KVATERNION 1–2 (2023), 63–83

HAUSDORFFOVA DIMENZE BLESKU

ALŽBĚTA KOČENDOVÁ

ABSTRAKT. V tomto článku je popsána teorie související s Hausdorffovou dimenzí. Hausdorffova dimenze je využívána k popisu míry členitosti fraktálu. Mezi fraktály patří spousta přírodních objektů a jevů. Jedním z takových jevů je právě blesk, na který se tento článek zaměřuje. Součástí článku je popis tvorby programu v MATLABu na detekci blesku v obraze a následný výpočet Hausdorffovy dimenze tohoto blesku.

ÚVOD

Tento článek se zabývá matematickou teorií Hausdorffovy dimenze a následnou aplikací této teorie na obrázky blesků. Hausdorffova dimenze má velký význam ve fraktální geometrii. Udává míru členitosti jednotlivých fraktálů. Mezi fraktály nepatří jen uměle vytvořené, na pohled velmi zajímavé útvary, ale i přírodní objekty, či jevy. Například blesk lze chápat také jako fraktál. Blesky jsou fascinujícím a zároveň nebezpečným přírodním jevem, který se vyskytuje po celém světě. Studium Hausdorffovy dimenze blesku může pomoci porozumět jeho struktuře a vývoji. Součástí této práce je program v MATLABu na detekci blesku v obraze a následný výpočet jeho Hausdorffovy dimenze.

1. TEORIE K HAUSDORFFOVĚ DIMENZI

V této kapitole si vysvětlíme matematické pojmy, které jsou nezbytné k definování Hausdorffovy dimenze. Zaměříme se na metriky a metrické prostory, následně se dostaneme k definicím Hausdorffovy míry a Hausdorffovy dimenze. Poté si vysvětlíme pojem fraktál. Definice a věty, které se vyskytují v této kapitole, jsou převzaty z [2, 4, 5, 6, 7].

1.1. Motivační příklad

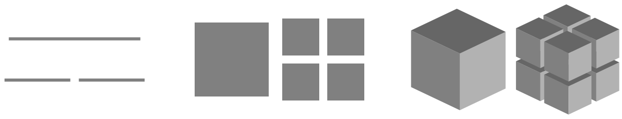
Představme si, že máme úsečku, čtverec a krychli vytvořenou z nějaké hmoty. U všech těchto útvarů zmenšeme rozměry na $\frac{1}{2}$ původních rozměrů, viz obrázek 1.1. Podívejme se, kolik hmoty je potřeba na takto vzniklé útvary ve srovnání

2020 *MSC.* Primární 68U10; Sekundární 28A78.

Klíčová slova. Hausdorffova míra, Hausdorffova dimenze, fraktál, detekce, blesk, metoda box-counting, aproximace.

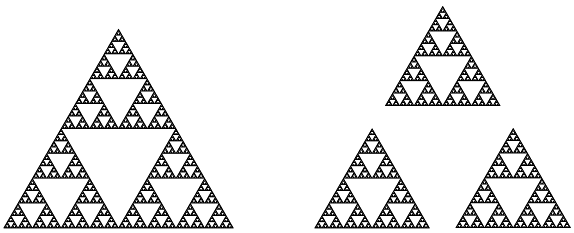
Článek vznikl na základě bakalářské práce autorky v oboru Matematické inženýrství na FSI VUT v Brně. Vedoucí práce byla Jana Hoderová z Ústavu matematiky FSI VUT v Brně.

s původními útvary. Na zmenšenou úsečku potřebujeme $\frac{1}{2}$ množství hmoty původní úsečky, u čtverce je to $\frac{1}{4}$ množství hmoty původního čtverce a u krychle $\frac{1}{8}$ množství hmoty původní krychle. Relativní množství hmoty nových útvarů vyjádřeme jako mocninu koeficientu zvětšení, který je v našem případě $\frac{1}{2}$. Pro úsečku získáme $\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^1$, pro čtverec $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ a pro krychli $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$. Všimněme si, že exponent je souhlasný s dimenzí útvaru. Úsečka je jednorozměrný útvar, čtverec dvourozměrný a krychle trojrozměrná.



Obrázek 1.1. Znázornění zmenšení úsečky, čtverce a krychle

Stejný postup aplikujme na Sierpińského trojúhelník, který je na obrázku 1.2 vlevo. Tento trojúhelník se skládá ze tří trojúhelníku o polovičních rozměrech zob-



Obrázek 1.2. Sierpińského trojúhelník

razených na obrázku 1.2 vpravo. Všechny tři menší trojúhelníky jsou v podstatě stejné jako celý trojúhelník, pokud nebereme ohled na měřítko. Tato vlastnost se nazývá soběpodobnost. Vidíme tedy, že zmenšení rozměrů na $\frac{1}{2}$ způsobí zmenšení potřebné hmoty na $\frac{1}{3}$ a podle předchozích úvah hledáme takové k, pro které platí

$$\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{3}. \tag{1.1}$$

Řešením rovnice (1.1) získáme k, které má význam fraktální dimenze Sierpińského trojúhelníku. Tu určíme úpravami

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right)^k = \ln\frac{1}{3}, \qquad k\ln\frac{1}{2} = \ln\frac{1}{3}, \qquad k = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1{,}58496.$$

Dimenze Sierpińského trojúhelníku nám vyšla neceločíselná, což je právě typická vlastnost fraktálů.

1.2. Metrický prostor a metrika

Definice 1.1 (metrického prostoru a metriky)**.** Nechť $M \neq \emptyset$ je libovolná množina a $\rho\colon M \times M \to \langle 0, \infty)$ zobrazení splňující pro všechna $x, y, z \in M$

(m1) $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$, (axiom totožnosti)
(m2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, (axiom symetrie)
(m3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$. (trojúhelníková nerovnost)

Potom zobrazení ρ nazýváme *metrika na* M, dvojici (M, ρ) nazýváme *metrický prostor*. Prvky množiny M se nazývají *body metrického prostoru* (M, ρ) a číslo $\rho(x, y)$ se nazývá *vzdálenost bodů* x, y v prostoru (M, ρ).

Definice 1.2 (průměru množiny)**.** Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $A \subseteq M$ je neprázdná množina. Je-li množina $\{\rho(x, y) : x, y \in A\}$ shora ohraničená, definujeme *průměr množiny* A jako

$$d(A) := \sup\{\rho(x, y) : x, y \in A\}.$$

Jestliže množina $\{\rho(x, y) : x, y \in A\}$ není shora ohraničená, tak klademe $d(A) := \infty$. Množina $A \subseteq M$ se nazývá *omezená*, jestliže $d(A) < \infty$.

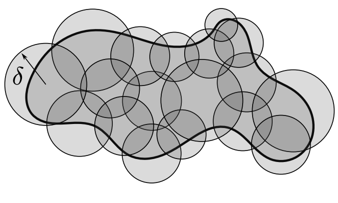
Definice 1.3 (vzdálenosti dvou množin)**.** Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $A, B \subseteq M$ jsou neprázdné množiny. Potom definujeme *vzdálenost množin* A *a* B vztahem

$$\rho(A, B) := \inf\{\rho(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Vzdálenost bodu x od množiny A definujeme jako

$$\rho(x, A) := \rho(\{x\}, A).$$

Definice 1.4 (δ-pokrytí množiny)**.** Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $A \subset M$. Konečný nebo spočetný systém množin $U_i \subseteq M$ takový, že $d(U_i) \leq \delta$ pro každé i, se nazývá *δ-pokrytí množiny* A, pokud platí $A \subseteq \bigcup\limits_i U_i$.



