bližší hodnotě jedna se průběh derivací „blíží“ hodnotám první derivace (tj. 1 pro $x \in [0, 1)$, nebo -1 pro $x \in (1, \infty)$). V pravém okolí bodu $x = 1$ vidíme paměťový efekt: všechny derivace neceločíselných řádů jsou neohrazené, neboť původní funkce zde má nespojitost. Vliv této nespojitosti pak s rostoucím x klesá, ale zůstává přítomný. V levém okolí bodu $x = 1$ neohrazenost nepozorujeme, protože naše zlomková derivace bere v úvahu jen funkční hodnoty směrem vlevo od daného bodu.



Obrázek 1. Riemannova-Liouvilleova derivace (2.1) pro $\alpha \in \{0; 0,2; 0,8\}$.

Dodejme, že při dosazení $\alpha < 0$ do (2.1) získáme vztahy pro zlomkové integrály. Není obtížné dovodit, že pro všechna $\alpha < 0$ jsou odpovídající integrály spojitě funkce. Dále pro $\alpha \in [0, 1]$ je výsledek platný i pro Caputovu derivaci. Pro $\alpha > 1$ pak všechny Caputovy derivace vyjdou nulové.

Zdůrazněme, že všechny tyto operátory jsou lineární a že obecně nekomutují. Konkrétně pro Riemannovy-Liouvilleovy derivace dostáváme

$$\begin{aligned} {}_a\mathbf{D}_x^\alpha \left({}_a\mathbf{D}_x^{-\beta} f(x) \right) &= {}_a\mathbf{D}_x^{\alpha-\beta} f(x), \\ {}_a\mathbf{D}_x^\alpha \left({}_a\mathbf{D}_x^\beta f(x) \right) &= {}_a\mathbf{D}_x^{\alpha+\beta} f(x) - \sum_{k=1}^{\lceil \beta \rceil} {}_a\mathbf{D}_x^{\beta-k} f(x) \Big|_{x=a} \frac{(x-a)^{-\alpha-k}}{\Gamma(1-\alpha-k)}, \end{aligned}$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\beta \in \mathbb{R}^+$. Tyto vztahy zahrnují i pravidla pro skládání Caputovy derivace, neboť se na ni můžeme dívat jako na specifické složení derivace a zlomkového integrálu.

Složitější definiční tvar zlomkových derivací a zohlednění funkčních hodnot na širším intervalu s sebou však přináší i výrazné zkomplikování mnoha vztahů, které jsme zvyklí automaticky využívat v mnoha metodách a postupech. To brání přímočarému zobecnění známých výsledků klasického kalkulu pro neceločíselné řády. Pro ilustraci uvádíme vztah pro Riemannovu-Liouvilleovu derivaci součinu funkcí f a g

$${}_a\mathbf{D}_x^\alpha (f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} f^{(k)}(x) {}_a\mathbf{D}_x^{\alpha-k} g(x). \quad (2.2)$$

Vidíme, že pro jakýkoliv neceločíselný řád dostáváme ve výsledku nekonečnou sumu, pro jejíž vyčíslení bychom potřebovali znát nekonečné množství zlomkových derivací a integrálů jedné z funkcí f či g . Je zřejmé, že pro specifické funkce f a g , u kterých se derivace od určitého indexu vynulují, je vzorec použitelný, ale celkově vzato je jeho využití v praxi sporadické. Připomeňme, že v případě celočíselných hodnot α vztah předází do známého tvaru, neboť binomické koeficienty pro $k > \alpha$ jsou nulové.

Pro další zobecňující vztahy odkazujeme čtenáře na [7]. Doplňme, že např. zlomková derivace složené funkce vede na nekonečnou sumu výrazně vyšší komplexity než tomu bylo u (2.2). Důsledkem je, že v rámci zlomkového kalkulu se musíme téměř vždy obejít bez substituce při integraci, a tak i při řešení diferenciálních rovnic.

3. KOUZLO ALGEBRAICKÉHO POKLESU

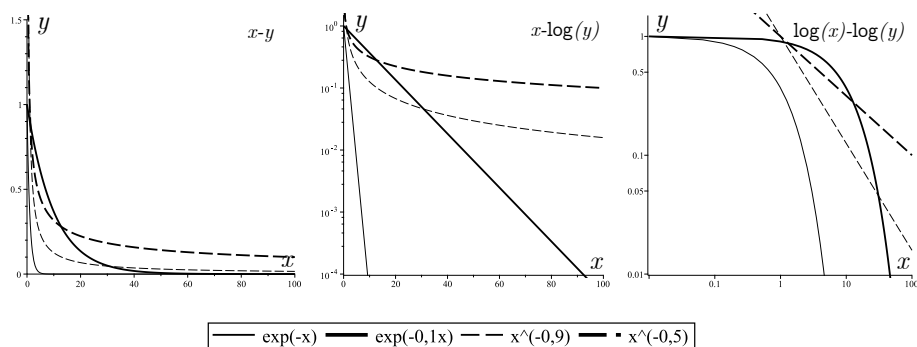
Jedním z nejvýraznějších rysů zlomkového kalkulu je asymptotické chování řešení diferenciálních rovnic, která konvergují k nule. Roli, kterou v těchto případech u klasických obyčejných diferenciálních rovnic hrají exponenciální funkce (se záporným argumentem), plní u zlomkových rovnic funkce mocninné (se zápornou mocninou). Konkrétně u lineárních zlomkových diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty je řešení y takzvaně asymptoticky ekvivalentní mocninné funkci $x^{-\gamma}$

($\gamma > 0$). Matematickým zápisem vyjádřeno:

$$y(x) \sim x^{-\gamma} \quad \text{pro } x \text{ dostatečně velké, tj. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|y(x)|}{x^{-\gamma}} = C < \infty.$$

Doplňme, že parametr γ bývá závislý na řádu zlomkové derivace α a nejčastěji nabývá hodnot α , $\alpha + 1$ či $\alpha - 1$. Toto chování se vztahuje na lineární zlomkové diferenciální rovnice skalární, vektorové, rovnice se zpožděním i rovnice s parciální zlomkovou derivací.

Experimentální data s očekávaným exponenciálním poklesem v praxi vyhodnocujeme díky převodu osy y do logaritmické škály, čímž je exponenciála zobrazena jako přímka. V případě algebraického poklesu je stejně silným a praktickým nástrojem práce v log-log škále (viz [4]). Přítomnost poklesu $x^{-\gamma}$ se totiž pak projeví jako přímka se směrnici $-\gamma$ (viz Obrázek 2).



Obrázek 2. Srovnání exponenciálních a mocninných funkcí v klasické, semilogaritmické a logaritmické škále.

Je to právě mocninný pokles, co kvalitativně odlišuje zlomkové modely od jejich klasických verzí a umožňuje jejich aplikaci v situacích dříve pro lineární rovnice nedostupných. Mocninné závislosti jsou empiricky (na log-log škálách) potvrzované v mnoha oborech a zlomkový kalkulus představuje jednu z možností, jak tyto fenomény modelovat a přispět k jejich vysvětlení. Pro představu pestrosti oborů a jevů, u kterých bylo toto chování pozorováno uvádíme výčet několika příkladů (pro více detailů i větší množství příkladů odkazujeme na knihu [8]):

- Psychologie: Reakční čas při N -té iteraci přístupu pokus-omyl $\sim N^{-0,91}$
- Psychologie: Procento správně zapamatovaných informací za čas t je $\sim t^{-\alpha}$
- Fyziologie: Pravděpodobnost doby t mezi událostmi na EEG $\sim t^{-1,61}$
- Fyzika: Pravděpodobnost doby t mezi teplotními anomáliemi $\sim t^{-2,14}$
- Fyzika: Pokles amplitudy kmitů tělesa ve viskózní kapalině v čase t je $\sim t^{-\alpha}$
- Fyzika: Pokles napětí ve polymerickém materiálu v čase t je $\sim t^{-\alpha}$
- Geofyzika: Pravděpodobnost plochy ostrova větší než a je $\sim a^{-\alpha}$
- Geofyzika: Pravděpodobnost zemětřesení síly menší než x je $\sim x^{-\alpha}$
- Geofyzika: Frekvence výskytu lesních požárů na rozloze A je $\sim A^{-1,38}$
- Informatika: Pravděpodobnost k spojení se serverem $\sim k^{-1,94}$

- **Ekonomika:** Pravděpodobnost volatility x na komoditních trzích $\sim x^{-3}$
- **Biologie:** Pravděpodobnost k sexuálních vztahů $\sim k^{-\alpha}$
- **Antropologie:** Pravděpodobnost intenzity války větší než I je $\sim I^{-1,80}$

Z pohledu teorie pravděpodobnosti výše zmíněné vztahy reprezentují rozdělení známé pod termíny rozdělení s těžkými konci, rozdělení Paretova typu či bezrozměrná rozdělení, která v sobě v nějaké formě obsahují zmiňované mocninné závislosti. Původ těchto mocninných závislostí ve většině případů není zcela jasný, existuje však několik mechanismů, které jsou k jeho vysvětlení používány. Ty nejčastější zde pro představu čtenářů s krátkým komentářem uvádíme a pro více detailů odkazuje na článek [6]:

Kombinace exponenciálních rozdělení představuje myšlenku, která byla použita k vysvětlení mocninného rozdělení frekvence délky slov. Pro ilustraci matematické stránky přístupu nyní nebudeme odvozovat původ samotných exponenciálních vztahů. Předpokládejme, že frekvence x výskytu slova délky y odpovídá asymptoticky exponenciálnímu vztahu $x \sim \exp\{by\}$, kde b je parametr. Počet možných slov s délkou y roste, takže pro pravděpodobnost, že slovo je délky y , platí $p(y) \sim \exp\{ay\}$, kde a je parametr (tedy v asymptotickém smyslu jde o exponenciální rozdělení). Pro hustotu pravděpodobnosti veličiny x pak platí mocninný zákon

$$p(x) \sim \frac{\exp\{ay\}}{b \exp\{by\}} = \frac{x^{-1+a/b}}{b}.$$

Yuleův proces modeluje mechanismus, jakým velká města přitahují relativně více obyvatel, populární filmy relativně ještě více návštěvníků, či bohaté společnosti ještě více bohatství. Výsledkem je tzv. Yuleovo rozdělení, které má těžké konce.

Samoorganizovaná kritičnost (self-organized criticality) vychází z předpokladu, že se systém sám automaticky udržuje v kritickém stavu. Kritickým stavem je myšlena kombinace systémových parametrů, kdy tzv. škálovací faktor systému (např. průměrná velikost shluků) diverguje, čímž v systému zaniká možnost škálování a objevuje se bezrozměrné rozdělení (viz [1]).

Tento mechanismus byl uplatněn v modelu lesních požárů založeném na předpokladu, že šíření požáru souvisí s hustotou porostu. Je-li hustota příliš malá, oheň se hůře šíří a zmenšuje se i oblast zasažená požárem, je-li hustota příliš velká, oheň se rozšíří na celý les. Model ukazuje, že při dosažení určité hustoty porostu začnou být požáry právě tak rozsáhlé, že je jejich efekt v rovnováze s obnovou lesa. Hustota porostu tedy stále kolísá kolem této kritické hodnoty. Podobné úvahy byly aplikovány na fenomény jako zemětřesení, laviny či sluneční erupce.

Náhodná procházka bývá sice často používána pro ilustraci původu normálního rozdělení, nicméně mnoho jejích vlastností má rozdělení s těžkými konci. Pro ilustraci: Mějme jednorozměrnou symetrickou náhodnou procházku se startem v bodě nula a sledujme počet kroků, za který se do bodu nula vrátíme zpět (tzv. čas prvního návratu). Netriviálním rozbořem se dá ukázat, že pravděpodobnost

prvního návratu po N krocích se chová jako $\sim N^{-1,5}$, což je hledané rozdělení s těžkými konci.

V následující sekci uvidíme možnosti zobecnění modelu náhodné procházky vedoucí k různým zlomkovým modelům difuze.

4. ANOMÁLNÍ DIFUZE

Difuze patří mezi základní transportní procesy a současně mezi oblasti s nejširším využitím zlomkového kalkulu. Difuze je samovolné rozptylování částic v prostoru na základě rozdílů v koncentraci látky. Je-li hybnou silou gradient koncentrace (mluvíme o Fickovu zákonu), je difuze v jednom rozměru dobře popsána klasickou rovnicí

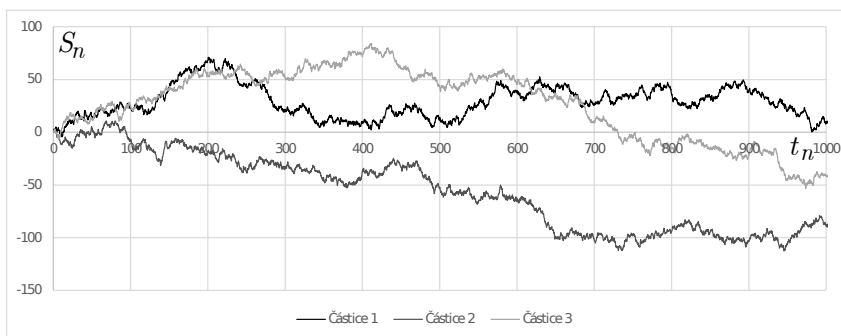
$$\frac{\partial c(x, t)}{\partial t} = A \frac{\partial^2 c(x, t)}{\partial x^2}, \quad (4.1)$$

kde $c(x, t)$ je koncentrace látky v bodě x a čase t , $A > 0$ je difuzní koeficient. V situacích, kdy Fickův zákon nevystihuje realitu, hovoříme o tzv. anomální (či nefickovské) difuzi, jejichž dva příklady si popíšeme níže (pro více detailů k odvození i způsoby řešení odkazujeme na [4]).

Klasický difuzní model vychází z rozboru pohybu částic pomocí modelu náhodné procházky. Pro jednoduchost se omezme na jednorozměrný případ. Uvažujme nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny Y_k (k přirozené číslo) představující délky skoků náhodně zvolené částice. Potom náhodná procházka

$$S_n = Y_1 + \dots + Y_n$$

vystihuje pozici této částice po n skocích. Na Obrázku 3 vidíme tři realizace náhodné procházky S_n (s časovým krokem $\Delta t_n = 0,25$) pro tři náhodně generované částice (pro $\Delta t_n \rightarrow 0$ pak taková náhodná procházka přechází ve známý Brownův pohyb).



Obrázek 3. Trajektorie pohybu tří částic, Y_k má normální rozdělení se střední hodnotou nula a rozptylem jedna.

Díky platnosti centrální limitní věty pak rozdělení pravděpodobnosti S_n konverguje k normálnímu rozdělení, které se objevuje v řešení klasické difuzní rovnice.

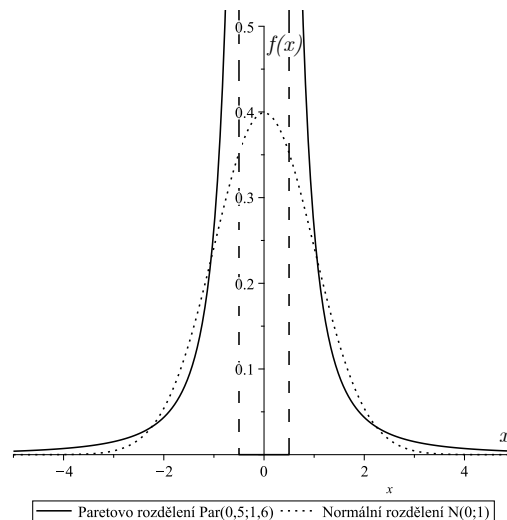
S využitím poznatků Fourierovy transformace, charakteristických funkcí rozdělení pravděpodobnosti a teorie nekonečných řad pak je možné odvodit (4.1).

Superdifuze

Kde je v přístupu náhodné procházky prostor pro zlomkovou derivaci či pro rozdělení s těžkými konci? Centrální limitní věta platí za předpokladu, že náhodné veličiny Y_k mají konečný rozptyl. V reálných aplikacích se ale stává, že délka skoků Y_k má rozdělení s těžkými konci. Jedním z příkladů může být např. symetrické Paretovo rozdělení s hustotou pravděpodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\alpha C^\alpha x^{-\alpha-1}, & x > C, \\ 0, & -C \leq x \leq C, \\ \frac{1}{2}\alpha C^\alpha |x|^{-\alpha-1}, & x < -C, \end{cases}$$

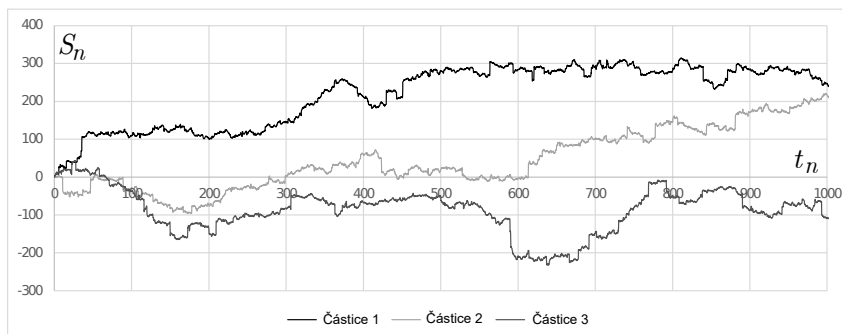
kde $C > 0$ a $1 < \alpha < 2$ jsou parametry rozdělení, viz Obrázek 4.



Obrázek 4. Srovnání průběhu normálního a Paretova rozdělení.

Příklad takto konstruované náhodné procházky S_n pro tři náhodně generované částice ukazuje Obrázek 5. Na rozdíl od klasického případu nehovoříme v limitním případě o Brownově pohybu, nýbrž o tzv. Lévyho pohybu či Lévyho letu. Ten je charakteristický „častými“ dlouhými skoky, které můžeme pozorovat na Obrázku 5 a které jsou zodpovědné za rychlé šíření látky.

Pro hodnoty parametru $\alpha \in (1, 2)$ nemá symetrické Paretovo rozdělení konečně velký rozptyl, a tedy centrální limitní věta není aplikovatelná. Za použití tzv. rozšířené centrální limitní věty můžeme odvodit, že rozdělení pravděpodobnosti S_n (s délkou skoků následujícími jakékoliv rozdělení s těžkými konci) konverguje k tzv. α -stabilnímu rozdělení (také nazývanému Lévyho rozdělení).



Obrázek 5. Lévyho pohyb tří částic, Y_k má Paretovo rozdělení s parametry $C = 0,5$ a $\alpha = 1,6$.

Zobecněním operací využitých v klasickém případě následně můžeme odvodit zlomkovou parciální diferenciální rovnici superdifuze

$$\frac{\partial c(x, t)}{\partial t} = A \mathbf{D}_x^\alpha c(x, t),$$

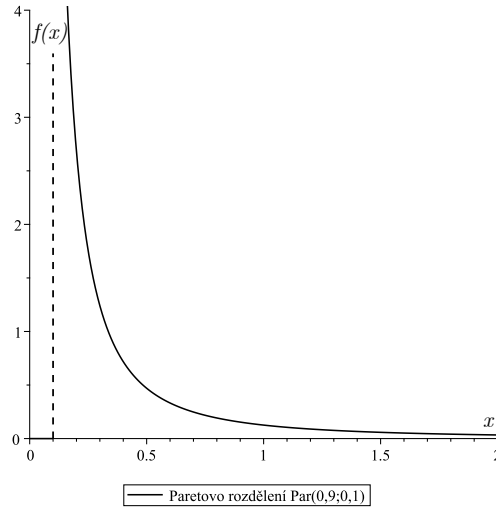
kde α je parametr Paretova rozdělení výše (a odpovídá tak řádu mocninného poklesu) a \mathbf{D}_x^α označuje speciální typ Riemannovy-Liouvilleovy derivace vůči prostorové proměnné pracující s oběma směry pohybu, kterou zde blíže z důvodu srozumitelnosti textu nebudeme komentovat.

Tento model superdifuze (nebo také rychlé difuze) se uplatňuje např. v hydrologii při šíření látky v porézním prostředí. Objevuje se třeba při studiu podzemních vod, kdy se pozorované částice šíří skrz porézní médium složené z písku, štěrku či jílu. Některé částice mají cestu prakticky přímou, jiné po cestě narážejí na výrazně vyšší odpor, čímž vzniká výrazně větší variabilita, než by odpovídalo klasickému difuznímu modelu. Řád derivace α bývá v praxi výsledkem fitování dat na logaritmické škále, nicméně objevují se i práce propojující jej s fraktální dimenzí porézního média.

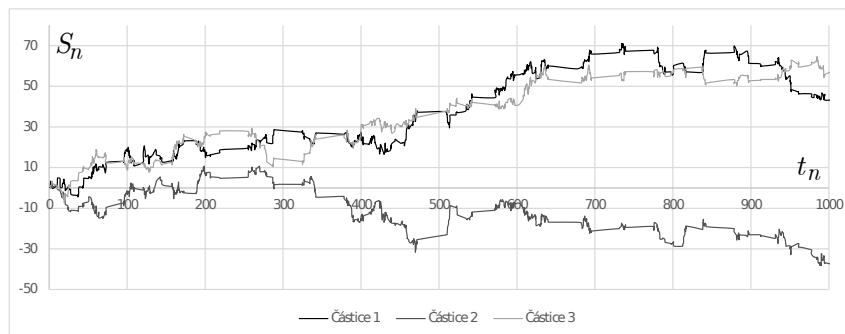
Subdifuze

V případě superdifuze se rozdělení s těžkými konci promítlo do délky skoku, který částice v daném čase učiní. Pomalá difuze je model stojící na předpokladu, že délka skoků odpovídá klasickému modelu, ale mezi jednotlivými skoky může docházet k časovým prodlevám (waiting times), jejichž délka sleduje rozdělení s těžkými konci. Přesněji předpokládáme, že n -tý skok se uskuteční po uplynutí doby t_n delší než t s pravděpodobností $\sim Bt^{-\beta}$, kde $0 < \beta < 1$. Příklad hustoty takového rozdělení, konkrétně jednostranné Paretovo rozdělení, zobrazuje Obrázek 7.

Původně diskrétní model náhodné procházky, kdy se skoky uskutečňovaly v předepsaný okamžik, tak zobecňujeme na tzv. náhodnou procházku se spojitým časem, neboli CTRW (continuous time random walk). Příklad takové náhodné procházky S_n pro 3 náhodně generované částice ukazuje Obrázek 7, kde vidíme dlouhé prodlevy mezi jednotlivými skoky.

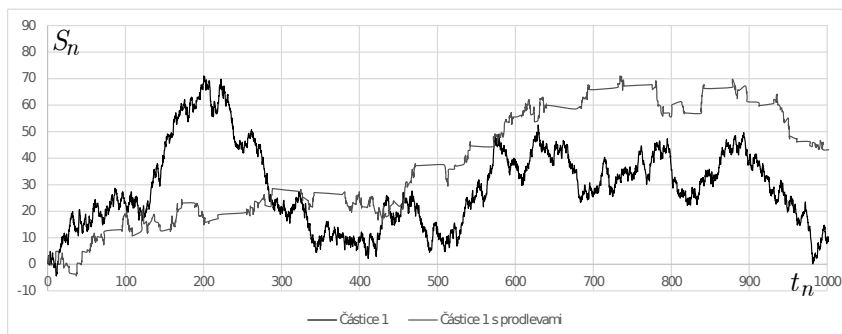


Obrázek 6. Jednostranné Paretovo rozdělení s prahem $C = 0,1$ a $\beta = 0,9$.



Obrázek 7. CTRW s prodlevami mezi skoky dle rozdělení z Obrázku 6.

Takto upravený model generuje mnohem pomalejší šíření částic. Srovnajme CTRW s klasickou náhodnou procházkou. Uvažujme dvě částice s identickou posloupností délek skoků Y_k . Jedna částice vykoná skok vždy po uplynutí časového intervalu délky 0,25, zatímco druhá částice bude čekat proměnnou délku intervalu dle rozdělení na Obrázku 6. I když výpočet ukazuje, že druhá částice má ve více než 56 % případů menší prodlevy, těžké konce rozdělení způsobí, že se v průměru bude šířit do prostoru mnohem pomaleji než první částice. Tato situace je ilustrována na Obrázku 8, kde vidíme, že částice s proměnnými prodlevami vykoná za čas $t_n = 1000$ zhruba jen čtvrtinu skoků ve srovnání s Brownovým pohybem (první maximum S_n nastává u Brownova pohybu kolem času 200, zatímco u CTRW až kolem 740).



Obrázek 8. Srovnání Brownova pohybu a CTRW; 2 částice s identickými posloupnostmi délky skoků a rozdílnými rozděleními časových prodlev.

Za pomoci podobných technik jako v případech výše pak můžeme dojít k formulaci zlomkové parciální diferenciální rovnice obsahující Caputovu zlomkovou derivaci v časové proměnné

$${}_0^C D_t^\beta c(x, t) = A \frac{\partial c(x, t)}{\partial x},$$

kde parametr β odpovídá parametru rozdělení časových prodlev.

Subdifuze je často používána např. v biologických aplikacích, kde přítomnost časových prodlev odpovídá překonávání bariér tvořených buněčnými stěnami.

Model náhodné procházky se spojitým časem představuje fyzikální vysvětlení toho, odkud se berou zlomkové modely difuze. Má-li délka skoku rozdělení s těžkými konci, dostaneme zlomkovou derivaci v prostorové proměnné. Má-li trvání prodlevy mezi skoky rozdělení s těžkými konci, objeví se zlomková derivace vůči časové proměnné. Oba jevy je možné kombinovat a pracovat tak se zlomkovými derivacemi v obou proměnných.

Pro vícerozměrné případy je zavedení prostorových zlomkových operátorů složitější, ale základní myšlenka zůstává nezměněna.

5. ZÁVĚR

Zlomkový kalkulus rychle nabývá na významu. V oblasti teorie můžeme pozorovat silné vazby na teorie pravděpodobnosti, stochastických procesů, regulární variace či chaosu. V oblasti fyzikálních a technických aplikací vidíme uplatnění schopnosti přirozeně pracovat s historií procesů a modelovat algebraický pokles veličin.

Předložili jsme přehled některých jevů, které vykazují algebraický pokles ve svých veličinách. Vzhledem k jejich různorodosti se zdá, že algebraický pokles není uměle vytvořený koncept pro nějakou konkrétní aplikaci, ale projev reálné existujících obecnějších mechanismů. Na příkladu anomální difuze jsme ukázali, jakým způsobem se dá vystavět pokročilý model obsahující zlomkovou derivaci, a to nikoliv formálním nahrazením klasické derivace za zlomkovou, nýbrž korektním postupem využívajícím statistických vlastností reálných jevů.

Podobně by bylo možné rozebrat aplikace v dynamice polymerů, teorii řízení či modelování oscilátorů ve viskózních podmínkách. Věříme, že předložené myšlenky a reference poskytnou čtenářům inspiraci a pomohou rozšířit obecné povědomí o zlomkovém kalkulu.

REFERENCE

- [1] P. Bak: *How Nature Works: The Science of Self-organized Criticality*, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [2] R. Hilfer: *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, Singapore, 2000.
- [3] F. Mainardi: *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models*, Imperial College Press, Singapore, 2010.
- [4] M. M. Meerschaert, A. Sikorskii: *Stochastic Models for Fractional Calculus*, Walter de Gruyter GmbH, Leck, 2019.
- [5] K. S. Miller, B. Ross: *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley & Sons, New York, 1993.
- [6] M. E. J. Newman: *Power laws, Pareto distribution and Zipf's law*, Contemporary Physics **46** (2005), No. 5, 232–351.
- [7] I. Podlubný: *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 1999.
- [8] B. J. West, P. Grigolini: *Complex Webs: Anticipating the Improbable*, Cambridge, 2011.