Obrázek 1.3. δ-pokrytí dvourozměrné množiny

1.3. Míra

Definice 1.5 (σ-algebry a měřitelného prostoru)**.** Nechť X je libovolná neprázdná množina. Systém S jejích podmnožin se nazývá *σ-algebra*, jestliže platí

(s1) $X \in S$,
(s2) $A \in S \Longrightarrow X \setminus A \in S$,

(s3) $A_n \in S$, $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcup_{n=i}^{\infty} A_n \in S$;

tedy systém S je uzavřený vzhledem k operaci doplňku a operaci spočetného sjednocení. Dvojice (X, S) se nazývá *měřitelný prostor.*

Definice 1.6 (míry na σ-algebře)**.** Nechť (X, S) je měřitelný prostor. Funkci $\mu\colon S \to \mathbb{R}$ nazveme *mírou na měřitelném prostoru* (X, S), jestliže platí

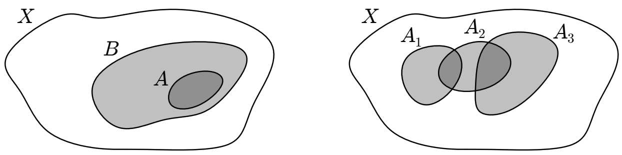
(p1) $\mu(\emptyset) = 0$,
(p2) $\mu(A) \geq 0$ pro každou množinu $A \in S$,
(p3) $A_n \in S$, $n \in \mathbb{N}$, jsou po dvou disjunktní množiny $\Longrightarrow \mu\Big(\bigcup_{n=i}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Vlastnost (p3) z definice 1.6 se nazývá *σ-aditivita.* Trojice (X, S, μ) se nazývá *měřitelný prostor s mírou μ.*

Definice 1.7 (vnější míry na množině)**.** Nechť X je neprázdná množina. Funkce $\mu^*\colon 2^X \to \langle 0, \infty)$ se nazývá *vnější míra na* X, jestliže platí

(v1) $\mu^*(\emptyset) = 0$,
(v2) $A, B \subseteq X$, $A \subseteq B \Longrightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$,
(v3) $A_n \subset X$, $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \mu^*\Big(\bigcup_{n=i}^{\infty} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$.

Vlastnost (v3) z definice 1.7 se nazývá *subaditivita* vnější míry, což je slabší vlastnost než σ-aditivita míry. Na obrázku 1.4 vidíme znázornění vlastností (v2) a (v3) z definice 1.7. Po vnější míře nechceme žádné zvláštní vlastnosti. Levá část



Obrázek 1.4. Vlastnosti vnější míry

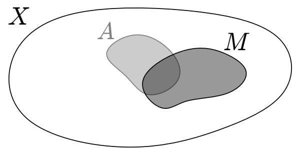
obrázku znázorňuje fakt, že libovolná podmnožina množiny bude mít menší míru než tato podmnožina. Na pravé části obrázku můžeme vidět, že sjednocení množin bude mít menší míru než součet měr těchto množin.

Definice 1.8 (μ^*-měřitelné množiny)**.** Nechť μ^* je vnější míra na X. Množina $M \subseteq X$ se nazývá *μ^*-měřitelná* právě tehdy, když pro libovolnou množinu $A \subset X$ platí

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap M) + \mu^*(A \setminus M).$$

K představě této vlastnosti μ^*-měřitelné množiny M pomůže názorný obrázek 1.5.

Věta 1.9 ([6])**.** *Nechť μ^* je vnější míra na X. Systém $\mathcal{M}$ μ^*-měřitelných množin je σ-algebra a zúžení μ^* na $\mathcal{M}$ je míra.*



Obrázek 1.5. μ^*-měřitelná množina M

Definice 1.10 (vnější metrické míry)**.** Nechť (M, ρ) je metrický prostor a μ^* je vnější míra na M. Pokud pro všechny množiny $E, F \subseteq M$ splňující $\rho(E, F) > 0$ platí

$$\mu^*(E \cup F) = \mu^*(E) + \mu^*(F),$$

pak vnější míru μ^* nazýváme *vnější metrická míra.*

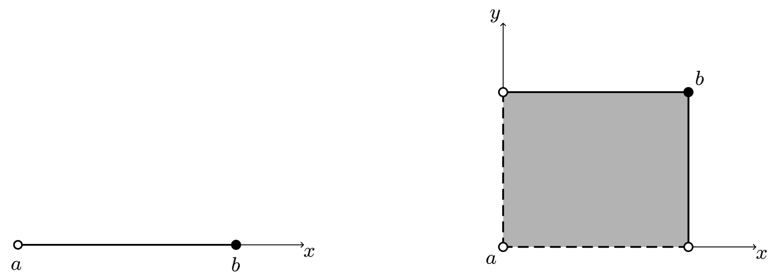
Dále se budeme pohybovat v prostoru $\mathbb{R}^d$. Body tohoto prostoru $a \in \mathbb{R}^d$ budeme zapisovat ve tvaru $a := (a_1, \ldots, a_d)$.

Definice 1.11 (polouzavřeného intervalu)**.** *Polouzavřeným intervalem* rozumíme množinu

$$(a, b\rangle := \big\{x \in \mathbb{R}^d : a_j < x_j \leq b_j,\ j \in \{1, \ldots, d\}\big\}.$$

Systém všech polouzavřených intervalů značíme J^d.

Na obrázku 1.6 vidíme příklady polouzavřených intervalů v prostorech $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$. V prostoru $\mathbb{R}$ se jedná o intuitivní představu polouzavřeného intervalu neboli



Obrázek 1.6. Polouzavřený interval v $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$

úsečky bez jednoho bodu. V prostoru $\mathbb{R}^2$ tuto představu pouze rozšíříme o jednu dimenzi a získáme tak obdélník bez dvou stran, tedy i bez třech vrcholů.

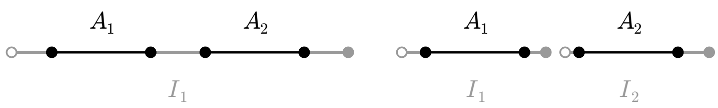
Definice 1.12 (objemu intervalu)**.** Nechť $I \in J^d$. Potom *objem* $\lambda_d(I)$ *intervalu* $I := (a, b\rangle$ definujeme jako $\lambda_d(I) = \prod_{j=1}^d (b_j - a_j)$.

Objem intervalu lze interpretovat pro jednorozměrný interval $I_1 = (a, b\rangle$ jako délku tohoto intervalu $\lambda_1(I_1) = b - a$, pro dvourozměrný interval $I_2 = (a_1, b_1\rangle \times (a_2, b_2\rangle$ jako obsah obdélníku $\lambda_2(I_2) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$, pro trojrozměrný interval by se jednalo o objem kvádru a podobně bychom mohli pokračovat do vyšších dimenzí.

Definice 1.13 (vnější Lebesgueovy míry)**.** Nechť $A \subset \mathbb{R}^d$. Definujeme *vnější d-rozměrnou Lebesgueovu míru* množiny A jako

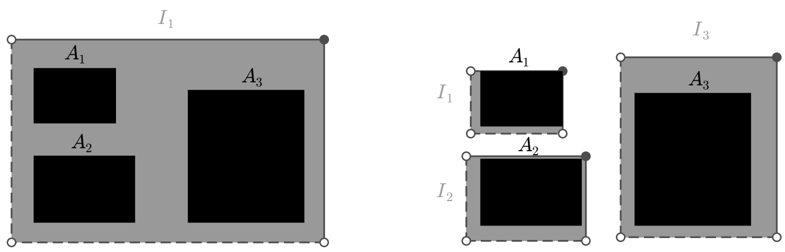
$$\lambda_d^*(A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_d(I_n) : I_n \in J^d,\ A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \right\}.$$

Příklad 1.14. Zaměřme se nejprve na jednorozměrnou vnější Lebesgueovu míru množiny A. Nejdříve sestrojíme systém polouzavřených intervalů I_n takových, že jejich sjednocením pokryjeme celou množinu A. Poté sečteme objemy všech těchto intervalů. Pokrytí množiny polouzavřenými intervaly můžeme ovšem provést mnoha způsoby a ze všech těchto způsobů hledáme infimum součtu objemů intervalů. Na obrázku 1.7 vidíme dva možné způsoby pokrytí množiny $A = A_1 \cup A_2$ polouzavřenými intervaly I_n.



Obrázek 1.7. Pokrytí jednorozměrné množiny polouzavřenými intervaly

Analogicky si můžeme představit dvourozměrnou vnější Lebesgueovu míru. Příklad dvourozměrné množiny a její možné pokrytí vidíme na obrázku 1.8. Množina $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ je složená ze tří obdélníků. V prvním případě ji pokryjeme jedním intervalem, ve druhém případě třemi intervaly, které mají zajisté menší součet objemů. Snadno si tedy představíme, že k infimu tohoto součtu dospějeme zmenšováním intervalů co nejtěsněji k jednotlivým množinám A_n.



Obrázek 1.8. Pokrytí dvourozměrné množiny polouzavřenými intervaly

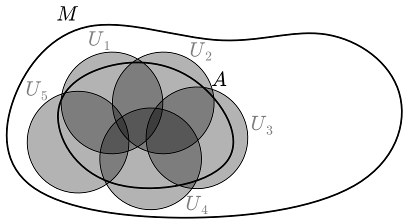
1.4. Hausdorffova míra

Věta 1.15 ([6])**.** *Nechť (M, ρ) je metrický prostor, $\delta > 0$ a $s > 0$. Potom zobrazení $H_\delta^{*s} \colon 2^M \to \langle 0, \infty)$ definované vztahem*

$$H_\delta^{*s}(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \big(d(U_i)\big)^s : \{U_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ je } \delta\text{-pokrytí množiny } A \right\} \quad \text{pro } A \subseteq M$$

je vnější míra na množině M.

Infimum v předchozí větě bereme přes všechna možná δ-pokrytí $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ množiny $A \subseteq M$, viz obrázek 1.9.



Obrázek 1.9. Pokrytí množiny A v (M, ρ)

Definice 1.16 (Hausdorffovy s-rozměrné vnější míry)**.** Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $s > 0$. Definujeme zobrazení $H^{*s} \colon 2^M \to \langle 0, \infty)$ vztahem

$$H^{*s}(A) = \lim_{\delta \to 0^+} H_\delta^{*s}(A) \quad \text{pro } A \subseteq M,$$

kde zobrazení H_δ^{*s} je definováno ve větě 1.15. Zobrazení H^{*s} nazveme *Hausdorffova s-rozměrná vnější míra.*

Definice 1.17. Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $s > 0$ je libovolné reálné číslo. Zúžení Hausdorffovy s-rozměrná vnější míry H^{*s} na σ-algebru všech H^{*s}-měřitelných množin je míra na množině M, kterou nazýváme *Hausdorffova s-rozměrná míra H^s.*

Věta 1.18 ([6])**.** *Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $s > 0$ je libovolné reálné číslo. Hausdorffova s-rozměrná vnější míra H^{*s} je vnější metrickou mírou na množině M.*

Věta 1.19 ([6])**.** *Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $A \subset M$ je H^s-měřitelná množina. Potom existuje právě jedno reálné číslo $t > 0$ takové, že*

(h1) $0 < H^t(A) < \infty$,
(h2) $H^r(A) = \infty$ *pro každé* $r \in \mathbb{R}$ *splňující* $0 < r < t$,
(h3) $H^r(A) = 0$ *pro každé* $r \in \mathbb{R}$ *splňující* $r > t$.

Definice Hausdorffovy dimenze je založena na této vlastnosti Hausdorffovy vnější míry. Číslo t, pro které platí vlastnosti z věty 1.19, je Hausdorffova dimenze množiny $A \subset M$.

Poznámka. Hausdorffovu vnější míru na (M, ρ) lze definovat jako

$$H^{*s}(A) = \lim_{n \to \infty} H_n^{*s}(A) \quad \text{pro } A \subseteq M,$$

kde pro $n \in \mathbb{N}$ je

$$H_n^{*s}(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \left(d(A_{n,i}) \right)^s : A_{n,i} \subseteq M,\ d(A_{n,i}) \leq \frac{1}{n},\ A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_{n,i} \right\}.$$

Když nerovnost zaměníme za rovnost, dostaneme tzv. mřížkovou vnější míru.

Definice 1.20 (mřížkové vnější míry)**.** Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $s > 0$. Zobrazení $G^{*s}\colon 2^M \to \langle 0, \infty)$ definované vztahem

$$G^{*s}(A) = \lim_{n \to \infty} G_n^{*s}(A) \quad \text{pro } A \subseteq M,$$

kde pro $n \in \mathbb{N}$ je

$$G_n^{*s}(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \big(d(A_{n,i})\big)^s : A_{n,i} \subseteq M,\ d(A_{n,i}) = \frac{1}{n},\ A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_{n,i} \right\},$$

nazýváme *mřížková vnější míra na* M.

Lze ukázat, že G^{*s} je vnější míra na M a že její zúžení na množinu všech G^{*s}-měřitelných množin je míra na M. Tuto míru značíme G^s a nazýváme ji *s-rozměrnou mřížkovou mírou.* Pro mřížkovou míru platí analogie věty 1.19. Dále platí, že je-li množina A G^s-měřitelná, pak je také H^s-měřitelná a $G^s(A) = H^s(A)$.

1.5. Fraktál

Definice 1.21 (Hausdorffovy dimenze)**.** *Hausdorffovou dimenzí* množiny $A \subset M$, kde (M, ρ) je metrický prostor, rozumíme číslo

$$D = \sup\big\{s > 0 : H^{*s}(A) = \infty\big\}.$$

Důležitá vlastnost Hausdorffovy dimenze je, že na rozdíl od dimenze topologické nemusí být nutně celočíselná. Topologickou dimenzí geometrického útvaru U se obvykle rozumí nejmenší $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takové, že pro každé $\delta > 0$ existuje δ-pokrytí tohoto útvaru otevřenými množinami tak, že každý bod útvaru U je pokryt nejvýše $n + 1$ okolími.