Tomáš Kisela, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: kisela@fme.vutbr.cz

FLOQUETOVA TEORIE PRO LINEÁRNÍ OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 2. ŘÁDU S PERIODICKÝMI KOEFIČIENTY I

JIRÍ ŠREMR

ABSTRAKT. Článek má za cíl seznámit čtenáře se základy Floquetovy teorie pro lineární diferenciální rovnice 2. řádu s periodickými koeficienty. Zavedeme základní pojmy této teorie (zejména pojem Floquetova multiplikátoru), přičemž využijeme postup popsáný v monografii [2]. Dále ukážeme, v jakém tvaru můžeme najít fundamentální systém řešení studované rovnice určený Floquetovými multiplikátory a jak lze tuto informaci použít v otázce existence kmitů volného lineárního oscilátoru s nekonstantními tlumícími a tuhostními koeficienty, které se zcela utlumí při $t \rightarrow +\infty$.

1. ODVOZENÍ CHARAKTERISTICKÉ ROVNICE, FLOQUETOVY MULTIPLIKÁTORY

Floquetova teorie pro diferenciální rovnice vyšších řádů a její použití v otázce stability diferenciálních rovnic patří do pokročilejších partií kvalitativní teorie diferenciálních rovnic. V běžné literatuře je obvykle vybudována pro lineární soustavy diferenciálních rovnic s periodickou maticovou funkcí a poté jsou odvozeny důsledky pro lineární diferenciální rovnice vyšších řádů. My zde však použijeme alternativní postup, který je popsán například v monografii [2, Hlava VI, §1], a vybudujeme základy Floquetovy teorie přímo pro lineární diferenciální rovnice vyšších řádů. Navíc se zde z důvodu jednodušších formulací a lepší pochopitelnosti pojmů omezíme na diferenciální rovnice 2. řádu.

Uvažujme tedy diferenciální rovnici

$$x'' + g(t)x' + p(t)x = 0, \tag{1.1}$$

v níž jsou koeficienty $p, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lokálně lebesgueovsky integrovatelné ω -periodické funkce. Řešením rovnice (1.1) rozumíme funkci $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která je absolutně spojitá spolu se svou derivací na každém kompaktním intervalu v \mathbb{R} a která po dosazení splňuje rovnost (1.1) skoro všude v \mathbb{R} . Čtenáři, kteří nejsou zvyklí pracovat s rovnicemi s integrovatelnými koeficienty, mohou bez problémů uvažovat koeficienty g a p spojitě a řešení uvažovat ve třídě funkcí se spojitou 2. derivací.

Nejprve si všimněme, že předpoklad ω -periodičnosti koeficientů g a p je podmínkou nutnou pro existenci ω -periodického řešení rovnice (1.1), nikoliv však

2020 MSC. Primární 34A30; Sekundární 34D05, 34C25.

Klíčová slova. Diferenciální rovnice 2. řádu, Floquetova teorie.

postačující. Následující příklady ukazují, že prostor všech ω -periodických řešení rovnice (1.1) může být jak nulový, tak jedno či dvoudimenzionální.

Příklad 1.1. Fundamentální systém řešení diferenciální rovnice

$$x'' + x' - 2x = 0 \quad (1.2)$$

tvoří funkce $x_1(t) = e^t$ a $x_2(t) = e^{-2t}$, a proto rovnice (1.2) nemá žádné netriviální periodické řešení. To však znamená, že pro libovolné $\omega > 0$ je prostor všech ω -periodických řešení rovnice (1.2) nulový.

Poznámka 1.2. V předchozím příkladu jsme uvažovali diferenciální rovnici s konstantními koeficienty. Není však složité sestavit také příklad rovnice s nekonstantními – avšak ω -periodickými – koeficienty takové, že prostor všech jejích ω -periodických řešení je nulový. Je totiž možné dokázat následující tvrzení: Jestliže koeficient p v rovnici (1.1) splňuje podmínku

$$p(t) \leq 0 \quad \text{pro s. v. } t \in [0, \omega], \quad p(t) \not\equiv 0,$$

pak má tato rovnice kladná lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 taková, že

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} x_1(t) &= 0, & \lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) &= +\infty, \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} x_2(t) &= +\infty, & \lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) &= 0, \end{aligned}$$

a nemá tedy žádné netriviální ω -periodické řešení.

Příklad 1.3. Mějme $\omega = 2\pi$ a uvažujme diferenciální rovnici

$$x'' + \frac{\sin t}{2 + \sin t} x = 0. \quad (1.3)$$

Tato rovnice má řešení $x_1(t) = 2 + \sin t$, které je zřejmě ω -periodické. Najdeme řešení x_2 rovnice (1.3) lineárně nezávislé s x_1 . Všimněme si, že každé řešení x rovnice (1.3) splňuje

$$\begin{aligned} W[x_1, x](t) &= \det \begin{pmatrix} x_1(t) & x(t) \\ x_1'(t) & x'(t) \end{pmatrix} = x_1(t)x'(t) - x(t)x_1'(t) \\ &= (2 + \sin t)x'(t) - x(t) \cos t \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

kde $W[x_1, x]$ je wronskián řešení x_1, x , a navíc platí

$$W[x_1, x](t) = W[x_1, x](0) = 2x'(0) - x(0) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R},$$

což vyplývá z důsledku Liouvilleovy formule pro diferenciální rovnice vyšších řádů (viz např. [1, Kapitola III, sekce 2]). Označme x_2 řešení diferenciální rovnice (1.3) splňující počáteční podmínky

$$x_2(0) = 0, \quad x_2'(0) = \frac{1}{2}.$$

Z výše uvedených vztahů dostáváme

$$W[x_1, x_2](t) = 1 \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}$$

a

$$(2 + \sin t)x_2'(t) - x_2(t) \cos t = 1 \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

To však znamená, že řešení x_2 rovnice (1.3) je lineárně nezávislé s x_1 a navíc je x_2 řešením lineární diferenciální rovnice 1. řádu

$$y' = \frac{\cos t}{2 + \sin t} y + \frac{1}{2 + \sin t}.$$

Obecné řešení této rovnice je tvaru

$$y(t) = \left(c + \int_0^t \frac{1}{(2 + \sin s)^2} ds \right) (2 + \sin t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$$

a námi hledané řešení x_2 získáme v tomto systému funkcí volbou $c = 0$.

Našli jsme tak fundamentální systém řešení rovnice (1.3) tvaru

$$x_1(t) = 2 + \sin t, \quad x_2(t) = (2 + \sin t) \int_0^t \frac{1}{(2 + \sin s)^2} ds.$$

Přímým výpočtem zjistíme, že

$$\begin{aligned} x_2(t + \omega) &= (2 + \sin(t + 2\pi)) \int_0^{t+2\pi} \frac{1}{(2 + \sin s)^2} ds \\ &= (2 + \sin t) \int_0^{t+2\pi} \frac{1}{(2 + \sin s)^2} ds \\ &= x_2(t) + x_1(t) \int_t^{t+2\pi} \frac{1}{(2 + \sin s)^2} ds \\ &= x_2(t) + x_1(t) \int_0^{2\pi} \frac{1}{(2 + \sin s)^2} ds \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

tedy řešení x_2 není ω -periodické. Odtud vyplývá, že prostor všech ω -periodických řešení rovnice (1.3) je jednodimenzionální.

Příklad 1.4. Pro $\omega > 0$ uvažujme diferenciální rovnici

$$x'' + \frac{4\pi^2}{\omega^2} x = 0. \tag{1.5}$$

Fundamentální systém řešení této rovnice je tvaru $x_1(t) = \cos\left(\frac{2\pi t}{\omega}\right)$, $x_2(t) = \sin\left(\frac{2\pi t}{\omega}\right)$, a proto je každé její řešení ω -periodické. To však znamená, že prostor všech ω -periodických řešení rovnice (1.5) je dvoudimenzionální.

V příkladu 1.1 vidíme, že lineární diferenciální rovnice s ω -periodickými koeficienty nemusí mít žádná netriviální ω -periodická řešení. Pro dané $\omega > 0$ má však rovnice (1.2) lineárně nezávislá řešení x_1 , x_2 , která místo ω -periodicity splňují podmínky

$$x_1(t + \omega) = e^\omega x_1(t), \quad x_2(t + \omega) = e^{-2\omega} x_2(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

Uvažujme proto otázku existence netriviálního řešení rovnice (1.1) splňujícího podmínku

$$x(t + \omega) = \varrho x(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \tag{1.6}$$

kde $\varrho \in \mathbb{C}$. V případě $\varrho \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ samozřejmě uvažujeme komplexní řešení diferenciální rovnice (1.1), v níž jsou však koeficienty funkce reálné. Všimněme si,

že otázka existence ω -periodického řešení rovnice (1.1) je zahrnuta v úloze (1.1), (1.6), v níž $\varrho = 1$.

Nechť x_1, x_2 je reálný fundamentální systém řešení rovnice (1.1). Jelikož jsou koeficienty p, g periodické s periodou ω , funkce

$$y_1(t) := x_1(t + \omega), \quad y_2(t) := x_2(t + \omega) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R} \quad (1.7)$$

jsou také řešení rovnice (1.1), a proto je lze vyjádřit jako lineární kombinace

$$y_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t), \quad y_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \quad (1.8)$$

kde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$ jsou vhodné konstanty. Řešení x úlohy (1.1), (1.6) budeme hledat ve tvaru

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R},$$

kde $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Toto řešení splňuje podmínku (1.6) právě tehdy, když

$$c_1x_1(t + \omega) + c_2x_2(t + \omega) = \varrho[c_1x_1(t) + c_2x_2(t)] \quad \text{pro } t \in \mathbb{R},$$

odkud vzhledem k (1.7) a (1.8) dostáváme

$$[c_1a_{11} + c_2a_{21} - c_1\varrho]x_1(t) + [c_1a_{12} + c_2a_{22} - c_2\varrho]x_2(t) = 0 \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

Řešení x_1, x_2 jsou však lineárně nezávislá, a proto je předchozí vztah splněn právě tehdy, když jsou konstanty c_1, c_2 řešením soustavy algebraických lineárních rovnic

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \varrho & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} - \varrho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dokázali jsme tak, že úloha (1.1), (1.6) má netriviální (eventuálně komplexní) řešení právě tehdy, když konstanta $\varrho \in \mathbb{C}$ splňuje

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \varrho & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} - \varrho \end{pmatrix} = 0. \quad (1.9)$$

Rovnici (1.9) nazýváme **charakteristickou rovnicí** diferenciální rovnice (1.1) a matici

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \varrho & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} - \varrho \end{pmatrix}$$

nazýváme **charakteristickou maticí**. Rozepíšeme-li příslušný determinant, můžeme vztah (1.9) přepsat do tvaru

$$\varrho^2 - (\text{tr } A)\varrho + \det A = 0, \quad (1.10)$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Nyní ukážeme, že charakteristická rovnice (1.10) nezávisí na zvoleném fundamentálním systému řešení, pomocí kterého jsme matici A vytvořili. Mějme tedy ještě jiný fundamentální systém řešení \hat{x}_1, \hat{x}_2 diferenciální rovnice (1.1). Oba systémy x_1, x_2 a \hat{x}_1, \hat{x}_2 tvoří bázi vektorového prostoru všech řešení rovnice (1.1), existuje tedy regulární matice $B = (b_{ik})_{i,k=1}^2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ taková, že

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

Odtud a s použitím (1.7), (1.8) a (1.11) dostáváme

$$\begin{pmatrix} \widehat{x}_1(t + \omega) \\ \widehat{x}_2(t + \omega) \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_1(t + \omega) \\ x_2(t + \omega) \end{pmatrix} = BA \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = BAB^{-1} \begin{pmatrix} \widehat{x}_1(t) \\ \widehat{x}_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

Použitím tohoto vztahu místo (1.7) a (1.8) ukážeme analogicky jako výše, že úloha (1.1), (1.6) má netriviální (eventuálně komplexní) řešení právě tehdy, když konstanta $\varrho \in \mathbb{C}$ splňuje

$$\varrho^2 - \text{tr}(BAB^{-1})\varrho + \det(BAB^{-1}) = 0.$$

Prímým výpočtem však lehce ověříme, že

$$\text{tr}(BAB^{-1}) = \text{tr} A \quad \text{a} \quad \det(BAB^{-1}) = \det A.$$

Proto je charakteristická rovnice jednoznačně přiřazena k diferenciální rovnici (1.1) a nezáleží na fundamentálním systému řešení, pomocí kterého ji vytvoříme. Odvoďme nakonec tvar charakteristické rovnice pomocí fundamentálního systému řešení rovnice (1.1), který je často uvažován i v jiných oblastech kvalitativní teorie diferenciálních rovnic, například v teorii okrajových úloh či oscilační teorii.

Označme u_1 a u_2 řešení lineární rovnice (1.1) splňující počáteční podmínky

$$u_1(0) = 1, \quad u_1'(0) = 0 \quad \text{a} \quad u_2(0) = 0, \quad u_2'(0) = 1. \quad (1.12)$$

Řešení u_1, u_2 zřejmě tvoří fundamentální systém řešení rovnice (1.1). Stejným postupem jako výše dostaneme

$$u_1(t + \omega) = a_{11}u_1(t) + a_{12}u_2(t), \quad u_2(t + \omega) = a_{21}u_1(t) + a_{22}u_2(t) \quad (1.13)$$

pro $t \in \mathbb{R}$, odkud plyne

$$u_1(\omega) = a_{11}, \quad u_2(\omega) = a_{21}. \quad (1.14)$$

Derivací rovností (1.13) a následným dosazením za $t = 0$ získáme

$$u_1'(\omega) = a_{12}, \quad u_2'(\omega) = a_{22}. \quad (1.15)$$

Použijeme-li vztahy (1.14), (1.15) a výraz (1.9) pro charakteristickou rovnici, obdržíme

$$\det \begin{pmatrix} u_1(\omega) - \varrho & u_2(\omega) \\ u_1'(\omega) & u_2'(\omega) - \varrho \end{pmatrix} = 0, \quad (1.16)$$

nebo-li

$$\varrho^2 - (u_1(\omega) + u_2'(\omega))\varrho + \det \begin{pmatrix} u_1(\omega) & u_2(\omega) \\ u_1'(\omega) & u_2'(\omega) \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Všimněme si ještě, že determinant v předchozí rovnici je hodnotou wronskiánu řešení u_1, u_2 v bodě ω a použijeme-li důsledek Liouvilleovy formule pro diferenciální rovnice vyšších řádů (viz např. [1, Kapitola III, sekce 2]), dostaneme

$$\det \begin{pmatrix} u_1(\omega) & u_2(\omega) \\ u_1'(\omega) & u_2'(\omega) \end{pmatrix} = W[u_1, u_2](\omega) = W[u_1, u_2](0) e^{-\int_0^\omega g(s) ds} = e^{-\int_0^\omega g(s) ds}.$$

Závěrem výše uvedené diskuze je následující definice a tvrzení.

Definice 1.5. Kořeny charakteristické rovnice

$$\varrho^2 - (u_1(\omega) + u_2'(\omega))\varrho + e^{-\int_0^\omega g(s)ds} = 0 \quad (1.18)$$

kde u_1, u_2 jsou řešení rovnice (1.1) splňující počáteční podmínky (1.12) a ω je perioda koeficientů p a q , nazýváme **Floquetovy multiplikátory** diferenciální rovnice (1.1).

Tvrzení 1.6. Úloha (1.1), (1.6) má netriviální (eventuálně komplexní) řešení právě tehdy, když je ϱ Floquetovým multiplikátorem diferenciální rovnice (1.1).

Poznámka 1.7. V úvodu článku jsme zmínili, že je Floquetova teorie obvykle vybudována pro soustavy lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu s ω -periodickou maticovou funkcí a poté jsou odvozeny důsledky pro lineární diferenciální rovnice vyšších řádů. Pro lineární soustavu

$$y' = P(t)y \quad (1.19)$$

s ω -periodickou maticovou funkcí P jsou Floquetovy multiplikátory definovány jako vlastní čísla tzv. **matice monodromie** $Y(\omega)$, kde Y je fundamentální matice soustavy (1.19) splňující podmínku $Y(0) = I$ (viz např. [3, Hlava II, §2]).

Uvažujme tedy soustavu lineárních diferenciálních rovnic

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p(t) & -g(t) \end{pmatrix} y \quad (1.20)$$

odpovídající diferenciální rovnici (1.1) a připomeňme, že řešení rovnice (1.1) a soustavy (1.20) jsou v následujícím vztahu: Je-li funkce x řešením rovnice (1.1), pak je vektorová funkce $y = (x, x')$ řešením soustavy (1.20). Naopak, je-li vektorová funkce $y = (y_1, y_2)$ řešením soustavy (1.20), pak $y_2 = y_1'$ a funkce y_1 je řešením rovnice (1.1). Fundamentální matice Y soustavy (1.20) splňující podmínku $Y(0) = I$ je tedy tvaru

$$Y(\omega) = \begin{pmatrix} u_1(\omega) & u_2(\omega) \\ u_1'(\omega) & u_2'(\omega) \end{pmatrix},$$

kde u_1, u_2 jsou řešení rovnice (1.1) splňující počáteční podmínky (1.12). Odtud okamžitě vidíme, že Floquetovy multiplikátory rovnice (1.1) zavedené v definici 1.5 jsou skutečně vlastními čísly matice monodromie soustavy (1.20).

V závěru této sekce se budeme věnovat diferenciální rovnici s konstantními koeficienty

$$x'' + g_0x' + p_0x = 0, \quad (1.21)$$

kde $p_0, g_0 \in \mathbb{R}$. Jedná se o speciální případ rovnice (1.1), jejíž koeficienty jsou funkce periodické s libovolnou periodou $\omega > 0$. Ačkoliv jsou kořeny „klasické“ charakteristické rovnice

$$\lambda^2 + g_0\lambda + p_0 = 0 \quad (1.22)$$

příslušné k (1.21) určené diferenciální rovnicí (1.21) jednoznačně, Floquetovy multiplikátory rovnice (1.21) jsou závislé na uvažované hodnotě periody ω . Lehce lze ukázat, že je-li $\omega > 0$ a λ je kořenem „klasické“ charakteristické rovnice (1.22), pak je $\varrho = e^{\lambda\omega}$ Floquetovým multiplikátorem diferenciální rovnice (1.21) pro dané ω .

Vskutku, je-li λ kořenem „klasické“ charakteristické rovnice (1.22), diferenciální rovnice (1.21) má (eventuálně komplexní) řešení $x(t) = e^{\lambda t}$, pro které zřejmě platí

$$x(t + \omega) = e^{\lambda(t+\omega)} = e^{\lambda\omega} x(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

Z tvrzení 1.6 pak okamžitě plyne, že $\varrho = e^{\lambda\omega}$ je Floquetův multiplikátor diferenciální rovnice (1.21) pro dané ω .

Připomeňme ještě, jak lze najít lineárně nezávislá řešení rovnice (1.21), známe-li kořeny její „klasické“ charakteristické rovnice (1.22).

Tvrzení 1.8. *Nechť λ_1, λ_2 jsou kořeny charakteristické rovnice (1.22). Pak platí:*

- (1) *Jestliže $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ a $\lambda_1 \neq \lambda_2$, pak má rovnice (1.21) lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 tvaru*

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad x_2(t) = e^{\lambda_2 t} \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

- (2) *Jestliže $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda_0$, pak má rovnice (1.21) lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 tvaru*

$$x_1(t) = e^{\lambda_0 t}, \quad x_2(t) = t e^{\lambda_0 t} \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

- (3) *Jestliže $\lambda_{1,2} = \mu \pm \nu i$, kde $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ a $\nu > 0$, pak má rovnice (1.21) lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 tvaru*

$$x_1(t) = e^{\mu t} \cos(\nu t), \quad x_2(t) = e^{\mu t} \sin(\nu t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

V následující části ukážeme, v jakém tvaru lze najít lineárně nezávislá řešení rovnice (1.1), známe-li její Floquetovy multiplikátory (viz větu 2.6).

2. FUNDAMENTÁLNÍ SYSTÉM ŘEŠENÍ ROVNICE (1.1) URČENÝ FLOQUETOVÝMI MULTIPLIKÁTORY

Uvažujme opět fundamentální systém řešení rovnice (1.1) jako její řešení u_1, u_2 splňující počáteční podmínky (1.12). Z předchozí části víme, že Floquetovy multiplikátory jsou čísla ϱ , která nulují determinant charakteristické matice

$$\begin{pmatrix} u_1(\omega) - \varrho & u_2(\omega) \\ u_1'(\omega) & u_2'(\omega) - \varrho \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Uděláme nyní krátkou vsuvku a ukážeme, jak vypadá charakteristická matice lineární diferenciální rovnice vyššího řádu

$$x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(t)x' + p_n(t)x = 0, \quad (2.2)$$

kde p_1, \dots, p_n jsou ω -periodické funkce. Nebudeme vše znovu detailně rozepisovat, to určitě zvládne čtenář udělat sám. Označíme-li u_1, \dots, u_n řešení rovnice (2.2) splňující počáteční podmínky

$$u_i^{(k-1)}(0) = \delta_{ik} \quad \text{pro } i, k \in \{1, \dots, n\},$$

kde δ_{ik} je Kronekerovo delta, zřejmě tyto funkce tvoří fundamentální systém řešení rovnice (2.2). Charakteristická matice rovnice (2.2) je proto tvaru

$$\begin{pmatrix} u_1(\omega) - \varrho & u_2(\omega) & \dots & u_n(\omega) \\ u_1'(\omega) & u_2'(\omega) - \varrho & \dots & u_n'(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(\omega) & u_2^{(n-1)}(\omega) & \dots & u_n^{(n-1)}(\omega) - \varrho \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

a Floquetovy multiplikátory jsou pak čísla ϱ , která nulují její determinant. Lze ukázat, že pro každý Floquetův multiplikátor ϱ rovnice (2.2) s násobností ℓ existuje právě ℓ lineárně nezávislých řešení rovnice (2.2), které je možné rozdělit do podskupin odpovídajícím tzv. elementárním dělitelům charakteristické matice (2.3) (viz např. [2, Hlava VI, §1, sekce 5]). Tyto elementární dělitele lze získat následovně. Pro každé $k \in \{1, \dots, n\}$ nechť je $D_k(\varrho)$ největší společný dělitel všech minorů¹ matice (2.3) řádu k . Položme $D_0(\varrho) := 1$,

$$p_k(\varrho) := \frac{D_k(\varrho)}{D_{k-1}(\varrho)} \quad \text{pro } k = 1, \dots, n$$

a vyberme všechny faktory $p_1(\varrho), \dots, p_\nu(\varrho)$ různé od 1. Každý vybraný faktor $p_k(\varrho)$ je polynom s reálnými koeficienty stupně $s(k) \geq 1$ a rozložíme-li ho v komplexním oboru na součin kořenových činitelů, dostaneme

$$p_k(\varrho) = (\varrho - \varrho_{k,1})^{m_{k,1}} \dots (\varrho - \varrho_{k,s(k)})^{m_{k,s(k)}},$$

kde $\varrho_{k,1}, \dots, \varrho_{k,s(k)}$ jsou navzájem různé Floquetovy multiplikátory rovnice (1.1) a $m_{k,1} + \dots + m_{k,s(k)} = s(k)$. Takto získané výrazy $(\varrho - \varrho_{k,i})^{m_{k,i}}$, $k = 1, \dots, \nu$ a $i = 1, \dots, s(k)$, jsou elementárními děliteli charakteristické matice (2.3). Všimněme si, že zde může být $\varrho_{k_1,i} = \varrho_{k_2,j}$ pro nějaká $k_1, k_2 \in \{1, \dots, \nu\}$, $k_1 \neq k_2$ a $i \in \{1, \dots, s(k_1)\}$, $j \in \{1, \dots, s(k_2)\}$.

Pro diferenciální rovnice 2. řádu máme pouze tři možnosti:

- (1) Rovnice (1.1) má dva různé Floquetovy multiplikátory $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathbb{C}$ a elementární dělitele charakteristické matice (2.1) jsou

$$\varrho - \varrho_1, \quad \varrho - \varrho_2.$$

- (2) Rovnice (1.1) má Floquetův multiplikátor $\varrho_0 \in \mathbb{R}$ s násobností 2 a elementární dělitele charakteristické matice (2.1) jsou

$$\varrho - \varrho_0, \quad \varrho - \varrho_0.$$

- (3) Rovnice (1.1) má Floquetův multiplikátor $\varrho_0 \in \mathbb{R}$ s násobností 2 a elementární dělitel charakteristické matice (2.1) je

$$(\varrho - \varrho_0)^2.$$

Lze tedy dokázat následující tvrzení.

¹Tj. determinantů čtvercových submatic.

Tvrzení 2.1. *Nechť $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathbb{R}$, $\varrho_1 \neq \varrho_2$, jsou Floquetovy multiplikátory rovnice (1.1). Pak existují (reálná) lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice (1.1) splňující*

$$x_1(t + \omega) = \varrho_1 x_1(t), \quad x_2(t + \omega) = \varrho_2 x_2(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

Tvrzení 2.2. *Nechť $\varrho_0 \in \mathbb{R}$ je Floquetův multiplikátor rovnice (1.1) s násobností 2. Pak existují (reálná) lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice (1.1) splňující buď*

$$x_1(t + \omega) = \varrho_0 x_1(t), \quad x_2(t + \omega) = \varrho_0 x_2(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R} \quad (2.5)$$

nebo

$$x_1(t + \omega) = \varrho_0 x_1(t), \quad x_2(t + \omega) = \varrho_0 x_2(t) + x_1(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Tvrzení 2.3. *Nechť $\varrho_{1,2} = a \pm bi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $b > 0$, jsou Floquetovy multiplikátory rovnice (1.1). Pak existují (reálná) lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice (1.1) splňující*

$$x_1(t + \omega) = ax_1(t) - bx_2(t), \quad x_2(t + \omega) = bx_1(t) + ax_2(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

Příklady potvrzující možná chování lineárně nezávislých řešení rovnice (1.1) uvedená v tvrzeních 2.1 a 2.3 lze snadno sestavit pro rovnici s konstantními koeficienty a vhodné hodnoty periody ω . Fakt, že obě možnosti (2.5) a (2.6) v tvrzení 2.2 mohou opravdu nastat, ukážeme v následujících příkladech.

Příklad 2.4. Mějme $\omega = 2\pi$ a uvažujme diferenciální rovnici

$$x'' + x = 0. \quad (2.7)$$

Kořeny „klasické“ charakteristické rovnice jsou $\lambda_{1,2} = \pm i$ a jak jsme ukázali v závěru předchozí sekce, odpovídající Floquetovy multiplikátory jsou $\varrho_{1,2} = e^{\pm i2\pi}$, tj. $\varrho_{1,2} = 1$. Rovnice (2.7) má lineárně nezávislá řešení

$$x_1(t) = \cos t, \quad x_2(t) = \sin t \quad \text{pro } t \in \mathbb{R},$$

kteřá splňují podmínku (2.5), v níž je samozřejmě $\varrho_0 = 1$.