Definice 1.22 (mřížkové dimenze)**.** *Mřížkovou dimenzí* množiny $A \subset M$, kde (M, ρ) je metrický prostor, rozumíme číslo

$$D_G = \sup\big\{s > 0 : G^{*s}(A) = \infty\big\}.$$

Jestliže A je G^s-měřitelná množina, pak její mřížková dimenze je rovna Hausdorffově dimenzi.

Poznámka. Fraktální dimenzí rozumíme takovou dimenzi, která připouští neceločíselné hodnoty.

Věta 1.23. *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je H^s-měřitelná množina. Potom $0 < s \leq n$. Tedy Hausdorffova dimenze množiny A může být nejvýše rovna dimenzi prostoru $\mathbb{R}^n$.*

Definice 1.24 (fraktálu)**.** *Fraktálem* nazveme takovou množinu, která je H^s-měřitelná a jejíž Hausdorffova dimenze je ostře vetší než topologická dimenze.

2. Teorie k detekci blesku

V této kapitole si vysvětlíme matematický aparát, který budeme následně potřebovat pro detekci blesku v obraze. Jedná se zejména o diskrétní konvoluci, díky které budeme schopni aproximovat gradient obrazu. Samotný gradient je také náplní této kapitoly a budeme ho potřebovat pro detekci hran. Definice v této kapitole je převzata z [3].

2.1. Konvoluce

Definice 2.1 (konvoluce funkcí dvou proměnných)**.** Předpokládejme, že pro funkce $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ integrály

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |g(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

existují a jsou konečné. Potom *konvoluci funkcí* f *a* g značíme $f * g$ a definujeme jako

$$(f*g)(t,s) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)g(t-x,s-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{pro } (t,s) \in \mathbb{R}^2.$$

Funkce g se nazývá *konvoluční jádro.*

Definice 2.1 popisuje konvoluci dvou spojitých funkcí. Při zpracování obrazu je obvykle potřeba konvoluce diskrétních funkcí dvou proměnných, protože obraz je popsán pomocí jednotlivých pixelů v rovině. Pro obraz $f\colon \{0,1,\dots,m-1\} \times \{0,1,\dots,n-1\} \to \mathbb{R}$ o rozměrech $m \times n$ použijeme vztah

$$(f*g)(t,s) = \sum_{x=0}^{k-1}\sum_{y=0}^{\ell-1} f(t+x,s+y)g(x,y)$$
$$\text{pro } t \in \{0,\dots,m-k\},\ s \in \{1,\dots,n-\ell\},$$

kde konvoluční jádro $g\colon \{0,1,\dots,k-1\} \times \{0,1,\dots,\ell-1\} \to \mathbb{R}$ má rozměry $k \times \ell$.

Příklad 2.2. Diskrétní funkci dvou proměnných lze reprezentovat pomocí matice. Hodnoty x, y jsou souřadnice prvku matice a funkční hodnota $f(x,y)$ je hodnota na této pozici matice. Uveďme tedy konkrétní příklad diskrétní konvoluce v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 6 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 8 & 8 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 0 & 8 & 5 & 5 & 9 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 4 & 5 & 2 & 8 \\ 7 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 7 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 7 & 4 & 8 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 22 & -14 & -11 & 3 \\ 11 & 21 & -12 & 1 & 5 \\ 1 & 14 & -2 & 2 & 12 \\ -13 & 5 & 5 & 6 & 18 \end{pmatrix}.$$

zdrojový obraz *konvoluční jádro* *výsledek konvoluce*

2.2. Gradient

Gradient se využívá v oblasti zpracování obrazu pro detekci hran. Norma gradientu funkce dvou proměnných udává, jak moc se v daných místech mění funkční hodnota. Hrany se v obraze vyznačují velkými změnami hodnot, takže vysoké hodnoty normy gradientu značí velkou pravděpodobnost, že se jedná o hranu. My budeme ale potřebovat diskrétní aproximaci gradientu, protože máme obraz složený z pixelů. Jednou z takových aproximací je diskrétní konvoluce obrazu se Sobelovým operátorem. Tak jako gradient funkce dvou proměnných má dvě složky, tak i Sobelův operátor budeme muset aplikovat ve dvou směrech pro aproximaci derivace ve směru osy x a ve směru osy y. Pro získání x-ové složky aproximace gradientu provedeme konvoluci s konvolučním jádrem

$$\mathbf{g}_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

a pro získání y-ové složky aproximace gradientu provedeme konvoluci s konvolučním jádrem

$$\mathbf{g}_y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Provedením těchto operací získáme dvě matice, jedna obsahuje hodnoty x-ové složky aproximace gradientu, tu označíme $\mathbf{G}_x$ a druhá hodnoty y-ové složky aproximace gradientu, tu označíme $\mathbf{G}_y$. Aproximovaný gradient označíme $\mathbf{G} = \big(\mathbf{G}_x, \mathbf{G}_y\big)$. Nás zajímá norma gradientu $\mathbf{G}$, takže po prvcích provedeme výpočet normy aproximovaného gradientu

$$\|\mathbf{G}\| = \sqrt{{\mathbf{G}_x}^2 + {\mathbf{G}_y}^2}\,. \tag{2.3}$$

Poté pro detekci hran najdeme maximum této normy a hledáme všechny pixely, které mají hodnotu dostatečně vysokou vůči tomuto maximu.

3. Teorie k výpočtu Hausdorffovy dimenze

V této kapitole se zaměříme na teorii potřebnou k výpočtu Hausdorffovy dimenze. Vysvětlíme si metodu nejmenších čtverců, kterou budeme potřebovat k prokládání dat přímkou. Poté si popíšeme metodu box-counting, kterou použijeme pro výpočet Hausdorffovy dimenze a která využívá zmiňovanou metodu nejmenších čtverců. V této kapitole je čerpáno z [1].

3.1. Metoda nejmenších čtverců

Při výpočtu Hausdorffovy dimenze potřebujeme proložit přímku danými body a následně zjistit její směrnici. K tomu využijeme numerickou metodu zvanou metoda nejmenších čtverců (MNČ). Tato metoda zvolí přímku tak, aby součet druhých mocnin vzdálenosti všech bodů od přímky ve směru osy y byl minimální.

3.1.1. Matematická formulace MNČ. Nechť t je nezávisle proměnná a $y(t)$ je neznámá funkce proměnné t, kterou chceme aproximovat. Provedli jsme m měření a přibližně jsme tedy zjistili hodnoty y pro určité různé t, takže $y_i \approx y(t_i)$, pro $i = 1, 2, \ldots, m$. Chceme modelovat y lineární kombinací n bázových funkcí φ_j pro nějaké $n \leq m$, tedy

$$y(t) \approx x_1\varphi_1(t) + x_2\varphi_2(t) + \cdots + x_n\varphi_n(t) =: R_n(t).$$

Funkce R_n se ve statistice nazývá *lineární regresní funkce*. Bázové funkce φ_j navrhujeme podle očekávaného průběhu funkce y. Určujeme parametry $x_1, x_2, \ldots, x_n$

tak, aby

$$y_i \approx R_n(t_i), \ i = 1, 2, \ldots, m, \quad \text{neboli} \quad \mathbf{y} \approx \mathbf{A}\mathbf{x},$$

kde $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)^T$ jsou naměřené hodnoty, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ je vektor neznámých parametrů a

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \varphi_1(t_1) & \varphi_2(t_1) & \ldots & \varphi_n(t_1) \\ \varphi_1(t_2) & \varphi_2(t_2) & \ldots & \varphi_n(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(t_m) & \varphi_2(t_m) & \ldots & \varphi_n(t_m) \end{pmatrix} =: (\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n).$$

Matice $\mathbf{A}$ se nazývá *návrhová matice.* Vektor $\boldsymbol{\varphi}_j = (\varphi_j(t_1), \varphi_j(t_2), \ldots, \varphi_j(t_m))^T$, $j = 1, 2, \ldots, n$, je j-tý sloupec matice $\mathbf{A}$. Rozdíly mezi naměřenými hodnotami y_i a aproximovanými hodnotami $R_n(t_i)$ se nazývají *rezidua* a platí pro ně

$$r_i := y_i - R_n(t_i) = y_i - \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(t_i) x_j = y_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

kde $a_{ij} = \varphi_j(t_i)$. Pro reziduum tedy platí $\mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}$. Naším cílem je určit parametry x_i tak, aby rezidua byla co nejmenší. Minimalizujeme tedy součet druhých mocnin reziduí, jinými slovy

$$\|\mathbf{r}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{m} r_i^2 \to \min. \tag{3.1}$$

3.1.2. Normální soustava rovnic. Řešení minimalizační úlohy (3.1) musí splňovat nutnou podmínku pro extrém

$$\frac{\partial \|\mathbf{r}\|_2^2}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{i=1}^{m} \left(y_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)^2 = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Proveďme naznačenou derivaci:

$$\frac{\partial \|\mathbf{r}\|_2^2}{\partial x_k} = 2 \sum_{i=1}^{m} \left(y_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) (-a_{ik}) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Odtud úpravou získáme vztah

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ik} a_{ij} \right) x_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ik} y_i, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

který je možné zapsat jako

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{y}. \tag{3.2}$$

Tato soustava lineárních rovnic (3.2) se nazývá *normální soustava rovnic.*

3.1.3. Prokládání dat přímkou. V případě výpočtu Hausdorffovy dimenze potřebujeme aproximovat data přímkou, neboli polynomem prvního stupně. Bázové funkce tedy budou pouze dvě a to $\varphi_1(t) = t$ a $\varphi_2(t) = 1$. Takže máme dva neznámé parametry. Vektor těchto parametrů označíme $(a, b)^T$, aby nedocházelo ke kolizi s rovnicí přímky. Změříme hodnoty y_i pro t_i, kde $i = 1, 2, \ldots, m$. Pro matici $\mathbf{A}$ platí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \varphi_1(t_1) & \varphi_2(t_1) \\ \varphi_1(t_2) & \varphi_2(t_2) \\ \vdots & \vdots \\ \varphi_1(t_m) & \varphi_2(t_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & 1 \\ t_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ t_m & 1 \end{pmatrix}.$$

Dosazením do vztahu (3.2) získáme

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m t_i^2 & \sum_{i=1}^m t_i \\ \sum_{i=1}^m t_i & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m t_i y_i \\ \sum_{i=1}^m y_i \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Z této soustavy dopočítáme parametry a a b. Tím získáme předpis přímky $y = at + b$.

3.2. Metoda box-counting

K výpočtu Hausdorffovy dimenze lze použít metodu box-counting. Jedná se o metodu odvozenou přímo z definice Hausdorffovy míry. Hausdorffova míra množiny A je definována jako

$$H^s(A) = \lim_{\delta \to 0^+} H_\delta^{*s}(A), \tag{3.4}$$

kde

$$H_\delta^{*s}(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \big(d(U_i)\big)^s : \{U_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ je } \delta\text{-pokrytí množiny } A \right\},$$

viz definici 1.17. Dále budeme uvažovat metrický prostor $(\mathbb{R}^2, \rho_\infty)$, kde ρ_∞ je maximální metrika definovaná na množině $\mathbb{R}^2$ jako

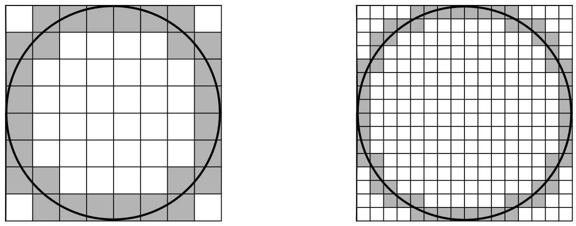
$$\rho_\infty(x, y) = \max \big\{ |x_1 - y_1|, |x_2 - y_2| \big\}.$$

Jednotková koule, neboli množina bodů se vzdáleností menší nebo rovnou 1 od nějakého bodu a, by v této metrice vypadala jako čtverec. Položme $\delta = \frac{1}{k}$. Množinu A pokryjeme čtverci s průměrem δ, které mezi sebou po dvojicích mají průnik nejvýše jednu stranu. Počet čtverců obsahujících část množiny A označíme $N(k)$. Dosazením těchto parametrů do (3.4) dostaneme

$$H^s(A) = \lim_{k \to \infty} N(k) \left(\frac{1}{k} \right)^s.$$

Znázornění takových pokrytí můžeme vidět na obrázku 3.1, kde k zvolíme tak, že průměr čtverců je $\frac{1}{k}$ a potom $N(k)$ je počet šedých čtverců.

Při výpočtu Hausdorffovy dimenze z obrázku jsme omezeni počtem pixelů. Hodnotu k nemůžeme zvětšovat do nekonečna, protože tím zmenšujeme průměr čtverců



Obrázek 3.1. Pokrytí kružnice čtverci

$\frac{1}{k}$ k nule a ten nemůže být menší než průměr pixelu. Limitu tedy neuvažujeme a dostáváme pouze aproximaci

$$H^s(A) \approx N(k) \left(\frac{1}{k}\right)^s .$$

Odtud vyjádříme následujícími úpravami Hausdorffovu dimenzi s:

$$\begin{aligned}
\ln H^s(A) &\approx \ln \left(N(k) \left(\frac{1}{k}\right)^s\right), \\
\ln H^s(A) &\approx \ln N(k) + s \cdot \ln \left(\frac{1}{k}\right), \\
-\ln N(k) &\approx s \cdot \ln \left(\frac{1}{k}\right) - \ln H^s(A), \\
\ln N(k) &\approx s \cdot \ln k + \ln H^s(A).
\end{aligned}$$

Vztah $\ln N(k) \approx s \ln k + \ln H^s(A)$ připomíná rovnici přímky $y = at + b$ v logaritmických souřadnicích, kde $a = s$, $b = \ln H^s(A)$, $t = \ln k$, $y = \ln N(k)$. Koeficient $b = \ln H^s(A)$ je logaritmus Hausdorffovy míry množiny A, takže b je vskutku konstanta. Pro výpočet Hausdorffovy dimenze počítáme $N(k)$ pro různá k, jinými slovy počítáme y pro různá t. Tím získáváme body, které by měly přibližně ležet na přímce. Můžeme tedy použít metodu nejmenších čtverců k proložení přímky těmito body a pomocí směrnice a této přímky přibližně určit Hausdorffovu dimenzi s. Uvažujme tedy m přibližných hodnot $y_i \approx y(t_i)$. Dosazením za a, b, t a y do (3.3) dostaneme