Příklad 2.5. Mějme $\omega = 2\pi$ a uvažujme diferenciální rovnici (1.3). Použijeme její lineárně nezávislá řešení uvedená v příkladu 1.3, sestojíme fundamentální systém řešení jako její řešení u_1, u_2 splňující počáteční podmínky (1.12) a dostaneme

$$u_1(t) = (2 + \sin t) \left(\frac{1}{2} - \int_0^t \frac{1}{(2 + \sin s)^2} ds \right) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}$$

a

$$u_2(t) = 2(2 + \sin t) \int_0^t \frac{1}{(2 + \sin s)^2} ds \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}$$

Odtud

$$u_1(2\pi) = 1 - 2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{(2 + \sin s)^2} ds, \quad u_2'(2\pi) = 2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{(2 + \sin s)^2} ds + 1,$$

a proto je charakteristická rovnice příslušná diferenciální rovnici (1.3) tvaru $\varrho^2 - 2\varrho + 1 = 0$, viz (1.18). Floquetovy multiplikátory rovnice (1.3) jsou tedy $\varrho_{1,2} = 1$. Z příkladu 1.3 také vyplývá, že má rovnice (1.3) lineárně nezávislá řešení

$$x_1(t) = (2 + \sin t) \int_0^{2\pi} \frac{1}{(2 + \sin s)^2} ds, \quad x_2(t) = (2 + \sin t) \int_0^t \frac{1}{(2 + \sin s)^2} ds,$$

která splňují podmínku (2.6), v níž je samozřejmě $\varrho_0 = 1$.

Nyní již ukážeme, v jakém tvaru lze najít lineárně nezávislá řešení rovnice (1.1), známe-li její Floquetovy multiplikátory. V následující větě označme $AC_{loc}^1(\mathbb{R})$ množinu funkcí, které jsou absolutně spojité spolu s jejich derivací na každém kompaktním intervalu v \mathbb{R} .

Věta 2.6. *Nechť ϱ_1, ϱ_2 jsou Floquetovy multiplikátory rovnice (1.1). Pak platí:*

- (1) *Jestliže $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathbb{R}$ a $\varrho_1 \neq \varrho_2$, pak $\varrho_1\varrho_2 > 0$ a existují lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice (1.1) splňující*

$$x_1(t) = e^{\frac{\ln|\varrho_1|}{\omega}t} \varphi_1(t), \quad x_2(t) = e^{\frac{\ln|\varrho_2|}{\omega}t} \varphi_2(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \quad (2.8)$$

kde $\varphi_1, \varphi_2 \in AC_{loc}^1(\mathbb{R})$ jsou ω -periodické (resp. 2ω -periodické) funkce, je-li $\varrho_1 > 0$ (resp. $\varrho_1 < 0$).

- (2) *Jestliže $\varrho_1 = \varrho_2 =: \varrho_0$, pak existují lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice (1.1) splňující buď*

$$x_1(t) = e^{\frac{\ln|\varrho_0|}{\omega}t} \varphi_1(t), \quad x_2(t) = e^{\frac{\ln|\varrho_0|}{\omega}t} \varphi_2(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R} \quad (2.9)$$

nebo

$$x_1(t) = e^{\frac{\ln|\varrho_0|}{\omega}t} \varphi_1(t), \quad x_2(t) = e^{\frac{\ln|\varrho_0|}{\omega}t} [t\varphi_1(t) + \varphi_2(t)] \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \quad (2.10)$$

kde $\varphi_1, \varphi_2 \in AC_{loc}^1(\mathbb{R})$ jsou ω -periodické (resp. 2ω -periodické) funkce, je-li $\varrho_0 > 0$ (resp. $\varrho_0 < 0$).

- (3) *Jestliže $\varrho_{1,2} = \varrho_0 e^{\pm i\vartheta}$, kde $\varrho_0 > 0$ a $\vartheta \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$, pak existují lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice (1.1) splňující*

$$x_1(t) = e^{\frac{\ln \varrho_0}{\omega}t} \left[\varphi_1(t) \cos \frac{\vartheta t}{\omega} - \varphi_2(t) \sin \frac{\vartheta t}{\omega} \right] \quad \text{pro } t \in \mathbb{R} \quad (2.11)$$

a

$$x_2(t) = e^{\frac{\ln \varrho_0}{\omega}t} \left[\varphi_1(t) \sin \frac{\vartheta t}{\omega} + \varphi_2(t) \cos \frac{\vartheta t}{\omega} \right] \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \quad (2.12)$$

kde $\varphi_1, \varphi_2 \in AC_{loc}^1(\mathbb{R})$ jsou ω -periodické funkce.

Důkaz. Část (1): Nechť $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathbb{R}$ a $\varrho_1 \neq \varrho_2$. Jelikož jsou ϱ_1, ϱ_2 kořeny charakteristické rovnice (1.18), z Vietových vztahů okamžitě plyne $\varrho_1\varrho_2 > 0$, tj. $\text{sgn}(\varrho_1) = \text{sgn}(\varrho_2)$. Podle tvrzení 2.1 existují lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice (1.1) splňující podmínku (2.4). Definujme funkce φ_1, φ_2 vztahem

$$\varphi_k(t) := e^{-\frac{\ln|\varrho_k|}{\omega}t} x_k(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2. \quad (2.13)$$

Zřejmě $\varphi_1, \varphi_2 \in AC_{loc}^1(\mathbb{R})$ a vzhledem k (2.4) dostaneme

$$\begin{aligned}\varphi_k(t + \omega) &= e^{-\frac{\ln|\varrho_k|}{\omega}(t+\omega)} x_k(t + \omega) \\ &= e^{-\frac{\ln|\varrho_k|}{\omega}t} \frac{1}{|\varrho_k|} \varrho_k x_k(t) = \operatorname{sgn}(\varrho_k) \varphi_k(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

To však znamená, že funkce φ_1, φ_2 jsou ω -periodické (resp. 2ω -periodické), je-li $\varrho_1 > 0$ (resp. $\varrho_1 < 0$). Z (2.13) tedy vyplývá, že lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice (1.1) jsou tvaru (2.8).

Část (2): Necht' $\varrho_1 = \varrho_2 =: \varrho_0$. Pak $\varrho_0 \in \mathbb{R}$ je kořen charakteristické rovnice (1.18) s násobností 2, a proto podle tvrzení 2.2 existují lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice (1.1) splňující buď (2.5) nebo (2.6).

Jestliže x_1, x_2 splňují podmínku (2.5), analogicky jako v důkazu části (1) ukážeme, že jsou x_1, x_2 tvaru (2.9), kde $\varphi_1, \varphi_2 \in AC_{loc}^1(\mathbb{R})$ jsou ω -periodické (resp. 2ω -periodické) funkce, je-li $\varrho_0 > 0$ (resp. $\varrho_0 < 0$).

Předpokládejme nyní, že x_1, x_2 splňují podmínku (2.6). Definujme funkce φ_1, φ_2 vztahy

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &:= \frac{1}{\varrho_0 \omega} e^{-\frac{\ln|\varrho_0|}{\omega}t} x_1(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \\ \varphi_2(t) &:= e^{-\frac{\ln|\varrho_0|}{\omega}t} x_2(t) - t\varphi_1(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Zřejmě $\varphi_1, \varphi_2 \in AC_{loc}^1(\mathbb{R})$. Analogicky jako v důkazu části (1) ukážeme, že φ_1 splňuje

$$\varphi_1(t + \omega) = \operatorname{sgn}(\varrho_0) \varphi_1(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.\tag{2.15}$$

Dále vzhledem (2.6) a (2.15) dostaneme

$$\begin{aligned}\varphi_2(t + \omega) &= e^{-\frac{\ln|\varrho_0|}{\omega}(t+\omega)} x_2(t + \omega) - (t + \omega)\varphi_1(t + \omega) \\ &= e^{-\frac{\ln|\varrho_0|}{\omega}t} \frac{1}{|\varrho_0|} \left[\varrho_0 x_2(t) + x_1(t) \right] - \operatorname{sgn}(\varrho_0)(t + \omega)\varphi_1(t) \\ &= \operatorname{sgn}(\varrho_0) \left[e^{-\frac{\ln|\varrho_0|}{\omega}t} x_2(t) - t\varphi_1(t) \right] \\ &\quad + \operatorname{sgn}(\varrho_0) \omega \left[\frac{1}{\varrho_0 \omega} e^{-\frac{\ln|\varrho_0|}{\omega}t} x_1(t) - \varphi_1(t) \right] = \operatorname{sgn}(\varrho_0) \varphi_2(t)\end{aligned}$$

pro $t \in \mathbb{R}$. To však znamená, že funkce φ_1, φ_2 jsou ω -periodické (resp. 2ω -periodické), je-li $\varrho_0 > 0$ (resp. $\varrho_0 < 0$). Z (2.14) tedy vyplývá, že lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice (1.1) jsou tvaru (2.10).

Část (3): Necht' $\varrho_{1,2} = \varrho_0 e^{\pm\vartheta i}$, kde $\varrho_0 > 0$ a $\vartheta \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$. Podle tvrzení 1.6 existuje netriviální komplexní řešení x_c rovnice (1.1) splňující

$$x_c(t + \omega) = \varrho_0 e^{\vartheta i} x_c(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.\tag{2.16}$$

Definujme funkci φ_c vztahem

$$\varphi_c(x) := e^{-\frac{\ln \varrho_0 + \vartheta i}{\omega}t} x_c(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.\tag{2.17}$$

Vzhledem (2.16) dostaneme

$$\begin{aligned}\varphi_c(t + \omega) &= e^{-\frac{\ln \varrho_0 + \vartheta i}{\omega} (t + \omega)} x_c(t + \omega) \\ &= e^{-\frac{\ln \varrho_0 + \vartheta i}{\omega} t} \frac{1}{\varrho_0} e^{-\vartheta i} \varrho_0 e^{\vartheta i} x_c(t) = \varphi_c(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Položme nyní

$$\varphi_1(t) := \operatorname{Re}\{\varphi_c(t)\}, \quad \varphi_2(t) := \operatorname{Im}\{\varphi_c(t)\} \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

Zřejmě $\varphi_1, \varphi_2 \in AC_{loc}^1(\mathbb{R})$ jsou ω -periodické funkce. Dále položme

$$x_1(t) := \operatorname{Re}\{x_c(t)\}, \quad x_2(t) := \operatorname{Im}\{x_c(t)\} \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

Z obecné teorie lineárních diferenciálních rovnic vyšších řádů vyplývá, že jsou x_1, x_2 lineárně nezávislá řešení rovnice (1.1). Z (2.17) navíc dostaneme

$$\begin{aligned}x_c(t) &= e^{\frac{\ln \varrho_0 + \vartheta i}{\omega} t} \varphi_c(x) \\ &= e^{\frac{\ln \varrho_0}{\omega} t} \left(\cos \frac{\vartheta t}{\omega} + i \sin \frac{\vartheta t}{\omega} \right) (\varphi_1(t) + i\varphi_2(t)) \\ &= e^{\frac{\ln \varrho_0}{\omega} t} \left[\varphi_1(t) \cos \frac{\vartheta t}{\omega} - \varphi_2(t) \sin \frac{\vartheta t}{\omega} \right] \\ &\quad + i e^{\frac{\ln \varrho_0}{\omega} t} \left[\varphi_1(t) \sin \frac{\vartheta t}{\omega} + \varphi_2(t) \cos \frac{\vartheta t}{\omega} \right] \quad \text{pro } t \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

a proto jsou řešení x_1, x_2 tvaru (2.11) a (2.12). \square

Poznámka 2.7. Připomeňme, že k určení Floquetových multiplikátorů rovnice (1.1) potřebujeme znát nějaký její fundamentální systém řešení. Ten však nemusí být vhodný pro kvalitativní analýzu dané rovnice. Věta 2.6 nám dovolí najít tvar fundamentálního systému rovnice (1.1), který je vhodný například pro vyšetřování asymptotického chování jejích řešení.

V závěru předchozí sekce jsme ukázali, že je-li $\omega > 0$ a λ je kořenem „klasické“ charakteristické rovnice příslušné k rovnici s konstantními koeficienty (1.21), pak $\varrho = e^{\lambda\omega}$ je Floquetovým multiplikátorem rovnice (1.21) pro dané ω . Není tedy složité ověřit, že tvrzení věty 2.6 aplikovaná pro dané ω na rovnici s konstantními koeficienty (1.21) jsou v souladu s tvrzením 1.8. Podrobnou diskuzi zde uvádět nebudeme, zmíníme však, že z této diskuze mimo jiné vyplývá smysluplnost zavedení následujícího pojmu.

Je-li ϱ Floquetův multiplikátor rovnice (1.1), lze ho zřejmě psát ve tvaru $\varrho = |\varrho| e^{\vartheta i}$, kde $\vartheta \in (-\pi, \pi]$. Potom číslo

$$\alpha := \frac{1}{\omega} [\ln |\varrho| + \vartheta i]$$

nazýváme **charakteristický (Floquetův) exponent** rovnice (1.1). Číslo α hraje pro rovnici (1.1) podobnou roli jako kořen „klasické“ charakteristické rovnice (1.22) pro rovnici s konstantními koeficienty (1.21). Ve druhé části tohoto článku, kterou plánujeme publikovat v některém z dalších čísel Kvaternionu, se budeme pojmu

charakteristického exponentu věnovat podrobněji. Reálné části charakteristických exponentů totiž úzce souvisí se stabilitou diferenciální rovnice (1.1).

3. VOLNÉ TLUMENÉ KMITY LINEÁRNÍCH OSCILÁTORŮ S NEKONSTANTNÍMI TLUMÍCÍMI A TUHOSTNÍMI CHARAKTERISTIKAMI

V této části ukážeme jedno možné použití věty 2.6 v otázce existence řešení diferenciální rovnice (1.1) konvergujícího k 0 pro $t \rightarrow +\infty$ spolu se svou první derivací.

Uvažujme nejprve běžný volný tlumený oscilátor tvořený tělesem o hmotnosti m , tlumícím členem s charakteristikou b a lineární pružinou s charakteristikou k . Jedná se o systém s 1 stupněm volnosti, jehož pohybová rovnice je tvaru

$$mx'' + bx' + kx = 0, \quad (3.1)$$

kde m, b, k jsou kladné konstanty. Jelikož je to rovnice s konstantními koeficienty, lze jednoduše ukázat, že pro libovolné kladné hodnoty konstant m, b a k má rovnice (3.1) fundamentální systém řešení x_1, x_2 splňující

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1^{(k)}(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x_2^{(k)}(t) = 0, \quad k = 0, 1.$$

To však znamená, že každé řešení rovnice (3.1) konverguje k 0 pro $t \rightarrow +\infty$ spolu se svou první derivací. Fyzikální interpretace tohoto faktu je následující: Každý pohyb oscilátoru s pohybovou rovnicí (3.1) je tlumený a těleso se „v nekonečném čase“ zastaví v rovnovážném stavu. Podrobnější analýza pak ukazuje, že se jedná o pohyb, který je tzv. podkriticky, kriticky, či nadkriticky tlumen v závislosti na znaménku výrazu $D = \left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \omega_0^2$, kde $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ je vlastní úhlová frekvence netlumeného oscilátoru.

Všimněme si ještě následujících skutečností. Jsou-li konstanty m, b a k takové, že $\frac{b}{m} > 0$ a $\frac{k}{m} < 0$, pak existují lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice (3.1) splňující

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1^{(k)}(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x_2^{(k)}(t) = +\infty, \quad k = 0, 1.$$

A nakonec, jestliže $\frac{b}{m} > 0$ a $k = 0$, pak existují lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice (3.1) splňující

$$x_1(t) = 1 \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x_2'(t) = 0.$$

V těchto dvou případech je prostor všech řešení rovnice (3.1) konvergujících k 0 pro $t \rightarrow +\infty$ spolu se svou první derivací jednodimenzionální. Platí tedy následující jednoduché pozorování.

Pozorování 3.1. *Jestliže $m, b, k \in \mathbb{R}$ a $\frac{b}{m} > 0$, pak existuje řešení x rovnice (3.1) splňující*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x'(t) = 0. \quad (3.2)$$

Zobecníme nyní toto tvrzení pro diferenciální rovnice s nekonstantními periodickými koeficienty. Poznamenejme, že takové zobecnění není pouze teoretické ani v souvislosti s výše uvažovaným lineárním oscilátorem. Není totiž problém najít

příklad mechanické soustavy takové, že v její pohybové rovnici budou tlumící a tuhostní koeficienty nekonstantní – avšak periodické – funkce. Takový případ může nastat například po aproximaci nelinearit v pohybových rovnicích oscilátorů s tzv. geometrickou nelinearitou.

Použijeme Floquetovu teorii k důkazu následujícího tvrzení.

Tvrzení 3.2. *Jestliže $p, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jsou lokálně lebesgueovsky integrovatelné ω -periodické funkce a*

$$\int_0^\omega g(s)ds > 0, \quad (3.3)$$

pak existuje řešení x rovnice (1.1) splňující podmínku (3.2).

Důkaz. Nechtě ϱ_1, ϱ_2 jsou Floquetovy multiplikátory rovnice (1.1), tj. řešení charakteristické rovnice (1.18). Vzhledem k předpokladu (3.3) máme $e^{-\int_0^\omega g(s)ds} < 1$, a proto z Vietových vztahů plyne $0 < \varrho_1\varrho_2 < 1$. To však znamená, že buď $|\varrho_1| < 1$ nebo $|\varrho_2| < 1$ a bez újmy na obecnosti můžeme tedy předpokládat, že $|\varrho_1| < 1$. Probereme oba případy, které mohou nastat.

Nejprve předpokládejme, že $\varrho_1 \in \mathbb{R}$. Pak také $\varrho_2 \in \mathbb{R}$ a podle částí (1) a (2) věty 2.6 tak existuje řešení x rovnice (3.1) splňující

$$x(t) = e^{\frac{\ln|\varrho_1|}{\omega}t} \varphi_1(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \quad (3.4)$$

kde $\varphi_1 \in AC_{loc}^1(\mathbb{R})$ je periodická funkce. Derivací tohoto vztahu dostáváme

$$x'(t) = \left(\frac{\ln|\varrho_1|}{\omega} \varphi_1(t) + \varphi_1'(t) \right) e^{\frac{\ln|\varrho_1|}{\omega}t} \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}. \quad (3.5)$$

Jelikož $\ln|\varrho_1| < 0$ a funkce φ_1, φ_1' jsou ohraničené na \mathbb{R} , ze vztahů (3.4) a (3.5) okamžitě vyplývá, že řešení x splňuje požadovanou podmínku (3.2).

Nyní předpokládejme, že $\varrho_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Pak $\varrho_2 = \overline{\varrho_1}$ a z části (3) věty 2.6 vyplývá existence řešení x rovnice (1.1) splňujícího

$$x(t) = e^{\frac{\ln|\varrho_1|}{\omega}t} \left[\varphi_1(t) \cos \frac{\vartheta t}{\omega} - \varphi_2(t) \sin \frac{\vartheta t}{\omega} \right] \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \quad (3.6)$$

kde $\vartheta \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ a $\varphi_1, \varphi_2 \in AC_{loc}^1(\mathbb{R})$ jsou periodické funkce. Derivací tohoto vztahu dostáváme

$$\begin{aligned} x'(t) = e^{\frac{\ln|\varrho_1|}{\omega}t} & \left(\frac{\ln|\varrho_1|}{\omega} \left[\varphi_1(t) \cos \frac{\vartheta t}{\omega} - \varphi_2(t) \sin \frac{\vartheta t}{\omega} \right] \right. \\ & \left. - \varphi_1'(t) \cos \frac{\vartheta t}{\omega} - \frac{\vartheta}{\omega} \varphi_1(t) \sin \frac{\vartheta t}{\omega} - \varphi_2'(t) \sin \frac{\vartheta t}{\omega} - \frac{\vartheta}{\omega} \varphi_2(t) \cos \frac{\vartheta t}{\omega} \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

pro $t \in \mathbb{R}$. Jelikož $\ln|\varrho_1| < 0$ a funkce $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_1', \varphi_2'$ jsou ohraničené na \mathbb{R} , ze vztahů (3.6) a (3.7) okamžitě vyplývá, že řešení x splňuje požadovanou podmínku (3.2). \square

4. ZÁVĚREČNÉ POZNÁMKY

Cílem toho článku bylo ukázat alternativní možnost, jak vybudovat Floquetovu teorii pro lineární obyčejné diferenciální rovnice vyšších řádů s periodickými koeficienty a předvést její možné použití v úlohách kvalitativní teorie diferenciálních rovnic. V pokračování tohoto článku, které plánujeme publikovat v některém z dalších čísel časopisu Kvaternion, ukážeme využití Floquetovy teorie v otázce Lyapunovské stability řešení uvažovaných rovnic.

REFERENCE

- [1] J. Kalas, M. Ráb: *Obyčejné diferenciální rovnice*, Masarykova univerzita, Brno, 1995.
- [2] G. Sansone: *Ordinary differential equations. Vol. I.*, Izdat. Inostrannoj Literatury, Moscow, 1953, rusky.
- [3] V. A. Yakubovich, V. M. Starzhinskij: *Linear differential equations with periodic coefficients and their applications*, Nauka, Moscow, 1972, rusky.

Jiří Šremr, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně,
Technická 2, 61669 Brno, Česká republika,
e-mail: sremr@fme.vutbr.cz

ÚLOHA O DÁME V JAZERE

EMA BARUSOVÁ

ABSTRAKT. V úlohách o úniku a prenasledovaní uvažujeme dva objekty, kde sa jeden z nich (prenasledujúci objekt) snaží dobehnúť druhý (unikajúci) objekt, pričom ten sa snaží dobehnutiu naopak zabrániť. V tomto článku sa zaoberáme analýzou problému, ktorý je modelovaný na príklade dámy unikajúcej svojmu nápadníkovi zo stredu kruhového jazera. Diskutujeme pritom klasické riešenie problému v súlade s [1], kde je naším cieľom nájsť optimálnu únikovú stratégiu zaisťujúcu úspech dámy. V pôvodnom zadaní je pomer rýchlostí prenasledovateľa a unikajúceho je zadaný číselne a v texte okrem odvodenia optimálnej stratégie pre zadaný pomer rýchlostí uvádzame, pre aké pomery rýchlostí je takáto stratégia stále postačujúca. Tam, kde pôvodná stratégia už postačujúca nie je, ukážeme jej čiastočnú modifikáciu spolu s určením dolnej hranice pomeru rýchlostí, pre ktorý je dáma ešte stále schopná svojmu nápadníkovi uniknúť. V poslednej časti uvádzame čiastočné riešenie modifikovaného zadania, ktoré vzniklo na podnet pána profesora Čermáka v čase písania bakalárskej práce, ktorej je tento problém súčasťou.

1. ÚVOD DO PROBLEMATIKY

Úlohy z oblasti úniku a prenasledovania reprezentujú zaujímavý matematický koncept so značným aplikačným potenciálom v robotike, navigácii, analýze biologických procesov či dokonca plánovaní vojenských operácií.

V zadaní úlohy zvyčajne uvažujeme dva objekty, kde o jednom hovoríme ako o prenasledovateľovi (angl. pursuer) a o druhom ako o prenasledovanom, či unikajúcom (angl. evader); vo všeobecnom ponímaní môžeme uvažovať o skupine objektov rozdelených do dvoch „tímov“ (napríklad dve námorné či letecké posádky), kde jeden tím analogicky reprezentuje prenasledovateľa a druhý tím unikajúceho. Zadanie spravidla zahŕňa niekoľko predpokladov o smere a rýchlosti pohybu oboch objektov spolu s vymedzením oblasti, na ktorej sa toto prenasledovanie odohráva. Pri riešení takto zadanej úlohy je naším cieľom definovať stratégiu, ktorá umožní prenasledovateľovi uskutočniť sériu akcií (krokov), ktoré budú eventuálne viesť

2020 MSC. Primárni 91A24, 49N75.

Kľúčová slova. teória diferenciálnych hier, prenasledovanie, únik.

Článok vznikl na základe bakalárskej práce autora v oboru Matematické inžinýrství na FSI VUT v Brně. Vedoucím práce byl Jan Čermák z Ústavu matematiky FSI VUT v Brně.

Podakovanie patrí najmä môjmu školiteľovi p. prof. Čermákovi, ktorý veľkým dielom prispel k pokojnému a úspešnému dopísaniu mojej bakalárskej práce, ktorej je tento problém súčasťou. Ďalej nesmiem zabudnúť vyjadriť vďaka mojej rodine, skvelým spolužiakom a mojím blízkym, ktorí ma podporovali v náročných chvíľach.

k jeho úspechu; napríklad definovať stratégiu, ktorá eventuálne vedie k zásahu či dobehnutiu unikajúceho objektu. Alternatívne môžeme taktiež hľadať stratégiu unikajúceho objektu, ktorá naopak zabráni úspechu prenasledovateľa.

Spravidla máme k dispozícii niekoľko predpokladov o správaní sa unikajúceho objektu, no v niektorých prípadoch ho považujeme za „inteligentného“ protivníka, ktorý sa neriadi len obmedzenou sériou predpokladov. V takom prípade je cieľom nájsť stratégiu, ktorá berie do úvahy všetky možné rozhodnutia protivníka a je tak optimálnym riešením zadaného problému.

Nasledujúci únikový problém sa prvýkrát objavil v článku Martina Gardnera „*Mathematical Games*“ v časopise *Scientific American*. Autor v tomto článku zadal pomer rýchlostí prenasledovateľa a prenasledovaného objektu číselne; v texte preto najprv rozoberieme riešenie úlohy pre daný pomer a neskôr sa zameriame na isté modifikácie pôvodného zadania. Zadanie spolu s riešením sformulujeme podľa [1] s podporou publikácie [2].

2. ZADANIE

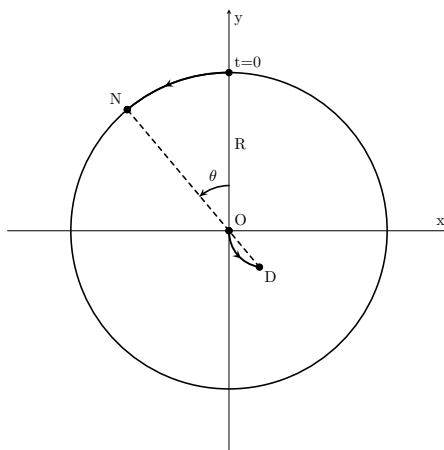
Počas dovolenky sa dáma snažila utiecť svojmu nápadníkovi. Rozhodla sa tak vyplávať člnom presne do stredu kruhového jazera, popri ktorom dovolenkovala. Jej nápadník sa rozhodol počkať si na ňu na brehu jazera. Bolo mu jasné, že dáma sa nakoniec na breh bude musieť vrátiť a zároveň sa domnieval, že sa do ľubovoľného bodu na brehu jazera dostane skôr ako dáma; disponoval totiž informáciou, že dokáže bežať 4-krát rýchlejšie ako dáma veslovať. Nevedel však, že dáma – skúsená profesorka matematiky – si svoj plán úniku dobre premyslela. Akú stratégiu profesorka zvolila?

3. MATEMATICKÝ MODEL A JEHO RIEŠENIE

V nasledujúcom texte opíšeme únikovú stratégiu dámy, pričom ukážeme, že pre daný pomer rýchlostí je stratégia otázkou pomerne elementárnej geometrie. Táto stratégia sa pritom skladá z dvoch fáz, ktorých zmyslupnosť sa pokúsime objasniť. Skôr, než začneme s analýzou problému, dodajme do zadania ešte jednu informáciu, ktorú mala profesorka k dispozícii. Vedela s istotou povedať, že na brehu je rýchlejšia ako muž, čo nás logicky vedie k myšlienke, čo ju motivovalo veslovať najprv do stredu jazera a následne rozmyšľať nad svojou únikovou stratégiou začínajúc svoj únik práve v tomto bode. Odpoveďou na túto otázku by mohla byť jej túžba dokázať mužovi, že aj za nepriaznivých počiatočných podmienok mu je stále schopná ujsť. V ďalšom texte postupne objasníme stratégiu, ktorú profesorka zvolila.