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{m} (\ln k_i)^2 & \sum\limits_{i=1}^{m} \ln k_i \\ \sum\limits_{i=1}^{m} \ln k_i & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ \ln H^s(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{m} \ln k_i \ln N(k_i) \\ \sum\limits_{i=1}^{m} \ln N(k_i) \end{pmatrix}.$$

Z této soustavy dopočítáme Hausdorffovu dimenzi s. Nejdříve vynásobíme matice a tím získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých s a $\ln H^s(A)$, tedy

$$s \sum_{i=1}^{m} (\ln k_i)^2 + \ln H^s(A) \sum_{i=1}^{m} \ln k_i = \sum_{i=1}^{m} \ln k_i \, \ln N(k_i), \tag{3.5}$$

$$s\sum_{i=1}^{m}\ln k_i + m\ln H^s(A) = \sum_{i=1}^{m}\ln N(k_i). \tag{3.6}$$

Z rovnice (3.6) vyjádříme

$$\ln H^s(A) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m}\ln N(k_i) - s\sum\limits_{i=1}^{m}\ln k_i}{m} \tag{3.7}$$

a dosadíme do rovnice (3.5):

$$s\sum_{i=1}^{m}(\ln k_i)^2 + \frac{\sum\limits_{i=1}^{m}\ln N(k_i) - s\sum\limits_{i=1}^{m}\ln k_i}{m}\sum_{i=1}^{m}\ln k_i = \sum_{i=1}^{m}\ln k_i\,\ln N(k_i).$$

Odtud už snadno vyjádříme s:

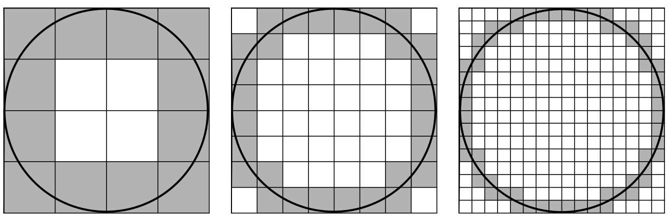
$$sm\sum_{i=1}^{m}(\ln k_i)^2 + \sum_{i=1}^{m}\ln N(k_i)\sum_{i=1}^{m}\ln k_i - s\left(\sum_{i=1}^{m}\ln k_i\right)^2 = m\sum_{i=1}^{m}\ln k_i\,\ln N(k_i),$$

$$s = \frac{m\sum\limits_{i=1}^{m}\ln k_i\,\ln N(k_i) - \sum\limits_{i=1}^{m}\ln N(k_i)\sum\limits_{i=1}^{m}\ln k_i}{m\sum\limits_{i=1}^{m}(\ln k_i)^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{m}\ln k_i\right)^2}.$$

Získali jsme vztah pro Hausdorffovu dimenzi, do kterého stačí už jen dosadit různá k_i a k nim příslušná $N(k_i)$.

K implementaci této metody je potřeba zavést pojem *škálovací faktor*. Mějme při první iteraci pokrytí množiny čtverci o průměru $\frac{1}{k}$, v ostatních iteracích zmenšujeme průměr čtverců na polovinu průměru čtverců předchozí iterace. Škálovacím faktorem pro i-tou iteraci rozumíme hodnotu zmenšení průměru čtverců oproti první iteraci. První iterace má tedy škálovací faktor 1, protože je $\frac{1}{1}$ násobkem průměru $\frac{1}{k}$. Druhá iterace má škálovací faktor 2, protože je $\frac{1}{2}$ násobkem průměru $\frac{1}{k}$. Podobně i-tá iterace má škálovací faktor 2^{i-1}.

Příklad 3.1. Postup při výpočtu Hausdorffovy dimenze metodou box-counting si ukážeme na kružnici. Na obrázku 3.2 vidíme tři iterace pokrytí kružnice čtverci. Počty těchto čtverců a k nim příslušné hodnoty škálovacího faktoru jsou uvedeny



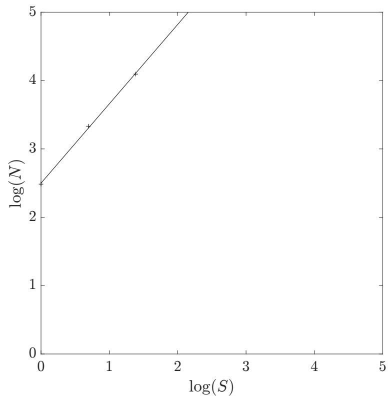
Obrázek 3.2. Pokrytí kružnice čtverci

v tabulce 3.1. Zároveň zde vidíme i přirozené logaritmy těchto hodnot, které budeme potřebovat k prokládání přímky daty. Hodnoty $\log S$ a $\log N$ znázorníme

iterace	škálovací faktor S	počet čtverců N	$\log S$	$\log N$
první	1	12	0	2,4849
druhá	2	28	0,6931	3,3322
třetí	4	60	1,3863	4,0943

Tabulka 3.1. Hodnoty škálovacího faktoru a počty pokrývajících čtverců

graficky jako body a pomocí metody nejmenších čtverců těmito body proložíme přímku. Body a proloženou přímku vidíme na obrázku 3.3. Směrnice této přímky



Obrázek 3.3. Proložení dat přímkou

je 1,1610. Hausdorffova dimenze kružnice nám tedy vyšla 1,1610. Pro přesnější výsledky bychom mohli provést více iterací, ale pro vysvětlení postupu nám tyto tři iterace stačí.

4. Tvorba programu

V této kapitole si popíšeme postup při tvorbě programu na detekci blesku v obraze, jeho zjednodušení na jednopixelovou křivku a následný výpočet Hausdorffovy dimenze tohoto blesku Nejdříve převedeme obrázek na černobílý, následně najdeme v obrázku blesk a zjednodušíme ho na jednopixelovou křivku. Nakonec spočítáme Hausdorffovu dimenzi takto zjednodušeného blesku.

4.1. Příprava obrázku

Nejdříve načteme barevný obrázek o rozměrech, které si označíme $m \times n$. Tento obrázek lze tedy chápat jako matici $m \times n$, kterou si označíme $\mathbf{O}$. V MATLABu má tato matice prvky, kterými jsou jednorozměrná pole o třech prvcích, kde jsou uložené hodnoty jednotlivých složek RGB, což si lze představit také jako tři matice, kde každá obsahuje informace pouze o jedné ze tří složek. Obrázek následně převedeme na černobílou verzi tak, aby se co nejvíce eliminoval šum. K tomu použijeme součet poměru složek RGB. Červenou složku násobíme koeficientem 0,25, zelenou 0,5 a modrou 0,25. Označme matici černobílého obrázku **BW** a matice barevných složek **R**,**G**,**B**. Potom platí $\mathbf{BW} = 0{,}25\mathbf{R} + 0{,}5\mathbf{G} + 0{,}25\mathbf{B}$.

4.2. Detekce blesku

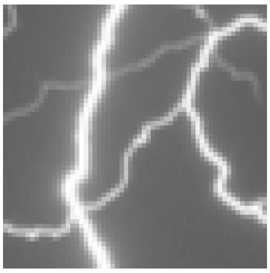
Po převodu obrázku na černobílý je nutno v něm najít blesk. Hledání blesku provedeme na základě myšlenky, že blesk by měl být nejsvětlejší část obrázku a zároveň by hrany blesku měly být velmi výrazné. Vytvoříme si tedy dvě matice. Jedna bude obsahovat informace o tom, kde se nachází pixely s dostatečně velkou intenzitou a druhá matice bude obsahovat výsledek po detekci hran. Obě tyto matice obsahují hodnoty pouze 0 a 1, kde 1 znamená, že pixel je součástí blesku a 0, že nikoliv. U takových matic lze tedy provádět logické operace. Hledané pixely blesku mají vysokou intenzitu nebo se v jejich okolí prudce mění intenzita. Matici nesoucí informaci o blesku tím pádem získáme jako logický součet těchto dvou matic.

4.2.1. Hledání dostatečné intenzity. Projdeme tedy všechny prvky matice **BW** a najdeme jejich maximální hodnotu, jinými slovy projdeme všechny pixely obrázku a najdeme hodnotu nejsvětlejšího pixelu. Tuto hodnotu si uložíme a vytvoříme si nulovou matici **V**. Zvolíme si hodnotu parametru p tak, že $0 \leq p \leq 1$, který značí minimální hodnotu intenzity vůči maximu, kterou musí blesk mít. Znovu projdeme všechny prvky matice **BW** a těm, které mají hodnotu alespoň p, přiřadíme v matici **V** hodnotu 1. Ostatní pixely této matice mají hodnotu 0.

Příklad 4.1. Hledání dostatečné intenzity si předvedeme na obrázku 4.1a, který už je převeden na černobílou verzi. Najdeme maximální hodnotu mezi všemi pixely a následně volíme různé hodnoty parametru p. Hledáme pixely s hodnotou větší nebo rovnou p-násobku nalezeného maxima a těm přiřadíme hodnotu 14, neboli bílou barvu. Ostatní pixely mají hodnotu 0 a jsou černé. Výsledky lze vidět na obrázcích 4.1b až 4.1f.

Příklad 4.1 je realizován na obrázku o malém rozlišení, abychom mohli sledovat, co se děje na pixelové úrovni a tím získali představu, jak metoda funguje.

4.2.2. Detekce hran. Detekci hran realizujeme pomocí Sobelova operátoru, provedeme tedy konvoluci černobílého obrazu **BW** s konvolučním jádrem $\mathbf{g}_x$ ze vztahu (2.1), tím získáme matici $\mathbf{G}_x$ a poté i s konvolučním jádrem $\mathbf{g}_y$ ze vztahu (2.2) a tím získáme matici $\mathbf{G}_y$. Následně vypočítáme normu aproximovaného gradientu **G** podle vztahu (2.3). Projdeme všechny prvky matice s hodnotami této normy a najdeme mezi nimi maximum. Poté se budeme řídit hodnou parametru g, který volíme tak, že $0 \leq g \leq 1$. Projdeme znovu všechny prvky a pokud mají hodnotu alespoň g krát nalezené maximum, nahradíme je hodnotou 1, v opačném případě je nahradíme hodnotou 0. Tím získáme matici nesoucí informaci o tom, které prvky považujeme za hrany a které ne.



(a) Obrázek blesku

(b) Intenzita od 40%

(c) Intenzita od 45%

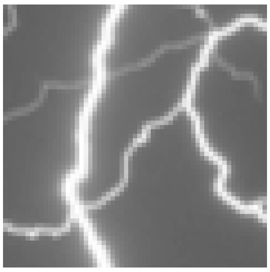
(d) Intenzita od 50%

(e) Intenzita od 55%

(f) Intenzita od 60%

Obrázek 4.1. Obrázek blesku a pixely s určitou minimální intenzitou

Příklad 4.2. Pro názornost provedeme konvoluci obrázku 4.2a se Sobelovým operátorem. Na obrázku 4.2b vidíme výsledek konvoluce s konvolučním jádrem $\mathbf{g}_x$ a na obrázku 4.2c výsledek konvoluce s konvolučním jádrem $\mathbf{g}_y$. Známe prvky



(a) Obrázek blesku

(b) Derivace ve směru osy x

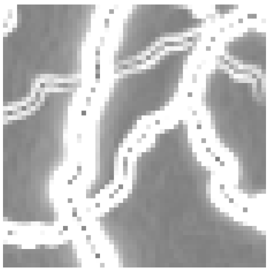
(c) Derivace ve směru osy y

Obrázek 4.2. Obrázek blesku a směrové derivace

matic $\mathbf{G}_x$ a $\mathbf{G}_y$, takže spočítáme normu aproximovaného gradientu $\mathbf{G} = \left(\mathbf{G}_x, \mathbf{G}_y\right)$ jako

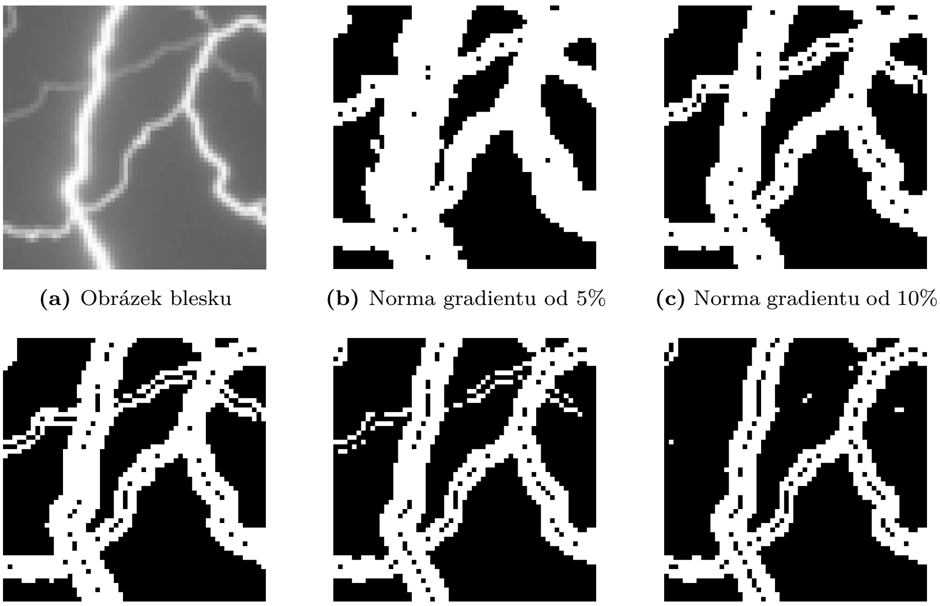
$$\|\mathbf{G}\| = \sqrt{{\mathbf{G}_x}^2 + {\mathbf{G}_y}^2}\,.$$

Tato norma je zobrazena na obrázku 4.3. Vidíme, že černé pixely reprezentující záporné hodnoty se zde už nevyskytují, to je způsobeno druhou mocninou matic $\mathbf{G}_x$ a $\mathbf{G}_y$.



Obrázek 4.3. Norma aproximovaného gradientu

Následně najdeme maximální hodnotu v matici normy gradientu a zvolíme si různé parametry g, které nám udávají minimální požadovanou hodnotu relativně k hodnotě tohoto maxima. Pro tyto hodnoty g nalezneme všechny pixely splňující tuto podmínku. Výsledky tohoto postupu provedeného pro různá g vidíme na obrázcích 4.4b až 4.4f.