V prvom kroku sa dáma pokúsi čo najdlhšie zachovať maximálnu vzdialenosť medzi okamžitou polohou jej nápadníka a bodom na brehu, ku ktorému chce doplávať. Z tohto dôvodu sa snaží vzdalovať od stredu jazera O tak, že jej čln, stred jazera a muž sú v každom momente sledovania na jednej priamke. Vzdialenosť dámy od bodu O sa bude pritom stále zväčšovať za predpokladu, že

muž začne bežať okolo jazera konštantnou rýchlosťou v snažiac sa ju chytiť. Pokiaľ rozložíme okamžitú rýchlosť dámy na uhlovú a radiálnu zložku, tak uhlová rýchlosť dámy bude v tomto štádiu z dôvodu zachovania kolinearitý kontinuálne narastať a radiálna zložka sa bude znižovať, až kým nedosiahne nulovú hodnotu. Táto stratégia je podporená ilustráciou na obr. 1, kde bez ujmy na všeobecnosti uvažujeme, že muž beží proti smeru hodinových ručičiek.



Obrázek 1. Poloha dámy a nápadníka v čase $t > 0$.

Ako ďalej ukážeme, dáma je naozaj schopná zachovať spomínanú kolinearitu – teda aspoň na nejakú dobu. Vysvetlíme, prečo je táto doba zhora obmedzená, a teda prečo nie je možné dostať sa na breh len s využitím tejto taktiky.

Predpokladajme, že muž beží rýchlosťou s veľkosťou v a dáma vesluje rýchlosťou s veľkosťou $0,25v$. Pripomeňme, že myšlienka zachovania kolinearitý nám okrem iného hovorí, že dáma a jej nápadník sa musia pohybovať rovnakou uhlovou rýchlosťou počas celej prvej fázy stratégie. Na obr. 1 je ilustrovaná okamžitá poloha muža (bod N) a dámy (bod D) po tom, čo muž opíše kružnicový oblúk daný stredovým uhlom θ . Pre jeho uhlovú rýchlosť zrejme môžeme písať

$$d\theta/dt = v/R,$$

kde R označuje polomer jazera. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že priamka, na ktorej sa nachádza muž a dáma na začiatku prenasledovania, je osou y pravouhlej súradnicovej sústavy s počiatkom v bode O .

Keďže dotyčnicová zložka rýchlosti dámy je závislá na vzdialenosti od jazera a platí pre ňu

$$v_{\theta} = r \frac{d\theta}{dt},$$

kde r označuje okamžitú vzdialenosť dámy od O , za predpokladu zachovania kolinearitý môžeme dosadiť

$$v_{\theta} = v \frac{r}{R}.$$

Je pritom zrejmé, že čím ďalej sa dáma dostane od stredu jazera, tým bude jej uhlová rýchlosť vyššia. Keďže veľkosť celkovej rýchlosti dámy je $0,25v$, radiálna zložka v_r jej rýchlosti musí byť taká, že platí

$$v_r^2 + v_\theta^2 = (0,25v)^2.$$

Tento vzťah vyplýva z rozkladu vektoru celkovej rýchlosti na vektor uhlovej a radiálnej rýchlosti, ktoré z geometrickej interpretácie zvierajú v každom bode pohybu dámy pravý uhol.

Pre v_r teda dostaneme

$$v_r = \sqrt{0,25^2 v^2 - v_\theta^2} = \sqrt{0,25^2 v^2 - v^2 \frac{r^2}{R^2}},$$

a teda odtiaľ

$$v_r = \frac{dr}{dt} = v \sqrt{0,25^2 - \frac{r^2}{R^2}}.$$

Z posledného vyjadrenia je zrejmé, že hodnota v_r je pritom väčšia ako nula (dáma sa vzdáľuje od O , zatiaľ čo zachováva kolinearitu) za podmienky, že $0,25^2 - r^2/R^2 > 0$, teda ak $r < 0,25R$. Akonáhle nastane rovnosť $r = 0,25R$, dáma prejde do druhej fázy svojej únikovej stratégie. V opačnom prípade by nasledoval periodický pohyb po kružnici so stredom O a polomerom $0,25R$.

Ešte predtým, než objasníme druhú fázu únikovej stratégie, vypočítajme pre zaujímavosť, ako dlho bude dáma veslovať, kým dosiahne $v_r = 0$. Zo vzťahu $v_r = dr/dt$ vyjadríme dt , pričom $t = T$ bude čas, keď $v_r = 0$, potom platí

$$\begin{aligned} T &= \int_0^T dt = \int_0^{0,25R} \frac{dr}{v_r} = \int_0^{0,25R} \frac{dr}{v \sqrt{0,25^2 - r^2/R^2}} = \\ &= \frac{R}{v} \int_0^{0,25R} \frac{dr}{\sqrt{0,25^2 - r^2/R^2}} = \frac{R}{v} \arcsin \left(\frac{r}{0,25R} \right) \Big|_0^{0,25R} = \frac{R}{v} \arcsin(1), \end{aligned}$$

teda

$$T = \frac{\pi R}{2v}.$$

V čase $t = T$, keď sa dáma dostane do vzdialenosti $0,25R$ od O , teda zmení svoju taktiku a prejde do druhej fázy svojho úniku. Zdôraznime, že v tomto čase sa dostala do bodu na kružnici, po ktorej by sa pri udržiavaní jej predošlej taktiky začala pohybovať rovnomerným pohybom a ku brehu by sa ďalej nepribližovala. Nazvime túto kružnicu pracovne hraničná kružnica. V tomto čase zabudne na doposiaľ udržiavanú kolinearitu a začne smerovať po normále na pevninu, pričom vzdialenosť, ktorú musí z tohto bodu k pevnine doveslovať, je $0,75R$. Aby sa muž dostal do rovnakého bodu, musí prejsť vzdialenosť πR (až do tohto momentu totiž dáma udržala spomínanú kolinearitu a teda muž sa nachádzal od bodu, do ktorého dáma smeruje, práve polkružnicu ďaleko). Dáma ujde svojmu nápadníkovi, ak sa do tohto bodu dostane skôr ako on, teda ak platí nerovnosť časov

$$\frac{R - 0,25R}{0,25v} < \frac{\pi R}{v}, \quad (3.1)$$

resp.

$$R(1 - 0,25) < 0,25\pi R.$$

Táto nerovnosť platí, z čoho môžeme usúdiť, že pre zadaný pomer rýchlostí je dáma schopná nápadníkovi ujsť, ak sa bude riadiť práve opísanou stratégiou.

4. ROZŠÍRENIE

Doteraz sme sa zaoberali úlohou s číselne zadaným pomerom rýchlostí dámy a nápadníka; v ďalšom texte odvodíme, pre aké hodnoty tohto pomeru je stratégia vysvetlená vyššie stále postačujúca, teda zaistí dáme únik pred jej nápadníkom. Zároveň uvedieme modifikáciu stratégie pre menšie hodnoty tohto pomeru, teda tam, kde už spomínaná pôvodná stratégia postačujúca nie je.

Označme α pomer rýchlostí dámy a muža. Pre dostatočne veľkú hodnotu α nie je táto dvojfázová úniková stratégia potrebná, postačí, ak sa dáma vyberie po normále priamo na breh. Najprv určíme minimálnu hodnotu α , ktorá ešte túto stratégiu umožňuje. V uvažovanom prípade musí platiť, že dáma prevesluje vzdialenosť R za kratší čas, než muž prebehne polovicu kružnice, teda πR . Dáma pritom vesluje rýchlosťou αv , kde v je rýchlosť muža. Pre parameter α teda získame dolný odhad zo vzťahu

$$\frac{R}{\alpha v} = \frac{\pi R}{v},$$

teda

$$\alpha > \frac{1}{\pi} \approx 0,3183$$

Pokiaľ je teda $\alpha > 1/\pi$, dáma nepotrebuje využiť pôvodnú stratégiu, no stále je pre ňu výhodné podľa nej postupovať – za každých okolností totiž získa väčší náskok pred jej nápadníkom. Pre názornosť odvodíme, ako veľký náskok získa dáma pre hraničnú hodnotu $\alpha = \pi^{-1}$. Ako platilo doteraz, okamžitá poloha dámy, muža a stred jazera budú na jednej priamke, až kým riadiálna zložka rýchlosti dámy nebude nulová. Podľa predchádzajúcich úvah sa dáma počas prvej fázy únikovej stratégie dostane do vzdialenosti $\pi^{-1}R$ od stredu jazera a následne bude smerovať po normále k brehu jazera, pričom bude musieť ešte preveslovať vzdialenosť

$$R - \pi^{-1}R = \frac{R(\pi - 1)}{\pi}.$$

Na pevninu sa teda dostane za čas

$$t_d = \frac{R(\pi - 1)/\pi}{v/\pi} = \frac{R}{v}(\pi - 1). \quad (4.1)$$

Na to, aby sa muž dostal do bodu na brehu, na ktorý dáma dovesluje, bude musieť prebehnúť presne polkružnicu okolo jazera. Túto vzdialenosť prejde za čas

$$t_n = \frac{R}{v}\pi. \quad (4.2)$$

Odčítaním (4.1) od (4.2) zistíme, že muž by potreboval o R/v viac času na to, aby sa dostal do bodu na pevnine, na ktorý dáma dovesluje. Pre lepšie predstavu

ide o čas, za ktorý muž prebehne vzdialenosť R , teda polomer kružnice, čo určite nie je nepodstatný úsek vzhľadom k polkružnici, ktorú musí prebehnúť celkovo.

Uvažujme teraz, že dáma sa nepohybuje dostatočne veľkou rýchlosťou (teda $\alpha > 1/\pi$), a teda potrebuje postupovať dvojfázovou stratégiou odvodenou v predchádzajúcej časti. Najprv vypočítajme, pre akú minimálnu hodnotu α_{\min} je táto stratégia pre dámu ešte postačujúca. Túto minimálnu hodnotu parametru dostaneme z výrazu (3.1), pričom za číselnú hodnotu 0,25 dosadíme parameter α a máme

$$\frac{R - \alpha R}{\alpha v} < \frac{\pi R}{v},$$

resp.

$$1 < \alpha(1 + \pi).$$

Pre α teda môžeme písať

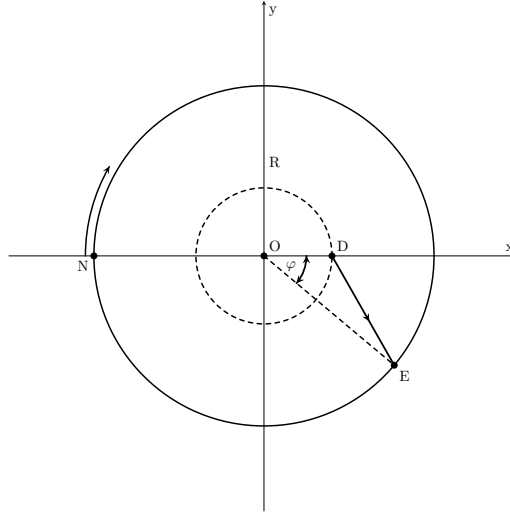
$$\alpha > \frac{1}{1 + \pi} \approx 0,2415, \quad \text{a teda} \quad \alpha_{\min} \approx 0,2415.$$

V tejto sérii úvah si môžeme položiť ešte poslednú otázku: Je možné túto stratégiu modifikovať tak, aby dáma ušla mužovi aj pre hodnoty α menšie ako $(1 + \pi)^{-1}$?

Ukazuje sa, že to možné je, pokiaľ predpokladáme, že muž sa správa „racionálne“. Túto charakterovú črtu v krátkosti okomentujeme. Keďže je naša dáma profesorkou matematiky, je pravdepodobné, že svojho nápadníka stretla na niektorom z mnohých matematických seminárov, ktoré navštevuje, a teda nápadník sám disponuje aspoň základnými vedomosťami z oblasti matematiky. Muž si teda uvedomuje, akú taktiku dáma zvolí a tento predpoklad zahrnie do svojej vlastnej taktiky. Špeciálne predpokladá, že akonáhle sa dáma prestane vzd'alovať od stredu jazera (dostane sa na hraničnú kružnicu), vydá sa priamo po normále k brehu jazera. Naš predpoklad mužovej racionality teda znie nasledovne: akonáhla dáma prejde do druhej fázy stratégie, muž ju prestane pozorne sledovať a jednoducho sa rozbehne po brehu do bodu, do ktorého podľa jeho racionálnej úvahy dáma smeruje. Prehodnotiť svoju taktiku ho pritom donúti iba jedna okolnosť – ak sa dáma začne z nejakého dôvodu naspäť približovať k stredu jazera (tento predpoklad ešte pripomenieme neskôr).

Dáma disponuje informáciou, že veľkosť jej rýchlosti je menšia ako $(\pi - 1)^{-1}v$ a dobre si uvedomuje, že by mužovi neušla, pokiaľ by postupovala podľa pôvodnej stratégie. Vytiahne tak z rukávu posledný trik – v druhej fáze svojho úniku bude smerovať na breh po priamke, nie však po normále do najbližšieho bodu (ako tomu bolo doposiaľ). Muž pritom stále predpokladá, že bude smerovať práve do tohto bodu a rozbehne sa k nemu, zatiaľ čo dáma bude smerovať niekam inam. On ju ale už naďalej nesleduje a svojej chyby si nevšimne.

Pre lepšie predstavu toho, čo má dáma v umýsle, uvažujme situáciu ako na obr. 2, ktorý ilustruje práve moment, keď má dáma prejsť do druhej fázy. Bez ujmy na všeobecnosti sa v tomto čase dáma nachádza v bode $[\alpha R, 0]$ na osi x , a teda muž v bode $[-R, 0]$. Počiatok súradnicovej sústavy sa tak nachádza v strede jazera. Uhol φ potom vyjadruje odklon priamky, po ktorej sa dáma plánuje vybrať od osi x , resp. od normály, po ktorej by za iných okolností smerovala na breh. Muž predpokladá, že $\varphi = 0$, no ako si ďalej ukážeme, mylí sa.



Obrázek 2. Modifikácia stratégie dámy v druhej fáze úniku.

V prvom kroku výrazne zjednodušíme naše výpočty tým, že budeme kružnicu, na ktorej má dáma nulovú radiálnu zložku rýchlosti, považovať za jednotkovú. Z predchádzajúceho textu vieme, že polomer tejto kružnice je αR , z čoho dostávame

$$\alpha = \frac{1}{R}. \quad (4.3)$$

Zároveň si uvedomíme, že pomer polomerov tejto kružnice a kružnice okolo jazera je $\alpha R/R$, teda α . Úlohu hľadania minimálnej hodnoty α môžeme tak preformulovať na úlohu hľadania maximálnej hodnoty R , pre ktoré dokáže dáma stále ujsť. Zároveň z predchádzajúceho zjednodušenia môžeme odvodiť, že dáma sa pohybuje rýchlosťou v/R . Teraz už môžeme úlohu formulovať matematicky.

Keď sa dáma dostane na únikovú kružnicu, jej vzdialenosť od stredu jazera je jednotková a pomocou kosínovej vety môžeme vyjadriť vzdialenosť, ktorú musí preveslovať z tejto kružnice do bodu E na brehu ako

$$|DE| = \sqrt{1 + R^2 - 2R \cos \varphi},$$

pričom pre čas, za ktorý sa jej to podarí, platí

$$\frac{|DE|}{v/R} = \frac{R}{v} \sqrt{1 + R^2 - 2R \cos \varphi}. \quad (4.4)$$

Čo teda spraví muž? Ako môžeme vidieť na obr. 2, muž beží po brehu v smere hodinových ručičiek, no mohli by sme namietat'. Nebolo by preňho výhodnejšie rozbehnúť sa proti smeru hodinových ručičiek? Prešiel by tak kratšiu vzdialenosť a do bodu S by sa dostal zrejme skôr, ako dáma. V tomto momente musíme ešte raz pripomenúť predpoklad mužovej racionality, ktorý bol objasnený vyššie. Ako je uvedené v [2], taktika dámy a reakcia muža bude nasledovná: Dáma prejde

infinitesimalnú vzdialenosť tak, aby sa muž začal pohybovať v smere hodinových ručičiek. Od toho momentu je pre muža najvýhodnejšie zachovať smer pohybu a bežať v smere hodinových ručičiek, ak sa dáma vyberie po priamke k brehu, no zároveň nepreťne hraničnú kružnicu. Pokiaľ by sa muž nečakane otočil, dáma by mohla zmeniť stratégiu a začať veslovať k brehu po normále. Alternatívne by mohla iba „otočiť znamienko“ uhlu φ , a tak by bola situácia podobná, ako predtým (len symetricky otočená).

Akonáhle sa muž odovzdá myšlienke racionality a rozbehne sa v smere hodinových ručičiek, bude musieť prebehnúť vzdialenosť $(\pi + \varphi)R$, aby sa dostal do bodu S. Zaberie mu to pritom čas

$$\frac{R}{v}(\pi + \varphi). \quad (4.5)$$

Dáma teda tesne unikne mužovi, ak nastane rovnosť výrazov (4.4) a (4.5), teda platí

$$\pi + \varphi = \sqrt{1 + R^2 - 2R \cos \varphi}.$$

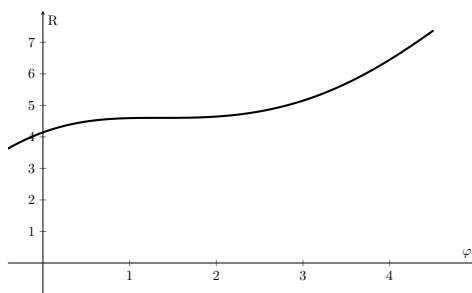
Rovnicu riešime pre R a dostávame

$$R = \cos \varphi \pm \sqrt{\cos^2 \varphi + (\pi + \varphi)^2 - 1}.$$

Keďže polomer jazera R musí byť kladný, do úvahy berieme len plusové znamienko a pre R teda platí

$$R = \cos \varphi + \sqrt{\cos^2 \varphi + (\pi + \varphi)^2 - 1}. \quad (4.6)$$

Na Obr. 3 môžeme sledovať priebeh funkcie $R(\varphi)$. Pre nájdenie minimálnej



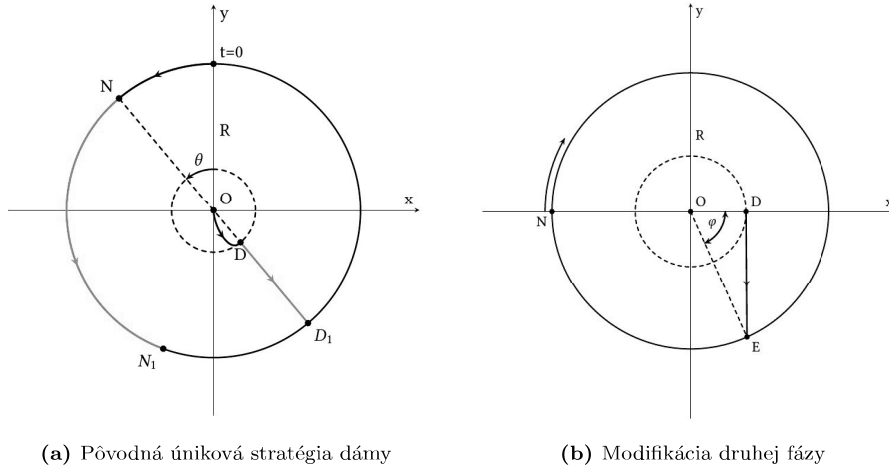
Obrázek 3. Závislosť veľkosti polomeru jazera R na uhle φ .

hodnoty α teda musíme nájsť maximálnu hodnotu R (pripomeňme, že túto úvahu máme z rovnice (4.3)). Chceme teda nájsť hodnotu φ , ktorá maximalizuje hodnotu $R(\varphi)$. Najprv uskutočníme jej výpočet na základe goniometrickej analýzy. Ak φ prekročí hodnotu, pre ktorú je priamka DE dotyčnicou k hraničnej kružnici (teda spätne pretne túto kružnicu), začne sa približovať k stredu jazera a táto situácia je pre nás neprípustná. Z tohto dôvodu je maximálna hodnota φ zhora ohraničená. Dáma by teda mala zvoliť taký uhol φ , aby priamka DE bola kolmá k osi x .

Pre lepšiu predstavu je táto situácia znázornená na obr. 4(b) spolu s ilustráciou pôvodnej stratégie (a), kde pre uhol φ z elementárnej geometrie platí

$$\cos \varphi = \frac{\alpha R}{R} = \frac{1}{R}, \quad (4.7)$$

pretože vzdialenosť αR považujeme za jednotkovú.



(a) Pôvodná úniková stratégia dámy

(b) Modifikácia druhej fázy

Obrázek 4. Porovnanie dvoch scenárov druhej fázy únikovej stratégie.

V rovnici (4.6) potom môžeme substituovať za R z výrazu vyššie a dostávame rovnicu pre neznámu φ

$$\frac{1}{\cos \varphi} = \cos \varphi + \sqrt{\cos^2 \varphi + (\pi + \varphi)^2 - 1}.$$

Túto rovnicu teraz upravíme. Najprv vynásobíme členom $\cos \varphi$, následne odčítame z oboch strán člen $\cos^2 \varphi$ a máme

$$1 - \cos^2 \varphi = \sin^2 \varphi = \cos \varphi \sqrt{\cos^2 \varphi + (\pi + \varphi)^2 - 1}.$$

Umocníme a ďalej upravujeme:

$$\begin{aligned} \sin^4 \varphi &= \cos^4 \varphi + (\pi + \varphi)^2 \cos^2 \varphi - \cos^2 \varphi, \\ (\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi)(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) &= (\pi + \varphi)^2 \cos^2 \varphi - \cos^2 \varphi, \\ \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi &= (\pi + \varphi)^2 \cos^2 \varphi - \cos^2 \varphi, \\ \tan \varphi &= \pi + \varphi. \end{aligned}$$

Alternatívou k vyššie uvedenému postupu je stanovenie hodnoty φ pomocou prostriedkov diferenciálneho počtu (hľadáme extrém funkcie $R(\varphi)$). Rovnicu (4.6)

zderivujeme podľa φ a položíme rovnú nule, teda

$$\frac{dR}{d\varphi} = -\sin \varphi + \frac{-2 \cos \varphi \sin \varphi + 2(\pi + \varphi)}{(\cos^2 \varphi + (\pi + \varphi)^2 - 1)^{1/2}} = 0.$$

Po prevode na spoločného menovateľa dostávame v čitateli výraz

$$\sin \varphi \sqrt{\cos^2 \varphi + (\pi + \varphi)^2 - 1} - 2 \cos \varphi \sin \varphi + 2(\pi + \varphi) = 0,$$

ktorý ďalej upravíme na tvar

$$2(\pi + \varphi) \sin \varphi \cos \varphi = (\pi + \varphi)^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi.$$

Tento výraz následne vynásobíme členom $1/\cos^2 \varphi$ a dostávame rovnicu

$$2(\pi + \varphi) \tan \varphi = \tan^2 \varphi + (\pi + \varphi)^2,$$

ktorej riešením je práve výraz

$$\tan \varphi = \pi + \varphi.$$

Oboma spôsobmi sme sa dostali k transcendentálnej rovnici, ktorú analyticky nemožno vyriešiť. Použitím vhodnej numerickej metódy sa možno dostať k približnému riešeniu a my sa už len odkážeme na riešenie podľa [1], kde pre φ zhora ohraničené $\pi/2$ dostaneme riešenie $\varphi \approx 1,352$ rad. Keďže maximálna hodnota R je zo vzťahu (4.7) rovná

$$R = \frac{1}{\cos \varphi},$$

pre minimálnu hodnotu α dostávame

$$\alpha = \frac{1}{R} = \cos \varphi \approx 0,217.$$

Alternatívne dáma dokáže uniknúť, ak muž beží najviac $1/\alpha_{\min} \approx 4,603$ -krát rýchlejšie ako dáma vesluje, čo je nezanedbateľne vyššia hodnota než faktor uvedený v Gardnerovom zadaní v časopise *Scientific American*.

5. ÚLOHA SO "ZAKÁZANOU" OBLASŤOU

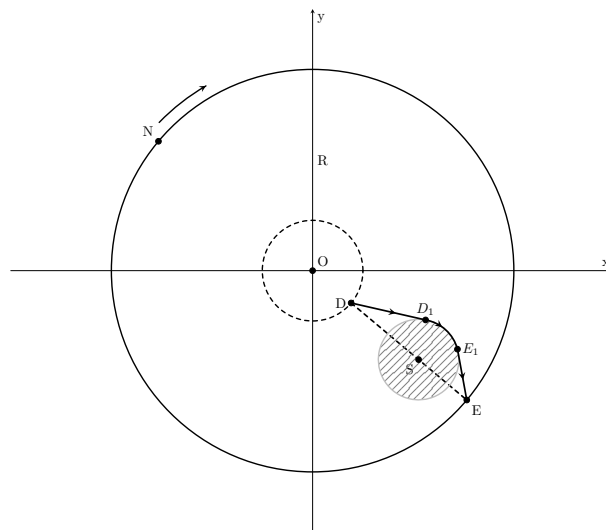
V poslednej časti ešte modifikujeme zadanie tak, že profesorka postavíme do cesty prekážku a pritom budeme požadovať, aby sa z bodu D na hraničnej kružnici chcela dostať priamo do bodu E , do ktorého by smerovala po normále z bodu D , keby jej v ceste prekážka nestála. Význam tejto úlohy môže byť napríklad taký, že v bode E na brehu je odstavený dopravný prostriedok, ku ktorému chce doveslovať skôr, než tam dobehne jej nápadník, a tak mu definitívne uniknúť (v zadaní sme síce predpokladali, že dáma je na pevnine rýchlejšia ako muž, nebrali sme však do úvahy, že veslovanie je bezpochybne vyčerpávajúca aktivita a dáme by už nemusel zostať dostatok síl na útek po pevnine). Pre jednoduchosť umiestnime našej profesorku do cesty kruhovú oblasť (ďalej ostrov) so stredom v bode S vo vzdialenosti $5/8$ od stredu jazera O a polomerom $1/4$ (číselné hodnoty sme pritom zadali tak, aby bol ostrov dostatočne ďaleko od hraničnej kružnice, vnútri ktorej dáma zachováva kolinearitu s polohou nápadníka a stredom jazera). Stred ostrova bude

prítom ležať na spojnici bodu D , kde dáma v pôvodnom riešení mení svoju taktiku a bodu E na pevnine, do ktorého sa chce dáma dostať. Zo symetrie zadania tak nebude záležať na tom, z ktorej strany sa dáma rozhodne tento ostrov obísť. Zároveň taktiež nezáleží na voľbe smeru pohybu nápadníka, keďže do bodu E musí prebehnúť z každej strany práve vzdialenosť rovnú polkružnici okolo jazera.

Zadanie sformulujeme nasledovne: Pre aký pomer rýchlostí α je dáma schopná dostať sa do bodu E skôr ako jej nápadník, pokiaľ jej v ceste stojí prekážka v tvare kruhového ostrova, ktorú musí nutne oboplávať?

V ďalšom texte pre jednoduchosť položíme $R = 1$, teda budeme uvažovať jazero s jednotkovým polomerom. Ako už bolo uvedené, úniková stratégia dámy sa skladá z dvoch štádií. V prvom sa pohybuje smerom od stredu jazera tak, že body označujúce aktuálnu polohu dámy, nápadníka a stred jazera ležia na jednej priamke, až kým sa dáma nedostane na tzv. hraničnú kružnicu, za ktorej hranicou by už nebola schopná zachovať túto kolinearitu. V tomto momente tak zmení stratégiu a vydá sa po normále k brehu jazera. Pre pomer rýchlostí $\alpha > 1/(1 + \pi)$ sa nasledovaním tejto stratégie ozač dostane na breh skôr ako jej nápadník. V tejto časti však bude mať práve v druhej fáze únikovej stratégie pred sebou prekážku v tvare kruhového ostrova, ktorý bude musieť oboplávať a zároveň sa stále dostať do zadaného bodu na brehu skôr ako muž. V ďalšom texte sa tak budeme zaoberať len druhou fázou únikovej stratégie, pričom za začiatok pozorovania budeme považovať moment, keď sa dáma ocitne v bode D na hraničnej kružnici.

Situácia je ilustrovaná na obr. 5, kde sa v čase t_0 dáma nachádza na hraničnej



Obrázek 5. Ilustrácia druhej fázy únikovej stratégie za prítomnosti prekážky.

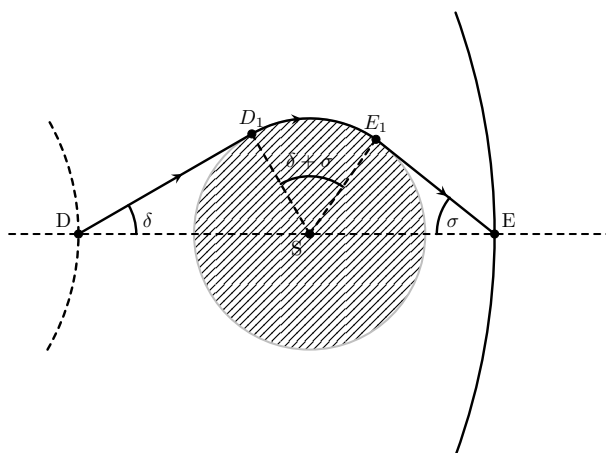
kružnici v bode D a nápadník v bode N na brehu. Pripomeňme, že body N , O a D ležia na jednej priamke. Dáma sa chce dostať do bodu E na pevnine skôr

ako muž; ten bude pritom musieť prebehnúť polkružnicu okolo jazera a zo vzťahu (4.2) môžeme pre celkový čas písať

$$t_n = \frac{\pi}{v}, \quad (5.1)$$

kde v označuje jeho rýchlosť. Dá sa potrebuje dostať do bodu E za čo najkratší čas, hľadaná krivka spájajúca body D , E a zároveň nepretínajúca ostrov má byť teda najkratšia možná.

Je možné dokázať (viď napr [4]), že najkratšiu krivku spĺňajúcu podmienky v zadaní môžeme skonštruovať nasledovne: Na hranici kružnice (ostrova) nájdeme bod D_1 , resp. E_1 taký, že dotyčnica k tejto kružnici prechádzajúca týmto bodom prechádza súčasne aj bodom D , resp. E . Najkratšia spojnice bodov D a E bude potom tvorená úsečkou DD_1 , kružnicovým oblúkom D_1E_1 so stredom v bode S a úsečkou E_1E . Pre lepšiu predstavu situácie slúži obr. 6. Toto tvrdenie je



Obrázek 6. Detail najkratšej krivky pri potrebe oboplávania zakázanej oblasti.

už z ilustrácie zjavné, no dôkaz pomerne obsírnny a my sa tak v ďalšom texte obmedzíme len na odvodenie minimálnej hodnoty parametru α , pre ktoré sa dáma dostane na breh skôr, ako nápadník.

Pripomeňme, že ak jazero má polomer jednotkovej dĺžky, tak polomer hraničnej kružnice musí potom byť rovný parametru α . V čase t_0 sa tak dáma nachádza vo vzdialenosti α od stredu jazera. Odvodíme teraz postupne vzťahy pre dĺžky úsekov, z ktorých sa skladá najkratšia úniková krivka dámy. Podporou pri týchto odvodeniach nám bude práve obr. 6. Označme δ a σ postupne uhly $\angle SDD_1$ a $\angle SEE_1$, pre ich veľkosť platí

$$\delta = \arcsin\left(\frac{1/4}{5/8 - \alpha}\right), \quad \sigma = \arcsin\left(\frac{1/4}{3/8}\right) = \arcsin\left(\frac{2}{3}\right). \quad (5.2)$$

Stred kruhového ostrova sa zo zadania nachádza vo vzdialenosti $(5/8 - \alpha)$ od hraničnej kružnice, a tak pre dĺžku úsečky DD_1 môžeme písať

$$|DD_1| = \left(\frac{5}{8} - \alpha\right) \cos \delta = \left(\frac{5}{8} - \alpha\right) \sqrt{1 - \sin^2 \delta} = \sqrt{\left(\frac{5}{8} - \alpha\right)^2 - \frac{1}{16}}.$$

Dĺžka kružnicového oblúku $\widehat{D_1E_1}$ je zrejme

$$|\widehat{D_1E_1}| = \frac{1}{4}(\delta + \sigma),$$

keďže veľkosť stredového uhlu $\angle D_1SE_1$ prislúchajúceho tomuto oblúku je

$$\angle D_1SE_1 = (\pi - \angle DSD_1 - \angle ESE_1) = \pi - (\pi/2 - \delta) - (\pi/2 - \sigma) = \delta + \sigma.$$

Vynásobením veľkosti stredového uhlu hodnotou polomeru kružnice dostaneme dĺžku kružnicového oblúku prislúchajúceho tomuto uhlu. Napokon dĺžka úsečky E_1E je

$$|E_1E| = \frac{3}{8} \cos \varphi = \frac{3}{8} \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \sqrt{\left(\frac{3}{8}\right)^2 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{8}.$$

Podarilo sa nám odvodiť dĺžku krivky DD_1E_1E v závislosti na jedinom neznámom parametri α . Označme celkovú dĺžku tejto krivky d , platí tak

$$d = |DD_1| + |\widehat{D_1E_1}| + |E_1E| = \sqrt{\left(\frac{5}{8} - \alpha\right)^2 - \frac{1}{16}} + \frac{1}{4}(\delta + \sigma) + \frac{\sqrt{5}}{8}, \quad (5.3)$$

kde parametre δ a σ dosadíme z (5.2). Čas, za ktorý sa dáma dostane na breh, je potom

$$t_d = \frac{d}{\alpha v}. \quad (5.4)$$

Dáma ujde nápadníkovi, ak $t_n > t_d$, a tak zo vzťahov (5.1) a (5.4) dostávame nerovnosť v tvare

$$\frac{\pi}{v} > \frac{d}{\alpha v}.$$

Dosadením za d z (5.3) dostávame výraz závislý iba na parametri α , a tak sme schopní určiť minimálnu hodnotu parametru α_{\min} , pre ktorý sa dáme podarí ujsť svojmu nápadníkovi. Výsledok môžeme interpretovať nasledovne: Pokiaľ sa chce dáma dostať z bodu D na breh do bodu E , pričom spojnica DE je najkratšia možná a bod E tak leží na normále z bodu D , no v priamočiarej ceste jej stojí ostrov v tvare kružnice so stredom ležiacim na spojnici DE , pre pomer rýchlostí väčší ako α_{\min} sa jej podarí dostať na breh do bodu E skôr ako jej nápadníkovi. V opačnom prípade však nemusí nutne strácať nádej, môže ešte po nejakej dobe zotrvať v pohybe po hraničnej kružnici (zachovávajúc kolinearitu) a získa tak čas na domyslenie svojej únikovej stratégie. Úlohu by sme mohli modelovať pre rôzne tvary a umiestnenia zakázanej oblasti, toto rozšírenie je však základom pre ďalšie modifikácie, keďže myšlienka únikovej krivky založenej na spojení kriviek pohybu po dotyčniciach k zadanej kružnici a hranici tejto kružnice je aplikovateľná aj na iné, zložitejšie oblasti.

6. ZÁVER

V tomto článku sme sa zaoberali únikovým problémom, ktorý bol ilustrovaný na príklade dámy unikajúcej svojmu nápadníkovi zo stredu kruhového jazera. Odvodili sme optimálnu stratégiu zaisťujúcu úspech dámy pre zadaní pomer rýchlostí a následne sme sa zaoberali modifikáciou druhej fázy jej stratégie pre menšie pomery rýchlostí, kde už pôvodná stratégia nie je postačujúca. V poslednej časti sme uviedli modifikované zadanie a načrtli optimálne riešenie pre číselne zvolené parametre zadania. Napriek tomu, že túto úlohu môžeme zaradiť do teórie diferenciálnych hier, pri riešení sme využili prostriedky elementárnej geometrie a využitie diferenciálneho počtu tak nebolo esenciálne.

REFERENCE

- [1] P. J. Nahin: *Chases and Escapes: The Mathematics of Pursuit and Evasion*, Princeton University Press, 2012.
- [2] W. Schuurman, J. Lodder: *The Beauty, the Beast, and the Pond*, Mathematics Magazine **47** (1974), 93–95.
- [3] M. E. Khan: *Game theory models for pursuit evasion games*, University of British Columbia, Vancouver, Canada, 2007.
- [4] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mishechenko: *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, John Wiley & Sons, New York/London, 1962.

Ema Barusová, Ústav matematiky, Fakulta strojného inžinýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: 216938@vutbr.cz

VLASTNOSTI PROSTORŮ POSLOUPNOSTÍ A JEJICH APLIKACE V TEORII NELINEÁRNÍCH DIFERENČNÍCH ROVNIC

JINDŘICH KOSÍK

ABSTRAKT. Článek pojednává o využití aparátu funkcionální analýzy při vyšetřování kvalitativních vlastností nelineárních diferencních rovnic. V článku jsou zpracovány základy teorie prostorů posloupností, detailně se věnuje diskretním větám o limitním přechodu a kritériím relativní kompaktnosti. Součástí teoretického aparátu jsou také věty o pevném bodu. Zavedené matematické prostředky jsou poté využity při studiu konkrétní nelineární diferencní rovnice.

1. ÚVOD

Podobně jako v případě diferenciálních rovnic hraje při vyšetřování kvalitativních vlastností diferencních rovnic důležitou roli aparát funkcionální analýzy. I v odborné literatuře se často můžeme setkat se zjednodušením, kdy jsou diskrétní rovnice vyvozeny na základě vlastností jejich spojitých protějšků, to se může ukázat jako nedostatečné nebo dokonce nekorektní. Zaměříme se proto detailně na diskrétní případ.

V článku podrobně rozebereme matematické prostředky pro korektní analýzu diferencních rovnic. Nejprve si představíme základní prostory posloupností ℓ^p a ℓ^∞ a uvedeme si některé jejich důležité vlastnosti. Dále zformulujeme věty o limitním přechodu pro posloupnosti a pečlivě si je dokážeme. Naznačíme navíc myšlenku dalších dvou přístupů k důkazům. Uvedeme Banachovu a Schauderovu větu o pevném bodu. S ohledem na předpoklady Schauderovy věty detailně rozebereme kritéria relativní kompaktnosti pro prostory posloupností. Získané znalosti pak využijeme při analýze nelineární diferencní rovnice druhého řádu ve tvaru

$$\Delta^2 y_n = p_n g(y_{n+1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zformulujeme předpoklady, za kterých dokážeme existenci jejího řešení s požadovanými vlastnostmi. Předpoklady následně upravíme, aby byla zaručena vedle existence požadovaného řešení i jeho jednoznačnost.

2020 MSC. Primární 34K06, 34K25.

Klíčová slova. nelineární diferencní rovnice, prostory posloupností, věty o limitním přechodu věty o pevném bodu, kritérium relativní kompaktnosti.

Článek vznikl na základě bakalářské práce autora v oboru Matematické inženýrství na FSI VUT v Brně. Vedoucím práce byl Pavel Řehák z Ústavu matematiky FSI VUT v Brně.

2. PROSTORY POSLOUPNOSTÍ

Existuje celá řada prostorů posloupností, pro účely tohoto článku však hrají klíčovou roli pouze prostory základní, a sice ℓ^p pro $p \in [1, \infty)$ a ℓ^∞ , uvedeme si proto jejich definice a některé klíčové vlastnosti.

Definice 2.1 (Prostor ℓ^p). Necht' $p \in [1, \infty)$ a M je množina reálných posloupností definovaná jako

$$M := \left\{ u = \{u_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}, \sum_{k=1}^\infty |u_k|^p < \infty \right\}.$$

Na uvedenou množinu zavedeme metriku pomocí zobrazení $\varrho_p: M \times M \rightarrow [0, \infty)$ daného předpisem

$$\varrho_p(u, v) := \left(\sum_{k=1}^\infty |u_k - v_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad u = \{u_k\}, v = \{v_k\} \in M.$$

Množina M s definovanou metrikou ϱ_p pak tvoří metrický prostor (M, ϱ_p) označovaný běžně ℓ^p .

Metrický prostor ℓ^p pro libovolné $p \in [1, \infty)$ je rovněž normovaným lineárním prostorem, příslušná norma je tvaru

$$\|u\|_p := \left(\sum_{k=1}^\infty |u_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad u \in M.$$

Definice 2.2 (Prostor ℓ^∞). Necht' M je množina reálných posloupností definovaná jako

$$M := \left\{ u = \{u_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}, \{u_k\} \text{ je ohraničená} \right\}.$$

Na této množině uvažujme metriku ϱ_∞ danou předpisem

$$\varrho_\infty(u, v) := \sup_{k \in \mathbb{N}} |u_k - v_k|, \quad u = \{u_k\}, v = \{v_k\} \in M.$$

Množina M s metrikou ϱ_∞ tvoří metrický prostor (M, ϱ_∞) označovaný běžně ℓ^∞ .

Metrický prostor ℓ^∞ je podobně jako ℓ^p současně normovaným lineárním prostorem, příslušná norma je dána předpisem

$$\|u\|_\infty := \sup_{k \in \mathbb{N}} |u_k|, \quad u \in M.$$

Dále uvedeme některé důležité vlastnosti těchto prostorů posloupností, důkazy těchto tvrzení patří ke klasickým výsledkům funkcionální analýzy, proto si je uvádět nebudeme.

Vlastnosti prostorů posloupností

- Metrický prostor ℓ^p je pro libovolné $p \in [1, \infty)$ úplný.
- Metrický prostor ℓ^p je pro libovolné $p \in [1, \infty)$ separabilní.
- Metrický prostor ℓ^∞ je úplný.
- Metrický prostor ℓ^∞ není separabilní.

3. VĚTY O LIMITNÍM PŘECHODU

Důležitým nástrojem pro analýzu diferenciálních a diferenčních rovnic jsou věty o limitním přechodu. Jejich spojitě verze jsou běžnou součástí učebnic funkcionální analýzy, avšak abychom mohli korektně přistoupit k analýze rovnice difereční, je třeba zformulovat a dokázat jejich diskrétní varianty. K důkazu lze přistoupit různými způsoby, my detailně ukážeme způsob čistě diskrétní a níže naznačíme i alternativní přístupy. Jako hlavní zdroje nám v této části posloužily práce [1, 3, 4, 9].

3.1. Čistě diskrétní přístup

Klíčovou roli v čistě diskrétním důkazu našich vět bude hrát Fatouovo lemma.

Lemma 3.1 (Fatouo–diskrétní). *Nechť $\{u_k^{[n]}\}_{k=1}^{\infty}$ je pro všechna $n \in \mathbb{N}$ posloupnost nezáporných čísel, která splňuje rovnost $\liminf_{n \rightarrow \infty} u_k^{[n]} = v_k \in \mathbb{R}$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$. Potom*

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = \sum_{k=1}^{\infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} u_k^{[n]} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]}.$$

Důkaz. Pro důkaz budeme uvažovat libovolné $t \in \mathbb{N}$ a $m \in \mathbb{N}$, tak, že $t \geq n$, potom pro každé $k \in \mathbb{N}$

$$\inf_{s \geq n} u_k^{[s]} \leq u_k^{[t]}.$$

Pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$ je poté splněno

$$\sum_{k=1}^m \inf_{s \geq n} u_k^{[s]} \leq \inf_{t \geq n} \sum_{k=1}^m u_k^{[t]} \leq \inf_{t \geq n} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[t]}.$$

Z uvedeného pro všechna $m \in \mathbb{N}$ vyplývá

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m v_k &= \sum_{k=1}^m \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{s \geq n} u_k^{[s]} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \inf_{s \geq n} u_k^{[s]} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{t \geq n} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[t]} \right) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]}. \end{aligned}$$

Nakonec provedeme limitní přechod $m \rightarrow \infty$ pro $\sum_{k=1}^m v_k$ a dostaneme

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]}.$$

□

Nyní už přikročíme k formulaci a důkazu vět samotných.

Věta 3.2 (Leviho o monotónní konvergenci–diskrétní). *Nechť $\{u_k^{[n]}\}_{k=1}^{\infty}$ je pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ posloupnost nezáporných čísel a je splněno, že $\{u_k^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ je pro*

všechna $k \in \mathbb{N}$ neklesající posloupnost (tj. $u_k^{[n]} \leq u_k^{[n+1]}$) a konverguje pro $n \rightarrow \infty$ k $v_k \in \mathbb{R}$. Potom

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} u_k^{[n]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]}.$$

Důkaz. Z předpokladů věty plyne pro libovolné $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]} \leq \sum_{k=1}^{\infty} v_k,$$

a platí tedy i

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]} \leq \sum_{k=1}^{\infty} v_k. \quad (3.1)$$

Dále na základě Fatouova lemmatu můžeme usoudit

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]}. \quad (3.2)$$

Celkově z (3.1) a (3.2) vyplývá

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]} \leq \sum_{k=1}^{\infty} v_k \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]}.$$

Z této nerovnosti pak plyne

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} u_k^{[n]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]}.$$

□

Věta 3.3 (Lebesgueova o dominantní konvergenci – diskrétní). *Nechť $\{u_k^{[n]}\}_{k=1}^{\infty}$ je pro všechna $n \in \mathbb{N}$ posloupnost reálných čísel a pro všechna $k \in \mathbb{N}$ je splněno $\lim_{n \rightarrow \infty} u_k^{[n]} = v_k$. Dále necht existuje posloupnost $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ splňující pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $k \in \mathbb{N}$ nerovnost $|u_k^{[n]}| \leq w_k$, přičemž $\sum_{k=1}^{\infty} w_k < \infty$. Potom $\sum_{k=1}^{\infty} v_k < \infty$ a*

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} u_k^{[n]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]}.$$

Důkaz. Protože pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a pro všechna $k \in \mathbb{N}$ platí $|u_k^{[n]}| \leq w_k$, můžeme tvrdit pro všechna $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k^{[n]}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} w_k.$$

Z toho vyplývá, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]}$ je pro všechna $n \in \mathbb{N}$ absolutně konvergentní.

Nejdříve ukážeme, že $\sum_{k=1}^{\infty} v_k < \infty$. Uvažujme pro všechna $n \in \mathbb{N}$ posloupnost $\{w_k - u_k^{[n]}\}_{k=1}^{\infty}$. Pro všechna $k \in \mathbb{N}$ je splněno $|u_k^{[n]}| \leq w_k$, a proto je to posloupnost nezáporných čísel. Z Fatouova lemmatu pak plyne

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} (w_k - u_k^{[n]}) &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} (w_k - u_k^{[n]}) = \sum_{k=1}^{\infty} (w_k - v_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} w_k - \sum_{k=1}^{\infty} v_k, \end{aligned}$$

Protože $\sum_{k=1}^{\infty} w_k < \infty$, je zřejmě splněno $\sum_{k=1}^{\infty} v_k < \infty$. Dále platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k - \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} (w_k - u_k^{[n]}) \geq \sum_{k=1}^{\infty} w_k - \sum_{k=1}^{\infty} v_k.$$

Z toho můžeme vyvodit

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]} \leq \sum_{k=1}^{\infty} v_k. \quad (3.3)$$

Vezměme nyní posloupnost $\{w_k + u_k^{[n]}\}_{k=1}^{\infty}$, ta je podobně jako $\{w_k - u_k^{[n]}\}_{k=1}^{\infty}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ posloupností nezáporných čísel. Aplikujme na ni Fatouovo lemma následovně

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} (w_k + u_k^{[n]}) &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} (w_k + u_k^{[n]}) = \sum_{k=1}^{\infty} (w_k + v_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} w_k + \sum_{k=1}^{\infty} v_k, \end{aligned}$$

a tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k + \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} (w_k + u_k^{[n]}) \geq \sum_{k=1}^{\infty} w_k + \sum_{k=1}^{\infty} v_k.$$

Z toho vyplývá

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]} \geq \sum_{k=1}^{\infty} v_k. \quad (3.4)$$

Z (3.3) a (3.4) poté plyne

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]} \leq \sum_{k=1}^{\infty} v_k.$$

Na základě této nerovnosti pak můžeme konstatovat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]} = \sum_{k=1}^{\infty} v_k.$$

□

3.2. Využití klasických verzí vět o limitním přechodu

Alternativně je možné k důkazu vět 3.2 a 3.3 využít klasických verzí vět o konvergenci ve spojení s konstrukcí schodovitých funkcí sestavených pomocí posloupností v předpokladech diskrétních verzí.

Nechť $\{u_k^{[n]}\}_{k=1}^{\infty}$ je pro všechna $n \in \mathbb{N}$ posloupnost nezáporných čísel, která pro všechna $k \in \mathbb{N}$ splňuje $\lim_{n \rightarrow \infty} u_k^{[n]} = v_k \in \mathbb{R}$. Uvažujme intervaly $I_i = [i, i+1)$ a odpovídající charakteristické funkce χ_{I_i} pro všechna $i \in \mathbb{N}$. Pak definujme funkci f_n následujícím způsobem

$$f_n = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{I_i} u_i^{[n]}.$$

Získali jsme takto posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nezáporných měřitelných funkcí na $[1, \infty)$. Podobně pro $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ lze definovat měřitelnou funkci f takto

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{I_i} v_i.$$

Za předpokladu, že $\{u_k^{[n]}\}_{k=1}^{\infty}$ je neklesající posloupnost nezáporných čísel, je i posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ neklesající posloupností, tentokrát nezáporných funkcí. Pak jsou splněny předpoklady spojitě verze Leviho věty a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I f(x) dx.$$

Obdobně bychom postupovali i v případě věty Lebesgueovy.

3.3. Abstraktní přístup k teorii míry

Další přístup k důkazu vět 3.2 a 3.3 využívá teorie obecného měřitelného prostoru a abstraktní teorie míry. Na obecném měřitelném prostoru lze pro funkce opět odvodit věty o limitním přechodu. Diskrétní věty o limitním přechodu pak plynou z obecných verzí vět, pokud jako nosnou množinu zvolíme přirozená čísla a jako míru čítací.

Definice 3.4 (Čítací míra). Uvažujme množinu \mathbb{N} a její σ -algebru $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Jestliže $\alpha: \Sigma \rightarrow [0, \infty) \cup \{\infty\}$ je zobrazení definované následujícím způsobem

$$\alpha(A) = \begin{cases} \text{card}(A) & \text{pokud je množina } A \text{ konečná,} \\ \infty & \text{pokud množina } A \text{ není konečná,} \end{cases}$$

pak α je míra na $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, kterou nazýváme čítací.

3.4. Věty o limitním přechodu pro řady

Podobně jako pro posloupnosti můžeme formulovat diskrétní Leviho a Lebesgueovu větu pro řady. Získáme tak diskrétní ekvivalent zaměnitelnosti sumace a integrálu. Při splnění modifikovaných předpokladů vět o limitním přechodu pro posloupnosti

je pak zaručeno

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_k^{[n]} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]}.$$

4. VĚTY O PEVNÉM BODU

Podstatnou roli při vyšetřování kvalitativních vlastností diferenciálních a diferenciálních rovnic hrají věty o pevném bodu. Takových vět je celá řada, pro naše účely se zaměříme na dvě věty Banachovu, která nám zajišťuje za přísnějších předpokladů existenci a jednoznačnost pevného bodu a Schauderovu, která za obecnějších podmínek zajišťuje existenci. Více o větách o pevném bodu lze dohledat např. v [7, 10].

Definice 4.1 (Pevný bod). Nechť (M, ϱ) je metrický prostor a dále nechť $F: M \rightarrow M$. Bod $u^* \in M$ nazýváme pevný bod zobrazení F , je-li splněno $F(u^*) = u^*$.

Věta 4.2 (Banachova o pevném bodu). *Nechť (M, ϱ) je úplný metrický prostor a zobrazení $F: M \rightarrow M$ je kontrakce. Pak existuje jediný pevný bod zobrazení F , který je navíc limitou posloupnosti $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $u_1 \in M$ je libovolné a $u_{n+1} = F(u_n)$ pro $n \in \mathbb{N}$.*

Než bude uvedena Schauderova věta, je vhodné připomenout jeden důležitý pojem.

Definice 4.3 (Relativně kompaktní množina). Nechť (M, ϱ) je metrický prostor. Množinu $N \subseteq M$ nazýváme relativně kompaktní, jestliže její uzávěr $\overline{N} \subseteq M$ je množina kompaktní v (M, ϱ) .

Věta 4.4 (Schauderova o pevném bodu zobecněná). *Nechť M je Banachův prostor, $N \subseteq M$ neprázdná, konvexní, omezená a uzavřená množina a $F: N \rightarrow N$ je spojitě zobrazení takové, že $F(N)$ je relativně kompaktní podmnožina N . Potom má zobrazení F pevný bod $u^* \in N$.*

V předpokladech Schauderovy věty 4.4 figuruje předpoklad relativní kompaktnosti. Problematika relativní kompaktnosti však na ℓ^p a ℓ^∞ není triviální záležitost. Další část článku proto věnujeme kritériím relativní kompaktnosti v prostorech posloupností.

5. KRITÉRIA RELATIVNÍ KOMPAKTNOSTI

Při vyšetřování diferenční rovnice uvažované v tomto článku budeme pracovat primárně s prostorem ℓ^∞ , proto kritérium pro tento prostor podrobně dokážeme a pro ℓ^p se uchýlíme pouze k formulaci. V této části jsme vycházeli primárně z [2].

Velmi důležitou roli pro důkaz kritéria hraje vztah mezi relativní kompaktností a vlastností, které se říká prekompaktnost. Nejprve si musíme ujasnit, co vlastně prekompaktnost znamená.

Definice 5.1 (ε -sít). Necht' (M, ϱ) je metrický prostor, ε kladné reálné číslo a $N \subseteq M$. Množinu $A \subseteq M$ nazýváme ε -sít množiny N , pokud pro všechna $u \in N$ existuje $v \in A$ tak, že $\varrho(u, v) \leq \varepsilon$.

Definice 5.2 (Prekompaktní množina). Necht' (M, ϱ) je metrický prostor. Množinu $N \subseteq M$ nazýváme prekompaktní, jestliže existuje její konečná ε -sít pro každé $\varepsilon > 0$.

Věta 5.3. *Necht' (M, ϱ) je úplný metrický prostor. Pak je množina $N \subseteq M$ relativně kompaktní právě tehdy, když je prekompaktní.*

Věta nám vlastně říká, že pojmy relativní kompaktnost a prekompaktnost jak na prostoru ℓ^∞ , tak na prostoru ℓ^p splývají, tohoto faktu využijeme a k důkazu kritéria budeme přistupovat přes konstrukci ε -sítě.

5.1. Relativně kompaktní podmnožiny ℓ^∞

Než uvedeme kritérium relativní kompaktnosti pro podmnožiny ℓ^∞ , uvedeme ještě dvě důležité definice.

Definice 5.4 (Stejně ohraničené posloupnosti). Posloupnosti z množiny $N \subset \ell^\infty$ nazýváme stejně ohraničené, pokud je množina N v ℓ^∞ omezená.