(a) Obrázek blesku **(b)** Norma gradientu od 5% **(c)** Norma gradientu od 10%

(d) Norma gradientu od 15% **(e)** Norma gradientu od 20% **(f)** Norma gradientu od 25%

Obrázek 4.4. Obrázek blesku a pixely s určitou minimální hodnotou normy gradientu

4.2.3. Konstrukce blesku. Provedli jsme hledání dostatečné intenzity obrázku a detekci hran. Teď se vrátíme k úvaze, že blesk je logický součet těchto dvou výsledků.

Příklad 4.3. Na výsledcích z příkladů 4.1 a 4.2 si ukážeme provedení logického součtu. Máme dvě matice, jejichž prvky nabývají pouze hodnot 0 a 1. Logický součet těchto matic nám dá matici, kde bude na prvku hodnota 1, pokud je hodnota 1 na alespoň jedné ze sčítaných matic, jinak je zde 0. Realizaci vidíme na obrázku 4.5. Tento výsledek už lze považovat za detekovaný blesk.

(a) Intenzita od 45% **(b)** Norma gradientu od 10% **(c)** Logický součet

Obrázek 4.5. Znázornění logického součtu

4.3. Aproximace jednopixelovou křivkou

K aproximaci blesku jednopixelovou křivkou, tedy křivkou, která má tloušťku pouze velikosti jednoho pixelu, využijeme funkci `bwmorph`, která slouží k provádění morfologických operací na binárních obrazech. Vstupy této funkce jsou obraz, název prováděné operace a případně další specifikace. V našem případě potřebujeme provést skeletonizaci, která má jakožto vstupní parametr funkce `bwmorph`, v MATLABu název `'skel'`. Výstupem této funkce je „kostra“ vstupního obrazu, neboli jednopixelová křivka.

Příklad 4.4. Příklad si ukážeme na obrázku 4.5, který jsme už v předchozí kapitole připravili k aproximaci jednopixelovou křivkou. Na obrázku 4.6 vidíme srovnání detekovaného blesku s výslednou aproximací.

4.4. Výpočet Hausdorffovy dimenze

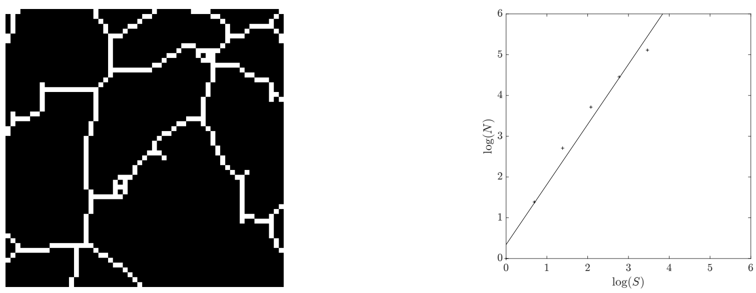
K výpočtu Hausdorffovy dimenze použijeme metodu box-counting. Tato metoda vyžaduje dělení obrazu na stejně velké čtverce, kde se mění velikost čtverců v každé iteraci. Pro usnadnění takového dělení si rozšíříme obraz o černé pixely tak, aby byl obraz čtvercový o délce strany nějaké mocniny dvojky. Tuto mocninu dvojky volíme nejnižší možnou. Po této úpravě se bude obraz snadno dělit na čtverce. Zvolíme první dělení a následné dělení získáme rovnoměrným rozdělením jednoho čtverce na čtyři menší čtverce. Upravené rozměry nám zaručují, že tímto způsobem můžeme pokračovat v dělení až do iterace, ve které mají čtverce velikost jednoho pixelu.

(a) Detekovaný blesk (b) Jednopixelová křivka

Obrázek 4.6. Aproximace blesku jednopixelovou křivkou

Vytvoříme si tedy dvě pole. První pole `S` bude sloužit k zapisování hodnot škálovacího faktoru. Do druhého pole `N` budeme zapisovat počet čtverců, které obsahují alespoň jeden bílý pixel. V každé iteraci i zapíšeme hodnoty `S(i)` a `N(i)`. Máme tedy naměřené hodnoty škálovacího faktoru a k nim příslušné počty čtverců. Těmito daty potřebujeme po jejich zlogaritmování proložit přímku. K tomu využijeme metodu nejmenších čtverců. Jakmile máme proloženou přímku, stačí zjistit jaká je její směrnice. Ta je totiž rovna vypočítané Hausdorffově dimenzi.

Příklad 4.5. V předchozí kapitole jsme si připravili jednopixelovou křivku aproximující blesk. Na ní si teď ukážeme výsledky po výpočtu Hausdorffovy dimenze. Na obrázku 4.7 vidíme jednopixelovou křivku a proložení získaných bodů přímkou. Směrnice přímky, tedy i Hausdorffova dimenze křivky, vychází v tomto případě 1,45722.



(a) Jednopixelová křivka (b) Proložení dat přímkou

Obrázek 4.7. Výpočet Hausdorffovy dimenze

5. Hausdorffova dimenze blesku

Vtéto kapitole se konečně dostáváme k výpočtu Hausdorffovy dimenze blesku. Pomocí programu vypočítáme Hausdorffovu dimenzi několika obrázků blesků, které nejdříve vhodně upravíme. Výsledky výpočtu Hausdorffovy dimenze vidíme v tabulce 5.1. Hausdorffova dimenze se u různých blesků liší. Ve zkoumaných případech této kapitoly se pohybuje mezi 1,156 a 1,501.

Hausdorffova dimenze obrázků blesků							
1,501	1,333	1,271	1,270	1,156	1,373	1,204	1,235

Tabulka 5.1. Vypočítané hodnoty Hausdorffovy dimenze

Závěr

V tomto článku byla popsána teorie související s Hausdorffovou dimenzí. Následně byl vytvořen program na detekci blesku v obraze, aproximaci blesku jednopixelovou křivkou a následný výpočet Hausdorffovy dimenze. Tento program byl použit na výpočet Hausdorffovy dimenze blesků. Tato dimenze se u různých blesků liší podle míry zmenšení napětí mezi mraky nebo mezi mrakem a zemí. Rozdílné hodnoty Hausdorffovy dimenze jsou způsobené také tím, že blesk je trojrozměrný objekt, ale my detekujeme jeho tvar z průmětu do roviny.

Reference

[1] L. Čermák, R. Hlavička: *Numerické metody*, Akademické nakladatelství CERM, Brno, 2016.
[2] Z. Došlá: *Metrické prostory: teorie a příklady*, Masarykova univerzita, Brno, 2016.
[3] G. B. Folland: *Fourier analysis and its applications*, Pure and applied undergraduate texts **4**, American Mathematical Society, Providence, 1992.
[4] D. Martišek: *Matematické principy grafických systémů,*, Littera, Brno, 2002.
[5] I. Netuka: *Teorie míry a integrálu*, Studijní text MFF UK, 2010.
[6] J. Tomáš: *Měření Hausdorffovy dimenze reálných objektů*, Disertační práce, Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Brno, 2009.
[7] J. Vostal: *Numerické metody měření Hausdorffovy dimenze*, Bakalářská práce, Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Brno, 2015.

Alžběta Kočendová, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 61669 Brno, Česká republika,
e-mail: `226835@vutbr.cz`