Definice 5.5 (Stejně cauchyovské posloupnosti). Posloupnosti z množiny $N \subset \ell^\infty$ nazýváme stejně cauchyovské, pokud pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $i, j \geq n$ a pro libovolnou posloupnost $u \in N$ platí

$$|u_i - u_j| < \varepsilon.$$

Následuje samotné kritérium relativní kompaktnosti.

Věta 5.6. *Množina $N \subset \ell^\infty$ stejně ohraničených a stejně cauchyovských posloupností je relativně kompaktní.*

Důkaz. Pro důkaz věty zkonstruujeme pro N konečnou ε -sít pro každé $\varepsilon > 0$. Uvažujme $\varepsilon > 0$ libovolné. Posloupnosti z N jsou stejně cauchyovské (viz definice 5.5), proto existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $i, j \geq n$ a pro libovolnou posloupnost $u \in N$ platí

$$|u_i - u_j| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5.1)$$

Vzhledem k tomu, že posloupnosti z N jsou stejně ohraničené, existuje $L \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $u \in N$ platí

$$\|u\|_\infty \leq L.$$

Necht' $m \in \mathbb{N}$ je takové, že pro čísla $-L = y_1 < y_2 < \dots < y_m = L$ je splněno

$$|y_i - y_{i+1}| < \varepsilon \quad (5.2)$$

pro všechna $1 \leq i \leq m - 1$.

Dále pro všechna $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ přiřadíme v_k jednu z hodnot $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ a pro $k > n$ položíme $v_k = v_n$. Množinu všech takto definovaných posloupností $v = \{v_k\}_{k=1}^\infty$ označme A . Zřejmě $A \subset \ell^\infty$ má právě m^n prvků.

Nakonec ukážeme, že množina A je ε -sítí množiny N , tj. že pro všechna $u \in N$ existuje $v \in A$ takové, že

$$\varrho_\infty(u, v) < \varepsilon.$$

Pro každé $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ vyberme $z_k \in \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ tak, aby platilo

$$|u_k - z_k| = \min_{j \in \{1, 2, \dots, m\}} |u_k - y_j|.$$

Z (5.2) vyplývá $|u_k - z_k| < \varepsilon/2$ pro $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Položme $v_k = z_k$ pro $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ a $v_k = v_n$ pro $k > n$. Posloupnost v zřejmě náleží do množiny A . Pro $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ je pak zřejmě splněno

$$|u_k - v_k| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.3}$$

a pro $k > n$

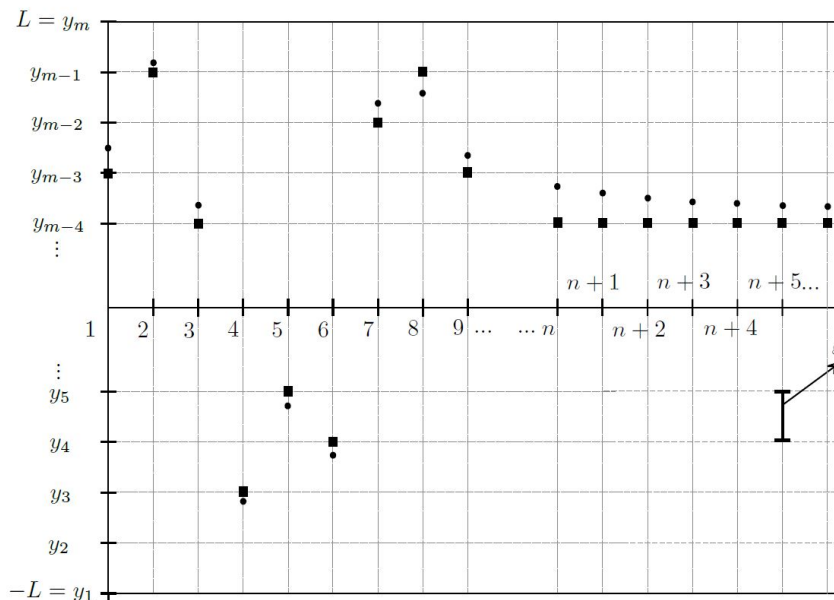
$$|u_k - v_k| = |u_k - v_n| \leq |u_k - u_n| + |u_n - v_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

což plyne z trojúhelníkové nerovnosti, (5.1) a (5.3).

Celkově tedy dostáváme

$$\varrho_\infty(u, v) \leq \varepsilon.$$

Množina A je tedy konečnou ε -sítí množiny N . Množina N je proto v ℓ^∞ prekompaktní a vzhledem k úplnosti ℓ^∞ i relativně kompaktní. Důkaz názorně ilustruje obr 1. □



Obrázek 1. Aproximace posloupnosti $u \in N$ (kolečka) posloupností v z ε -sítě (čtverečky).

5.2. Relativně kompaktní podmnožiny ℓ^p

V této části si ještě bez důkazu uvedeme kritérium pro ℓ^p .

Věta 5.7. *Množina $N \subset \ell^p$ pro $1 \leq p < \infty$ je relativně kompaktní právě tehdy, když jsou prvky této množiny stejně omezené a pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $u \in N$ platí*

$$\left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |u_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Detailní důkaz je vypracován v [6]. Více si lze přečíst také v [4, 8].

6. ANALÝZA NELINEÁRNÍ DIFERENČNÍ ROVNICE

Teoretické poznatky z předchozích částí nyní využijeme pro analýzu rovnice

$$\Delta^2 y_n = p_n g(y_{n+1}), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6.1)$$

kde symbolem Δ rozumíme standardní dopřednou diferenci definovanou jako

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Symbol Δ^2 pak chápeme jako

$$\Delta^2 y_n = \Delta(\Delta y_n) = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Budeme předpokládat, že pro $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí $p_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a funkce $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a taková, že $tg(t) > 0$ pro $t \neq 0$.

Zaměříme se na studium existence řešení rovnice (6.1), které pro dané kladné reálné číslo c splňuje podmínky

$$\left. \begin{aligned} \Delta y_n &< 0, & n \in \mathbb{N}, \\ y_n &> 0, & n \in \mathbb{N}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n &= c. \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

6.1. Podmínky zaručující existenci řešení

V této části odvodíme podmínku, pro kterou ukážeme, že je nejenom postačující, nýbrž i nutnou pro existenci řešení (6.1) s vlastnostmi (6.2) pro libovolně zvolené $c > 0$.

Věta 6.1. *Pro posloupnost $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ v rovnici (6.1) platí*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k p_k < \infty \quad (6.3)$$

právě tehdy, když pro libovolně zvolené kladné reálné číslo c existuje řešení úlohy (6.1), (6.2).

Poznámka 6.2. V důkazu později ukážeme, že ve skutečnosti pro splnění podmínky (6.3) stačí, aby existovalo jedno $c > 0$, pro které existuje řešení úlohy (6.1), (6.2).

Lemma 6.3. *Nechť $p_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\sum_{n=j}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} p_k < \infty$ pro nějaké $j \in \mathbb{N}$. Pak*

$$\sum_{n=j}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} p_k = \sum_{k=j}^{\infty} (k+1-j)p_k.$$

Důkaz. Důkaz plyne z diskrétní verze Fubiniovy věty. \square

Důkaz věty 6.1. Nejdříve se zaměříme na implikaci zprava doleva. Využijeme vztah

$$\sum_{k=m}^{n-1} \Delta y_k = y_n - y_m \quad (6.4)$$

platný pro libovolná $m, n \in \mathbb{N}$ taková, že $m \leq n$.

Předpokládejme, že y je řešení (6.1) s vlastnostmi (6.2) pro pevně zvolené $c > 0$. Rovnici (6.1) upravíme pomocí ekvivalentní úpravy, kdy na obě strany rovnice aplikujeme $\sum_{j=k}^{m-1}$, s ohledem na (6.4) je pak pro $m > k \geq 1$ splněno

$$\Delta y_m - \Delta y_k = \sum_{j=k}^{m-1} p_j g(y_{j+1}).$$

Dále provedeme limitní přechod $m \rightarrow \infty$. Předpokládáme konvergenci y , proto $\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta y_m = 0$. Dostaneme tak pro $k \in \mathbb{N}$

$$0 - \Delta y_k = \sum_{j=k}^{\infty} p_j g(y_{j+1}). \quad (6.5)$$

Na obě strany (6.5) nyní aplikujeme $\sum_{k=n}^{m-1}$ a dostáváme pro $m > k \geq 1$

$$y_n = y_m + \sum_{k=n}^{m-1} \sum_{j=k}^{\infty} p_j g(y_{j+1}),$$

nyní provedeme další limitní přechod $m \rightarrow \infty$, a protože předpokládáme $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = c$, získáváme pro $n \in \mathbb{N}$

$$y_n = c + \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j g(y_{j+1}).$$

Platí tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j g(y_{j+1}) < \infty$$

a díky limitnímu srovnávacímu kritériu pro řady s kladnými členy je splněno i

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j < \infty.$$

S ohledem na lemma 6.3 pak platí $\sum_{k=1}^{\infty} k p_k < \infty$. Tím je dokázána implikace zprava doleva.

Nyní se zaměříme na implikaci zleva doprava. S využitím zobecněné Schauderovy věty (viz věta 4.4) dokážeme nejprve řešení rovnice (6.1) splňující

$$\left. \begin{array}{l} \Delta y_n < 0, \quad n \geq n_0, \\ y_n > 0, \quad n \geq n_0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = c \end{array} \right\} \quad (6.6)$$

pro $n \geq n_0$, kde $n_0 \in \mathbb{N}$ je dostatečně velké. Uvažujme libovolné reálné kladné číslo, to si označme c . Dále označme

$$M = \max_{t \in [c, 2c]} g(t).$$

Z konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} k p_k$ a lemma 6.3 plyne konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} p_k$. Pro libovolné $\varepsilon > 0$ tak existuje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} p_k < \varepsilon$. Zvolme $\varepsilon = c/M$ a označme odpovídající n_ε jako n_0 .

Jak jsme již uvedli, prostor ℓ^∞ je úplný. Dále najdeme množinu $\Omega \subseteq \ell^\infty$, která je neprázdná, konvexní, uzavřená a omezená a zobrazení $T: \Omega \rightarrow \Omega$, které je spojitě a $T\Omega$ je relativně kompaktní podmnožina Ω .

Množinu Ω budeme uvažovat ve tvaru

$$\Omega = \{u \in \ell^\infty, c \leq u_n \leq 2c \text{ pro } n \geq n_0\}.$$

Tato množina je zřejmě neprázdná a omezená. Dále ukážeme, že je uzavřená. Uvažujme proto posloupnost $\{u^{[m]}\}_{m=1}^{\infty}$ prvků z Ω konvergující k u . Je třeba dokázat, že u patří do Ω . Platí, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sup_{n \geq n_0} |u_n^{[m]} - u_n| < \varepsilon, \quad m \geq m_\varepsilon.$$

Vezměme libovolné pevně zvolené $n \geq n_0$, pro to je splněno $\lim_{m \rightarrow \infty} u_n^{[m]} = u_n$. Pro všechna $m \in \mathbb{N}$ pak platí pro zvolené n , že

$$c \leq u_n^{[m]} \leq 2c,$$

a proto

$$c \leq u_n \leq 2c.$$

Vzhledem k tomu, že $n \geq n_0$ je zvoleno libovolně, platí $u \in \Omega$ a množina Ω je uzavřená.

Zbývá ukázat, že je množina Ω konvexní. Vezměme $u, v \in \Omega$ a libovolné $\lambda \in [0, 1]$. Pro $n \geq n_0$ platí

$$\lambda c \leq \lambda u_n \leq \lambda 2c \quad (6.7)$$

a

$$(1 - \lambda)c \leq (1 - \lambda)v_n \leq (1 - \lambda)2c. \quad (6.8)$$

Když (6.7) a (6.8) sečteme, dostaneme pro $n \geq n_0$

$$c \leq \lambda u_n + (1 - \lambda)v_n \leq 2c.$$

Vzhledem k tomu, že zřejmě $\lambda u + (1 - \lambda)v \in \ell^\infty$, můžeme konstatovat, že $\lambda u + (1 - \lambda)v \in \Omega$ a množina Ω je tedy konvexní.

Zobrazení T definujeme s ohledem na možnost ekvivalentní úpravy diferenční rovnice na rovnici sumační, které jsme využili už v důkazu implikace zprava doleva, takto

$$(Tu)_n = c + \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j g(u_{j+1}), \quad u \in \Omega.$$

Nyní dokážeme, že je splněno $T\Omega \subseteq \Omega$. Nechť $u \in \Omega$, jistě platí $Tu \in \ell^\infty$, neboť $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} p_k < \infty$ a Tu je tedy ohraničená posloupnost. Dále je třeba dokázat, že pro $n \geq n_0$ platí

$$c \leq (Tu)_n \leq 2c.$$

První nerovnost je splněna, neboť $p_k \geq 0$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, a protože $tg(t) > 0$ pro $t \neq 0$, platí $g(t) > 0$ pro $t > 0$, a tedy $\sum_{k=n}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j g(u_{j+1}) \geq 0$. Abychom dokázali platnost druhé nerovnosti, ukážeme, že pro $n \geq n_0$ platí

$$\sum_{k=n}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j g(u_{j+1}) \leq c.$$

Budeme tak postupně zvětšovat výraz $\sum_{k=n}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j g(u_{j+1})$ následujícím způsobem

$$\sum_{k=n}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j g(u_{j+1}) \leq M \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j \leq M \sum_{k=n_0}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j.$$

Vzhledem k tomu, že platí $\sum_{k=n_0}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j \leq c/M$, můžeme výraz dále upravit

$$M \sum_{k=n_0}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j \leq M \frac{c}{M} = c.$$

Celkově tedy $Tu \in \Omega$.

Díky absolutní konvergenci $\sum_{k=n}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j g(u_{j+1})$ můžeme zobrazení T pro $n \geq n_0$ ekvivalentně zapsat s ohledem na lemma 6.3 následovně

$$(Tu)_n = c + \sum_{j=n}^{\infty} (j+1-n)p_j g(u_{j+1}).$$

Dále je zapotřebí dokázat, že je zobrazení T spojitě. Nechť je posloupnost $\{u^{[m]}\}_{m=1}^{\infty} \subseteq \Omega$ taková, že $\lim_{m \rightarrow \infty} \|u^{[m]} - u\|_{\infty} = 0$. Ukážeme, že platí

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|Tu^{[m]} - Tu\|_{\infty} = 0.$$

Zaměříme se na výraz $\|Tu^{[m]} - Tu\|_{\infty}$, který rozepíšeme a zvětšíme následovně

$$\begin{aligned} \sup_{n \geq n_0} |(Tu^{[m]})_n - (Tu)_n| &= \sup_{n \geq n_0} \left| \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j g(u_{j+1}^{[m]}) - \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j g(u_{j+1}) \right| \\ &= \sup_{n \geq n_0} \left| \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j (g(u_{j+1}^{[m]}) - g(u_{j+1})) \right| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j |g(u_{j+1}^{[m]}) - g(u_{j+1})|. \end{aligned}$$

Posloupnost $\{p_j |g(u_{j+1}^{[m]}) - g(u_{j+1})|\}_{j=n_0}^\infty$ je pro všechna $m \in \mathbb{N}$ posloupností nezáporných čísel. Existuje $L \geq 0$ takové, že $|g(u_{j+1}^{[m]}) - g(u_{j+1})| \leq L$ pro všechna $j \geq n_0$ a $m \in \mathbb{N}$, a proto platí

$$p_j |g(u_{j+1}^{[m]}) - g(u_{j+1})| \leq L p_j.$$

My víme, že je splněno $\sum_{n=1}^\infty \sum_{k=n}^\infty p_k < \infty$, pak zřejmě $\sum_{j=n_0}^\infty p_j < \infty$. Posloupnost $\{p_j |g(u_{j+1}^{[m]}) - g(u_{j+1})|\}_{j=n_0}^\infty$ tak splňuje předpoklady Lebesgueovy věty o dominantní konvergenci (věta 3.3). Posloupnost

$$\left\{ \sum_{j=k}^\infty p_j |g(u_{j+1}^{[m]}) - g(u_{j+1})| \right\}_{k=n_0}^\infty \quad (6.9)$$

je také posloupností nezáporných čísel takovou, že pro $k \geq n_0$ a $m \in \mathbb{N}$ že platí

$$\sum_{j=k}^\infty p_j |g(u_{j+1}^{[m]}) - g(u_{j+1})| \leq L \sum_{j=k}^\infty p_j.$$

Víme, že $\sum_{n=1}^\infty \sum_{k=n}^\infty p_k < \infty$, a proto i $\sum_{k=n_0}^\infty \sum_{j=k}^\infty p_j < \infty$. Posloupnost (6.9) tedy předpoklady Lebesgueovy věty také splňuje. Lebesgueovu větu tak nyní lze dvakrát aplikovat následovně

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=n_0}^\infty \sum_{j=k}^\infty p_j |g(u_{j+1}^{[m]}) - g(u_{j+1})| = \sum_{k=n_0}^\infty \sum_{j=k}^\infty p_j \lim_{m \rightarrow \infty} |g(u_{j+1}^{[m]}) - g(u_{j+1})|.$$

Předpokládáme $\lim_{m \rightarrow \infty} \|u^{[m]} - u\|_\infty = 0$, proto platí $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sup_{n \geq n_0} |u_n^{[m]} - u_n| \right) = 0$.

Lze tedy konstatovat, že $\lim_{m \rightarrow \infty} u_{j+1}^{[m]} = u_{j+1}$ je splněno pro všechna $j \geq n_0 - 1$. Na základě této úvahy potom můžeme tvrdit

$$\sum_{k=n_0}^\infty \sum_{j=k}^\infty p_j \lim_{m \rightarrow \infty} |g(u_{j+1}^{[m]}) - g(u_{j+1})| = \sum_{k=n_0}^\infty \sum_{j=k}^\infty p_j 0 = 0.$$

Celkově potom

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|Tu^{[m]} - Tu\|_\infty = 0$$

a zobrazení T je tedy spojitě.

Zbývá dokázat, že $T\Omega$ je relativně kompaktní, k tomu využijeme věty 5.6. Množina $T\Omega$ je omezená, neboť $T\Omega \subseteq \Omega$ a množina Ω je omezená. Stačí tedy ukázat, že posloupnosti z $T\Omega$ jsou stejně cauchyovské.

K tomu je zapotřebí demonstrovat, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n, m \geq n_\varepsilon$ platí $|(Tu)_n - (Tu)_m| < \varepsilon$ pro všechna $u \in \Omega$.

Pro $u \in \Omega$ a $n > m$ je

$$|(Tu)_m - (Tu)_n| = \sum_{k=m}^{n-1} \sum_{j=k}^\infty p_j g(u_{j+1}) \leq M \sum_{k=m}^{n-1} \sum_{j=k}^\infty p_j \leq M \sum_{k=m}^\infty \sum_{j=k}^\infty p_j.$$

Využili jsme předpokladu $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} p_k < \infty$, proto i $\sum_{k=m}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j < \infty$.
Tudíž

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j = 0.$$

Nechť je $\varepsilon > 0$ libovolné. Pak existuje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $m \geq n_\varepsilon$ platí

$$M \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j < \varepsilon.$$

Pro $n > m \geq n_\varepsilon$ je tak splněno

$$|(Tu)_m - (Tu)_n| < \varepsilon.$$

Dokázali jsme tak platnost všech předpokladů zobecněné Schauderovy věty o pevném bodu a existuje tedy pevný bod zobrazení T . To znamená, že existuje řešení y rovnice (6.1) s vlastnostmi (6.6).

Řešení rovnice (6.1) lze rozšířit doleva na celou množinu \mathbb{N} . Skutečně pro $n_0 - 1$ definujeme

$$y_{n_0-1} = c + \sum_{k=n_0-1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j g(y_{j+1}).$$

Víme, že platí $c \in (0, \infty)$, je splněno $p_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $g(t) > 0$ pro všechna $t \in (0, \infty)$. Platí tak zřejmě $y_{n_0-1} > 0$, a protože

$$\sum_{k=n_0-1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j g(y_{j+1}) > \sum_{k=n_0}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j g(y_{j+1})$$

je splněno také $\Delta y_{n_0-1} < 0$. Postupně tak prodloužíme řešení na \mathbb{N} , tak že y splňuje (6.2). \square

Obdobným způsobem lze pro rovnici (6.1) dokázat existence rostoucího záporného řešení konvergujícího k libovolné záporné konstantě.

6.2. Podmínky zaručující existenci a jednoznačnost řešení

Pokud bychom zvolili přísnější podmínku a vyžadovali, aby funkce g byla navíc lipschitzovsky spojitá na $[0, \infty)$, pak bychom byli schopni s využitím Banachovy věty dokázat pro libovolné $c \in (0, \infty)$ nejenom existenci, ale i jednoznačnosti řešení (6.1) s vlastnostmi (6.2). Větu o této skutečnosti si nejprve zformulujeme a následně uvedeme stručně bez detailů důkaz.

Věta 6.4. *Nechť g splňuje Lipschitzovu podmínku na $[0, \infty)$. Pak pro posloupnost $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ v rovnici (6.1) platí*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k p_k < \infty$$

právě tehdy, když pro libovolně zvolené kladné reálné číslo c existuje jediné řešení úlohy (6.1), (6.2).

Myšlenka důkazu. Důkaz implikace zprava doleva zde splývá s důkazem věty 6.1, neboť platnost $\sum_{k=1}^{\infty} kp_k < \infty$ je zaručena už existencí řešení.

V důkazu implikace zleva doprava bychom pak uvažovali, že funkce g je lipschitzovsky spojitá na $[0, \infty)$ s lipschitzovskou konstantou L a zvolili $n_0 \in \mathbb{N}$, tak, aby platilo

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j < \frac{1}{2L}. \quad (6.10)$$

Dále bychom uvažovali jako množinu Ω množinu všech posloupností definovaných a ohraničených pro $n \geq n_0$ a operátor T definovaný v důkazu věty 6.1 a ukázali, že je toto zobrazení kontrakcí, tj. že existuje $K \in (0, 1)$ takové, že pro všechna $u, v \in \Omega$ platí

$$\|Tu - Tv\|_{\infty} \leq K\|u - v\|_{\infty}.$$

Detailní důkaz si lze přečíst v [6]. □

6.3. Další poznámky

Rovnici (6.1) lze chápat jako diskretizaci rovnice

$$y'' = p(t)g(y), \quad t \geq 0,$$

kde p je kladná funkce a g má vlastnosti jako v případě rovnice (6.1). Tato rovnice zahrnuje známou rovnici Emdenova–Fowlerova typu (příp. Thomasova–Fermiho), kde funkce g je volena následovně

$$g(t) = |t|^{\lambda} \operatorname{sgn} t, \quad \lambda \in (0, \infty).$$

Ta se začala studovat v souvislosti s modelováním struktury hvězd a úvahami o modelech atomů, ale v současné době má celou řadu dalších aplikací.

7. ZÁVĚR

V článku jsme zpracovali aparát související s funkcionální analýzou pro kvalitativní analýzu diferečních rovnic a demonstrovali jeho využití při analýze řešení rovnice (6.1). Na téma lze dále navázat studiem dalších diferečních rovnic a rozborem analogií a rozdílů oproti jejich diferencíálním protějškům.

REFERENCE

- [1] S. Cheng: *A crash course on the Lebesgue integral and measure theory*, 51 Franklin St, Fifth Floor, Boston, MA 02110-1301 USA, 2008.
- [2] S. S. Cheng, W. T. Patula: *An existence theorem for a nonlinear difference equations*, *Nonlin. Anal.* **20** (1993), No. 3, 193–203.
- [3] D. H. Griffel: *Applied functional analysis*, New York: Dover, 2002.
- [4] D. Farenick: *Fundamentals of functional analysis*, Switzerland: Springer International Publishing, 2016.
- [5] H. Hanche-Olsen, H. Holden: *The Kolmogorov-Riezs compactness theorem*, *Expositiones Mathematicae* **28** (2010), No. 4, 385–394.
- [6] J. Kosík: *Vlastnosti prostorů posloupností a jejich aplikace v teorii nelineárních diferečních rovnic*, Bakalářská práce, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Brno, 2022.

- [7] P. Kumlin: *A note on fixed point theory*, TMA 401/MAN 670 Functional Analysis, 2003/2004.
- [8] I. Netuka: *Základy moderní analýzy*, Praha: MatfyzPress, 2014.
- [9] S. Ovchinnikov: *Measure, integral, derivative: A course on Lebesgue's theory*, New York: Springer Science+Business Media, 2013.
- [10] V. Pata: *Fixed Point Theorems and Applications*, New York: Springer International Publishing, 2019.

Jindřich Kosík, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: jin.kosik@gmail.com

VYBRANÉ PŘÍKLADY Z INTERNETOVEJ MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

VIERA ŠTOUDKOVÁ RŮŽIČKOVÁ

ABSTRAKT. Článek je motivovaný příkladem z Internetovej matematickej olympiády pre študentov stredných škôl o postupnosti zadanej rekurentným vzťahom, ktorý je špeciálnym prípadom Riccatiho rovnice. V tomto texte je diskutovaných niekoľko prístupov k riešeniu o niečo všeobecnejšej úlohy.

Ústav matematiky na FSI VUT v Brne každoročne organizuje matematickú súťaž pre študentov stredných škôl v Česku a na Slovensku, doteraz známu ako Internetová matematická olympiáda. V novembri v roku 2021 prebehol už jej štrnásty ročník. Na príprave príkladov a ich vyhodnotení sa nemalou mierou podieľajú študenti oboru Matematické inžinýrství a oboru Aplikovaná matematika. Na stránkach matholymp.fme.vutbr.cz je možné nájsť zadania aj riešenia príkladov zo všetkých ročníkov.

Tento príspevok je piaty v poradí na túto tému a je celý o postupnosti zadanej rekurentným vzťahom a zisťovaní, kedy je táto postupnosť periodická.

V roku 2020 sa na súťaži objavil nasledujúci príklad s postupnosťou.

Príklad 1. *Uvažujme rekurentný vzťah*

$$a_{k+1} = \frac{\sqrt{3} + a_k}{1 - \sqrt{3}a_k}, \quad k \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Otázka: Pro ktoré hodnoty a_1 definuje tento rekurentný vzťah periodickú posloupnosť reálných čísel? Jaká je její nejmenší perioda?

Například pro $a_1 = 0$ definuje tento rekurentní vzťah posloupnost

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{\sqrt{3} + a_1}{1 - \sqrt{3}a_1} = \sqrt{3}, \quad a_3 = \frac{\sqrt{3} + a_2}{1 - \sqrt{3}a_2} = -\sqrt{3},$$

$$a_4 = \frac{\sqrt{3} + a_3}{1 - \sqrt{3}a_3} = 0, \quad a_5 = \sqrt{3}, \quad \dots$$

Tato posloupnost je periodická s nejmenší periodou $d = 3$.

Poznámka: Posloupnost $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ se nazývá periodická s periodou d , pokud pro každé $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ platí $a_k = a_{k+d}$.

2020 MSC. Primární 00A09; Sekundární 39A23.

Klíčová slova. matematická soutěž, Riccatiho diferenční rovnice.

Řešení: Napíšeme si číslo $\sqrt{3}$ ve tvaru $\sqrt{3} = \operatorname{tg}(60^\circ)$ a číslo a_1 ve tvaru $a_1 = \operatorname{tg}(\alpha)$, kde $-90^\circ < \alpha < 90^\circ$. Pak z rekurentního vztahu a příslušného goniometrického vzorce máme

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{\operatorname{tg}(60^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha)}{1 - \operatorname{tg}(60^\circ)\operatorname{tg}(\alpha)} = \operatorname{tg}(\alpha + 60^\circ), \text{ pokud } \alpha \neq 30^\circ, \\ a_3 &= \frac{\operatorname{tg}(60^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha + 60^\circ)}{1 - \operatorname{tg}(60^\circ)\operatorname{tg}(\alpha + 60^\circ)} = \operatorname{tg}(\alpha + 120^\circ), \text{ pokud } \alpha \neq -30^\circ, \\ a_4 &= \frac{\operatorname{tg}(60^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha + 120^\circ)}{1 - \operatorname{tg}(60^\circ)\operatorname{tg}(\alpha + 120^\circ)} = \operatorname{tg}(\alpha + 180^\circ) = \operatorname{tg}(\alpha) = a_1. \end{aligned}$$

Každá posloupnost definovaná daným rekurentním vztahem je tedy periodická s nejmenší periodou 3, pokud $a_1 \neq \operatorname{tg}(30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ a $a_1 \neq \operatorname{tg}(-30^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Příklad bylo možné řešit aj tak, že sa postupným dosadzovaním a úpravami odvodil vzťah medzi a_k a a_{k+2} a potom ďalej aj medzi a_k a a_{k+3} a ukázalo sa, že $a_k = a_{k+3}$. Vyššie uvedené riešenie využíva to, že rekurentný vzťah je možné chápať ako posunutý tangens. Na tento postup nikto zo súťažiacich neprišiel.

V tomto texte by som chcela ukázať, že s tým tangensom nešlo o nejakú náhodu, že je to pre tento typ postupností celkom obvyklé, a pozrieme sa aj na to, ako je to s tou periodickosťou. Majme teda takúto úlohu:

Úloha 1. *Uvažujme rekurentný vzťah*

$$q_{k+1} = \frac{c + dq_k}{a + bq_k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

Otázka: Pre ktoré hodnoty a, b, c, d, q_0 definuje tento rekurentný vzťah periodickú postupnosť reálnych čísel? Aká je jej najmenšia perióda?

Rovnica (1) sa nazýva Riccatiho diferenciálna rovnica (existuje aj jej spojité verzia, Riccatiho diferenciálna rovnica) a vo všeobecnosti môžu koeficienty a, b, c, d byť závislé od k . My tu teda máme jej špeciálny prípad. Riešením takejto rovnice je postupnosť, ktorej všetky členy splňajú daný rekurentný vzťah. Aby sme mohli odpovedať na otázku v úlohe 1, bolo by vhodné mať explicitné vyjadrenie jej k -teho člena, teda také, ktoré už závisí len od q_0, k, a, b, c, d .

Napríklad, keď sa pozrieme na príklad 1, kde máme $a = 1, b = -\sqrt{3}, c = \sqrt{3}, d = 1$, tak z postupu riešenia vidíme, že k -tý člen sa dá vyjadriť ako

$$q_k = \operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg}(q_0) + k \frac{\pi}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Ukážem tu teraz niekoľko možných (nie úplne učebnicových) postupov, ako sa dá dopracovať k riešeniam rovnice (1) a odpovedi na otázku v úlohe 1. Budem sa tváriť, že toho o riešení diferenciálnych rovníc veľa nevieme.

Ešte pre istotu dopredu upozorním, že napriek tomu, že ide o na pohľad jednoduchú vec, nevyhneme sa zložitejším výrazom a komplexným číslam.

1. RIEŠENIE ROVNICE (1) AKO POSUNUTÝ TANGENS

Povedzme, že sme si prečítali riešenie príkladu 1 a na základe toho nás napadla otázka: Dá sa riešenie úlohy 1 v prípade, že postupnosť je periodická, vždy napísať ako nejaký posunutý tangens? Skúsme to zistiť.

Predpokladajme, že nejaká postupnosť $\{q_k\}_{k=0}^{\infty}$ sa dá zapísať v tvare

$$q_k = A \operatorname{tg}(k\varphi + \omega) + B, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (2)$$

kde $A \neq 0$ a $\omega = \operatorname{arctg} \frac{q_0 - B}{A}$. Môžeme ďalej predpokladať, že $\varphi \neq l\pi, l \in \mathbb{Z}$, lebo v takom prípade by to bola nezaujímavá konštantná postupnosť. Konštantná postupnosť sa dá v tvare (2) očividne napísať vždy. Napríklad

$$q_k = \operatorname{tg}(k\pi) + q_0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Pre každé uvažované φ je teda definovaná hodnota $\operatorname{cotg} \varphi$ a s využitím súčtových vzorcov pre goniometrické funkcie môžeme odvodiť nasledovný vzťah medzi q_k a q_{k+1} :

$$\begin{aligned} q_{k+1} &= A \operatorname{tg}((k+1)\varphi + \omega) + B = A \operatorname{tg}((k\varphi + \omega) + \varphi) + B \\ &= A \frac{\sin((k\varphi + \omega) + \varphi)}{\cos((k\varphi + \omega) + \varphi)} + B = A \frac{\sin(k\varphi + \omega) \cos \varphi + \cos(k\varphi + \omega) \sin \varphi}{\cos(k\varphi + \omega) \cos \varphi - \sin(k\varphi + \omega) \sin \varphi} + B \\ &= A \frac{\operatorname{tg}(k\varphi + \omega) \operatorname{cotg} \varphi + 1}{\operatorname{cotg} \varphi - \operatorname{tg}(k\varphi + \omega)} + B = \frac{A + B \operatorname{cotg} \varphi + (A \operatorname{cotg} \varphi - B) \operatorname{tg}(k\varphi + \omega)}{\operatorname{cotg} \varphi - \operatorname{tg}(k\varphi + \omega)} \\ &= \frac{A^2 + B^2 + (A \operatorname{cotg} \varphi - B)(A \operatorname{tg}(k\varphi + \omega) + B)}{A \operatorname{cotg} \varphi + B - (A \operatorname{tg}(k\varphi + \omega) + B)} \\ &= \frac{A^2 + B^2 + (A \operatorname{cotg} \varphi - B)q_k}{A \operatorname{cotg} \varphi + B - q_k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Vidíme, že tento vzťah skutočne vyzerá rovnako ako vzťah z rovnice (1). Naša postupnosť $\{q_k\}_{k=0}^{\infty}$ teda vyhovuje rovnici (1), kde a, b, c, d sú také, že

$$ap = A \operatorname{cotg} \varphi + B, \quad (a)$$

$$bp = -1, \quad (b)$$

$$cp = A^2 + B^2, \quad (c)$$

$$dp = A \operatorname{cotg} \varphi - B, \quad (d)$$

pre nejaké $p \neq 0$. My by sme to ale potrebovali naopak, vyjadriť A, B, φ pomocou a, b, c, d . To sa z tohto dá odvodiť tiež, ale len za istých podmienok. Je zrejmé, že ak $b = 0$, tak sa to nedá.

Predpoklad 1.1: $b \neq 0$

Z (b) vyplýva $p = -\frac{1}{b}$ a ďalej odčítaním rovníc (a) a (d) dostaneme

$$B = \frac{(a-d)p}{2} = \frac{d-a}{2b}.$$

Teraz, ak do rovnice (c) dosadíme $p = -\frac{1}{b}$ a $B = \frac{d-a}{2b}$, tak dostaneme

$$c = -b(A^2 + B^2),$$

$$bA^2 = -c - bB^2 = -c - b\left(\frac{d-a}{2b}\right)^2 = \frac{-bc - \left(\frac{d-a}{2}\right)^2}{b} = \frac{ad - bc - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2}{b},$$

$$A = \frac{\sqrt{ad - bc - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2}}{b} \quad \text{alebo} \quad A = -\frac{\sqrt{ad - bc - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2}}{b}.$$

Pretože po dosadení $-\varphi$ za φ a $-A$ za A dostaneme tú istú postupnosť, môžeme napevno zvoliť napríklad prvú možnosť, a teda máme už vyjadrené

$$A = \frac{\sqrt{ad - bc - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2}}{b}, \quad B = \frac{d-a}{2b}, \quad p = -\frac{1}{b}. \quad (3)$$

Ešte zostáva vyjadriť φ . Do rovnice (a) dosadíme vyjadrenie (3) a máme

$$a = -Ab \cotg \varphi - Bb,$$

$$\cotg \varphi \sqrt{ad - bc - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2} = -\frac{a+d}{2},$$

odkiaľ vyjadríme $\cotg \varphi$ za predpokladu, že $ad - bc - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 \neq 0$.

Predpoklad 1.2: $ad - bc - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 \neq 0$

Teraz sa zamyslime, či je nutné požadovať aj to, aby bol výraz pod odmocninou kladný. Odmocnina zo záporného čísla sa jednoducho napíše ako reálny násobok imaginárnej jednotky i . Ako ale potom nájdeme také číslo φ , ktorého kotangens je reálnym násobkom i ? Dá sa to pomocou vzťahov

$$\cotg(ix) = i \cotgh(x) = i \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

$$\operatorname{arccotg}(ix) = i \operatorname{argcotgh}(x) = i \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}.$$

Podmienka na to, aby existoval $\operatorname{arccotg}(ix)$, je $x \neq -1, x \neq 1$. Vidíme, že vtedy bude výraz $\frac{x+1}{x-1}$ definovaný a nenulový, a teda logaritmus bude existovať. Záporný argument v logaritme nás trápiť nemusí, keďže už sme sa zmierili s tým, že nám budú vychádzať aj komplexné čísla.

V našom prípade, ak by bolo $ad - bc - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 < 0$, máme

$$\varphi = \operatorname{arccotg} \frac{i \frac{a+d}{2}}{\sqrt{\left(\frac{a+d}{2}\right)^2 - ad + bc}} = i \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{a+d}{2} + \sqrt{\left(\frac{a+d}{2}\right)^2 - ad + bc}}{\frac{a+d}{2} - \sqrt{\left(\frac{a+d}{2}\right)^2 - ad + bc}},$$

a tento výraz je definovaný, ak okrem $ad - bc - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 \neq 0$ je navyiac splnená podmienka

$$\left|\frac{a+d}{2}\right| \neq \sqrt{\left(\frac{a+d}{2}\right)^2 - ad + bc},$$

čo je ekvivalentné s

$$ad - bc \neq 0. \quad (4)$$

Predpoklad 1.3: $ad - bc \neq 0$

Hodnoty A , B , φ už teda máme určené. Ešte sa pozrime, ako je to s číslom $\omega = \operatorname{arctg} \frac{q_0 - B}{A}$, ktoré síce vyzerá, že existuje vždy, ale pozor, argument arkus tangensu je

$$\frac{q_0 - B}{A} = \frac{q_0 - \frac{d-a}{2b}}{\frac{\sqrt{ad-bc - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2}}{b}} = \frac{a + bq_0 - \frac{a+d}{2}}{\sqrt{ad-bc - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2}},$$

a to nemusí byť reálne číslo. Arkus tangens je definovaný pre všetky komplexné čísla okrem $-i$ a i . Z toho dostaneme podmienku pre q_0 ako $q_0 \neq B \pm iA$. Dá sa však ukázať, že ak $q_0 = B \pm iA$, potom $\frac{c+dq_0}{a+bq_0} = q_0$, a teda ide o konštantnú postupnosť:

$$\begin{aligned} \frac{c + dq_0}{a + bq_0} &= \frac{A^2 + B^2 + (A \cotg \varphi - B)q_0}{A \cotg \varphi + B - q_0} = \frac{A^2 + B^2 + (A \cotg \varphi - B)(B \pm iA)}{A \cotg \varphi + B - (B \pm iA)} \\ &= B(\cotg \varphi \mp i) + \frac{A(1 \pm i \cotg \varphi)}{\cotg \varphi \mp i} = B \pm iA = q_0. \end{aligned}$$

Predpoklad 1.4: $q_0 \neq B \pm iA$

Na záver by ešte bolo vhodné odvodiť podmienku, kedy rekurentný vzťah (1) určuje nekonečnú postupnosť. Inými slovami, kedy sú členy takejto postupnosti definované pre všetky k . Argument tangensu musí splňovať

$$k\varphi + \omega \neq \frac{\pi}{2} + l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N},$$

čiže

$$q_0 \neq A \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - k\varphi\right) + B = A \cotg(k\varphi) + B, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Naše doterajšie zistenia teraz môžeme zhrnúť do tvrdenia.

Tvrdenie 1. *Uvažujme rekurentný vzťah*

$$q_{k+1} = \frac{c + dq_k}{a + bq_k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

a predpokladajme, že $b \neq 0$, $ad - bc - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 \neq 0$, $ad - bc \neq 0$, $q_0 \neq B \pm iA$ a

$$q_0 \neq A \cotg(k\varphi) + B, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (5)$$

kde

$$A = \frac{\sqrt{ad-bc - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2}}{b}, \quad B = \frac{d-a}{2b}, \quad \varphi = \operatorname{arccotg} \frac{-\frac{a+d}{2}}{\sqrt{ad-bc - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2}}.$$

Potom vzťah (1) definuje nekonečnú postupnosť $\{q_k\}_{k=0}^{\infty}$, ktorej členy sa dajú zapísať v tvare

$$q_k = A \operatorname{tg}\left(k\varphi + \operatorname{arctg} \frac{q_0 - B}{A}\right) + B, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Keď už toto vieme, pozrieme sa teraz, kedy je takáto postupnosť periodická. Predpokladajme, že pre nejaké $n \geq 1$ platí $q_0 = q_n$, teda

$$\begin{aligned} A \operatorname{tg} \omega + B &= A \operatorname{tg}(n\varphi + \omega) + B, \\ \operatorname{tg} \omega &= \operatorname{tg}(n\varphi + \omega). \end{aligned}$$

To nastane jedine v tom prípade, ak existuje $l \in \mathbb{Z}$, pre ktoré $n\varphi = l\pi$. Pre koeficienty a, b, c, d to znamená, že

$$\frac{-\frac{a+d}{2}}{\sqrt{ad - bc - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2}} = \operatorname{cotg} \frac{l\pi}{n}, \quad l \in \mathbb{Z}. \quad (6)$$

K tomu treba pridať podmienku (5) pre q_0 , ktorá nám zaručí, že členy q_1, \dots, q_{n-1} existujú, že nedôjde k deleniu nulou. Do nej môžeme dosadiť $\varphi = \frac{l\pi}{n}$. Dostaneme

$$q_0 \neq A \operatorname{cotg} \left(k \frac{l\pi}{n}\right) + B = \frac{\sqrt{ad - bc - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2}}{b} \operatorname{cotg} \frac{kl\pi}{n} + \frac{d-a}{2b}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Ak platí $ad - bc - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 < 0$, tak φ nie je reálne číslo, takže postupnosť vtedy určite nie je periodická. Až na jednu výnimku, ktorá sa dá ľahko prehliadnúť. Pokiaľ totiž vo vyjadrení čísla φ je čitateľ nulový, potom bez ohľadu na to, či menovateľ je reálny alebo nie, dostaneme $\varphi = \operatorname{arccotg} 0$, a teda $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Postupnosť je v takom prípade vždy periodická s periódou 2.

Príklad 2. *Majme napríklad rekurentný vzťah*

$$q_{k+1} = \frac{c + dq_k}{a + bq_k} = \frac{3 - q_k}{1 + q_k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Teda $a = b = -d = 1$, $c = 3$, $ad - bc = -4$, $ad - bc - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 = -4 < 0$, $A = 2i$, $B = -1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\omega = \operatorname{arctg} \frac{q_0+1}{2i}$. Potom podľa Tvrdenia 1 tento rekurentný vzťah definuje postupnosť, ktorej členy sa dajú zapísať v tvare

$$q_k = 2i \operatorname{tg} \left(k \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{q_0+1}{2i}\right) - 1, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

pokiaľ $q_0 \neq A \operatorname{cotg}(\varphi) + B = B = -1$ a $q_0 \neq B \pm iA$, teda $q_0 \neq -3$ a $q_0 \neq 1$.

Môžeme sa o tom presvedčiť. Keď do tohto vyjadrenia postupne dosadíme $k = 1$ a $k = 2$, dostaneme

$$\begin{aligned} q_1 &= 2i \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{q_0+1}{2i}\right) - 1 = 2i \operatorname{cotg} \left(-\operatorname{arctg} \frac{q_0+1}{2i}\right) - 1 \\ &= 2i \frac{-2i}{q_0+1} - 1 = \frac{3-q_0}{q_0+1}, \\ q_2 &= 2i \operatorname{tg} \left(\pi + \operatorname{arctg} \frac{q_0+1}{2i}\right) - 1 = 2i \operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{q_0+1}{2i}\right) - 1 = q_0. \end{aligned}$$

Pokiaľ $q_0 = B \pm iA$, teda $q_0 = -3$ alebo $q_0 = 1$, dostávame konštantnú postupnosť.

Zostalo ešte určiť, či by postupnosť mohla byť periodická aj v prípadoch, keď $b = 0$ alebo $ad - bc = 0$ alebo $ad - bc - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 = 0$, o ktorých zatiaľ nič nevieme.

1.1. Prípád $b = 0$

Pokiaľ je $b = 0$, ide o postupnosť danú vzťahom

$$q_{k+1} = \frac{c}{a} + \frac{d}{a}q_k,$$

a dá sa ukázať, že táto postupnosť je periodická jedine ak je súčasne konštantná alebo ak $a = -d$ a teda ide o postupnosť $q_{k+1} = \frac{c}{a} - q_k$, ktorá má najmenšiu periódu 2. Prosím čitateľov, aby si toto už overili sami. Táto konkrétna postupnosť ale tiež spĺňa podmienku (6), pretože v tomto prípade je $a + d = 0$ a podmienka (6) je splnená pre $l = 1$, $n = 2$.

Naopak, ak je podmienka (6) splnená a súčasne $b = 0$, tak pod odmocninou nie je kladné číslo. Takže čitateľ musí byť nulový, z toho $a + d = 0$. Postupnosť je teda periodická a má najmenšiu periódu 2.

1.2. Prípád $ad - bc = 0$

Ak $ad - bc = 0$ a $b \neq 0$, tak

$$q_{k+1} = \frac{c + dq_k}{a + bq_k} = \frac{bc + bdq_k}{ba + b^2q_k} = \frac{ad + bdq_k}{ba + b^2q_k} = \frac{d}{b}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

čiže postupnosť je periodická práve vtedy keď $q_0 = \frac{d}{b}$ a $a + d \neq 0$, a vtedy je konštantná.

V tomto prípade nemôže byť splnená podmienka (6) pre žiadne hodnoty a , b , c , d .

1.3. Prípád $ad - bc - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 = 0$

Pokiaľ je $ad - bc - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 = 0$, vyjadrenie k -teho člena postupnosti má úplne iný tvar. Tento tvar je možné tiež postupne aj uhádnuť, napríklad ak si vypíšeme konkrétne postupnosti s touto vlastnosťou.

Príklad 3. *Majme napríklad rekurentný vzťah*

$$q_{k+1} = \frac{1 + 5q_k}{1 - 4q_k}$$

so začiatočnou hodnotou $q_0 = 1$.

Teda $a = 1$, $b = -4$, $c = 1$, $d = 5$, $ad - bc = \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 = 9$. Vypíšeme si prvých niekoľko členov postupnosti:

$$\begin{aligned} \{q_k\}_{k=0}^5 &= \left\{1, -2, -1, -\frac{4}{5}, -\frac{5}{7}, -\frac{2}{3}\right\}, \\ &= \left\{\frac{-1}{-1}, \frac{-2}{1}, \frac{-3}{3}, \frac{-4}{5}, \frac{-5}{7}, \frac{-6}{9}\right\} \end{aligned}$$

Z toho odhadneme, že by mohlo byť $q_k = \frac{-k-1}{2k-1}$.

Na základe tohto príkladu skúsime zistiť, či by všeobecne bolo možné vyjadriť q_k vzťahom $q_k = \frac{uk+v}{sk+t}$. Dosadením za $k = 0$ hneď dostaneme, že $q_0 = \frac{v}{t}$ a z toho

$t \neq 0, v = tq_0$. Můžeme položit $t = 1$ a máme $q_k = \frac{uk+q_0}{sk+1}$. Teraz to dosadíme do rekurentného vzťahu (1) a porovnáme pravú a ľavú stranu

$$P = \frac{c + dq_k}{a + bq_k} = \frac{c + d \frac{uk+q_0}{sk+1}}{a + b \frac{uk+q_0}{sk+1}} = \frac{(cs + du)k + c + dq_0}{(as + bu)k + a + bq_0},$$

$$L = q_{k+1} = \frac{u(k+1) + q_0}{s(k+1) + 1} = \frac{uk + u + q_0}{sk + s + 1}.$$

Pravá a ľavá strana sa teda rovnajú, pokiaľ pre nejaké $p \neq 0$ platia vzťahy

$$\begin{aligned} cs + du &= pu, \\ as + bu &= ps, \\ c + dq_0 &= pu + pq_0, \\ a + bq_0 &= ps + p. \end{aligned}$$

Dá sa ukázať, že táto sústava má riešenie, ak platí $p = \frac{a+d}{2}$. Úpravy vedúce k riešeniu tu vynechám. Nakoniec dostaneme, že v tomto prípade je q_k tvaru

$$q_k = \frac{\left(\frac{d-a}{2}q_0 + c\right)k + \frac{a+d}{2}q_0}{\left(bq_0 + \frac{a-d}{2}\right)k + \frac{a+d}{2}}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

a z toho ľahko odvodíme podmienku, kedy je postupnosť periodická s periódou n ,

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{d-a}{2}q_0 + c\right)n + \frac{a+d}{2}q_0}{\left(bq_0 + \frac{a-d}{2}\right)n + \frac{a+d}{2}} &= q_0, \\ \frac{d-a}{2}q_0 + c &= \left(bq_0 + \frac{a-d}{2}\right)q_0, \\ bq_0^2 + (a-d)q_0 - c &= 0, \\ q_0 &= \frac{d-a}{2}. \end{aligned}$$

Kvadratická rovnica má len toto jedno riešenie, pretože diskriminant je rovný $\left(\frac{a+d}{2}\right)^2 - ad + bc = 0$. Postupnosť je teda periodická, pokiaľ je $q_0 = \frac{d-a}{2}$ a výraz v menovateli $a + bq_0 \neq 0$. Každé n je vtedy periódou, postupnosť je teda konštantná. Nekonštantnú periodickú postupnosť v tomto prípade nedostaneme.

V tomto prípade nemôže byť splnená podmienka (6) pre žiadne hodnoty a, b, c, d .

1.4. Zhrnutie

Zistili sme teda, že v prípade nesplnenia niektorého z predpokladov 1.1–1.4 je postupnosť periodická jedine vtedy, keď je súčasne konštantná, okrem špeciálneho prípadu postupnosti $q_{k+1} = \frac{c}{a} - q_k$, ktorá má najmenšiu periódu 2. Táto konkrétna postupnosť ale tiež spĺňa podmienku (6). Takže podmienka (6) je nutnou podmienkou toho, aby naša postupnosť bola periodická a súčasne nekonštantná. Je to aj postačujúca podmienka? Ak je podmienka (6) splnená, potom určite je splnený aj predpoklad 1.2 a 1.3. A čo sa týka predpokladu 1.1, tak v prípade, že nie je splnený, platí $a + d = 0$ a ide tiež o periodickú postupnosť. Predpoklad 1.4 je

splnený vždy, keď postupnosť nie je konštantná. Takže pokiaľ ide o nekonštantnú postupnosť, je podmienka (6) aj postačujúca.

Môžeme to zhrnúť do nasledovného tvrdenia.

Tvrdenie 2. *Uvažujme rekurentný vzťah*

$$q_{k+1} = \frac{c + dq_k}{a + bq_k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

a predpokladajme, že q_0 je také, že tento vzťah nedefinuje konštantnú postupnosť. Potom tento vzťah definuje periodickú postupnosť s periódou n práve vtedy, keď pre nejaké $l \in \mathbb{Z}$ platí

$$\frac{-\frac{a+d}{2}}{\sqrt{ad - bc - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2}} = \cotg \frac{l\pi}{n}$$

a

$$q_0 \neq \frac{\sqrt{ad - bc - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2}}{b} \cotg \frac{kl\pi}{n} + \frac{d-a}{2b}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

2. ROVNICA (1) AKO SÚSTAVA

Teraz si ukážeme úplne iný postup riešenia, kde nebudeme až tak odkázaní na uhádnutie tvaru riešenia, ale zato sa nezaobídeme bez nejakých teoretických poznatkov. Namiesto jednej postupnosti $\{q_k\}_{k=0}^{\infty}$ uvažujme dve postupnosti $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ a $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ také, že $q_k = \frac{y_k}{x_k}$. Rovnicu (1) potom môžeme napísať ako

$$\frac{y_{k+1}}{x_{k+1}} = \frac{cx_k + dy_k}{ax_k + by_k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Môžeme dať do rovnosti čitatele aj menovatele v tejto rovnici a dostaneme, že ak dvojica postupností $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ a $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ je riešením sústavy

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= ax_k + by_k, \\ y_{k+1} &= cx_k + dy_k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (8)$$

a všetky členy x_k sú nenulové, potom postupnosť $\{q_k\}_{k=0}^{\infty}$, kde $q_k = \frac{y_k}{x_k}$, je riešením rovnice (1).

Vyjasnime si ešte dôležitú vec. Platí to aj naopak. Pokiaľ postupnosť $\{q_k\}_{k=0}^{\infty}$ je riešením rovnice (1), potom existuje dvojica postupností $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ a $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$, ktorá je riešením sústavy (8) a všetky členy x_k sú nenulové. Tieto postupnosti sú definované vzťahmi

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (a + bq_k)x_k, \\ y_k &= q_k x_k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (9)$$

a x_0 je ľubovoľné nenulové číslo.

3. MATICOVÝ TVAR SÚSTAVY (8)

Komu matice nie sú veľmi po chuti, môže túto časť preskočiť. K vyriešeniu sústavy (8) matice nutne nepotrebujeme, ale získame tým nový pohľad na vec. Sústavu (8) môžeme zapísať v maticovom tvare.

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

a z toho

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

Máme teda riešenie sústavy (8) vyjadrené explicitne. Z toho síce veľmi nie je vidno, ako vyzerá postupnosť $\{q_k\}_{k=0}^{\infty}$, ale môžeme použiť tvrdenie, že ak sú postupnosti $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ a $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ periodické s rovnakou periódou, potom postupnosť $\{q_k\}_{k=0}^{\infty}$ je tiež periodická. A z vyjadrenia (11) vidíme, že to nastane práve vtedy, keď pre nejaké $n \in \mathbb{N}$ bude

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

a teda matica $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ je „ n -tá odmocnina“ z matice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Toto vyzerá veľmi jednoducho, ale až tak jednoduché to nie je. Nie je to ani jednoznačné. Napríklad

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ale aj

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

takže to už máme dve rôzne „druhé odmocniny“ z jednotkovej matice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pomôžeme si trochu poznamkami z teórie matíc. Sú známe rôzne užitočné rozklady matice na súčin špeciálnych matíc. Nám tu pomôže Jordanov rozklad matice. Keď máme ľubovoľnú štvorcovú maticu A s rozmermi 2×2 , jej Jordanov rozklad je tvaru

$$A = QJQ^{-1},$$

kde matica $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & p \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ má na diagonále vlastné čísla matice A a matica Q^{-1} je inverzná k matici Q . (To znamená, že $QQ^{-1} = Q^{-1}Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.) Takýto Jordanov rozklad vždy existuje. Pokiaľ vlastné čísla matice A sú rôzne, v pravom hornom rohu matice J je 0. Pokiaľ sú rovnaké, v pravom hornom rohu matice J je 0 alebo 1. Ako presne sa určia hodnoty λ_1, λ_2 a matica Q , zatiaľ nebudeme riešiť. Zamerajme sa ďalej na prvú možnosť, teda predpokladajme, že vlastné čísla sú rôzne.

Predpoklad 3.1: $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Pokiaľ sa naša matica sústavy dá rozložiť tak, že matica $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, potom ľahko spočítame, že

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n = QJQ^{-1}QJQ^{-1} \dots QJQ^{-1}QJQ^{-1} = QJ^nQ^{-1} = Q \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} Q^{-1},$$

a teda rovnicu (12) môžeme upraviť nasledovne

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n &= Q \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ Q^{-1}Q \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} Q^{-1}Q &= Q^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Q, \\ \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Z toho už hneď vidíme, že riešením sú také matice, ktorých vlastné čísla λ_1, λ_2 po umocnení na n -tú dajú jednotku. Ak by sme uvažovali len reálne čísla, je to číslo 1 a pre párne n aj číslo -1 . Ak uvažujeme aj komplexné čísla, je to komplexná n -tá odmocnina z jednotky, čo sú čísla tvaru

$$\sqrt[n]{1} = e^{i\frac{2\pi l}{n}} = \cos \frac{2\pi l}{n} + i \sin \frac{2\pi l}{n}, \quad l = 0, 1, \dots, n-1.$$

Takže z toho vidíme, že to, ako vyzerá matice Q zo Jordanovho rozkladu, nám môže byť jedno, ale potrebujeme vedieť, aké sú vlastné čísla matice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Tie sa počítajú zo vzťahu

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

To nám dá kvadratickú rovnicu $\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$, ktorej riešenia sú

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+d}{2}\right)^2 - ad + bc}.$$

Matice, ktoré spĺňajú rovnicu (12), sú teda také, že

$$\frac{a+d}{2} + \sqrt{\left(\frac{a+d}{2}\right)^2 - ad + bc} = \cos \frac{2\pi l}{n} + i \sin \frac{2\pi l}{n} \quad \text{pre nejaké } l \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

To vyzerá, že bude splnené, jedine pokiaľ pod odmocninou bude záporné číslo (nula by nám dala rovnaké vlastné čísla). Potom dostaneme nasledovné vzťahy

$$\begin{aligned} \frac{a+d}{2} &= \cos \frac{2\pi l}{n}, \\ \sqrt{-\left(\frac{a+d}{2}\right)^2 + ad - bc} &= \sin \frac{2\pi l}{n} > 0 \quad \text{pre nejaké } l \in \{0, 1, \dots, n-1\}. \end{aligned} \tag{13}$$

Ale pozor, je tu jedna výnimka. Skúste na ňu prísť sami. Nápona: Pozrite si príklad 2.

Zo vzťahov (13) dostaneme využitím známeho vzťahu $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ nasledovnú podmienku pre a, b, c, d :

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 + ad - bc &= 1, \\ ad - bc &= 1. \end{aligned}$$

Rozdiel $ad - bc$ v skutočnosti ani nemusí byť rovný 1, stačí, ak je kladný. Môžeme totiž napísať

$$q_{k+1} = \frac{c + dq_k}{a + bq_k} = \frac{\frac{c}{\sqrt{ad-bc}} + \frac{d}{\sqrt{ad-bc}}q_k}{\frac{a}{\sqrt{ad-bc}} + \frac{b}{\sqrt{ad-bc}}q_k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \tag{14}$$

a namiesto matice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ máme maticu

$$\begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{ad-bc}} & \frac{b}{\sqrt{ad-bc}} \\ \frac{c}{\sqrt{ad-bc}} & \frac{d}{\sqrt{ad-bc}} \end{pmatrix},$$

ktorá spĺňa

$$\tilde{a}\tilde{d} - \tilde{b}\tilde{c} = \frac{ad}{(\sqrt{ad-bc})^2} - \frac{bc}{(\sqrt{ad-bc})^2} = 1.$$

Namiesto vzťahov (13) vtedy máme vzťahy

$$\frac{a+d}{2\sqrt{ad-bc}} = \cos \frac{2\pi l}{n},$$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{a+d}{2\sqrt{ad-bc}}\right)^2} = \sin \frac{2\pi l}{n} \neq 0, \quad \text{pre nejaké } l \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

a dostávame tvrdenie.

Tvrdenie 3. *Uvažujme rekurentný vzťah*

$$q_{k+1} = \frac{c + dq_k}{a + bq_k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

a predpokladajme, že tento vzťah definuje nekonečnú postupnosť $\{q_k\}_{k=0}^{\infty}$. Ak platí

$$\frac{a+d}{2\sqrt{ad-bc}} = \cos \frac{2\pi l}{n} \neq \pm 1, \quad \text{pre nejaké } n, l \in \mathbb{N}, \quad (15)$$

potom postupnosť $\{q_k\}_{k=0}^{\infty}$ je periodická s periódou n .

Príklad 4. *Majme znova postupnosť $\{q_k\}_{k=0}^{\infty}$ z príkladu 1,*

$$q_{k+1} = \frac{\sqrt{3} + q_k}{1 - \sqrt{3}q_k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

teda $a = 1$, $b = -\sqrt{3}$, $c = \sqrt{3}$, $d = 1$. Vidíme, že $ad - bc = 4$, $\frac{a+d}{2\sqrt{ad-bc}} = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{6}\right)$. Z Tvrdenia 3 dostávame záver, že táto postupnosť je periodická s periódou 6.

To je pravda, ale my vieme, že má aj menšiu periódou. Kde je teda chyba? Nikde, len to znamená, že naše podmienky stále nie sú nutné. Postupnosť spĺňajúca podmienku (15) môže mať aj menšiu periódou, než je najmenšie n , pre ktoré platí rovnosť. A ďalej, stále ešte sme nezistovali, či môže byť periodická aj v prípade, keď vlastné čísla matice sústavy sú rovnaké a v prípade, keď postupnosti $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ a $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ s ňou spojené nie sú periodické s rovnakou periódou.

Na tieto ďalšie zistenia už budeme potrebovať vedieť presný tvar riešenia (11). Mohli by sme ho zistiť aj tak, že by sme určili maticu Q zo Jordanovho rozkladu matice sústavy. Ale na to je treba ešte viac poznatkov z teórie matíc. Kto chce a vie ako na to, nech si to týmto spôsobom odvodí sám.

4. RIEŠENIE SÚSTAVY (8) A ROVNICE (1)

Podme teraz riešiť sústavu

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= ax_k + by_k, \\y_{k+1} &= cx_k + dy_k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots\end{aligned}\tag{8}$$

bez použitia matíc. Vyriešime ju napríklad tak, že z prvej rovnice vyjadríme y_k a dosadíme do druhej. To sa dá za predpokladu, že $b \neq 0$. Prípad, keď $b = 0$, je rozobratý v časti 1.1.

Predpoklad 4.1: $b \neq 0$

Dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{x_{k+1} - ax_k}{b} &= y_k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \\ \frac{x_{k+2} - ax_{k+1}}{b} &= y_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \\ \frac{x_{k+2} - ax_{k+1}}{b} &= cx_k + d \frac{x_{k+1} - ax_k}{b}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \\ x_{k+2} - (a+d)x_{k+1} + (ad-bc)x_k &= 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots\end{aligned}\tag{16}$$

Dostali sme sa k diferencnej rovnici (16), kde už je len jedna neznáma, a vyskytuje sa tam lineárna kombinácia troch po sebe idúcich členov tejto postupnosti.

Takéto rovnice majú (okrem triviálneho riešenia $x_k = 0$) riešenie v tvare $x_k = \lambda^k$, kde λ je nejaké reálne, prípadne komplexné číslo. Že je to práve tento tvar, sa vie. Kto to nevie, asi by sa chvíľu potrápil, kým by na to prišiel. Keď už ale o tom vieme, nie je ťažké si to dosadením overiť a zistiť, pre akú hodnotu λ to vyjde.

Po dosadení dostaneme

$$\begin{aligned}\lambda^{k+2} - (a+d)\lambda^{k+1} + (ad-bc)\lambda^k &= 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \\ \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) &= 0, \\ \lambda_{1,2} &= \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+d}{2}\right)^2 - ad + bc}.\end{aligned}\tag{17}$$

Že to vyšli rovnaké čísla, ako sú vlastné čísla matice sústavy (10), nie je žiadna náhoda.

Riešením rovnice (16) je teda postupnosť $\{\lambda_1^k\}_{k=0}^\infty$, aj postupnosť $\{\lambda_2^k\}_{k=0}^\infty$ a aj každá postupnosť $\{u\lambda_1^k + v\lambda_2^k\}_{k=0}^\infty$, kde u, v sú ľubovoľné komplexné čísla. O tom sa dá ľahko presvedčiť dosadením. (V prípade, že vyjde $\lambda_1 = \lambda_2$, sú ešte ďalšie tvary riešení, ale tie si zatiaľ nebudeme všímať.) Vieme, že čísla $\lambda_{1,2}$ nemusia vyjsť vždy reálne, a takisto aj čísla u, v neobmedzíme len na reálne. Dajú sa zvoliť tak, aby všetky členy postupnosti $\{x_k\}_{k=0}^\infty$ už reálne boli. Ukážeme si to na našom konkrétnom príklade.

Príklad 5. *Majme znova postupnosť $\{q_k\}_{k=0}^\infty$ z príkladu 1,*

$$q_{k+1} = \frac{\sqrt{3} + q_k}{1 - \sqrt{3}q_k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

teda $a = 1$, $b = -\sqrt{3}$, $c = \sqrt{3}$, $d = 1$. Takže $ad - bc = 4$, $\frac{a+d}{2} = 1$, $\lambda_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{3}$
a dostaneme tvar riešenia

$$\begin{aligned} x_k &= u \left(1 + i\sqrt{3}\right)^k + v \left(1 - i\sqrt{3}\right)^k = u 2^k \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k + v 2^k \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k \\ &= u 2^k e^{i\frac{k\pi}{3}} + v 2^k e^{-i\frac{k\pi}{3}} = u 2^k \left(\cos \frac{k\pi}{3} + i \sin \frac{k\pi}{3}\right) + v 2^k \left(\cos \frac{k\pi}{3} - i \sin \frac{k\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

A z toho vidno, že pre $u = \frac{\tilde{u}-i\tilde{v}}{2}$ a $v = \frac{\tilde{u}+i\tilde{v}}{2}$ dostaneme riešenie

$$x_k = 2^k \left(\tilde{u} \cos \frac{k\pi}{3} + \tilde{v} \sin \frac{k\pi}{3}\right), \quad (18)$$

ktoré už je reálne.

Keď vieme tvar riešenia rovnice (16), môžeme už z toho určiť aj riešenie rovnice (1), q_k . To získame zo vzťahu (9) ako

$$q_k = \frac{\frac{x_{k+1}-ax_k}{b}}{x_k} = \frac{x_{k+1}}{bx_k} - \frac{a}{b} = \frac{u\lambda_1^{k+1} + v\lambda_2^{k+1}}{bu\lambda_1^k + bv\lambda_2^k} - \frac{a}{b}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (19)$$

Už to je takmer ten hľadaný tvar riešenia, ale ešte tam v tom vyjadrení sú čísla u, v namiesto q_0 . Mohlo by to síce vyzerat', že ich konkrétna hodnota nás nemusí zaujímať, lebo to, či je postupnosť periodická, by už z tohto malo byť vidno, ale my sme zatiaľ len zistili, že riešenia rovnice (1) môžu mať takýto tvar. Mali by sme ešte overiť, že nech začneme z akéhokoľvek q_0 , ďalšie členy už bude tento vzťah popisovať pre nejaké konkrétne u, v .

Vzťah medzi u, v a q_0 získame, keď za k dosadíme v tomto vyjadrení nulu. Potom máme

$$q_0 = \frac{u\lambda_1 + v\lambda_2}{b(u+v)} - \frac{a}{b}. \quad (20)$$

Vidíme, že pokiaľ vzťah platí pre nejakú dvojicu u, v , platí aj pre jej ľubovoľný nenulový násobok. Môžeme teda zvoliť u, v napríklad také, že $u+v=1$. Potom z rovnice (20) dostaneme

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{u\lambda_1 + (1-u)\lambda_2}{b} - \frac{a}{b}, \\ a + bq_0 - \lambda_2 &= u(\lambda_1 - \lambda_2). \end{aligned} \quad (21)$$

A tu vidíme, že môže nastať problém. Pokiaľ by $\lambda_1 = \lambda_2$, potom by to platilo len pre jedno konkrétne $q_0 = \frac{\lambda_2 - a}{b}$. Najskôr dokončíme úvahy pre prípad $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Predpoklad 4.2: $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Vtedy z rovnice (21) a z toho, že $u+v=1$ vypočítame

$$u = \frac{a + bq_0 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad v = \frac{a + bq_0 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

čo už stačí dosadiť do vzťahu (19) a dostaneme výsledný tvar riešenia.

Zostáva ešte určiť podmienky pre q_0 . Vo vzťahu (19) musí byť menovateľ nenulový pre každé k . Dostaneme

$$bu\lambda_1^k + bv\lambda_2^k \neq 0,$$

$$\begin{aligned} (a + bq_0 - \lambda_2)\lambda_1^k &\neq (a + bq_0 - \lambda_1)\lambda_2^k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \\ (a + bq_0)(\lambda_1^k - \lambda_2^k) &\neq \lambda_2\lambda_1^k - \lambda_1\lambda_2^k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Zhrňme naše doterajšie zistenia opäť do tvrdenia.

Tvrdenie 4. *Uvažujme rekurentný vzťah*

$$q_{k+1} = \frac{c + dq_k}{a + bq_k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

a označme $\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+d}{2}\right)^2 - ad + bc}$. Ak $b \neq 0$ a $\lambda_1 \neq \lambda_2$ a

$$(a + bq_0)(\lambda_1^k - \lambda_2^k) \neq \lambda_2\lambda_1^k - \lambda_1\lambda_2^k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (22)$$

potom vzťah (1) definuje nekonečnú postupnosť $\{q_k\}_{k=0}^{\infty}$, ktorej členy sa dajú zapísať v tvare

$$q_k = \frac{(a + bq_0 - \lambda_2)\lambda_1^{k+1} - (a + bq_0 - \lambda_1)\lambda_2^{k+1}}{b(a + bq_0 - \lambda_2)\lambda_1^k - b(a + bq_0 - \lambda_1)\lambda_2^k} - \frac{a}{b}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (23)$$

Teraz zistíme, kedy je naša postupnosť periodická. Predpokladajme, že pre nejaké $k = n \geq 1$ platí $q_0 = q_n$ a dosadíme to do vzťahu (23). Úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{(a + bq_0 - \lambda_2)\lambda_1^{n+1} - (a + bq_0 - \lambda_1)\lambda_2^{n+1}}{b(a + bq_0 - \lambda_2)\lambda_1^n - b(a + bq_0 - \lambda_1)\lambda_2^n} - \frac{a}{b}, \\ a + bq_0 &= \frac{(a + bq_0 - \lambda_2)\lambda_1^{n+1} - (a + bq_0 - \lambda_1)\lambda_2^{n+1}}{(a + bq_0 - \lambda_2)\lambda_1^n - (a + bq_0 - \lambda_1)\lambda_2^n}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a + bq_0)(a + bq_0 - \lambda_2)\lambda_1^n & \\ - (a + bq_0)(a + bq_0 - \lambda_1)\lambda_2^n &= (a + bq_0 - \lambda_2)\lambda_1^{n+1} - (a + bq_0 - \lambda_1)\lambda_2^{n+1}, \\ 0 &= (a + bq_0 - \lambda_1)(a + bq_0 - \lambda_2)(\lambda_1^n - \lambda_2^n). \end{aligned}$$

Vidíme, že postupnosť je konštantná, pokiaľ $a + bq_0 = \lambda_1$ alebo $a + bq_0 = \lambda_2$ a periodická a súčasne nekonštantná je práve vtedy, keď

$$\lambda_1^n = \lambda_2^n \quad \text{pre nejaké } n \geq 2. \quad (24)$$

Tu vidno, prečo nám vyšla v našom príklade pomocou predchádzajúceho maticového postupu len perióda 6, aj keď existuje aj perióda 3. V skutočnosti totiž nemusí byť $\lambda_1^n = \lambda_2^n = 1$, stačí, aby bol ich podiel rovný jednej. Predpokladali sme, že $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Takže aby platilo $\lambda_1^n = \lambda_2^n$, tak buď $\lambda_1 = -\lambda_2$ alebo sú to komplexné čísla.

Ak je $\lambda_1 = -\lambda_2$, ide o špeciálny prípad, ktorý nastane, pokiaľ $\frac{a+d}{2} = 0$. Najmenšia perióda je vtedy 2. Na tento typ špeciálneho prípadu sme natrafili aj v prvej časti a je tam k tomu uvedený príklad 2.

Ak sú λ_1, λ_2 komplexné čísla, potom je z ich tvaru jasné, že sú komplexne združené a dajú sa teda zapísať ako $\lambda_{1,2} = r(\cos \varphi \pm i \sin \varphi) = r e^{\pm i \varphi}$. Z toho dostávame, že

$$(\lambda_{1,2})^n = r^n e^{\pm i n \varphi} = r^n [\cos(n\varphi) \pm i \sin(n\varphi)]$$

a

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^n = e^{2in\varphi} = \cos(2n\varphi) + i\sin(2n\varphi).$$

Teda vidíme, že postupnosť bude mať vždy aj polovičnú periódu z periódy, ktorá vyjde z podmienky (15).

Ešte predtým, než sa pozrieme na prípad, keď je $\lambda_1 = \lambda_2$, zamyslime sa nad tým, ako je možné, že nám tvar riešenia (23) vyšiel tak nepekne, keď v konkrétnom príklade 1 vyšiel tvar riešenia

$$q_k = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}(q_0) + k\frac{\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

a aj v iných prípadoch očakávame, že to bude posunutý tangens?

Ukážeme si, ako sa k tomu tvaru s tangensom dá dostať, na našom konkrétnom príklade.

Príklad 6 (Pokračovanie príkladu 5). *Už sme zistili v príklade 5, že riešenie rovnice (16) je v tomto prípade možné napísať ako*

$$x_k = 2^k \left(\tilde{u} \cos \frac{k\pi}{3} + \tilde{v} \sin \frac{k\pi}{3} \right), \quad (18)$$

a toto môžeme dosadiť do (19). Dostaneme

$$\begin{aligned} q_k &= \frac{2^{k+1} \left(\tilde{u} \cos \frac{(k+1)\pi}{3} + \tilde{v} \sin \frac{(k+1)\pi}{3} \right)}{-\sqrt{3} 2^k \left(\tilde{u} \cos \frac{k\pi}{3} + \tilde{v} \sin \frac{k\pi}{3} \right)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{2 \left(\tilde{u} \cos \frac{k\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} - \tilde{u} \sin \frac{k\pi}{3} \sin \frac{\pi}{3} + \tilde{v} \sin \frac{k\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} + \tilde{v} \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{k\pi}{3} \right)}{-\sqrt{3} \left(\tilde{u} \cos \frac{k\pi}{3} + \tilde{v} \sin \frac{k\pi}{3} \right)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\tilde{v}\sqrt{3} - \tilde{u}\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{k\pi}{3}}{-\sqrt{3} \left(\tilde{u} + \tilde{v} \operatorname{tg} \frac{k\pi}{3} \right)} \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Teraz určíme čísla \tilde{u}, \tilde{v} tak, aby sme pre $k = 0$ dostali q_0 .

$$q_0 = \frac{\tilde{v}\sqrt{3}}{-\sqrt{3}\tilde{u}} = \frac{-\tilde{v}}{\tilde{u}},$$

takže môžeme položiť $\tilde{u} = 1, \tilde{v} = -q_0$. Vrátime sa k výrazu pre q_k a dosadíme to tam. Dostaneme

$$q_k = \frac{q_0 + \operatorname{tg} \frac{k\pi}{3}}{1 - q_0 \operatorname{tg} \frac{k\pi}{3}} = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}(q_0) + k\frac{\pi}{3}\right), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Podobne by sa tento tvar dal odvodiť aj všeobecne. Nebudeme si to tu už ukazovať, postup by bol analogický a výsledok už poznáme.

4.1. Prípad $\lambda_1 = \lambda_2$

Teraz zostáva vyšetriť možnosť, keď $\lambda_1 = \lambda_2$. Ako budú potom vyzerat' riešenia rovnice (1)? Určite nebudú môcť mať tvar (19), jedine ak by $q_0 = \frac{\lambda_2 - a}{b}$. Zo vzťahu (17) dostaneme, že ak $\lambda_1 = \lambda_2$, potom je

$$ad - bc = \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 \geq 0.$$

Ak by nastala rovnosť, $ad - bc = 0$ a z toho (stále máme aj predpoklad, že $b \neq 0$) dostávame, že ide o konštantnú postupnosť, vid' (7).

Ďalej ak je $ad - bc > 0$, môžeme predpokladať, že $ad - bc = 1$. Inak by sme rovnicu (1) upravili ako v (14). Stačí teda už len vyšetriť prípad, keď je $ad - bc = 1$ a $a + d = \pm 2$. Rovnica (16) vtedy bude

$$x_{k+2} \pm 2x_{k+1} + x_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Rozoberme postupne obe možnosti. V prvom prípade po úprave máme rovnicu

$$x_{k+2} - x_{k+1} = x_{k+1} - x_k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

čiže rozdiel dvoch po sebe idúcich členov je konštantný a teda vzťah pre k -ty člen je

$$x_k = x_0 + k(x_1 - x_0), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Potom

$$\begin{aligned} q_k &= \frac{x_{k+1}}{bx_k} - \frac{a}{b} = \frac{x_0 + (k+1)(x_1 - x_0)}{b(x_0 + k(x_1 - x_0))} - \frac{a}{b} \\ &= \frac{x_1 - x_0}{b(x_0 + k(x_1 - x_0))} + \frac{1-a}{b}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Z toho už vidíme, že táto postupnosť je periodická jedine ak $x_1 = x_0$ a vtedy je konštantná, $q_0 = q_k = \frac{1-a}{b}$.

V druhom prípade po úprave máme rovnicu

$$x_{k+2} + x_{k+1} = -(x_{k+1} + x_k), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

z čoho je možné odvodiť (alebo odhadnúť a overiť dosadením) vzťah pre k -ty člen, ktorý je

$$x_k = (-1)^k(x_0 - k(x_0 + x_1)), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Potom

$$\begin{aligned} q_k &= \frac{(-1)^{k+1}(x_0 - (k+1)(x_0 + x_1))}{b(-1)^k(x_0 - k(x_0 + x_1))} - \frac{a}{b} \\ &= \frac{x_0 + x_1}{b(x_0 - k(x_0 + x_1))} - \frac{1+a}{b}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Z toho už vidíme, že táto postupnosť je periodická jedine ak $x_1 = -x_0$ a vtedy je konštantná, $q_0 = q_k = \frac{-1-a}{b}$.

4.2. Zhrnutie

Teraz vyhodnotíme, či je podmienka (24) spolu s podmienkou (22) nutná a postačujúca na to, aby naša postupnosť bola periodická v prípade, že je nekonštantná. Za predpokladu 4.1 a 4.2 sme to už ukázali.

Ak nie je splnený predpoklad 4.1, teda $b = 0$, potom je postupnosť periodická jedine vtedy, keď je súčasne konštantná, okrem špeciálneho prípadu, keď $a + d = 0$. V tomto prípade je ale $\lambda_{1,2} = \pm a$, takže $\lambda_1^2 = \lambda_2^2$ a podmienka (24) je splnená pre $n = 2$.

Ak nie je splnený predpoklad 4.2, teda $\lambda_1 = \lambda_2$, je postupnosť periodická jedine vtedy, keď je súčasne konštantná.

Naopak, ak sú splnené podmienky (24),(22), potom je splnený aj predpoklad 4.2. A čo sa týka predpokladu 4.1, ak $b = 0$, potom $\lambda_1 = a$ a $\lambda_2 = d$, takže podmienka (24) nám dá $a = -d$ a postupnosť teda je periodická.

Teraz si to opäť celé zhrnieme do tvrdenia.

Tvrdenie 5. *Uvažujme rekurentný vzťah*

$$q_{k+1} = \frac{c + dq_k}{a + bq_k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

a predpokladajme, že q_0 je také, že tento vzťah nedefinuje konštantnú postupnosť. Potom tento vzťah definuje periodickú postupnosť s periódou n práve vtedy, keď

$$\lambda_1^n = \lambda_2^n$$

a

$$(a + bq_0)(\lambda_1^k - \lambda_2^k) \neq \lambda_2 \lambda_1^k - \lambda_1 \lambda_2^k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n-1,$$

$$\text{kde } \lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+d}{2}\right)^2 - ad + bc}.$$

5. ZÁVER

Rovnicu

$$q_{k+1} = \frac{c + dq_k}{a + bq_k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

sme postupne riešili troma prístupmi. Prvý postup bol najmenej teoretický, ale bolo tam nutné podľa konkrétneho príkladu dopredu odhadnúť tvar riešenia a nevyhli sme sa tam ani práci s komplexnými číslami.

V druhom postupe sa využívala teória matíc. Kto ju pozná, pravdepodobne by týmto spôsobom rýchle došiel k správne výsledku.

V treťom postupe sme riešili diferenčné rovnice, u ktorých sa dalo aj bez znalosti ich teórie nejak dopracovať k riešeniam, ale ak niekto teóriu pozná, má aj tu dosť veľkú výhodu. Týmto postupom sme to dotiahli až do konca a rozobrali všetky možnosti, ale výsledný všeobecný tvar riešenia bol dosť neprehľadný a vystupovali v ňom komplexné čísla. Jeho ďalšie úpravy by boli ešte možné, ale už sme sa nimi nezaoberali.

Vo všetkých postupoch sme sa rôznymi spôsobmi dopracovali k vetveniu – raz to bolo delenie nenulovým výrazom, raz to boli rôzne alebo rovnaké vlastné čísla matice, raz nenulový alebo nulový diskriminant, vždy ale išlo o tú istú podmienku pre koeficienty a, b, c, d :

$$ad - bc \neq \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 \quad \text{alebo} \quad ad - bc = \left(\frac{a+d}{2}\right)^2.$$

Ukázalo sa, že periodické nekonštantné riešenie môžeme dostať len v prvom prípade a zistili sme, že vtedy sa v explicitnom tvare riešenia objavujú goniometrické funkcie. Tento explicitný tvar riešenia je uvedený v Tvrdení 1 a jeho zápis pomocou vlastných čísel je v Tvrdení 4. V prípade, že ide o nekonštantnú postupnosť, sme

odvodili nutnú a postačujúcu podmienka na to, aby táto postupnosť bola periodická. Je uvedená v Tvrdení 2 a v inom tvare aj v Tvrdení 5. Či je to určite tá istá podmienka, len inak zapísaná, už nech si každý premyslí sám. Postačujúca podmienka je uvedená aj v Tvrdení 3. Vo všetkých troch prípadoch vidno, že dôležitá je hodnota

$$\frac{a+d}{2\sqrt{ad-bc}}.$$

Je zrejmé, že namiesto koeficientov a , b , c , d môžeme uvažovať ich ľubovoľné nenulové násobky a dostaneme tú istú postupnosť. Z našich úvah vyplynulo, že by bolo výhodné uvažovať také koeficienty, pre ktoré platí $ad - bc = 1$. To je možné dosiahnuť úpravou uvedenou v (14), pokiaľ pre pôvodné koeficienty platí $ad - bc \neq 0$.

Viera Štoudková Růžičková, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: ruzickova@fme.vutbr.cz

